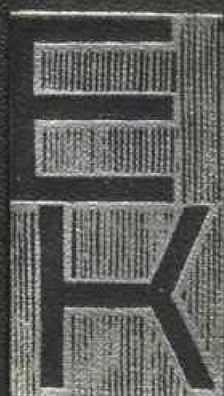


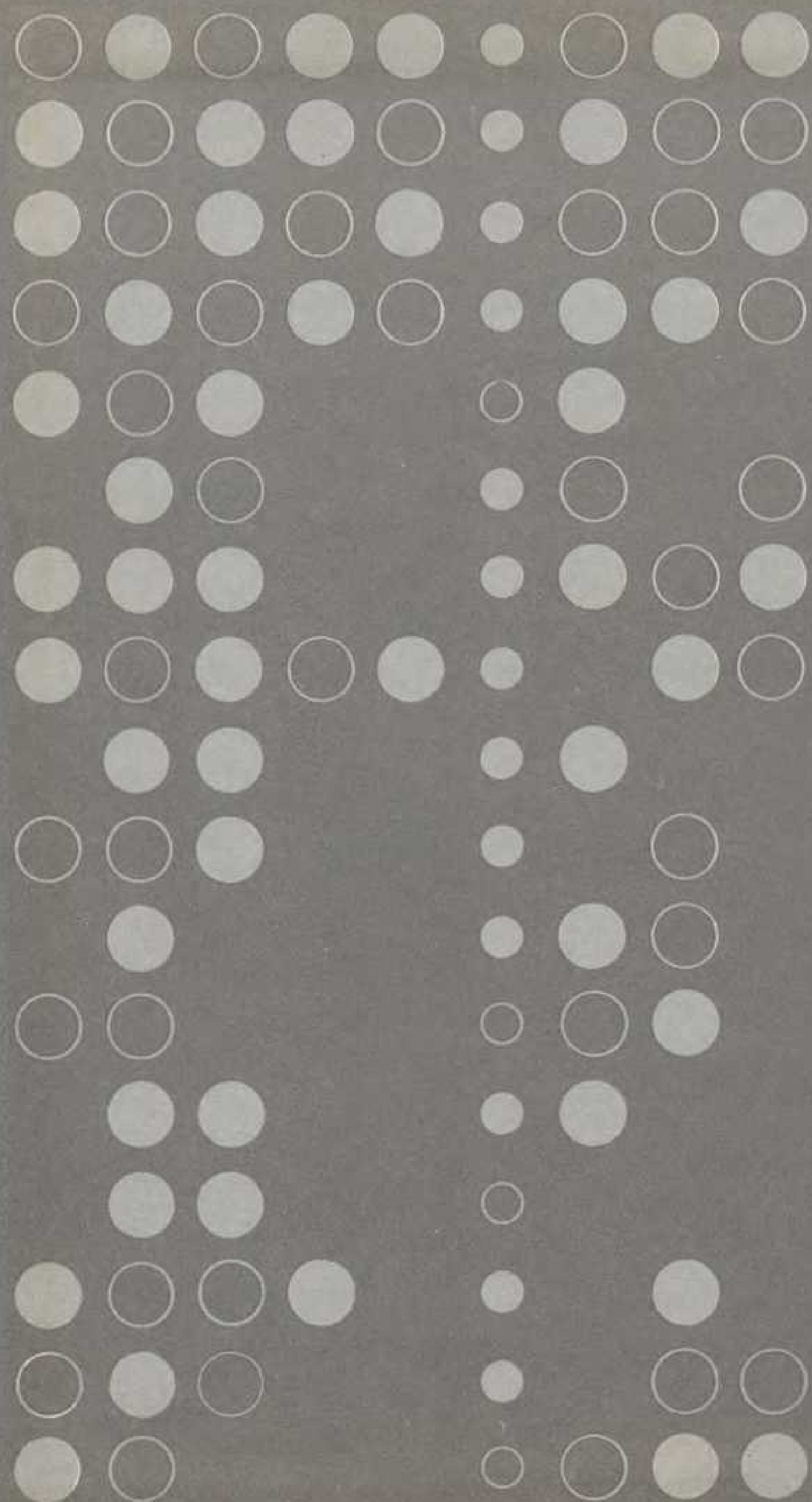
ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

А · Л

1

Е

К



ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНСЬКОЇ РАДЯНСЬКОЇ СОЦІАЛІСТИЧНОЇ РЕСПУБЛІКИ



ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

ТОМ ПЕРШИЙ

А — Л

ГОЛОВНА РЕДАКЦІЯ
УКРАЇНСЬКОЇ РАДЯНСЬКОЇ ЕНЦИКЛОПЕДІЇ
КИЇВ 1973

6П2.154.1(03)

Том підписано до друку 31 травня 1973 р.

КИЇВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА

$Е\frac{3—3—006}{М—222(04)73}$

Видання Енциклопедії кібернетики (ЕК) у двох томах здійснено відповідно до постанови Центрального Комітету Комуністичної партії України і Ради Міністрів Української РСР. Створення ЕК є результатом творчої співпраці Головної редакції Української Радянської Енциклопедії та ордена Леніна Інституту кібернетики Академії наук Української РСР.

Кібернетика — наука про загальні закономірності, принципи й методи керування в складних системах — перебуває нині на самому вістрі науково-технічного прогресу. Важко назвати галузь науки, техніки чи народного господарства, де б не застосовували її методів і засобів. Кібернетикою користуються інженери і математики, економісти і соціологи, лікарі й біологи, археологи, лінгвісти, педагоги та фахівці багатьох інших галузей. Більш як у 500 сферах життя застосовують нині електронні обчислювальні машини — ці універсальні перетворювачі інформації, що є основними знаряддями сучасного науковця чи інженера.

Роль кібернетики в народному господарстві нашої країни зростатиме й далі. В Резолюції XXIV з'їзду КПРС вказано на необхідність «... ширше застосовувати організаційну і електронно-обчислювальну техніку, автоматизовані системи і наукові методи управління та планування» (Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971, стор. 227).

Інтерес як до самої науки, так і до її застосувань зростає з кожним днем. Створення ЕК є першою спробою задовольнити все зростаючий попит на енциклопедичні видання з цієї галузі знань. Більшість статей енциклопедії за змістом і формою зрозуміла широким колам науковців та інженерно-технічних працівників, однак є в ній і статті, доступні лише фахівцям з окремих розділів кібернетики.

На сторінках енциклопедії читач познайомиться з проблемами й питаннями теоретичної кібернетики — її математичного апарату, теорії систем, теорії інформації, основ і методів програмування, побудови алгоритмічних мов, теорії автоматів.

У статтях з економічної кібернетики розглянуто питання про застосування методів і засобів кібернетики для вивчення економічних систем і управління ними — створення економіко-математичних моделей, розв'язування задач розподілу, транспортних задач, створення автоматизованих систем управління підприємствами, галузями народного господарства, розробка і застосування методів наукової організації праці, методів наукового прогнозування і т. ін.

Велике місце в енциклопедії посідають статті з технічної кібернетики, які охоплюють питання автоматичного керування складними технічними системами і комплексами, автоматизації наукового експерименту, створення оптимальних систем керування технологічними процесами, оптимізації взаємодії людини і машин у складних системах керування, розробки методів і пристроїв керування.

В статтях з обчислювальної техніки подано відомості про принципи побудови та конструкцію технічних засобів кібернетики — електронних обчислювальних машин і моделюючих пристроїв. В енциклопедії описано майже всі вітчизняні й найважливіші зарубіжні обчислювальні машини.

У циклі статей з біологічної кібернетики й біоніки розглянуто проблеми, пов'язані з процесами керування біологічними системами — створення моделей мозку, моделей органів людини і регулюючих систем організму для лікування і профілактики

захворювань, створення і застосування засобів кібернетичної техніки для автоматизації встановлення діагнозу, вироблення оптимальних засобів лікування, перенесення досконалостей живої природи в технічні пристрої і засоби.

Велику групу статей присвячено питанням прикладної й обчислювальної математики, в них викладено найуживаніші методи обчислювання й розв'язування окремих класів математичних задач і дано рекомендації з оптимізації обчислювань.

Окремі цикли статей охоплюють філософські й соціологічні питання кібернетики, питання застосування її методів і засобів для автоматизації інформаційної роботи, лінгвістичних досліджень, програмованого навчання і т. ін.

Усього в двох томах ЕК вміщено близько 1800 статей, до значної більшості яких додано бібліографію. Статті енциклопедії ілюстровано середтекстовими схемами, кресленнями, малюнками і кольоровими вклейками, що унаочнюють висвітлення найважливіших питань чи сфер застосування кібернетики.

ЕК розраховано на широкі кола фахівців з найрізноманітніших галузей науки, техніки й народного господарства, вона покликана стати також універсальним довідником для студентів і аспірантів фізико-математичних, технічних, економічних і медичних профілів. Енциклопедія має дати відповідь на найважливіші питання всім, хто тією чи іншою мірою займався проблемами і питаннями обробки інформації і керування чи управління, і тим, хто цим тільки-но зацікавився.

У створенні ЕК взяли участь (як автори, рецензенти і консультанти) понад 600 вчених та інших спеціалістів різних галузей народного господарства із 102 організацій, установ і підприємств Москви, Ленінграда, Новосибірська і союзних республік СРСР.

Головна редакція Української Радянської Енциклопедії і редакційна колегія ЕК складають щиру подяку Вченій раді та всьому колективу Інституту кібернетики АН УРСР, а також усім організаціям і особам, які брали участь у підготовці цього видання.

Редакційна колегія щиро вдячна акад. АН СРСР А. І. Бергу, А. О. Дородніцину, Г. М. Марчуку, А. М. Тихонову; чл.-кор. АН СРСР А. П. Єршову, Ю. Л. Єршову, О. М. Льотову, Б. С. Сотскову, С. В. Яблонському; акад. АН Узб. РСР В. К. Кабулову, акад. АН Киргиз. РСР Ю. Є. Неболюбову, акад. АН Латв. РСР Е. О. Якубайтісу; чл.-кор. АН Ест. РСР Б. Г. Тамму та чл.-кор. АН Груз. РСР В. В. Чавчанідзе за науково-методичну допомогу, яку вони подали при підготовці Енциклопедії кібернетики.

Зауваження і побажання просимо надсилати на адресу: 252650, Київ-30, «ГСП», вул. Леніна, 51, Головній редакції Української Радянської Енциклопедії АН УРСР.

В Енциклопедії кібернетики статті розміщено за алфавітом. Назви статей подано переважно в однині («АЛГОРИТМ», а не «Алгоритми», «ПІДАВТОМАТ», а не «Підавтомати»); у множині — лише тоді, коли є необхідність висвітлити в одній статті узагальнений термін, прийнятий у науці («ІГРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ»), або коли стаття вміщує в собі кілька понять («АВТОМАТИ НЕСКІНЧЕННІ», «КАНАЛИ ЗВ'ЯЗКУ», «МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ»). Назви статей про російські періодичні видання подано російською мовою. Розміщено ці статті за українським алфавітом. Назви статей про іноземні й міжнародні організації та промислові об'єднання (федерації, корпорації, фірми тощо) подано в українській транскрипції.

Якщо назви статей складаються з іменника й прикметника, то на перше місце здебільшого поставлено іменник (напр., «СЛОВНИК АВТОМАТИЧНИЙ», а не «Автоматичний словник»). Прикметник ставиться на перше місце лише тоді, коли він разом з іменником становить єдине усталене поняття («ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД ПРОГРАМУВАННЯ») або коли на прикметник падає логічний наголос, що підкреслює специфічний зміст статті («КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗПІЗНАВАННЯ», «ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ»).

У назвах деяких статей, що складаються з кількох слів, звичайний порядок слів змінено для того, щоб на початку стояли слова, головні за значенням («АНОТУВАННЯ АВТОМАТИЧНЕ», а не «Автоматичне анотування»). В статтях про методи або пристрої, названі за прізвищем людини, яка запропонувала цей метод чи пристрій, на першому місці стоїть прізвище цієї людини («ТЬЮРІНГА МАШИНА», «ПОСТА КОМБІНАТОРНА ПРОБЛЕМА»).

Назви статей набрано напівжирним шрифтом, великими літерами. Якщо назвою статті є науковий термін, що має один або кілька синонімів, то їх подано після назви статті розбивкою й відокремлено від основного терміна комою (напр., МАШИННИЙ ПЕРЕКЛАД, автоматичний переклад).

Як правило, в статтях, де згадано прізвище вченого, в дужках зазначено дати його народження і смерті. Усі дати подано за новим стилем.

Якщо назва статті потребує певного уточнення, то слово чи групу слів, які уточнюють цю назву, набрано після назви врозбивку (напр., «АДРЕСА у програмуванні»).

Щоб допомогти читачеві повніше ознайомитися з питанням, що його цікавить, а також запобігти зайвому повторенню матеріалу в споріднених статтях, в Енциклопедії застосовано систему посилань. Назву статті, на яку робиться посилання, набрано курсивом. В Енциклопедії вміщено ряд коротких статей-посилань, серед яких є: розширені посилання (з визначенням терміна), напр., ІНСТРУМЕНТАЛЬНА ПОХИБКА, приладова похибка,— похибка, що виникає внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, розв'язувальних елементів або складових частин обчислювальних машин (див. *Похибка розв'язувального елемента*, *Похибок обчислювань теорія*); зворотні посилання, спричинені зміною в основній статті порядку слів, прийнятого в Енциклопедії (напр., ІМОВІРНОСТЕЙ РОЗПОДІЛ — див. *Розподіл імовірностей*); синонімічні посилання з термінів, що широко застосовуються в спец. літературі (напр., ЗОВНІШНЄ ОБЛАДНАННЯ — те саме, що й *зовнішні пристрої*, ІМОВІРНІСНИЙ ПРОЦЕС — те саме,

що й *випадковий процес*); посилання з термінів на статті, в яких розкрито зміст цих термінів (напр., ІЄРАРХІЧНІСТЬ КЕРУВАННЯ — див. *Ієрархічні системи керування*). Систему посилань подано згідно з граф-схемами, складеними відповідно до кожного тематичного розділу Енциклопедії.

Знак наголосу у набраних чорним шрифтом термінах поставлено над наголошеними голосними в усіх словах (крім односкладових), які входять до назви статті. У складних словах позначено лише головний наголос (напр., БАГАТОПО́ЛЮСНИК КОНТА́КТНИЙ). У словах, які вживаються з подвійним наголошенням, поставлено два наголоси.

Умовні позначення і скорочення застосовано, щоб заощадити місце. Окрім загальноприйнятих скорочень, вжито й скорочення, встановлені для Енциклопедії кібернетики (див. «Основні скорочення й умовні позначення», с. 9—10). Коли слова, що становлять назву статті, повторюються в її тексті, їх позначено початковими літерами. Наприклад: у статті «АВТОМАТ» — А., в статті «КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ» — К. т. в. п. Найменування величин і одиниць величин та їхні позначення, застосовані в Енциклопедії кібернетики, відповідають Міжнародній системі одиниць, запровадженій в СРСР з 1963 року.

Підтекстову бібліографію, як правило, наведено мовою видання. Середтекстову бібліографію зазначено українською мовою — незалежно від мови оригіналу. В дужках указано місце й рік видання. Періодичні російські й українські видання в тексті подано лише мовою оригіналу. Назви періодичних видань іншими мовами в тексті статті подано мовою оригіналу, а в дужках дано український переклад назви. Праці В. І. Леніна подано за українським перекладом з 4-го російського видання Творів та за українським перекладом Повного зібрання творів (5-го видання). Праці К. Маркса і Ф. Енгельса наведено за українським перекладом з 2-го російського видання Творів.

Важливим доповненням до статей служать ілюстрації: кольорові вклейки, текстові малюнки, графіки тощо. Кольорові вклейки подано до найважливіших статей. Текстові ілюстрації, як правило, вміщено поряд зі статтею. Якщо з технічних причин ілюстративний матеріал не вміщено поряд із статтею, то в кінці статті дано посилання на ту сторінку, де міститься відповідний ілюстративний матеріал (наприклад: «Іл. на с. 36» або «Іл. між с. 24—25»). Коли посилання дано на ілюстрації, які вміщено в інших статтях або в іншому томі, то зазначається лише назва статті, без номера тому і номера сторінки (напр.: «Іл. див. до ст. Дешифратор»).

Малюнки до ряду статей подано переважно на таблицях з відповідними підтекстовками. Коли підпису під малюнком не подано, то це означає, що сам текст статті є поясненням до цього малюнка.

ОСНОВНІ СКОРОЧЕННЯ Й УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Å	ангстрем (з числом)
а	ампер (з числом)
абс.	абсолютний
абс. од.	абсолютна одиниця
авіац.	авіаційний
автомат.	автоматичний
АІМ	амплітудно-імпульсна модуляція
акад.	академік
алгебр.	алгебричний
АМ	амплітудна модуляція
амер.	американський
англ.	англійський
АН СРСР	Академія наук СРСР
АН УРСР	Академія наук УРСР
АОМ	аналогова обчислювальна машина
АП	арифметичний пристрій
АПЧ	автоматичне підстроювання частоти
араб.	арабський
а·сек	ампер-секунда (з числом)
асинхр.	асинхронний
АСУ	автоматизована система управління
АСУП	автоматизована система управління підприємством
біол.	біологічний
бл.	близько (з числом)
буд.	будівельний
в	вольт (з числом)
в т. ч.	в тому числі
ва	вольт-ампер (з числом)
в·сек	вольт-секунда (з числом)
верх.	верхній
вип.	випуск
виробн.	виробництво
вис.	висота
військ.	військовий
внутр.	внутрішній
вт	ват (з числом)
вт·год	ват-година (з числом)
вт·сек	ват-секунда (з числом)
г	грам маси або ваги (з числом)
гс, або Г	грам сили (з числом)
гс	гаус (з числом)
г-во	господарство
геом.	геометричний
ГЕС	гідроелектростанція
гн	генрі (з числом)
год	година
гол. чин.	головним чином
госп.	господарський
°С	градус стоградусної шкали Цельсія (з числом)
°К	градус абсолютної шкали Кельвіна (з числом)
грец.	грецький
гц	герц (з числом)
ДЗП	довгочасний запам'ятовувальний пристрій
держ.	державний
див.	дивись
дж	джоуль (з числом)
дм	дециметр (з числом)
дм^2	квадратний дециметр (з числом)
довж.	довжина
д-р	доктор
е	ерстед (з числом)
ев	електрон-вольт (з числом)
екон.	економічний
екстрем.	екстремальний
електр.	електричний
енерг.	енергетичний
ЕОМ	електронна обчислювальна машина
ерг	ерг (з числом)
ерс	електрорушійна сила
exp	експонента
ЕЦОМ	електронна цифрова обчислювальна машина
європ.	європейський
заг.	загальний
залізнич.	залізничний
зовн.	зовнішній
ЗЗП	зовнішній запам'ятовувальний пристрій
ЗП	запам'ятовувальний пристрій
зх.	західний
іл. див. с.	ілюстрацію дивись на сторінці
ім.	імені
інж.	інженер (з прізвищем)
ін-т	інститут
інтегр.	інтегральний
ІПС	інформаційно-пошукова система
к	кулон (з числом)
канд.	кандидат
капіталістич.	капіталістичний
кв.	квадратний
кв	кіловольт (з числом)
ква	кіловольт-ампер (з числом)
квт	кіловат (з числом)
квт · год	кіловат-година (з числом)
кг	кілограм маси або ваги (з числом)
кгс, або *кГ*	кілограм-сила (з числом)
кгс·м, або *кГм*	кілограмометр (з числом)
кдж	кілоджоуль (з числом)
кгц	кілогерц (з числом)
кев	кілоелектрон-вольт (з числом)
кін.	кінець (при числі: «кін. 19 — поч. 20 ст.»)
кіберн.	кібернетичний
ккал	кілокалорія (з числом)
ккд	коефіцієнт корисної дії
км	кілометр (з числом)
км^2	квадратний кілометр (з числом)
км^3	кубічний кілометр (з числом)
км/сек	кілометрів на секунду (з числом)
км/год	кілометрів на годину (з числом)
коеф.	коефіцієнт
КОМ	керуюча обчислювальна машина
коорд.	координати
КП	керуючий пристрій
к-т	комітет
л	літр (з числом)
лат.	латинський
літ.	література, літературний
лк	люкс (з числом)
лм	люмен (з числом)
логарифм.	логарифмічний
логіч.	логічний
м.	місто (з назвою)
м	метр (з числом)
м^2	квадратний метр (з числом)
м^3	кубічний метр (з числом)
м/сек	метрів на секунду (з числом)
м/год	метрів на годину (з числом)
ма	міліампер (з числом)
магн.	магнітний
макс.	максимальний
матем.	математичний (з терміном)
маш.	машинний
маш.-буд.	машинобудівний
мв	мілівольт (з числом)
мвт	міліват (з числом)
мг	міліграм (з числом)
Мгц	мегагерц (з числом)
Мев	мегаелектрон-вольт, мільйон електрон-вольтів (з числом)
мед.	медичний
метод.	методичний
мех.	механічний
міжнар.	міжнародний
мікроскоп.	мікроскопічний
мінім.	мінімальний
мка	мікроампер (з числом)
мкв	мікровольт (з числом)
мквт	мікроват (з числом)
мкм	мікрометр, те, що й мікрон (з числом)
мкс	максвел (з числом)
мксек	мікросекунда (з числом)
мкф	мікрофарада (з числом)
млн.	мільйон
млрд.	мільярд
мм	міліметр

мм рт. ст.	міліметр ртутного стовпа (з числом)
$мм^2$	квадратний міліметр
$мм^3$	кубічний міліметр
мн-к	многокутник
навч.	навчальний
наз.	називається
н.	народився (переважно з датою)
напр.	наприклад
нар. г-во	народне господарство
нар.-госп.	народногосподарський
наук.	науковий
нац.	національний
н.-д.	науково-дослідний
нижн.	нижній
нім.	німецький
норм.	нормальний
нсек	наносекунда (10^{-9} *сек*, з числом)
об.	оберт
оброб.	обробний
об/сек	обертів за секунду (з числом)
об/хв	обертів за хвилину (з числом)
обчисл.	обчислювальний
ОЗП	оперативний запам'ятовувальний пристрій
ОМ	обчислювальна машина
ом	ом (з числом)
оптим.	оптимальний
орг-ція	організація (колектив)
ОС	обчислювальна система
ОТ	обчислювальна техніка
ОЦ	обчислювальний центр
осн.	основний
п.	пункт (у сполученні, напр., «п. 5»)
пед.	педагогічний
пит. в.	питома вага (з числом)
пл.	площа (з числом)
політех.	політехнічний
пол.	половина (у сполученні, напр., «1-а пол. 19 ст.»)
поч.	початок, початковий
прибл.	приблизно
пром.	промисловий
пром-сть	промисловість
проф	професор (із прізвищем)
психолог.	психологічний
пф	пікофарада (з числом)
р.	рік (з числом)
рад.	радянський
ред.	редактор, редакційний
респ.	республіканський
р-н	район
розд.	розділ (з числом)
рос.	російський
рр.	роки (з числом)
с.	сторінка (з числом)
САК	система автоматичного керування
САР	система автоматичного регулювання
с.-г.	сільськогосподарський
сек	секунда (з числом)
серед.	середній
синхр.	синхронний
СКБ	спеціальне конструкторське бюро
см	сантиметр (з числом)
$см^2$	квадратний сантиметр (з числом)
$см^3$	кубічний сантиметр (з числом)
СП	стандартна програма
спец.	спеціальний
ст.	стаття
ст.	століття (з числом)
сучас.	сучасний
т	тонна маси або ваги (з числом)
тс, Т	тонна-сила (з числом)
т. з.	так званий
т. ч.	таким чином
$t°$, т-ра	температура
та ін.	та інші
табл.	таблиця
ТАР	теорія автоматичного регулювання
тех.	технічний
технологіч.	технологічний
тис.	тисяч, тисячоліття (з числом)
укр.	український
ун-т	університет
ф	фарада (з числом)
фіз.	фізичний (з терміном)
фізіол.	фізіологічний (з терміном)
фіз.-мат.	фізико-математичний
фіз.-хім.	фізико-хімічний
філолог.	філологічний
ф-ла	формула
фонет.	фонетичний
франц.	французький
ф-ція	функція
хв	хвилина (з числом)
хім.	хімічний (з терміном)
центр.	центральний
ЦОМ	цифрова обчислювальна машина
ЧМ	частотна модуляція
чл.-кор.	член-кореспондент
шир.	ширина
шт.	штук (з числом)
япон.	японський



АБСТРА́КТНА ТЕО́РІЯ АВТОМА́ТІВ — напрям в *автоматів теорії*, який характеризується тим, що, вивчаючи автомати, абстрагуються від їхніх структурних особливостей. За такого підходу внутр. стани автомата, його вхідні й вихідні сигнали розглядають як певні абстрактні символи, що утворюють відповідно алфавіти: Q (внутр.), X (вхідний) і Y (вихідний). X і Y вважають за скінченні алфавіти, Q — в загальному випадку нескінченний. *Автомат детермінований* визначають як п'ятірку $\mathfrak{M} = \langle Q, X, Y, \Psi, \Phi \rangle$, де ф-ція переходів Ψ відображує $Q \times X$ в Q, а ф-ція виходів Φ — $Q \times X$ в Y. *Автомат недетермінований* визначають аналогічно, але з тією лише різницею, що Ψ і Φ можуть бути багатозначними ф-ціями. Якщо ж визначають *автомат імовірнісний*, то під Ψ і Φ слід розуміти матриці перехідних і вихідних імовірностей, тобто функції, що відображують $Q \times X \times Q$ і $Q \times X \times Y$ у числовий проміжок (0,1) і мають відповідно смисл: $\Psi(q_i, x_j, q_s)$ — імовірність того, що вхідний символ x_j переводить стан q_i в стан q_s, а $\Phi(q_i, x_j, y_r)$ — імовірність того, що при вхідному символі x_j і внутр. стані q_i буде вироблено вихідний символ y_r.

Наведені поняття дуже загальні й неконструктивні в разі, коли Q — нескінченний. Вужчі класи можна виділити, наклавши різні обмеження на компоненти Q, X, Y, Ψ і Φ. Оскільки ці обмеження не формулюють у структурних термінах, то вони стосуються гол. чин. потужності алфавітів (напр., якщо Q скінченний, то й автомат наз. скінченним) або заг. властивостей ф-цій Ψ і Φ. У разі виродження, коли той чи ін. алфавіт складається з одного символа, зручніше розглядати модифіковані визначення, що їх одержують, видаливши вироджені компоненти. Напр., детермінований автомат без виходу — це трійка $\langle Q, X, \Psi \rangle$, де Q, X і Ψ мають попередній смисл; імовірнісний *автомат автономний* — це пара $\langle Q, \Psi \rangle$, де Ψ — матриця перехідних імовірностей для станів з Q (тобто такий автомат є ланцюгом Маркова).

В А. т. а. вивчають переважно такі концепції поведінки (див. *Поведінка автоматів*), у яких словами, що їх перетворюють або приймають автомати, є слова, зображені алфавітом X (вхідні слова), а результатами перетворення чи породження є слова, зображені алфавітом Y (вихідні слова). Здебільшого це — реалізація операторів в автоматі й представлення множин слів за реальний час. Через надмірну загальність і неконструктивність вживаних понять автомата, навіть у разі детермінованих автоматів, реалізовувані ними оператори (представлювані множини) можуть виявитися неефективними. В А. т. а. осн. конструктивними об'єктами, що їх вивчають, є *автомати скінченні* та реалізовувані ними оператори й представлювані ними множини (скінченно-автоматні оператори й множини). В А. т. а. широко застосовують методи й поняття алгебри, *логіки математичної* та *алгоритмів теорії*. Центр. проблемами А. т. а. є проблеми синтезу й аналізу та пов'язана з ними теорія *експериментів з автоматами*. Ці проблеми виникли з практичних завдань конструювання та експлуатації *обчислювальної техніки* й набули великого теоретичного розвитку.

Аналіз і синтез автоматів в А. т. а. Проблема синтезу полягає в пошуку й побудові автомата, виходячи від вимог, що їх ставлять до реалізовуваного ним оператора чи до представлюваної ним множини, причому в А. т. а. гол. чин. мають на увазі реалізацію чи представлення за реальний час. Здебільшого припускають, що ці вимоги викладено досить чіткою й формалізованою мовою (т. з. мова замовника), напр. у вигляді формули $\mathfrak{A}$ цієї мови. Крім того, вважають, що шуканий автомат належить до наперед окресленого класу автоматів, які допускають конструктивне описування. Формальну мову, що її засобами здійснюють це описування (мова виконавця), також вважають заданою. Коли йдеться про скінченні автомати, описування автомата, звичайно, полягає в представленні його системи команд через графічне або табличне задання ф-цій Ψ і Φ (матриць перехідних і вихідних імовірностей, якщо автомат імовірнісний). Побудований внаслідок абстрактного синтезу автомат можна використати надалі як первісний матеріал на етапі *синтезу автомата структурного*. В межах заг. проблеми абстрактного синтезу виникають окремі вужчі проблеми: 1) І с н у в а н н я. Чи існує оператор, який задовольняє умову, виражену ф-лою $\mathfrak{A}$, і який можна реалізувати (множина представна) в автоматі обумовленого типу? 2) Є д и н і с т ь. Чи єдиний цей оператор? 3) К о н с т р у к ц і я. Для якого-небудь оператора, що задовольняє умову $\mathfrak{A}$, побудувати автомат, який його реалізує, й зазначити відповідне наладжування: початковий стан і заключні стани, а в разі ймовірнісного автомата — допустимий рівень надійності. 4) М і н і м і з а ц і я. Побудований автомат $\mathfrak{M}$ звести за допомогою еквівалентних перетворень до еквівалентного йому автомата, який задовольняє певні критерії оптимальності. Напр., якщо автомати скінченні,— мінімізувати кількість станів склеюванням нерозрізнених станів і усуненням недосяжних станів.

Розв'язування зазначених проблем уявляють у вигляді алгоритмів, які за заданою формулою $\mathfrak{A}$ подають відповіді на запитання

1)—2) й здійснюють потрібні конструкції та перетворювання для проблем 3) — 4). Відповідна теорія істотно залежить від мов, що їх застосовує замовник; як мову виконавця здебільшого розглядають різні класи автоматних діаграм. Вибираючи мову замовника, природно керуватися такими двома (антагоністичними) вимогами: 1) щоб мова була виразною, щоб замовникові було зручно викласти нею умови, поставлені до поведінки проектованого автомата, і 2) щоб алгоритми, які розв'язують проблему синтезу загалом і окремі її задачі, були прості (аналогія: в теорії програмування — виразність вхідної мови й простота *транслятора*). Цю ситуацію докладно досліджено щодо скінченних автоматів. З погляду простоти алгоритмів переваги надають алгебр. мовам (див. *Регулярні події та вирази*). Виразнішими є мови, основані на застосуванні фрагментів логіки предикатів (див. *Мова логічна для задавання автоматів*), але й алгоритми синтезу для них стають громіздкішими.

Проблема аналізу є оберненою проблемі синтезу: за заданим автоматом потрібно описати його поведінку засобами мови замовника. В певному розумінні аналіз і синтез можна розглядати як переклади з однієї мови на іншу, причому переклад, який відповідає аналізові, здебільшого простіший. Розроблено багато алгоритмів синтезу й аналізу гол. чин. для скінченних детермінованих автоматів. Як складова частина алгоритму синтезу детермінованого автомата до нього часто входить побудова недетермінованого автомата з наступним перетворенням його на еквівалентний йому детермінований автомат. Розроблення алгоритмів абстрактного синтезу з застосуванням логіч. мов виявилося пов'язаним з деякими алгоритм. проблемами матем. логіки й сприяло розв'язанню їх.

Експерименти й синтез. Нехай є детермінований *автомат ініціальний* $\langle \mathfrak{M}, q_0 \rangle$, не відомий експериментаторові або (за деяких ін. постановок) відома лише якась верхня оцінка для кількості станів автомата $\mathfrak{M}$. Припускають, що з цим *«чорним ящиком»* можна експериментувати в тому розумінні, що можна подавати вхідні слова й спостерігати відповідні вихідні слова. Завдання полягає в тому, щоб організувати експеримент, який дав би змогу здобути корисну інформацію про поведінку «чорного ящика», тобто про оператор $T(\mathfrak{M}, q_0)$, який цей «ящик» реалізує за реальний час; у кращому випадку — побудувати автомат, еквівалентний $\langle \mathfrak{M}, q_0 \rangle$, або принаймні встановити які-небудь характерні властивості оператора $T(\mathfrak{M}, q_0)$. Це завдання пов'язане й з проблемою абстрактного синтезу в такій ситуації, що часто буває в інженерній практиці (див. *Мова анкетна для задавання автоматів*). Замовник задумав цілком певний оператор, який має реалізувати проектований автомат, проте він не може описати цей оператор мовою виконавця. В такому разі виконавець намагається відповідним опитуванням замовника (що виступає тут у ролі «чорного ящика») розгадати задуманий ним оператор. Осн. результати належать до експериментів із скінченними автоматами. Останнім часом деяких успіхів досягнуто й у теорії класів нескінченних автоматів.

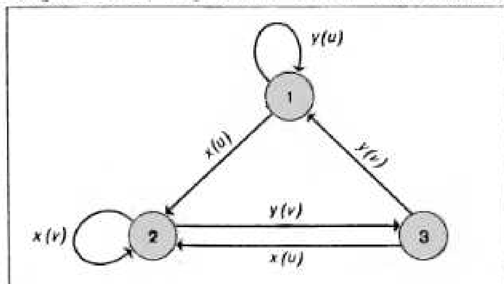
Для скінченних автоматів $\langle \mathfrak{M}, q_0 \rangle$ є алгоритм експериментування, який за наявності верх. оцінки для кількості станів автомата $\mathfrak{M}$ повністю встановлює (розшифровує) його поведінку, тобто будує автомат, еквівалентний «чорному ящикові». Якщо ж експериментатор не має такої верх. оцінки, то алгоритм розшифровування неможливий; проте й у цій ситуації розроблено процедури (їх називають частковими алгоритмами розшифровування), які для переважної більшості «чорних ящиків» (якщо розумно визначити «більшість») усе ж встановлюють поведінку. В теорії експериментів встановлено й досить точні оцінки складності алгоритмів розшифровування (напр., оцінку довжини вхідних слів, для яких потрібно вести спостереження). Якщо алгоритми розшифровування частотні, вони істотно залежать від того, з якою частотою гарантується правильне розшифровування. Ці результати грунтуються на докладних оцінках параметрів і спектрів поведінки.

Ігри автоматів. В А. т. а. вивчають і *автоматів ігри*. На відміну від класичної *ігор теорії*, в якій гравці наперед знають наслідки тих чи ін. дій (своїх і супротивникових), тут запропоновано дослідити ситуацію, коли учасники гри — автомати — не мають такої апріорної інформації. Виявилося, що можна побудувати такі скінченні автомати, які успішно діють і в цій ситуації. Результати такого роду успішно інтерпретуються в термінах доцільної поведінки одного індивідуума чи колективу.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Бюхи Д. Р. О разрешающем методе для ограниченной арифметики второго порядка. В кн.: Кибернетический сборник, в. 8. М., 1964; Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [бібліогр. с. 306—316]; Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [бібліогр. с. 389—395].

Б. А. Трахтенброт.

АБСТРАКТНОГО АВТОМАТА ГРАФ — *граф* напрямлений, вершинам якого відповідають



Граф переходів автомата.

стани автомата, а дугам — вхідні сигнали. Якщо вхідний сигнал x_i викликає перехід автомата зі стану a_j в стан a_k, то на гра-

фі автомата цьому сигналові відповідає позначена буквою x_i дуга, що з'єднує вершину a_j з вершиною a_k. Такий граф задає ф-цію переходів автомата. Щоб задати ф-цію виходів, дуги цього графа позначають ще й відповідними вихідними сигналами (мал.). Задавання автомата за допомогою графа є особливо наочним при незначній кількості його станів.

С. С. Гороховський.

АБСТРА́КЦІЯ АКТУА́ЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕ́ННОСТІ — одна з основних абстракцій математики й логіки. Полягає в абстрагуванні від незавершеності (й незавершимості) процесу побудови нескінченної множини. А. а. н. дає змогу розглядати нескінченні множини, напр., нескінченні числові множини натуральних, цілих, дійсних і т. д. чисел, як побудовані (існуючі) об'єкти, незалежно від процесу утворення всіх їхніх елементів. При цьому може існувати спосіб побудови довільного елемента такої множини, але напевно не існує способу побудови нескінченної множини як даної відразу всіма своїми елементами. Перетворюючи нескінченні множини на допустимі, існуючі об'єкти (існуючим вважають будь-який об'єкт, визначення якого не приводить до логічних суперечностей), А. а. н. відкриває цим шлях до такого вивчення їх, у якому використовують засоби логіки (зокрема, *виключеного третього закон*), відпрацьовані на скінченних множинах. А. а. н. становить ідейну основу *множин теорії* й математики, що грунтується на ній, т. з. класичної математики і класичної логіки. Проте цю абстракцію відкидають прихильники *інтуїціонізму* й представники *конструктивного напряму в математиці* й логіці. Для конструктивістів неприйнятним є неконструктивний характер об'єктів, що їх вводять за допомогою А. а. н., і вони розвивають таку побудову математики й логіки, яка не використовує А. а. н.

Літ.: Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. В кн.: Новые идеи в математике, сб. № 6. СПБ, 1914; Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Л.— М., 1934; Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., 1967 [бібліогр. с. 160—162].

Б. В. Бирюков, Ю. О. Петров.

АБСТРА́КЦІЯ ПОТЕНЦІА́ЛЬНОЇ ЗДІЙСНЕ́ННОСТІ — одна з абстракцій математики й логіки, що полягає в абстрагуванні від реальних меж конструктивних можливостей, зумовлених обмеженістю нашого життя в просторі, в часі та в матеріалах. А. п. з. дає змогу розглядати об'єкти, не враховуючи можливості реалізації їх (напр., не враховуючи засобів, потрібних для цього, місця, часу тощо), а беручи до уваги лише можливість побудування їх у тому розумінні, що є ефективний (конструктивний) спосіб (*алгоритм*) для такого побудування. В межах А. п. з., напр., послідовність натуральних чисел є потенціально здійсненним об'єктом, бо неважко задати індуктивне визначення, яке породжує будь-яке натуральне число. Але множина всіх натуральних чисел не є потенціально здійсненним об'єктом, бо її не можна побудувати в межах А. п. з.: неможливий ефективний спосіб побудування всіх разом натуральних чисел. А. п. з. лежить в основі понять потенціальної нескінченності такого дискретного процесу, що коли з потенціальної здійсненності якогось кроку процесу побудування об'єкта випливає потенціальна здійсненність наступного (безпосередньо) кроку, то потенціально здійсненним є будь-який крок процесу (отже, відоме правило повної матем. індукції передбачає А. п. з.). Конструктивна математика та конструктивна матем. логіка, відкидаючи *абстракцію актуальної нескінченності*, визнають А. п. з. Хоч А. п. з.— природна передумова багатьох розділів теор. кібернетики, в теор. кібернетиці будують і теорії, що в тій чи іншій формі обмежують цю абстракцію, бо в дійсних кіберн. системах неможливі потенціально нескінченні процеси.

Літ.: Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; Козмидиади В. А. О множествах, разрешимых и перечислимых автоматами. В кн.: Проблемы логики. М., 1963; Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., 1967 [бібліогр. с. 160—162].

Б. В. Бирюков, Ю. О. Петров.

АВТОКО́Д — *мова програмування*, орієнтована на конкретну обчислювальну машину. З усіх ін. машинно-орієнтованих мов А. за формою й за змістом найближчий до мови машинних команд, тобто до мови, яку безпосередньо інтерпретує машина. А. дає змогу використовувати при програмуванні всі можливості *мови машинної*. Але при цьому треба знати *операції машинні*, формати й функції машинних команд, формати даних, способи адресації *пам'яті ЦОМ* та ін. особливості архітектури машини. А. дає зручні засоби для записування машинних команд і даних та засоби для описування допоміжних ф-цій, корисних при готуванні та документуванні програм. *Програма*, написана А., є осмисленішою для програміста, ніж програма, написана машинною мовою. Трансляцію програм з А. на машинну мову здійснює *асемблер*. Незважаючи на те, що А. є якоюсь мірою специфічним для кожної машини (в ньому враховано її особливості), заг. структура мови зберігається в усіх А. Основу мови становить набір мнемонічних символів, призначених для задавання всіх машинних операцій та операцій, виконуваних асемблером. Крім того, ця мова допускає конструкції, що дають можливість у командах посилатися на операнди, використовуючи при цьому *мітки*, які є в машинних командах і командах асемблера.

Зручність А. значною мірою залежить від набору допоміжних ф-цій, які властиві асемблерові і задаються командами його. Команди дають змогу визначати дані в допустимих представленнях, резервувати ділянки пам'яті, визначати мітки як значення виразів, указувати вхідні й зовн. мітки програми для сегментації та незалежної трансляції програм, керувати присвоєнням адрес і задавати правила документування програми. Щоб написати програму автокодом, здебільшого викори-

стовують бланк, у якому залишають поля для мітки, операції, операндів, коментаря і поле ідентифікації рядка. На кожному рядку бланка має бути записано А. одне речення. Розширення А. можна досягти, використавши макрокоманди, які позначають групу дій, що їх задає користувач у макровизначеннях. А. становлять основу *математичного забезпечення ЦОМ* і, як правило, їх використовують, щоб створити *операційні системи* і *транслятори* та прикладні програми, що ставлять особливі вимоги до ефективного використання можливостей машин.

Ю. М. Бяковський.

АВТОКОЛИВА́ННЯ — стійкі незагасаючі коливання, що виникають у нелінійних динамічних системах внаслідок інерційних і нелінійних властивостей системи, і коли немає зовнішніх періодичних впливів. А. характерні тим, що їхня амплітуда не залежить від зміни в певних межах початкових умов системи. Системи, в яких відбуваються А., наз. а в т о к о л и в а л ь н и м и.

Нелінійну динамічну систему описують диференціальним або різницевим рівнянням

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{X}(t)] \quad (1)$$

або

$$\mathbf{X}_{n+1} = \Phi(\mathbf{X}_n), \quad (2)$$

де $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \; x_2(t), \; \ldots, \; x_m(t))$; $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(t_n) = [x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n}]$ — вектори фазових координат, що однозначно визначають динамічні стани неперервної та відповідно дискретної систем. У режимі А. має місце співвідношення $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t+T)$ або $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{n+N}$, де T і N — відповідно періоди А. неперервної і дискретної систем.

У фіз. системі А. можливі лише тоді, коли надходження енергії від її джерела за період дорівнює втраті (розсіянню) енергії за той самий час. Ця умова балансу енергії є умовою існування А.

У нелінійній системі з нестійким положенням рівноваги А. виникають самовільно слідом за ввімкненням системи. В системах із стійким у певній області положенням рівноваги для збудження А. потрібне певне початкове відхилення фазових координат від їхніх значень у положенні рівноваги.

Автоколивальні системи дуже поширені в радіотехніці (для побудови генераторів коливань), в автомат. регулюванні (для створення вібраційних регуляторів), у цифровій обчисл. техніці (в схемах *мультивібраторів*), у технічній кібернетиці (для побудови автоколивальних екстремальних систем керування й самоналаджуваних систем) тощо. Для багатьох систем автомат. регулювання А. є шкідливими й недопустимими; щоб усунути їх, у систему вводять різні коректувальні ланки, які змінюють динамічні й статичні властивості системи.

Літ.: Х а р к е в и ч А. А. Автоколебания. М., 1954 [бібліогр. с. 169—170]; А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э. Теория колебаний. М., 1959 [бібліогр. с. 905—912]. *В. М. Кунцевич.*

АВТОКОРЕЛЯЦІЙНА ФУ́НКЦІЯ — функція, що характеризує ступінь зв'язку між двома значеннями випадкового процесу $x(t)$ у моменти часу t_1 і t_2.

Для комплексного випадкового процесу $x(t)$ А. ф. визначають так:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)]\,\overline{[x(t_2) - m_x(t_2)]}\}$$

(риска вгорі означає комплексно-спряжену ф-цію). Для дійсного *випадкового процесу*

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\}, \quad (1)$$

де M — знак матем. сподівання, $m_x(t)$ — матем. сподівання процесу $x(t)$.

А. ф. можна виразити через двовимірний диференціальний закон розподілу (двовимірну сумісну щільність імовірності) $p[x(t_1), x(t_2)]$ випадкових величин $x(t_1)$ й $x(t_2)$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\, p[x(t_1), x(t_2)]\, dx(t_1)\, dx(t_2).$$

З А. ф. можна робити висновки про вплив одного значення випадкової ф-ції $x(t_1)$ на друге $x(t_2)$ і характеризувати мінливість випадкової ф-ції.

В заг. випадку А. ф. залежить від значень двох аргументів t_1 і t_2. Для стаціонарних у широкому розумінні процесів А. ф. залежить лише від різниці цих аргументів $\tau = t_2 - t_1$, тобто $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$.

Якщо $x(t)$ — нормальна випадкова ф-ція t, то для її повного опису досить знати матем. сподівання $m_x(t)$ й кореляційну ф-цію $R_{xx}(t_1, t_2)$.

Під час практичних досліджень часто використовують нормовані А. ф.

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{R_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)\, R_{xx}(t_2, t_2)}}.$$

А. ф. має ряд важливих властивостей: 1) Якщо $t_1 = t_2 = t$, вона дорівнює *дисперсії* випадкової ф-ції $x(t)$ й характеризує її середню потужність $D_{xx}(t) = R_{xx}(t, t)$; 2) Для комплексної випадкової функції $x(t)$ $R_{xx}(t_1, t_2) = \overline{R_{xx}(t_2, t_1)}$, а для стаціонарного випадку $R_{xx}(\tau) = \overline{R_{xx}(-\tau)}$. Якщо $x(t)$ — дійсна ф-ція, то останні вирази можна переписати відповідно

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2, t_1); \; R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau);$$

3) А. ф. є спадною ф-цією

$$|R_{xx}(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)\, R_{xx}(t_2, t_2)},$$

а для стаціонарного випадку

$$R_{xx}(0) = D_{xx} \geqslant R_{xx}(\tau);$$

4) Для широкого класу випадкових процесів

$$\lim_{(t_2-t_1)\to\infty} |R_{xx}(t_1, t_2)| \to 0.$$

Для ергодичного випадкового процесу А. ф. можна обчислювати за однією реалізацією (див. *Ергодична теорія*); при цьому

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t) - m_x][x(t-\tau) - m_x]\, dt.$$

Для скінченної тривалості реалізації $x(t)$ можна одержати лише оцінку А. ф., обчислювану як

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x(t) - m_x][x(t-\tau) - m_x]\, dt,$$

де T_p — тривалість реалізації. Завдяки розвиткові цифрових та імпульсних систем почали широко використовувати т. з. дискретні А. ф. дискретного випадкового процесу $x(nT)$. Тут T — інтервал дискретності, а $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — дискретний час. Дискретні А. ф. подібно (1) визначаються як

$$R_{xx}(i_1T, i_2T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x(i_1T) - m_x(i_1T)][x(i_2T) - m_x(i_2T)]\, p[x(i_1T), x(i_2T)]\, dx(i_1T)\, dx(i_2T)$$

і мають властивості, аналогічні властивостям неперервних А. ф. Див. також *Випадкових процесів теорія*, *Кореляційна теорія випадкових процесів*. *Б. Ю. Мандровський-Соколов.*

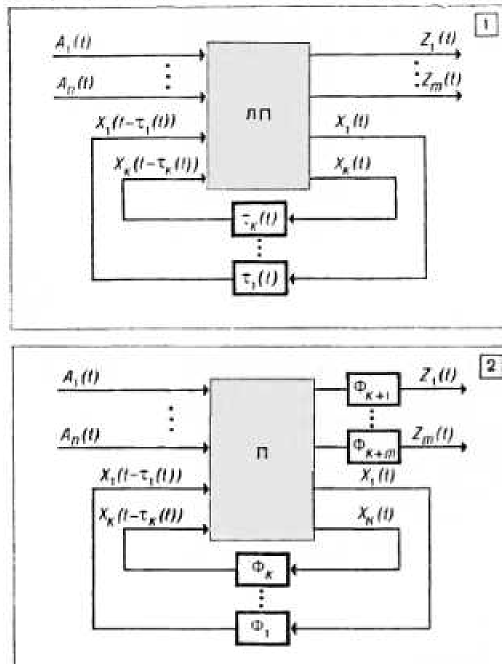
АВТОМА́Т (від грец. αὐτόματος — самодіючий) — 1) пристрій, що виконує якийсь процес без безпосередньої участі людини. Появу А. відносять до глибокої давнини. Це були в основному годинники та різні мех. іграшки, яким надавали форми людини чи тварин. З 2-ї пол. 18 ст. А. почали широко застосовувати в пром-сті. Донедавна А. будували, щоб заміняти ними людину при виконанні фіз. праці. В 40—50-х рр. 20 ст. виникли А., що виконують деякі види розумової праці. Це різні автомат. обчисл. машини та ін. кібернетичні пристрої. Застосування А. значно підвищує продуктивність праці, швидкість і точність виконання операцій. А. застосовують ще й для того, щоб звільнити людину від стомливої, одноманітної праці, уберегти її від умов, небезпечних для життя чи шкідливих для здоров'я; використовують їх і там, де присутність людини неможлива (висока т-ра, тиск, прискорення тощо). Тепер А. широко застосовують в усіх галузях нар. г-ва, вони є основою тех. прогресу (див. *Кібернетика технічна*, *Цифрова обчислювальна машина*).

2) Матем. поняття, *модель математична* реальних (технічних) А. Абстрактно А. можна представити як певний пристрій («чорний ящик»), що має скінченну кількість вхідних і вихідних каналів і певну множину внутр. станів. На вхідні канали А. ззовні надходять сигнали, й залежно від їхнього значення та від того, в якому стані перебував А., він переходить у наступний стан і видає сигнали на свої вихідні канали. З часом вхідні сигнали змінюються, відповідно змінюються й стани А. та його вихідні сигнали. Отже, А. функціонує в часі (див. *Автоматичного керування теорія*, *Автоматів теорія*). У вузькому розумінні термін А. вживають для позначення т. з. синхронних дискретних А. Такі А. мають скінченні множини значень вхідних і вихідних сигналів, що їх наз. в х і д н и м і в и х і д н и м алфавітами. Час поділено на проміжки однакової тривалості (такти); протягом усього такту вхідний сигнал, стан і вихідний сигнал не змінюються. Зміни відбуваються лише на межах тактів. Отже, час можна вважати за дискретний $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Такий А. формально описують п'ятіркою $A = \langle X, Y, Q, \delta, \lambda\rangle$, де X і Y — відповідно вхідний і вихідний алфавіти, Q — множина станів δ: $X \times Q \to Q$ — ф-ція переходів і λ: $X \times Q \to Y$ — ф-ція виходів. За кожний такт часу А. перебуває в одному з станів, і на його вхід надходить певна буква алфавіту X. Якщо в такт t_0 на вхід А. надходить буква $x_0 \in X$ і А. перебуває в стані $q \in Q$, то значення виходу в цьому самому такті дорівнює $\lambda(x_0, q)$, і в наступному такті А. перебуватиме в стані $\delta(x_0, q)$. За n тактів роботи А. перетворить послідовність вхідних букв довжини n на послідовність вихідних букв тієї самої довжини, тобто А. визначить певне відображення множини послідовностей вхідних букв на множину послідовностей вихідних букв. Див. також *Алгебрична теорія автоматів*. *М. І. Кратко.*

АВТОМА́Т АВТОНО́МНИЙ — автомат, функціонування якого не залежить від поданих на його вхід букв. У цьому розумінні кажуть, що А. а. є автоматом без входів. Формально А. а.— це четвірка $\langle Q, Y, \Phi, \Psi\rangle$ й функціонування його визначається рекурентними співвідношеннями: $q(t+1) = \Psi[q(t)]$, $y(t) = \Phi[q(t)]$. Нескінченним А. а. є *Тьюрінга машина*, коли множину всіх її конфігурацій розглядати як множину станів даного автомата. Якщо А. а. є *автоматом скінченним*, то його вихідна послідовність — періодична, причому період не перевищує числа станів. Див. *Поведінка автоматів*. *М. І. Кратко.*

АВТОМА́Т АСИНХРО́ННИЙ — математична модель пристрою для переробки послідовності вхідних дискретних сигналів $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ на послідовності вихідних дискретних сигналів $Z_1(t), \ldots, Z_m(t)$. При цьому вважають, що чергова зміна значень вхідних сигналів відбувається лише тоді, коли в А. а. закінчиться перехідний процес, викликаний попередньою зміною цих сигналів. Схему А. а. можна побудувати лише на безінерційних *логічних елементах ЦОМ*. Але для зменшення кількості логічних елементів до схеми його здебільшого додають затримки—елементи, кожен з яких здійснює зсування сигналу, що

подається на його вхід. Найпоширенішу схему А. а. показано на мал. 1. У цій схемі $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ — вхідні, $X_1(t), \ldots, X_k(t)$ — проміжні, $Z_1(t), \ldots, Z_m(t)$ — вихідні сигнали. Всі v безінерційних логічних елементів зібрано в логічному перетворювачі (ЛП). Затримки $\tau_1(t), \ldots, \tau_k(t)$ винесено окремо. У заг. випадку величина кожної затримки є випадковою ф-цією часу з обмеженням: $t_{max} > \tau_i(t) > 0$, де $i = 1, \ldots, k$; t_{max} — задана



1. Схема асинхронного автомата без затримки на виході.
2. Схема асинхронного автомата з затримкою на виході.

гранична величина. Іноді в А. а. вважають, що $\tau_i(t) = \text{const}$. Оскільки практично безінерційних логічних елементів немає, то найпоширенішою є схема, наведена на мал. 2. У цій схемі перетворювач П являє собою v реальних логічних елементів, кожен з яких виконує певне логічне перетворювання і зсуває на $\tau_j(t)$ сигнал, одержаний внаслідок цього перетворення. У заг. випадку величина розглядуваного зсуву є випадковою ф-цією часу з обмеженням: $\tau_{max} > \tau_j(t) \geqslant 0$, де τ_{max} — задана гранична величина. Щоб цю схему (мал. 2) можна було описати тією самою системою логічних рівнянь, що й попередню (мал. 1), до неї вводять $k + m$ фільтрів. Фільтром Φ_i, де $i = 1, \ldots, k + m$, наз. елемент, що пропускає зі зсуванням на $\tau_i(t)$ зміну сигналу на його вході тільки в тому разі, коли наступна його зміна відбудеться пізніше, ніж через $\tau_i(t)$. Величину виконуваного фільтром зсуву (затримки) вважають випадковою ф-цією, на яку накладено обмеження: $t_{max} > \tau_i > (t)_{min}$, де t_{min} — максимально можливий час перехідного процесу в перетворювачі П, що виникає після зміни одного або кількох (одночасно) вхідних сигналів. А. а., в якому $k = 0$ (тобто немає жодного контура зворотного зв'язку), наз. **комбінаційним**, або примітивним. При $k > 0$ А. а. наз. **послідовнісним**. Практичне значення має тільки скінченний А. а., в якому параметри n, k, m, v і кількість станів кожного елемента — скінченні. Скінченний А. а. задається множиною вхідних $R = \{\rho_1, \ldots, \rho_{2^n}\}$, стійких внутрішніх $K = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s\}$ та вихідних $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^m}\}$ станів і ф-ціями переходів та виходів, що дають однозначне відображення множини пар станів ρ, $\varkappa$ у множину пар станів $\varkappa$, λ. Скінченний А. а. є матем. моделлю, що визначає осн. характеристики електронних обчисл. та інформаційних машин, релейних пристроїв і дискретних (логічних) автоматів. Важливою проблемою, пов'язаною з синтезом скінченного А. а., є *кодування станів автомата*. Ця проблема викликана тим, що в схемах, як на мал. 1 і 2, затримки можуть мати різні значення. Звідси випливає, що в скінченному А. а. можуть виникати змагання між його колами, а це призводить до виникнення помилок під час переходу з одного стійкого стану в інший. Усувають ці помилки правильним кодуванням внутр. станів. Див. також *Асинхронних автоматів теорія*.

Літ.: Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964 [бібліогр. с. 252—257]; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез управляющих автоматов. М., 1970 [бібліогр. с. 392—398]; Якубайтис Э. А. Синтез асинхронных конечных автоматов. Рига, 1970; Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Пер. с англ. М., 1962; Perrin J. P., Denouette M., Daclin E. Systèmes logiques, t. 1—2. Paris, 1967.

Е. О. Якубайтіс.

АВТОМА́Т БЕЗ ПА́М'ЯТІ — *автомат скінченний*, що має один внутрішній стан. Оскільки в процесі функціонування стан такого автомата не може змінюватися, то вихідний символ τ залежить лише від вхідного символу в даному такті й не залежить від попередніх символів. Оператор, що його реалізує такий автомат, здійснює побуквене переведення вхідних символів у вихідні. Такі оператори називаються істиннісними. Вони по суті є функціями багатозначної логіки.

М. І. Кратко.

АВТОМА́Т ВІ́ЛЬНИЙ. Автомат можна розглядати як унарну універсальну алгебру $A = \langle Q, f_1, \ldots, f_k \rangle$ (див. *Автоматів способи задавання*). *Автомат* наз. **вільним**, якщо алгебра A — вільна. Напр., хай дано дві неперетинні множини Ω і $\mathfrak{X}$. Утворимо множину слів Λ таких, що перша її буква — елемент множини Ω, а решта (якщо вони є) — елементи множини $\mathfrak{X}$. Утворимо тепер з одержаної множини слів Λ автомат $\mathfrak{A}(\Omega, \mathfrak{X})$ таким чином. Кожне слово з Λ назвемо станом автомата $\mathfrak{A}(\Omega, \mathfrak{X})$, а кожний елемент $x \in \mathfrak{X}$ — входом

автомата $\mathfrak{A}(\Omega, \mathfrak{X})$ і, за визначенням, вважатимемо, що стан $q \in \Lambda$ під дією входу x переходить у стан qx, де qx — слово з Λ, одержане шляхом приписування справа до слова q букви x. Одержаний автомат буде А. в. (з множиною вільнотвірних станів Ω і вільнотвірних входів $\mathfrak{X}$). Справджується твердження: будь-який інший автомат (з множиною твірних станів Ω і твірних входів $\mathfrak{X}$) є гомоморфним образом А. в. *М. І. Кратко.*

АВТОМА́Т ДЕТЕРМІНО́ВАНИЙ — автомат, функція переходу якого є всюди означеною (однозначною) функцією $\Psi: Q \times X \to Q$, де Q — мн-на станів і X — мн-на вхідних букв (вхідний алфавіт).

АВТОМА́Т ДЕФІНІ́ТНИЙ — *автомат скінченний*, для якого існує таке число t, що кожне вхідне слово довжини t переводить автомат з будь-якого стану в той самий стан, який залежить від цього вхідного слова. А. д. набули різного застосування, зокрема, при розробці теорії кодування. Схеми цих автоматів можна будувати з елементів затримки й функцій алгебри логіки без петель зворотного зв'язку.

АВТОМА́Т З МАГАЗИ́ННОЮ ПА́М'ЯТТЮ — див. *Автомат магазинний.*

АВТОМА́Т ЗВЕ́ДЕНИЙ — автомат, у якому ототожнено всі еквівалентні між собою стани. Див. *Алгебрична теорія автоматів.*

АВТОМА́Т ЗВ'Я́ЗНИЙ — автомат, що має такий стан, який за допомогою подання підходящого вхідного слова можна перевести в будь-який інший стан. Ініціальний автомат називають зв'язним, якщо зазначений вище стан є його початковим станом.

А. М. Чеботарьов.

АВТОМА́Т ІМОВІ́РНІСНИЙ — дискретний стаціонарний потактний перетворювач інформації з пам'яттю, функціонування якого в кожному такті залежить лише від стану пам'яті в ньому й можна описати статистично. Властивості А. і. як вхідного-вихідного перетворювача вивчають на такій моделі. Нехай X, Y і Q — скінченні або лічбові множини вхідних і вихідних букв і станів А. і. відповідно. Тоді на декартовому добутку мн-н $Q \times Y$ визначено умовний імовірнісний розподіл $\mu(a', y|a, x)$, заданий на кожному елементі декартового добутку мн-н $Q \times X$. А. і. позначають як $\langle X, Y, Q, \mu(a', y|a, x)\rangle$. Функціонування А. і. полягає в тому, що в дискретні моменти часу на вхід пристрою подається послідовність букв вхідного алфавіту X. За умови, що А. і. перебуває в стані $a \in Q$ і на вхід подано букву $x \in X$, *автомат* переходить у наступний стан $a' \in Q$ і видає букву $y \in Y$ з імовірністю $\mu(a', y|a, x)$. В першому такті зафіксовано початковий стан А. і. або початковий розподіл $\mu(a)$ ймовірностей станів. Для теорії А. і. істотним є те, як саме позначається закон функціонування, визначений вище для А. і. як однотактного перетворювача інформації, на законі його функціонування «загалом» як багатотактного пристрою, що переробляє послідовності вхідних букв на послідовності вихідних з тією самою кількістю букв. Властивості А. і. як ідентифікатора подій вивчають на моделі А. і., вихід якого не розглядають. Тоді на мн-ні станів Q визначається умовний розподіл імовірностей $\mu(a'|a, x)$, заданий на кожному елементі декартового добутку множин $Q \times X$. Нехай $F \subset Q$ — підмножина Q і $\mu(a)$ — розподіл імовірностей початкових станів. А. і. наз. об'єкт $\langle X, Q, F, \mu(a'|a, x), \mu(a)\rangle$. Функціонування такого А. і. визначається майже аналогічно, з тією лише різницею, що умовний імовірнісний розподіл визначає переходи тільки для його станів. А. і. наз. с к і н ч е н н и м, якщо мн-ни X, Y і Q скінченні. Нехай n — к-сть станів А. і. Тоді розглядають А. і. і як систему $(n \times n)$-матриць з невід'ємними елементами виду $M(y|x)$, $x \in X$, $y \in Y$, де елементи матриць визначено як $m_{ij}(y|x) = \mu(a_j, y|a_i, x)$, або як систему стохастичних $(n \times n)$-матриць $A(x)$, $x \in X$, де їхні елементи визначено як $a_{ij}(x) = \mu(a_j|a_i, x)$. Зручно розглядати й розподіл імовірностей $\mu(a)$ у векторній формі. Тоді формально функціонування А. і. можна описати матрицею перетворення $M(q|p)$. Позначимо слово, що подається на вхід А. і., $p = x_1 \ldots x_s$. Нехай $\mu(e)$—вектор, складений з імовірностей початкових станів А. і. Тоді вектор імовірностей скінченних станів А. і. має вигляд $\mu(p) = \mu(e) A(p)$, де $A(p)$ — відповідна матриця.

Одне з осн. завдань теорії А. і.— описати клас подій, що представляються в скінченних А. і. Нехай $\chi_A(p) = \overline{\mu}(e) A(p) \overline{n}_F$, де координати вектора-стовпця $\overline{n}_F$ дорівнюють одиниці для номерів, відповідних станам з F, і нулеві — для решти номерів. Нехай F_x — мн-на всіх слів, зображених алфавітом X. Кажуть, що подію $S \in F_x$ представлено в А. і. початковим вектором станів $\overline{\mu}(e)$, мн-ною відзначених станів F і точкою перетину λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, якщо будь-яке слово p з F_x тоді й тільки тоді належить S, коли виконано умову $\chi_A(p) > \lambda$. Клас представних подій є континуальною мн-ною. Він характеризується тим, що визначає в просторі L числових послідовностей α_n, $n = 1, 2 \ldots$, сума яких сходиться абсолютно до одиниці, деяку лінійну еквівалентність $\equiv_T$ так, що фактор-простір $L/\equiv_T$ виявляється скінченновимірним. Є приклади нерегулярних представних подій і приклади непредставних подій, які, проте, є примітивно-рекурсивними мн-нами. Щоб урахувати реальні можливості статистич. експерименту з розпізнавання належності даного слова представній події, доводиться запроваджувати поняття ізольованої точки перерізу λ відносно автомата A як числа, що задовольняє умову (p) $(p \in F_X \to |\chi_A(p) - \lambda| > \delta)$, де $\delta > 0$. Скінченний А. і. з ізольованою точкою перетину представляє лише регулярні події. Проте можна навести й приклади регулярних подій, що їх

представляють скінченні А. і. з меншою кількістю станів, ніж детерміновані.

Проблема стійкості А. і. полягає в характеристиці класу А. і., які при досить малих збуреннях перехідних імовірностей $\mu (a'|a, x)$ і фіксованій точці перетину представляють одну й ту саму подію. Клас скінченних А. і., усі перехідні ймовірності яких більші за нуль, є стійким відносно ізольованої точки перетину.

А. і. як вхідний—вихідний перетворювач визначає багатотактні *канали зв'язку* умовою $\tau^{M}_{\bar{\mu}(e)} (q|p) = \bar{\mu} (e) \ M (q|p) \ \bar{e}$, де вектор-стовпець $\bar{e}$ складається лише з одиниць. Істотна властивість цих каналів зв'язку полягає в тому, що відношення виду $\frac{\tau(q_1 \ q_2|p_1 \ p_2)}{\tau \ (q_1|p_1)}$, якщо вони визначені, мають бути умовними ймовірнісними розподілами. Стани a й b одного чи різних А. і. еквівалентні, якщо $\tau_a^M (q|p) = \tau_b^N (q|p)$, $p \in F_x$, $q \in F_y$. Для розпізнавання еквівалентності пари станів одного А. і. досить простого діагн. експерименту довжини $(n - 1)$, а для різних А. і.— довжини $(n + m - 1)$, де n і m — к-сті станів відповідних автоматів. Два А. і. є еквівалентними, якщо для кожного стану одного з них знайдеться еквівалентний йому стан другого. Нехай А. і. A з n станами має пару еквівалентних станів a_1 і a_2. Система матриць $B (y|x)$, одержана з системи матриць $A (y|x)$ викреслюванням рядка й стовпця a_1 і заміною стовпця a_2 на суму стовпців a_1 і a_2, визначає А. і. з $(n - 1)$ станом, еквівалентний первісному. На відміну від теорії детермінованих автоматів мн-на мінім. А. і., еквівалентних даному, загалом кажучи,— континуальна.

А. і. A гомоморфний А. і. B, якщо існує така прямокутна матриця повного рангу H, що $A (y|x) \ H = HB (y|x)$, $x \in X$, $y \in Y$ і $Z_A H = Z_B$, де Z_A і Z_B — допустимі множини векторів станів відповідних автоматів. З гомоморфізму A і B випливає, що це — еквівалентні автомати, а з їхньої еквівалентності випливає й існування псевдо-ймовірнісного автомата C, якому вони гомоморфні, тобто автомата, що його формально визначають як імовірнісний, але його перехідні ймовірності можуть набувати й від'ємних значень. Варто відзначити, що А. і. A еквівалентний детермінованому автоматові B, на вході якого встановлено генератор випадкових кодів, керований послідовністю вхідних букв A. Структурну теорію А. і. розвинуто поки що недостатньо

Методи теорії А. і. спираються на властивості стохастичних матриць, матриць з невід'ємними елементами та визначуваних цими матрицями лінійних перетворень. Істотне значення мають і чисто автоматні методи, оскільки формально А. і.— це лінійний перетворювач розподілів імовірностей на мн-ні Q, тобто лінійний автомат з нескінченною к-стю станів $\mu (p)$, $p \in F (x)$.

Вивчення А. і. має важливе значення для розробки методів аналізу дискретних пристроїв, що проявляють статистично закономірну випадкову поведінку, для з'ясування функціональних можливостей таких пристроїв та обгрунтування меж доцільності використання їх, а також для розв'язування завдань синтезу пристроїв, які задовольняють дану систему вимог, зокрема для розвитку теорії конструювання спеціалізованих електронних обчисл. машин, що розв'язують завдання методами статистич. моделювання й випадкового пошуку.

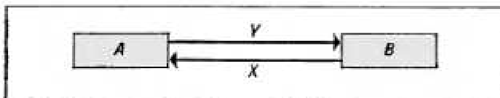
Літ.: Бухараев Р. Г. Вероятностные автоматы. Казань, 1970; Поспелов Д. А. Вероятностные автоматы. М., 1970 [бібліогр. с. 84—87]; Рабин М. О. Вероятностные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник, № 9. М., 1964; Starke P. H. Theorie stochastischer Automaten. «Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik», 1965, Bd. 1, H. 1—2; Карлайл И. В. Приведенные формы для стохастических последовательных машин. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966.

Р. Г. Бухараєв.

АВТОМАТ ІНІЦІАЛЬНИЙ — автомат, у якому один із станів виділено як початковий стан. Саме з цього стану А. і. завжди й починає роботу. Див. *Поведінка автоматів*.

АВТОМАТ КЕРУЮЧИЙ — поняття, пов'язане з розглядом композиції двох автоматів, один з яких (напр., автомат A) наз. **керуючим**, а другий (автомат B) — **операційним**. А. к. A являє собою ініціальний *Мура автомат* або *Мілі автомат* із заключним станом. Визначають композицію автоматів A та B так, як подано на мал. Вихідні сигнали $y \in Y$ А. к. A є вхідними сигналами операційного автомата B, і навпаки, вихідні сигнали $x \in X$ операційного автомата є вхідними сигналами А. к. Кожен сигнал y задає певне відображення множини $\mathfrak{B}$ станів операційного автомата у цю саму множину. Ці відображення наз. **мікрооператорами**. Структура вхідного сигналу А. к., як правило, задається у вигляді скінченного набору значень логічних умов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, визначених на множині $\mathfrak{B}$. До розгляду описаної схеми взаємодії двох автоматів зводиться ряд задач прикладної *алгоритмів теорії*, таких, як проектування структур обчисл. машин, чимало задач теорії програмування тощо. У зв'язку з цим значний інтерес становить вивчення різних форм еквівалентності А. к. Див. також *Автомат регістровий*.

А. М. Чеботарьов.



Композиція керуючого і операційного автоматів.

АВТОМАТ ЛІНІЙНИЙ — один із спеціальних видів автоматів. Його вхідні значення $x (t)$, внутр. стани $a (t)$ й вихідні значення $y (t)$ є векторами над якимось скінченним полем P (розмірів l, n і m відповідно), а ф-ції переходів і виходів визначено так:

$$a (t + 1) = R \cdot a (t) + S \cdot x (t);$$
$$y (t) = U \cdot a (t) + V \cdot x (t),$$

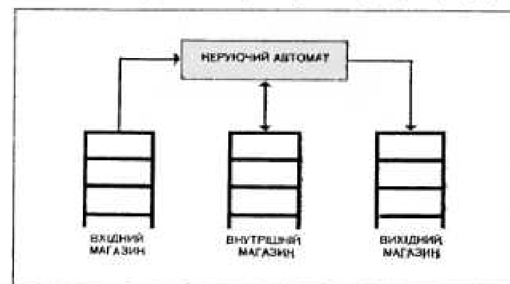
де $R = [r_{ij}]_{n \times n}$; $S = [s_{ij}]_{n \times l}$; $U = [u_{ij}]_{m \times n}$; $V = [v_{ij}]_{m \times l}$ — матриці над тим самим полем *P*. А. л. широко застосовують, проектуючи керуючі пристрої ЦОМ і створюючи *давачі випадкових чисел*, при використанні *кодів коректувальних* тощо. Ці автомати розглядають як проміжну ланку між *автоматами скінченними* й лінійними динамічними системами. *М. І. Кратко.*

АВТОМА́Т МАГАЗИ́ННИЙ — автомат спеціального виду (як правило, нескінченний), в основі якого лежить поняття *пам'яті магазинної*, або магазина. Магазин зручно представляти у вигляді нескінченної в один бік стрічки, що складається з комірок, пронумерованих числами 1, 2, 3 ...; стрічку розміщено вертикально так, що перша комірка найвища. У кожний момент часу в магазині записане якесь слово. Першу його букву записано в першій комірці, другу — в другій і т. д. Решта комірок магазина «пусті», тобто заповнені спец. «пустими» символами. Магазин працює в двох режимах — читання і записування. Під час читання сприймається тільки верхня буква слова, записаного в магазині. Ця буква стирається, а та частина слова, що залишилася, піднімається на одну комірку вгору. Якщо записують у магазин слово h довжини m, то слово, записане там, зсувається на m комірок униз, а в звільнені комірки записуються символи слова h. Таким чином, читання слова з магазина відбувається в оберненому порядку порівняно з порядком його запису.

Структуру А. м. наведено на мал. Цей автомат складається з скінченного керуючого автомата, в якому є три канали для роботи з магазинами — вхідним, вихідним і внутрішнім. При цьому вхідний магазин працює завжди тільки в режимі читання, вихідний — у режимі записування, а внутрішній — у режимі читання й записування. Множину A станів керуючого автомата поділено на дві неперетинні підмножини A_1 і A_2. Якщо стан керуючого автомата належить першій підмножині A_1, то відбувається зчитування з вхідного і внутр. магазинів, а якщо він належить другій підмножині A_2, то відбувається зчитування тільки з внутрішнього магазина. У цей самий момент автомат переходить у новий стан і записує у внутрішній та вихідний магазини деякі слова.

Нехай X, Y та Z — алфавіти вхідного, вихідного і внутр. магазинів, що не містять «пустої» букви. Тоді А. м. задають двома ф-ціями δ_1: $A_1 \times X \times Z \to A \times F(Z) \times F(Y)$ та δ_2: $A_2 \times Z \to A \times F(X) \times F(Y)$. Значення цих ф-цій $\delta_1(a, x, z)$ та $\delta_2(a, z)$ вказують на новий стан і слова, які записуються у внутр. і вихідний магазини. Дії автомата при пустому вхідному або внутр. магазині неозначені. Ф-ції δ_1 і δ_2 можуть бути частковими і багатозначними (тобто задавати не відображення, а відношення між елементами відповідних множин). У цьому випадку А. м. наз. недетермінованим. У недетермінованому А. м. множини A_1 та A_2 можуть перетинатися.

Розрізняють розпізнавальні А. м., або акцептори (вихідний алфавіт пустий), породжувальні А. м. (вхідний алфавіт пустий), і магазинні перетворювачі, або трансдьюсери (заг. випадок). Щоб визначити спосіб функціонування А. м., розглянемо поняття конфігурації й відношення переходу на множині конфігурацій. Конфігурацією наз. четвірку (p, a, w, q), де $p \in F(X)$, $a \in A$, $w \in F(Z)$, $q \in F(Y)$. Конфігурація (p, a, wz, q) безпосередньо переходить у конфігурацію (p', a', ww', qq'), якщо $p = p'x$ і $(a', w', q') \in \delta_1(a, x, z)$ або $(a', w', q') \in \delta_2(a, z)$. Конфігурація k переходить у конфігурацію k', якщо існує послідовність $k = k_1, k_2, ..., k_m = k'$ конфігурацій, у якій кожна попередня безпосередньо переходить у наступну. Конфігурацію наз. заключною, якщо вона має вигляд (e, a^*, e, q), де $a^* \in A^*$ (e — пусте слово).



Структура магазинного автомата.

Для розпізнавальних автоматів у визначенні конфігурації слід відкинути четверту компоненту, а для породжувальних — першу. У множині A виділяють ще й початковий стан a_0 і множину заключних станів A^*, а в множині Z — початковий символ z_0. Розпізнавальний А. м. представляє (розпізнає) мову, що складається з усіх слів p, таких, що конфігурація (p, z_0, e) переходить в одну з заключних конфігурацій. Породжувальний автомат породжує мову, що складається з усіх слів q, таких, що конфігурація (a_0, z_0, e) переходить у заключну конфігурацію вигляду (a^*, e, q).

Клас мов розпізнаваних (породжуваних) недетермінованими А. м. збігається з класом контекстно-вільних мов, а клас відношень, представлених недетермінованими магазинними перетворювачами, збігається з класом відношень, породжуваних контекстно-вільними граматиками перекладу.

Літ.: Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 310—319]. *О. А. Летичевський.*

АВТОМА́Т МІКРОПРОГРА́МНИЙ — 1) в техніці — автомат, що реалізує мікропрограму функціонування дискретного пристрою; 2) матем. поняття — див. *Автомат регістровий*.

АВТОМА́Т МІНІМА́ЛЬНИЙ — автомат, який у класі всіх автоматів, що реалізують даний *оператор автоматний*, має найменшу можливу кількість станів. Див. *Мінімізація числа станів автомата*.

АВТОМА́Т НЕДЕТЕРМІНО́ВАНИЙ — автомат, який при даному вхідному символі і внутрішньому стані може переходити в кілька різних внутрішніх станів. Формально А. н.— це п'ятірка $\langle X, Y, Q, \Phi, \Psi \rangle$ така, що відображення $\Psi : X \times Q \to Q$ не є однозначним. За аналогією до теорії *автоматів детермінованих* можна запровадити поняття представлення (породжування) множин для А. н. Якщо два *автомати скінченні,* що представляють одну й ту саму множину, вважати за еквівалентні, то існує *алгоритм,* який дає змогу за кожним скінченним А. н. побудувати еквівалентний йому скінченний детермінований автомат. При цьому, звичайно, детермінований автомат має більшу кількість станів, ніж А. н. У загальному випадку для будь-яких автоматів таке твердження є неправильним. Напр., клас множин, породжуваних недетермінованими автоматами з магазинною пам'яттю, ширший за клас множин, породжуваних такими самими детермінованими автоматами.

Літ.: Л у п а н о в О. Б. Сравнение двух типов конечных источников. В кн.: Проблемы кибернетики, в. 9. М., 1963; Л ю б и ч Ю. И. Оценки числа состояний, возникающих при детерминизации недетерминированного автономного автомата. «Доклады АН СССР», 1964, т. 155, № 1. *М. І. Кратко.*

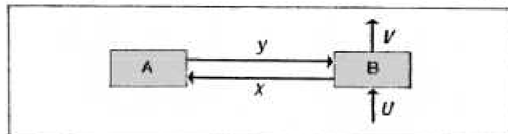
АВТОМА́Т ОПЕРАЦІ́ЙНИЙ — пристрій *цифрової обчислювальної машини,* в якому здійснюються перетворювання кодів чисел або слів. Складається з набору *регістрів* з комбінаційною логікою на входах запам'ятовувальних елементів регістрів. Вхідні сигнали А. о. ототожнюють з вихідними сигналами *автомата керуючого* — сигналами мікрооперацій. Ці сигнали визначають перетворення множини станів А. о. Вихідними сигналами А. о. є рядки значень логіч. умов, що характеризують стани його регістрів. У теорії зручно розглядати А. о. як нескінченний *Мура автомат* спец. виду (багаторегістровий автомат). *С. С. Гороховський.*

АВТОМА́Т ПУШ-ДА́УН — те саме, що й *автомат магазинний.*

АВТОМА́Т РЕГІ́СТРОВИЙ — спеціального виду автомат (як правило, нескінченний), що його запроваджено як математичну модель, близьку до структур сучасних *цифрових обчислювальних машин.* В основу визначення А. р. покладено поняття *регістра.* Регістром (точніше, p-позиційним регістром) наз. множину змінних (елементів регістра) з однією й тією самою p-елементною областю визначення P, пронумерованих послідовними цілими числами й упорядкованих відповідно до цієї нумерації.

В реальних машинах будь-який регістр складається зі скінченної кількості елементів. Проте в деяких ситуаціях зручніше вважати їх за нескінченні. Якщо для нумерації елементів регістра використано всі цілі раціональні числа (додатні й від'ємні), то регістр наз. д в о с т о р о н н і м. Якщо для нумерації використано всі числа інтервалу $(m, +\infty)$ або $(-\infty, m)$, то регістр наз. одностороннім нескінченним.

Станами регістра наз. різноманітні набори значень (станів) його елементів. Щоб задати перетворення множин станів регістрів, використовують *перетворення періодично-визначене.* Кожне таке перетворення задають p-значною ф-цією $f(z_1, \ldots, z_q)$ та базовим рівнянням $y_i = f(x_{i+i_1}, \ldots, x_{i+i_q})$, що визначають значення i-ї змінної регістра після виконання перетворень через значення x_j його змінних до виконання перетворення. Набір чисел $(i_1, \ldots, i_q)$ наз. б а з о ю п е р і о д у.



Абстрактна модель центрального процесора обчислювальної машини: A — керуючий автомат, B — операційний автомат.

Для нескінченного регістра в обидва боки базове рівняння однозначно визначає перетворення. Для регістра, нескінченного в один бік, або для скінченного регістра може бути крайовий ефект, коли частина або всі аргументи $x_{i+i_1}, \ldots, x_{i+i_q}$ при деяких i виходять за межі розглядуваного регістра. В цих випадках розглядуваний регістр доповнюють фіктивними елементами, які завжди мають постійні значення.

Інший тип перетворень множини станів регістра (він часто трапляється на практиці) дають періодично-визначені перетворення з допоміжними змінними. В цьому разі кожній основній змінній x_i ставлять у відповідність певну кількість $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}$ допоміжних змінних. Значення змінних після виконання перетворення задають у цьому разі за допомогою базових рівнянь: $y = f_0$; $x_i^{(1)} = f_1, x_i^{(n)} = f_n$, праві частини яких залежать від змінних $x_{i+i_1}, \ldots, x_{i+i_q}$ регістра й допоміжних змінних $x^{(k)}_{i+i_1^k}, \ldots, x^{(k)}_{i+i^k_{q_k}}$. При цьому треба, щоб рівняння були коректними, тобто щоб однозначно визначали результат виконання перетворення. Крім зазначених двох типів перетворень, застосовують ще т. з. скінченно-визначені перетворення, що змінюють стан лише скінченної кількості змінних регістра, і установні перетворення, що переводять регістр з будь-якого стану в якийсь фіксований для даного регістра стан.

Усі розглянуті перетворення легко застосувати й щодо кількох регістрів. У цьому разі можна визначити множину станів і ф-цію переходів А. р. B. Цей автомат складається з якогось скінченного набору регістрів $R_1, \ldots, R_n$, а станами його є набори станів регістрів. Кожному вхідному сигналові $y \in Y$ вхідного алфавіту Y автомата B відповідає якесь перетворення f_y множини B одного з

зазначених типів. Щоб задати ф-цію виходів А. р., розглядають поділ Γ множини його станів на класи, що попарно не перетинаються, і розглядають ф-цію виходів як ф-цію, що залежить лише від класу, якому належить стан автомата і вхідного сигналу. Поділ Γ вибирають здебільшого скінченним, а його класи одержують, застосовуючи булеві операції до т. з. допустимих множин. До цих множин відносять, насамперед, скінченно-визначені множини, тобто такі, що в них задані елементи якогось регістра (в скінченній кількості) набувають заданих значень. Загалом, допустимими є й множини, в яких заданий регістр містить певну скінченну конфігурацію значень змінних або в стані якого задана конфігурація періодично повторюється. Збудований так автомат наз. багаторегістровим конфігураційно-періодичним автоматом.

Застосовуючи зазначену концепцію нескінченного автомата, можна побудувати абстрактну модель центр. *процесора* обчисл. машини. Ця модель являє собою композицію двох автоматів — *автомата керуючого* A та *автомата операційного* B (мал.). Керуючий автомат A є *автоматом скінченним*, а операційний автомат B — нескінченним конфігураційно-періодичним автоматом. До автомата B додають здебільшого ще й вхідний канал U, сигнали в якому спричинюють установні перетворювання, та вихідний канал V, що по ньому передають інформацію про стани деяких регістрів операційного автомата. Сигнали алфавіту V спричинюють лише періодично-визначені перетворювання (можливо, з допоміжними змінними). Крім того, ці сигнали дозволяють або забороняють надходження сигналів по каналу U. Сигнали в каналах U й V наз. ще й векторними. Ці канали зв'язують центр. процесор з зовн. пристроями, напр., з *оперативним запам'ятовувальним пристроєм* ЦОМ.

В автоматі A здебільшого легко виявити стани, в яких починається чи закінчується виконання тієї чи ін. макрооперації машини (додавання, множення тощо). Вибравши ці стани як початкові і як заключний стан, одержимо дискретний перетворювач, який діє на множині станів операційного автомата B. Елементарні оператори цього перетворювача є мікроопераціями процесора.

З теорією А. р., основи якої заклав рад. математик В. М. Глушков (н. 1923), тісно пов'язана теорія *автоматів ітеративних*.

Літ.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1. *О. А. Летичевський.*

АВТОМА́Т САМОВІДТВО́РЮВАНИЙ — автомат, що в процесі функціонування будує свою копію. Дослідження з теорії самовідтворювання автоматів уперше проробив Дж. фон Нейман і пояснив наведене визначення таким чином. Хай задано автономний скінченний автомат A і певний набір Ω скінченних автоматів (елементів).

Якщо вихідні сигнали A вдається інтерпретувати як вказівки про те, який елемент з набору Ω треба взяти і до яких елементів з уже наявного з'єднання елементів його приєднати, то послідовність вихідних сигналів автомата A можна розглядати як процес побудови певного з'єднання елементів. Хай серед вихідних сигналів автомата A є сигнал, що інтерпретується як «побудову завершено». В цьому випадку автомат A за якесь скінченне число кроків «будує» певну логічну мережу L над Ω. Хай ця мережа реалізує автомат B. Тоді кажуть, що A в процесі функціонування будує автомат B. Автомат B наз. «нащадком» A, а автомат A — «батьком» автомата B. За вживаною термінологією скажемо, що автомат A побудовано в Ω, якщо його реалізовано в якійсь логічній мережі над Ω. Коли б елементи набору Ω було виконано у вигляді реальних фіз. пристроїв і автомат A мав виконавчі органи, які давали б йому змогу вибирати потрібні елементи й робити потрібні з'єднання, і автоматові A дати достатню кількість елементів, то він міг би насправді побудувати певний пристрій у вигляді з'єднання елементів.

Розглянемо такий набір елементів Ω, коли «батько» будь-якого автомата, побудованого в Ω, сам може бути побудованим у Ω. Можна припустити, що для будь-якого автомата A його «батько» — $p(A)$ має бути в певному розумінні складнішим за A, бо $p(A)$ повинен мати всю інформацію про структуру автомата A. Необхідно знайти такий A, щоб $p(A) = A$, тобто автомат, що будує свою копію (автомат A в такому разі наз. с а м о в і д т в о р ю в а н и м). При цьому становить інтерес не будь-яке самовідтворювання автоматів, а лише самовідтворювання автоматів, які мають досить складну будову. Зазначимо, що коли A є А. с., то породжені ним автомати також будуватимуть автомати A, причому їхні «нащадки» будуть не тільки функціонально, а й структурно еквівалентні «батькам», тобто збігатимуться логічні мережі, що реалізують «батьків» і «нащадків».

Дж. фон Нейман розглядав дві моделі самовідтворювання. У першій, т. з. кінематичній моделі, автомат A «плавав» у резервуарі, де плавала «їжа», тобто невичерпний запас елементів набору Ω. Друга, т. з. клітинна модель, становить нескінченну двовимірну ітеративну мережу (див. *Автомати ітеративні*). Конфігурація Z цієї мережі наз. самовідтворюваною, якщо для будь-якого натурального n знайдеться такий такт τ, що коли в такт $t = 0$ ми задамо на клітинній моделі одну конфігурацію Z, то в такт τ наша модель міститиме n неперетинних конфігурацій Z. Клітинну модель можна розглядати як певне абстрактне середовище, в якому простір і час дискретні, а пересування елементів замінено передаванням сигналів.

В обох випадках для доказу можливості самовідтворювання досить складних автоматів Дж. фон Нейман запропонував скористуватися т. з. у н і в е р с а л ь н и м к о н с т р у к т о р о м. Суть цієї пропозиції зводиться от до чого. Зафіксуймо якийсь набір елементів Ω. Замість автономного автомата

A розглянемо автомат K зі входом. Якщо, подавши на K вхідну послідовність ξ, одержимо вихідну послідовність, яку можна розглядати як процес побудови певного автомата A_ξ, то ξ наз. кодом автомата A_ξ (при фіксованому K). Код автомата A позначають через ξ (A). Автомат K наз. універсальним конструктором, якщо для будь-якого автомата M у Ω знайдеться така вхідна послідовність ξ (M), що при поданні її на вхід K на виході буде побудовано автомат M. Оскільки фактично всю інформацію про структуру автомата, який треба побудувати, можна записати його кодом, то універсальний конструктор можна побудувати навіть при досить простих наборах елементів. Код ξ також можна подати у вигляді підходящого з'єднання елементів, що реалізує автономний автомат $\mathfrak{A}$ (ξ), який видає цей код. Якщо з'єднати вихід автомата $\mathfrak{A}$ (ξ) зі входом автомата K, що відповідає поданню вхідної послідовності ξ на вхід автомата K, то одержимо автономний автомат $[\mathfrak{A}(\xi) : K]$ і він породжуватиме автомат A_ξ (символічно $[\mathfrak{A}(\xi) : K] \to A_\xi$). У такому разі автомат $[\mathfrak{A}(\xi(K)) : K]$ — це автомат K, що має опис свого ж коду. Очевидно, що цей автомат не є А. с., бо він будує тільки автомат K без коду. Для побудови А. с. треба до автомата K додати т. з. пристрій копіювання P, тобто автомат, який, одержавши на вхід код ξ, будує на виході копію цього коду й керуючий пристрій R (призначення його буде пояснено далі). Одержаний автомат $K - P - R$ має один вхід і працює таким чином. Якщо на його вхід подати код ξ, то спершу K побудує автомат A_ξ, потім P побудує копію коду ξ, і нарешті цю копію ξ буде подано на вхід автомата A_ξ, тобто буде побудовано автомат $[\mathfrak{A}(\xi) : A_\xi]$. Керуючий пристрій R стежить за тим, щоб описані вище дії було виконано в зазначеній послідовності. Подамо тепер на вхід автомата $K - P - R$ його власний код, тобто побудуємо автомат $[\mathfrak{A}(\xi(K - P - R)) : K - P - R]$. Очевидно, що він будуватиме автомати $[\mathfrak{A}(\xi(K - P - R)) : K - P - R]$, тобто буде А. с. Описаний тут механізм самовідтворювання дивовижно схожий на процес самовідтворювання найпростіших (одноклітинних) живих організмів.

До аксіоматичної побудови теорії самовідтворювання вдався амер. математик Дж. Майхілл. Він довів теорему, яка є узагальненням теореми про існування А. с. Для широкого класу нумерацій автоматів має місце такий факт: для будь-якої обчисленної функції g (x) існує автомат з номером n такий, що породжуваний ним автомат має номер g (n) (при $g(x) = x$ маємо теорему про існування А. с.). Він довів і теорему про існування т. з. самовдосконалюваних автоматів. Вважають, що автомат A_2 досконаліший за автомат A_1 $(A_1 < A_2)$, якщо при природному уточненні поняття обчислювальної здатності можна сказати, що автомат A_2 може обчислити все те, що й автомат A_1 і ще що-небудь, окрім цього. Справджується теорема: існує така нескінченна послідовність автоматів $\{A_i\}$, що одночасно $A_i < A_{i+1}$ і $A_i \to A_{i+1}$, де $i = 0, 1, 2, \ldots$. Але щоб довести ці обидві теореми, необхідно мати такий набір елементів, з яких можна було б побудувати універсальний конструктор, пристрій копіювання коду тощо.

Амер. математик Е. Мур довів, що в будь-якій клітинній моделі з досить широкого класу таких моделей існують конфігурації, які не можуть самовідтворюватися. Робилися спроби фізичної побудови моделей самовідтворювання. Наприклад, англійський генетик Л. Пенроуз побудував механічні елементи двох видів A і B так, що вони можуть зчіплюватися один з одним якимсь із двох способів AB або BA. Якщо в піднос, де містяться незчеплені один з одним елементи A і B, помістити «батька» AB і потім піднос струсати, то в ньому породжуватимуться тільки зчеплення AB, тобто AB відтворюватиме себе. Якщо ж туди помістити BA, то породжуватимуться з'єднання BA. Амер. учений Г. Джекобсон побудував таку електромех. модель самовідтворювання: складені з різних вагончиків іграшкові поїзди, використовуючи системи роз'їзних колій, так переганяли незчеплені між собою вагончики, що складали поїзд, схожий на них самих.

Літ.: Нейман Дж. фон. Общая и логическая теория автоматов. В кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? Пер. с англ. М., 1960; Penrose L. Automatic mechanical self-reproduction. «New Biology», 1959, № 28; Джекобсон Г. О моделях воспроизведения. В кн.: Кибернетический сборник, № 7. М., 1963; Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М., 1971 [бібліогр. с. 322—326]; Майхилл Дж. Абстрактная теория самовоспроизведения. В кн.: Общая теория систем. Пер. с англ. М., 1966; Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966; Арбиб М. Мозг, машина и математика. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 217—224]; Codd E. F. Cellular automata. New York — London, 1968 [бібліогр. с. 118].

М. І. Кратко.

АВТОМА́Т СКІНЧЕ́ННИЙ — автомат, у якому множина внутрішніх станів і множина вхідних значень (а, отже, й множина вихідних значень) є скінченними множинами. Абстрактно, А. с.— це п'ятірка $\langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, де A, X, Y — скінченні множини, що їх наз. відповідно множинами внутр. станів, множинами вхідних сигналів і множинами вихідних сигналів, а δ і λ — однозначні ф-ції, а саме δ: $A \times X \to A$ — ф-ція переходів, $\lambda : A \times X \to Y$ — ф-ція виходів. Поняття А. с. було запропоновано як математичну модель тех. пристроїв дискретної дії, бо будь-який такий пристрій (через скінченність своїх розмірів) може мати лише скінченне число станів. Теорія А. с., яка є осн. складовою частиною заг. теорії автоматів, має велике застосовне значення, зокрема, її методами користуються, проектуючи ЦОМ та ін. автомат. дискретні пристрої.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]. *М. І. Кратко.*

АВТОМА́Т ЧАСТКО́ВИЙ — автомат, у якого функція переходів Ψ (a, x) чи функція виходів Φ (a, x) або обидві ці функції визначені

не для всіх пар значень їхніх аргументів a і x. У зв'язку з цим поняття еквівалентності цілком визначених автоматів та їхніх станів у випадку А. ч. замінюють загальнішим поняттям сумісності, що грунтується на збігові індукованих відображень у перетині їхніх ділянок визначення. *А. М. Чеботарьов.*

АВТОМА́ТА ДІАГРА́МА — те саме, що й *абстрактного автомата граф.*

АВТОМА́ТА МА́ТРИЦЯ ПЕРЕХО́ДІВ — один із способів задавання скінченного абстрактного автомата. Для автомата A, що має n станів, А. м. п. $\|A\|$ є квадратною матрицею порядку n. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множина станів автомата A, а $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ та $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ — відповідно вхідний і вихідний алфавіти. Для ініціального автомата a_1 завжди означає початковий стан. Елементом (i, j) матриці $\|A\|$ є множина пар виду (x_{i_s}/y_{i_s}), таких, що від діяння вхідного сигналу x_{i_s} автомат A переходить із стану a_i у стан a_j і видає при цьому вихідний сигнал y_{i_s}. Для позначення множини, що складається з пар (x_{i1}/y_{i1}), (x_{i2}/y_{i2}), $\ldots$, (x_{iq}/y_{iq}), здебільшого виписують ці пари, з'єднані знаком диз'юнкції: $(x_{i1}/y_{i1}) \vee (x_{i2}/y_{i2}) \vee \ldots \vee (x_{iq}/y_{iq})$. Від А. м. п. неважко перейти до будь-якого іншого способу задавання абстрактного автомата, напр., до таблиць переходів і виходів, графа автомата та ін. Див. також *Автоматів способи задавання.*
А. М. Чеботарьов.

АВТОМА́ТА ПА́М'ЯТЬ — кількість станів автомата; іноді під терміном А. п. розуміють логарифм цієї кількості. Див. *Алгебрична теорія автоматів.*

АВТОМА́ТА ТАБЛИ́ЦЯ — прямокутна таблиця розміром $n \times m$, де n — число станів автомата, m — число вхідних букв. Стовпчикам таблиці відповідають стани автомата, рядкам — вхідні букви. На перетині i-го стовпчика і j-го рядка вказано двоє значень: стан автомата, в який він перейде з стану q_i від діяння вхідної букви x_j, і значення його виходу при цьому. Див. *Автоматів способи задавання.*

АВТОМА́ТА ФУ́НКЦІЯ — термін, який застосовують у трьох значеннях: 1) те саме, що й автоматне відображення, або *оператор автоматний;* 2) функція переходів автомата $\delta(q, x)$, тобто відображення $Q \times X \to Q$; 3) рідше — функція виходів автомата $\lambda(q, x)$, тобто відображення $Q \times X \to Y$, де Q — множина станів, X — вхідний алфавіт, Y — вихідний алфавіт автомата. В якому саме значенні вжито термін «А. ф.», визначають з контексту. Див. *Автоматів способи задавання.*

АВТОМА́ТИ ЗРОСТА́ЮЧІ — об'єкти, які характеризуються тим, що в кожний момент часу будь-який з них складається зі скінченної кількості елементів, у певний спосіб пов'язаних між собою. З часом одні елементи зникають (відмирають) і з'являються (народжуються) інші, змінюються стани елементів, змінюються й зв'язки між ними (внаслідок цього можуть з'являтися не пов'язані з первинним об'єктом частини, що потім функціонують самостійно). Отже, до класу А. з. належать усі біол. організми або колективи таких організмів, які зростають самі й створюють собі нащадків. Формалізацією та вивченням таких А. з. займаються відповідні природничі науки. В певному розумінні до класу А. з. можна віднести й будь-якого обчислювача (людину чи машину), що в процесі обчислювання пише цифри чи інші знаки; ці знаки можна розглядати як елементи, що їх він породжує в процесі обчислювання.

Розглянемо математично точні концепції А. з. (див. *Автоматів теорія*). Ці концепції є окремим випадком загального поняття керуючої системи. Їх можна розглядати й як конструктивне уточнення нескінченного автомата. За призначенням математично точні концепції А. з. можна поділити на дві групи: 1) концепції, які правлять за мову для описування реально існуючих (технічно реалізованих) автоматів, зокрема для описування алгоритм. процесів, що протікають у таких автоматах; 2) концепції, які правлять за мову для уточнення інтуїтивного поняття алгоритм. процесу. До 1-ї групи А. з. можна віднести *автомати ітеративні,* «розміщені» в евклідовому просторі (такі автомати, зокрема, розглядав Дж. фон Нейман, коли вивчав проблему *автоматів самовідтворюваних*). До цієї групи А. з. можна віднести й автомати, що їх описали А. Беркс і Дж. Холланд. До 2-ї групи А. з. можна віднести *Тьюрінга машини,* поняття алгоритму, що його описали А. М. Колмогоров і В. А. Успенський, А. з., описані Я. М. Барздінем, та інші абстрактні машини, використовувані для уточнювання інтуїтивного поняття алгоритму. При розгляді 2-ї групи А. з. постає проблема створення якомога загальнішої концепції А. з., яка не суперечила б вимозі, щоб кожний елемент у кожний дискретний момент часу виконував лише «дію обмеженої складності». Розгляньмо, напр., машини Тьюрінга. Вони характеризуються надзвичайною простотою допустимих засобів при записуванні й переробці інформації. Зокрема, інформація в них записується на одновимірній стрічці й зростати стрічка може лише з країв. Але інформація по суті може бути записана й у вигляді матриці, графа тощо і, щоб обробляти її на машині Тьюрінга, її треба перекодовувати. Сам процес перекодовування може бути досить складним, іноді навіть складнішим за саме обчислювання. Звідси випливає ідея А. М. Колмогорова про алгоритм, який переробляє довільну інформацію. Цей алгоритм, на відміну від машини Тьюрінга, може переробляти довільні комплекси (напр., графи з фіксованим розгалуженням). Проте самі перетворення, як і в випадку машини Тьюрінга, є локальними: за кожний такт може бути перетворено лише окіл обмеженого радіуса

одного фіксованого елемента, що наз. початковим.

Загальнішу концепцію А. з. (далі він тут називатиметься узагальненим А. з.) описав Я. М. Бараднінь. Вона випливає з таких інтуїтивних міркувань. Кожний автомат складається з елементів обмеженої кількості типів (можна навіть вважати — з елементів одного типу). Елементи можуть бути пов'язані між собою зв'язками обмеженої складності, що також належать до обмеженої кількості типів. Робота автомата загалом складається з роботи його елементів. Кожний елемент у кожний дискретний момент може здійснити лише дію обмеженої складності. Формалізуючи описане інтуїтивне поняття А. з., приходимо до поняття узагальненого А. з. Воно характеризується тим, що інформація, як і в випадку алгоритму Колмогорова — Успенського, задається у вигляді довільного графа з фіксованим розгалуженням, але на відміну від попередніх випадків перетворювання інформації відбувається паралельно: кожна вершина графа являє собою елемент, який у кожний дискретний момент часу «переглядає» свій окіл обмеженого радіуса й залежно від цього околу (розглядуваного з точністю до ізоморфізму) змінює свої зв'язки з елементами околу й породжує нові елементи; при цьому правило функціонування в усіх елементів автомата одне й те саме. Постає питання про існування універсального правила функціонування елементів, тобто про існування такого правила функціонування A_0, що будь-який узагальнений А. з. можна моделювати на певному узагальненому А. з., елементи якого функціонують відповідно до A_0. Причому під моделюванням розуміють блокове моделювання, коли окремі блоки моделюючого автомата точно відтворюють функціонування складових елементів модельованого автомата й кожному тактові модельованого автомата відповідає один макротакт фіксованої довжини моделюючого автомата. Доведено, що таке універсальне правило функціонування існує, й до того ж воно відносно нескладне.

Великий інтерес становить моделювання А. з. на автоматах, які мають досить просту тех. реалізацію. Одержані результати показують, що існує *сітка логічна* з кількістю елементів порядку $n \log_2^2 n$, яка моделює з розтягом порядку $\log_2^3 n$ будь-який узагальнений А. з., якщо він складається не більше як з n елементів (при довільно фіксованому правилі функціонування елементів). Інтерес становлять і питання, пов'язані з побудовою надійних автоматів з ненадійних елементів, проте ці питання ще мало досліджено.

Літ.: Колмогоров А. Н., Успенский В. А. К определению алгоритма. «Успехи математических наук», 1958, т. 13, в. 4; Бардзинь Я. М. Проблемы универсальности в теории растущих автоматов. «Доклады АН СССР», 1964, т. 157, № 3; Офман Ю. П. Моделирование самоконструирующейся системы на универсальном автомате. «Проблемы передачи информации», 1966, т. 2, в. 1; Holland J. H. Iterative circuit computers. В кн.: Proceedings of the western joint computer conference. New York, 1960; Беркс А. У. Вычисление, поведение и структура неизменных и растущих автоматов. В кн.: Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964; Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М., 1971 [бібліогр. с. 322—326]. *Я. М. Бардзінь.*

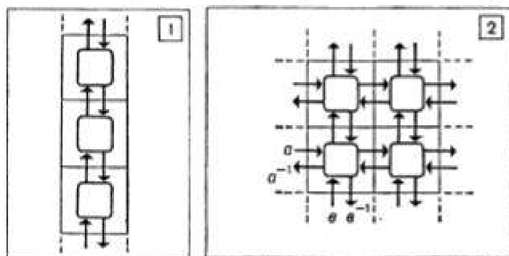
АВТОМА́ТИ ІТЕРАТИ́ВНІ — логічні сітки, що складаються з однакових елементів — скінченних автоматів,— з'єднаних певним регулярним способом.

Поняття А. і. можна вважати узагальненням поняття *Тьюрінга машини.* В цій машині в інформації, що її записано на стрічці, у кожний такт роботи машини відбуваються локальні зміни, тобто змінюється стан не більше як однієї комірки стрічки. Замінивши цю вимогу локальності на вимогу повсюдності, паралельності обчислювань у кожній комірці, приходять до поняття одновимірного А. і., якщо комірку стрічки розглядають як *автомат скінченний,* а букви, що їх записують у комірку,— як стани цього автомата. Стан будь-якої комірки стрічки в момент часу $t+1$ однозначно визначається станом цієї комірки й станом двох сусідніх з нею комірок у момент t (мал. 1). Таке узагальнення машини Тьюрінга, яке включає й двовимірні та багатовимірні структури, вперше запропонували амер. математики Дж. фон Нейман (1903—57) і А. Черч (н. 1903). Тому такого роду *автомати* часто наз. автоматами Неймана — Черча. Зокрема, фон Нейман, вивчаючи проблеми самовідтворювання в теорії автоматів (див. *Автомат самовідтворюваний*), розглядав площину, поділену на однакові квадрати (двовимірну, або плоску «стрічку»), в кожному з яких вміщувався заданий скінченний автомат, при цьому кожний такий автомат з'єднувався лише з чотирма своїми сусідами (мал. 2). Дж. фон Нейман уперше висунув і заг. вимогу однорідності структури автомата, яку задовольняють А. і. Ця вимога полягає в тому, щоб усі елементи автомата були «рівноправними», і щоб жоден з них не мав переваги перед ін. навіть завдяки спец. з'єднанню. Напр., вимоги однорідності буде додержано, якщо замість n-вимірного евклідового простору, в якому розміщено елементи А. і., розглядати довільні скінченнопороджені (комутативні) групи G з виділеною скінченною системою твірних $\{a_1, \dots, a_n\}$. Кожному елементові g групи G ставлять у відповідність копію автомата A з n вхідними й n вихідними каналами. Цей автомат з'єднують із сусідніми так, що його i-й вихідний канал з'єднується з i-м вхідним каналом автомата, поставленого у відповідність елементові ga_i групи G. Є й інші, загальніші, визначення А. і.

Для А. і. ставили й розв'язували найрізноманітніші задачі (напр., проблему самовідтворювання). Крім того, розглядали питання функціонування (поведінки) А. і. та обчислювання на них, розпізнавання різних їхніх властивостей, «занурення» довільних логіч. сіток в А. і., аналізу й синтезу А. і. тощо. Вивчали здебільшого А. і., «розміщені» в евклі-

довому просторі. Найбільше вивчено одновимірні та двовимірні («плоскі») А. і. Скінченні А. і., що мають вигляд прямокутника (n-вимірного паралелепіпеда), наз. ітеративними сітками, а сукупність усіх ітеративних сіток, побудованих із того самого елемента, — ітеративною системою.

Розглядали різні способи введення зовн. інформації в А. і. Так, напр., американський математик Ф. Хенні, вивчаючи перетворювання та розпізнавання просторових образів на А. і., тобто прямокутних масивів з нулів і одиниць (або в заг. випадку n-вимірних «паралелепіпедів» з нулів та одиниць), припускав, що кожна компонента образу надходить у відповідну комірку А. і. Процес «обробки» образу відбувається до настання стійкого стану А. і., в якому й видається результат. При цьому припускають, що в процесі обчислювання решта комірок А. і. перебувають у стані спокою і в них не надходить ніяка зовн. інформація. Інакше кажучи, А. і. функціонує як скінченна ітеративна сітка, розмір якої обмежено вхідним образом. Хенні одержав багато результатів про властивості А. і., пов'язані з такими обчислюваннями. Він довів алгоритм. нерозв'язність багатьох проблем у теорії А. і. і дав методи синтезу А. і., що розпізнають деякі класи образів. Введення зовн. інформації може відбуватися й ін. способом, коли вона надходить послідовно у спеціально виділену комірку або групу комірок.



1. Схема одновимірного ітеративного автомата.
2. Схема двовимірного ітеративного автомата.

Дж. фон Нейман розглядав нескінченні А. і. як *автомати зростаючі* з такого погляду: у комірки А. і. серед ін. внутр. станів є й т. з. стан спокою Λ, який характеризується тим, що коли якась комірка і всі безпосередні її сусіди в момент t перебувають у стані Λ, то в момент $t + 1$ ця комірка також перебуватиме в стані Λ. Комірку, що перебуває в стані спокою, можна розглядати як таку, що не існує. Якщо в початковий момент часу скінченна кількість комірок перебуває у станах, що відрізняються від Λ (таку сукупність комірок з зазначенням стану кожної з них наз. **к о н ф і г у р а ц і є ю**), а решта комірок — в Λ, то ця конфігурація може «зростати» за рахунок «приєднання» нових комірок, тобто комірок, що вийшли з стану Λ. Як довів амер. математик Е. Мур, для дуже широкого класу А. і. існують такі конфігурації (їх наз. «райськими садами»), які не може створити жодна інша конфігурація (тобто такі, що можуть існувати лише в початковий момент часу). Польський математик С. Улам дослідив експериментально на ЦОМ різноманітність конфігурацій, що їх можна одержати в дво- і тривимірних А. і. з досить простих початкових конфігурацій за простих правил функціонування А. і. За допомогою таких досліджень, на думку Улама, можна з'ясувати питання, скільки «інформації» потрібно, щоб описати структури живих організмів, які мають на вигляд надзвичайно складну будову. В А. і. є чимало властивостей, що роблять їх дуже цікавими з інженерного погляду. Це, насамперед, технологічність; досить спроектувати лише один елемент — комірку. Елементи з'єднані один з одним просто. Завдяки цьому можна легко нарощувати сітку до потрібних розмірів, не перебудовуючи тих з'єднань, які в ній уже є. Така структура полегшує обслуговування таких сіток. На А. і. можна легко «розпаралелювати» деякі обчислювання. Структури, аналогічні А. і., виявлено в живій природі (напр., сітківка ока, деякі ділянки кори головного мозку, молекули ДНК тощо). Прикладами застосування ітеративних структур в обчислювальній техніці можуть бути пристрої *пам'яті ЦОМ*, *регістри* й *суматори*. У зв'язку з розвитком технології *інтегральних схем*, де сама специфіка виробн. така, що там зручно будувати пристрої з ітеративною структурою, інтерес до теорії А. і. дедалі зростає.

З теорією А. і. тісно пов'язана теорія т. з. *автоматів регістрових*, основи якої заклав рад. математик В. М. Глушков (н. 1923). Вона спрямована на вивчення мікропрограмування ЦОМ.

Літ.: Г л у ш к о в В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5; Б а р з д и н ь Я. М. Моделирование логических сетей на автоматах Неймана — Черча. «Проблемы кибернетики», 1966, в. 17; М у р Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения.— У л а м С. Некоторые математические проблемы, связанные с процессом роста фигур. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966; H e n n i e F. C. Iterative arrays of logical circuits. New York — London, 1961.

М. І. Кратко, Г. С. Плесневич.

АВТОМА́ТИ НЕСКІНЧЕ́ННІ — автомати, множина станів яких є нескінченною. Формально А. н.— це п'ятірка $\mathfrak{A} = \langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$, де X і Y — відповідно вхідний і вихідний алфавіти (вони можуть бути скінченними й нескінченними), A — множина станів автомата (нескінченна), $\delta : X \times A \to A$ — ф-ція переходів і $\lambda : X \times A \to Y$ — ф-ція виходів автомата. Здебільшого розглядають А. н. зі скінченними вхідним і вихідним алфавітами і лічбовою множиною внутр. станів. Для класу всіх А. н. ще не вдалося одержати значних результатів, це пояснюється тим, що поняття А. н. дуже загальне. Такі результати є для окремих спеціально визначених класів А. н. Визначають ці класи здебільшого у двох напрямах: а) автомат $\mathfrak{A}$ розглядають як абстрактний автомат, тобто як п'ятірку $\langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$, де множина A є певною матем. струк-

турою (за Н. Бурбакі), напр., лінійним, топологічним, метричним просторами, групою тощо, а ф-ції δ і λ є якимись природно визначуваними в цих термінах ф-ціями чи операторами, напр., *операторами лінійними*; б) автомат 𝔄 задають у структурному вигляді, тобто як автомат, реалізований у тій чи іншій *сітці логічній*. Структура логіч. сітки та її елементи характеризують структуру множини *A* та операцій δ і λ. Таке визначення класів А. н. переважає в дослідженнях з теорії А. н. Ті А. н., що їх задано в структурному вигляді, часто наз. абстрактними машинами (напр. *Тьюрінга машина*). Вивчають їх у зв'язку з тим, що на них можна виконати ті чи інші класи алгоритмів. Вважають, що саме поняття *алгоритму* можна уточнити лише на основі поняття А. н. (див. *Автомати зростаючі*). Хоч усі реальні дискретні пристрої, призначені для переробки інформації, можуть мати лише скінченну кількість внутр. станів, тобто їхніми абстрактними моделями є *автомати скінченні*, зручніше розглядати один А. н. як модель цілого класу таких пристроїв. Це дає змогу виявити спільні для всіх таких пристроїв закономірності й часто має велике застосовне значення. Прикладом можуть бути *автомати регістрові*, основи теорії яких заклав рад. математик В. М. Глушков. А. н. широко вивчають у теор. кібернетиці, в *алгоритмів теорії*, *лінгвістиці математичній* тощо.

Літ.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1; Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 [бібліогр. с. 375—381]; Arbib M. A. Automata theory and control theory — a rapprochement. «Automatica», 1966, v. 3; Hopcroft J. E., Ullman J. D. An approach to a unified theory of automata. «The bell system technical journal», 1967, v. 46, №8.

М. І. Кратко.

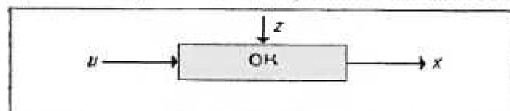
АВТОМАТИЗА́ЦІЯ КЕРУВА́ННЯ ВИРОБНИ́ЧИМ ПРОЦЕ́СОМ — комплекс заходів, які забезпечують керування виробничим процесом (ВП) за допомогою системи автоматичного керування.

Осн. мета А. к. в. п.— удосконалювати керування ВП, щоб поліпшити технічні й економічні показники цього процесу. Іноді здійснювати ВП навіть неможливо, не автоматизувавши керування цим процесом (напр., автоматизація нестійких фіз.-хім. процесів). В основу А. к. в. п. покладено методи *автоматичного керування теорії*, *інформації теорії*, *обчислювальної техніки*, *операцій дослідження* тощо. А. к. в. п.— складна комплексна інженерна проблема, в якій об'єднуються багато завдань. Осн. етапи її такі: техніко-економічний аналіз, який оцінює доцільність А. к. в. п.; моделювання виробничого процесу, як об'єкта керування; розробка структури системи А. к. в. п. і розв'язання задачі синтезу алгоритму керування; технічна реалізація А. к. в. п. Між цими етапами є тісний зв'язок, зумовлений, насамперед, техніко-економ. міркуваннями. Наявність цього зв'язку викликає необхідність повторювати весь цикл досліджень або частину його, організовувати своєрідну процедуру послідовних наближень, щоб відшукати прийнятний варіант автоматичної системи керування (АСК).

Комплексний розгляд проблем створення АСК ще не забезпечено цілком теорією й відповідними інженерними методами розрахунку й проектування. При А. к. в. п. може виявитися, що якісь завдання є нерозв'язними з погляду теорії автоматич. керування й тоді ці завдання повинна розв'язувати людина, яка виявляється включеною в систему керування й діє відповідно до свого досвіду й інтуїції. Таку систему (з участю людини) називають *системою автоматизованою*. Людина, яка функціонує в цій системі, діє в рамках своєї компетенції на основі певного набору правил — якогось *алгоритму;* її можна розглядати як елемент у складі автоматизованої системи управління.

Розгляньмо докладніше етапи побудови АСК. Щоб провести техніко-економ. аналіз, треба прийняти певні критерії, які кількісно оцінювали б якість керування. Найпростішим критерієм є собівартість виробництва одиниці продукції. Складніші критерії можуть враховувати якість виготовлюваної продукції, собівартість на якомусь інтервалі часу й ін. характеристики ВП. Грубою ознакою погано керованого ВП є значна *дисперсія* критерію якості, коли цикли виробництва повторюються багато разів. Щоб одержати тонші висновки, треба провести матем., фіз. чи натурне моделювання ВП з позицій теорії керування. Широко використовувану схему об'єкта керування (ОК) подано на мал., де позначено: x — вихідні параметри ОК, до яких належать вихід ВП (в загальному випадку — потік енергії, речовини, виробів тощо), u — вхідні величини ОК, до яких відносять регульовані потоки компонент, потрібних, щоб здійснювати ВП, і параметри, які характеризують перебіг ВП. В ОК відбуваються перетворення вхідних потоків u на вихідні x.

Складність сучас. технологій значно утруднює одержання (а іноді й наступне використання) моделі ВП. Ці утруднення зумовлені насамперед великою вимірністю входів і виходів ОК (порядку десятків і сотень), складною структурою й невизначеністю перетворювань вхідних потоків усередині ОК. До того ж, у багатьох випадках характер цих перетворювань випадково змінюється в часі. Ці зміни прийнято відображати випадковим



Спрощена схема об'єкта керування при автоматизації керування виробничим процесом.

збурювальним діянням (на мал.— z). В дуже складних ВП застосовують т. з. *декомпозиції методи* — розділяння моделі ВП на її складові частини, кожну з яких розглядають як модель самостійного ОК.

Матем. модель ВП як ОК потрібна й на наступній стадії — коли вибирають структурну схему системи й визначають алгоритм керування. Тут дуже істотною є інформація про стан ОК. У заг. випадку характеристики стану ОК добувають із спостережень за його входами й виходами (див. *Ідентифікація об'єктів керування*). Це й зумовлює необхідність вивчати питання про можливість вимірювання вхідних і вихідних величин, про *похибки* вимірювань, ступені вірогідності одержуваних результатів тощо.

Динамічні властивості ВП зумовлюють і необхідність включати до інформації про ОК значення не лише поточних вхідних і вихідних величин, а й у моменти минулого часу. Обсяг потрібної інформації при цьому значно зростає, й організація інформаційних потоків стає складним тех. завданням, для розв'язування якого потрібні спец. *підсистеми* попередньої обробки даних.

У тому разі, коли в моделі ОК є безпосередньо неспостережувані (приховані) збурення (параметри), застосовують *системи керування замкнені*, що мають *зворотний зв'язок*, по якому надходить інформація про ці збурення чи параметри.

Після вибору структурної схеми визначають інформацію, яку можна використати в керуючому пристрої (КП). Задача КП — на основі цієї інформації виробити рішення про керуюче діяння на вході ОК, для того щоб змінити його вихідну величину x. При цьому треба встановити певне співвідношення між інформацією про стан ОК, що вводиться в КП, і керуючим діянням, яке надходить з КП на вхід ОК (алгоритмом керування).

На етапі тех. реалізації вибирають тех. засоби для виконування операцій щодо організації або первинної обробки інформації про ОК й операцій щодо обчислення керуючих діянь. Треба, щоб застосування ЦОМ як КП було глибоко обгрунтованим економічно. Іноді для реалізації алгоритму керування доцільно використовувати спец. аналогову або комбіновану обчислювальну машину, забезпечивши цим загальний виграш щодо багатьох техніко-економічних характеристик системи.

Необхідно додержувати *системного підходу* для автоматизації керування процесами, які відбуваються у великих комплексах різнорідних агрегатів, у цехах, на підприємствах тощо, і при цьому правильно розв'язувати проблему вибору критерію якості керування й проблему інтерпретації складних виробничих процесів як ОК. Автоматизація керування цехами, підприємствами й складнішими об'єднаннями часто буває частковою (автоматизованими є, в основному, системи обробки інформації), а рішення щодо оперативного планування й керування виробництвом приймає людина.

Літ.: Трапезников В. А. Автоматическое управление и экономика. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 1; Бир С. Кибернетика и управление производством. Пер. с англ. М., 1965.

В. І. Іваненко.

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ КО́МПЛЕКСНА — системне охоплення автоматизацією виробничих та економіко-адміністративних процесів у рамках агрегату, окремого технологічного процесу, цеху, підприємства та вищих виробничих і господарських формацій. А. к. базується на досягнутому рівні розвитку *кібернетики* й, зокрема, її розділів — *кібернетики технічної* та *кібернетики економічної*. Див. також *Автоматизація керування виробничим процесом*, *Автоматизовані системи управління підприємством* і *Системотехніка*.

Б. Б. Тимофєєв.

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ ЛІНГВІСТИ́ЧНИХ ДОСЛІ́ДЖЕНЬ — використання обчислювальних машин для лінгвістичного — переважно комбінаторного й статистичного — аналізу тексту як послідовності лінгвістичних форм. Суть лінгвістичного аналізу полягає в тому, що на множині лінгвістичних форм одного рівня (напр., на множині звуків мови, переданих у тексті буквами, або на множині слів тексту) визначають відношення еквівалентності й порядку, які ставлять у відповідність кожній формі клас, до якого вона належить, і кожній парі в послідовності форм — напрям синтаксичного зв'язку між ними. Мінім. класами форм є лінгвістичні одиниці — фонеми, конкретними представниками яких є звуки мови, морфеми (мінім. значущі одиниці мови), які в тексті позначають морфами (мінім. значущими частинами слів), лексеми, що їх у тексті передають словоформами, моделі словосполучень і моделі речень. На множині лінгвістичних одиниць може бути визначено відношення еквівалентності й знайдено класи лінгвістичних одиниць, такі, як голосні й приголосні фонеми, службові, повнозначні морфеми, дієслова тощо і знову визначено відношення порядку. Такі процедури лінгвістичного аналізу мають алгоритмічний характер і великою мірою спираються на інформацію про те, як часто вживаються разом лінгвістичні форми в текстах. При цьому враховують не тільки інформацію про склад лінгвістичних форм, а й умовну частоту появи одних форм, якщо з'являються інші. Одна з типових задач автомат. лінгвістичного аналізу полягає в переведенні тексту, заданого як послідовність знаків алфавіту, в послідовність лінгвістичних форм заданого рівня, в ототожнюванні різного вживання тієї самої форми, в побудові класів лінгвістичних форм і одиниць.

Залежно від того, чи перед автоматич. обробкою тексту обробляє його людина чи ні, розрізняють напівавтомат. і автомат. аналіз. При н а п і в а в т о м а т и ч н о м у а н а л і з і текст спочатку розчленовують на форми заданого рівня (напр., на слова) і кожну форму забезпечують набором ознак, у якому зазначають належність цієї форми до певного класу форм, його підкласів і зв'язок цієї форми з іншими формами тексту. Проаналізований так лінгвістичний текст переносять на носії запису інформації (перфокарти та ін.), і він надходить для обробки в ЦОМ.

Звичайними завданнями такої обробки є: 1) ототожнювання індивідуального формовживання всередині кожного з класів форм або одиниць; 2) підрахунок числа тотожних чи еквівалентних формовживань; 3) підрахунок умовної частоти вживання разом форм або одиниць, або класів одиниць; 4) побудова інвентарів лінгвістичних форм, одиниць і класів; 5) структурний і лінгвостатистичний аналіз інвентарів (див. *Лінгвістична статистика*) тощо. Розрізняють такі види інвентарів: інвентарі фонем і графем (букв) та їхніх сполучень, інвентарі складів, морфів і морфем, а іноді й основ слів; інвентарі словоформ і лексем (списки — індекси — слів, *словники частотні*); інвентарі словосполучень.

Якщо лінгвіст попередньо не обробляє тексту, йдеться про а в т о м а т и ч н и й а н а л і з. Зокрема, автомат. аналіз є осн. частиною машинного дешифрування писемностей (див. *Дешифрування текстів*). Автомат. лінгвістичний аналіз провадиться або порівнюванням форм та їхнього оточення в тексті з заданими в таблицях *еталонами*, яким поставлено у відповідність набори ознак, або методами комбінаторного чи комбінаторно-статистичного аналізу вживання разом форм. У цьому разі автомат. аналіз базується на припущенні, що статистично значущі відхилення частоти спільної зустрічності форм від матем. сподівань, обчислених у припущенні про їхню випадкову появу разом у тексті, свідчать про певну близькість цих форм. Так вдається встановити морфологічні типи форм, синтаксичні структури, семантичні групи (поля). Автомат. аналіз тексту, який перекладають, є першим етапом *машинного перекладу*. Крім задач, пов'язаних безпосередньо з лінгвістичним аналізом текстів, ЦОМ використовують і як засіб автоматизації праці лінгвіста, напр., під час каталогізації лінгвістичних явищ, при якій треба сортувати й підраховувати кількість явищ за групою ознак. Як правило, машини використовують у лінгвістичних дослідженнях, пов'язаних з обробкою великих масивів лінгвістичної інформації, що налічують сотні тисяч формовживань. При цьому часто власне лінгвістичний аналіз супроводиться обчислюванням різних статистик (частоти форм, одиниць і класів, довжини форм — слів, речень), перевіркою статистичних гіпотез про рівність імовірностей, з якими ті самі форми, одиниці або класи вживаються в різних текстах, і гіпотез про наявність кореляцій між частотами форм у різних текстах. З допомогою ЦОМ розв'язують і власне лінгвістичні задачі, пов'язані з вивченням механізму функціонування мови в статистичному аспекті — вивчення функцій розподілу лінгвістичних статистик у словнику і в тексті.

Літ.. Ш а й к е в и ч А. Я. Распределение слов в тексте и выделение семантических полей. В кн.: Иностранные языки в высшей школе, в. 2. М., 1963; Ф р у м к и н а Р. М. Автоматизация исследовательских работ в лексикологии и лексикографии. «Вопросы языкознания», 1964, № 2; Автоматизация в лингвистике. М.— Л., 1966; З а с о р и н а Л. Н. Автоматизация и статистика в лексикографии. Л., 1966; М о с к о в и ч В. А. Автоматизация некоторых аспектов лингвистической работы. «Вопросы языкознания», 1966, № 1; С е в б о И. П. Структура связного текста и автоматизация реферирования. М., 1969; П е р е б и й н і с В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фонем сучасної української літературної мови. К., 1970.

В. М. Андрющенко.

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ МЕДИ́ЧНОЇ ДІАГНО́СТИКИ — комплекс математичних і технічних прийомів, здійснюваних, щоб підвищити вірогідність і надійність медичного діагнозу та щоб прискорити його. А. м. д. передбачає часткову чи повну передачу функцій лікаря приладам і автоматам. Встановлення діагнозу складається з таких етапів: 1) збирання інформації про хворого та про прояви захворювання; 2) обробляння та оцінювання зібраних даних; 3) власне встановлення діагнозу. Автоматизувати можна кожний з етапів встановлення діагнозу або весь процес повністю. При цьому цілком автоматизувати можна лише ті завдання медичної діагностики, для яких існують *алгоритми* й які в принципі можна розв'язати без участі медичного персоналу.

На 1-му етапі розробляють *стандартизовані історії хвороби* різних профілів, питальники та ін. Зібрану інформацію про хворого записує лікар (або сам хворий) у цифровій чи текстовій формі до відповідних граф стандартизованих документів. Такий запис дає змогу формалізувати інформацію про хворого і зберігати її в пам'яті ЦОМ. Завдяки представленню інформації в такій формі формалізовану природну медичну мову можна суміщувати з мовою ЕОМ. Отже, результат обстеження конкретного k-го хворого можна зобразити у вигляді трійкового вектора $f_k \{s_i\}$, де $s_i = 1$, якщо є даний s_i-ий симптом; $s_i = 0$, якщо цього симптому немає; $s_i = -1$, якщо цей симптом не досліджували ($i = 1, 2, \ldots, m$).

На 2-му етапі встановлення діагнозу виділяють, обробляють та оцінюють зібрану інформацію. Виділяти симптоми може лікар або, після попереднього навчання, ЕЦОМ. Потім оцінюють значення одержаних симптомів для різних захворювань. Це робить лікар або ЦОМ за спец. матрицями та різними вирішувальними правилами. Так, напр., використовуючи методику Бродмена, можна одержати діагностичну цінність $\rho(s_i, d_j)$ симптому s_i для діагнозу $d_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ в такому вигляді:

$$\rho(s_i, d_j) = \frac{p(s_i/d_j) - p(s_i)}{2(\sqrt{p(s_i)})_3} \pm 1.$$

Як міру інформативності можна використати дивергенцію Кульбака

$$\rho(s_i, d_j/d_l) = [p(s_i/d_j) - p(s_i/d_l)] \log \frac{p(s_i/d_j)}{p(s_i/d_l)}$$

або інформаційну міру Шеннона

$$\rho(s_i/d_j) = -p(s_i/d_j) \log p(s_i/d_j)$$

та ін.

На 3-му етапі лікар або автомат. пристрій будує модель захворювання (встановлення діагнозу) відповідно до тих вирішувальних правил, за якими одержано оцінки симптомів. Використовуючи детерміністську логіку, модель захворювання будують, порівнюючи даний невідомий вектор f_k з еталоном. Побудова еталона грунтується на *логічних операціях* і даних медицини. Еталон зберігається у вигляді запису, на ручних перфокартках або в пам'яті ЦОМ у вигляді *булевої функції* $F = (s_1 + s_2 + \ldots + s_i + \ldots + s_m) \Lambda (g_1 + g_2 + \ldots + g_\omega + \ldots + g_l) \Lambda (d_1 + d_2 + \ldots + d_j + \ldots + d_n)$. При цьому рішення приймають так: вирішують, що $f_k \in d_j$ (або множині $\{d_j\}$), якщо $F = 1$ при $d_j = 1$ (або $\{d_j\} = 1$).

Використовуючи статистичні методи, модель захворювання будують, знаходячи максимально правдоподібну оцінку. При мінімізації середнього риску діагнозування (див. *Риск розпізнавання*) використовують оптим. *Байєсівське вирішувальне правило*, сформульоване так: даний вектор $f_k \in d_t$, якщо $\delta (d_t/f_k) = \max_t p(f_k/d_t) g_\omega$. Значення t, при якому досягається максимум, є шуканим. При $t = 0$ приймається рішення про відмову від діагнозування даного вектора f_k.

При використанні методики багатоальтернативного послідовного аналізу вирішувальне правило твердить: продовжуємо підраховувати оцінки (коефіцієнт правдоподібності), якщо $\log B_{tj} < \Lambda < \log A_{tj}$, вирішуємо, що $f_k \in d_j$, коли $\Lambda \geqslant \log A_{tj}$; вирішуємо, що $f_k \in d_t$, коли $\Lambda \leqslant B_{tj}$, де d_j, d_t ($j, t = 1, \ldots, n$, $t \neq j$) — класи захворювань (діагнози); A_{tj} та B_{tj} — пороги, визначувані за заданою вірогідністю діагнозування (або ж при навчанні) для кожної пари порівнюваних класів;

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{m} \log \frac{p(s_i/d_t)}{p(s_i/d_j)}$$ —коеф. правдоподібності;

$p(s_i/d_j)$ та $p(s_i/d_t)$ — апріорні ймовірності появи s_i-го симптому в d_j-му та d_t-му класах. У деяких випадках, будуючи модель захворювання, доцільно використовувати складене нелінійне вирішувальне правило, яке дає змогу повніше враховувати інформацію про хворого.

Слід зазначити, що, будуючи модель захворювань, лікар або ЦОМ виходять з відповідної структури діагнозу, тобто приймаючи рішення за оцінками (вагою) відповідної інформації про хворого, вказують осн. і супутнє захворювання та стан окремих функцій органів і *регулюючих систем організму*. Отже, автоматизувати цей етап встановлювання діагнозу можна лише після того, як створено програмне забезпечення для ЦОМ по формуванню моделей захворювання. Проте остаточний висновок лишається за лікарем (див. також *Медична інформаційна система*).

Літ.: Моисеева Н. И. Проблемы машинного диагноза в неврологии. Л., 1967 [бібліогр. с. 218—231]; Медицинская информационная система. К., 1971 [бібліогр. с. 238—288]; Бродмен К. Постановка диагноза при помощи вычислительной машины. В кн.: Электроника и кибернетика в биологии и медицине. Пер. с англ. М., 1963; Ледли Р., Ластед Л. Медицинская диагностика и современные методы выбора решения. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966.

В. Г. Мельников, А. О. Попов, В. М. Яненко.

АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОГРАМУВАННЯ — розділ програмування, що розробляє методи автоматичного складання програм і розв'язування задач на цифрових обчислювальних машинах за даними, представленими в якомусь формалізованому вигляді,— *мовою формальною*. А. п. грунтується на застосуванні засобів обчисл. техніки, призначених полегшувати спілкування користувача з ЦОМ. Основу побудови системи А. п. становлять *алгоритмічні мови*, орієнтовані на практичне застосування, та *мови програмування*, що базуються на них. Системи А. п. потрібні для того, щоб завдяки створенню відповідного *математичного забезпечення ЦОМ* підвищити ефективність використання цих машин у різних сферах застосування їх. Т. ч., проблематика А. п. виросла з практичних потреб програмування та розв'язування задач на ЦОМ.

Робота користувача ЦОМ при розв'язуванні задач розчленовується на ряд етапів: вивчення задачі (процесу переробляння інформації); вироблення *алгоритму* розв'язування задачі (алгоритму, що моделює цей процес); складання *програми*, яка реалізує цей алгоритм на обраній машині; опрацювання алгоритму й перевірка його (наладжування); підготування даних; розв'язування задачі та оформляння результатів. З розширенням сфер застосування ЦОМ найбільшої гостроти набула проблема автоматизації етапів складання програм і наладжування їх, як найбільш механічних й найтрудомісткіших. Справді, описування скільки-небудь складного алгоритму в дрібних *операціях машинних* пов'язане з великими тех. труднощами, оскільки при ручному програмуванні треба чітко уявляти розміщення в *пам'яті ЦОМ* (здебільшого багатоступінчастої структури) всіх потоків інформації на всіх етапах роботи програми й зв'язки та співвідношення між окремими *командами* програми. У зв'язку з такими труднощами описування алгоритмів уже на ранніх етапах використання ЦОМ набули розвитку прийоми, що полегшують працю по складанню програм. Це, напр., метод описування алгоритмів у вигляді блок-схем, метод символічних (або умовних) адрес, метод підпрограм і ін. Метод складання блок-схем основано на поділі задач на кілька підзадачблоків, з яких компонують заг. програму. Метод символічних адрес полягає в застосуванні буквених позначень для кодів операцій та адрес програми. Запровадження підпрограм розширює набір елементарних машинних команд. Автомат. використання стандартних підпрограм у межах однієї задачі пов'язане з побудовою інтерпретаторів (т. з. *інтерпре-*

туючих систем), або спец. *трансляторів*, що являють собою алгоритми компонування програм з окремих підпрограм. Серед ранніх вітчизн. праць у цьому плані найвідомішими стали праці щодо створення інтерпретуючих систем («виконробів»), які відзначаються включенням операцій над об'єктами складної структури (векторами й матрицями), та система стандартних підпрограм, створена для машини «М-20». Метод підпрограм полегшує й спрощує завдання складання програм, але він грунтується на мовах, які принципово мало відрізняються від *мов машинних*. Ці останні не могли стати засобом переборення труднощів програмування, що зростають у зв'язку зі збільшенням кількості та різноманітності машин, зростанням їхніх можливостей і зростанням складності розв'язуваних задач. Виникла проблема описування алгоритмів у термінах досить великих операцій — проблема складання схем програм. З цією метою О. А. Ляпунов розробив *операторний метод програмування;* було побудовано алгебру програм, що її операції являють собою абстрактне вираження найістотніших і таких, що найчастіше зустрічаються в практиці, композицій програм. Подальше уточнення поняття *оператора* й чітке виділення осн. типів операторів у поєднанні з бібліотечним методом дали змогу використовувати операторний метод програмування як осн. засіб А. п. на базі створення спец. трансляторів. Для операторних схем алгоритмів розроблено системи еквівалентних перетворень, які дають змогу одержувати ефективні в тому чи ін. розумінні програми. На основі методу операторного програмування було створено транслятори для машин «Стрела» та «БЭСМ». Так почала розвиватися в СРСР А. п. на основі використання трансляторів.

Складання програм за допомогою машини було першим серйозним використанням машин з «неарифметичною» метою. Праці з А. п. дали змогу по-новому усвідомити можливості машин, стали поштовхом не лише до того, щоб поставити й розв'язати питання про ін. неарифметичні використання їх, а й вплинути на характер обчисл. програм, які дедалі частіше виявляються значною мірою неарифметичними. Успіх перших трансляторів став стимулом до створення аналогічних програм на ін. обчисл. машинах. Проте мови перших трансляторів мали певні риси мов конкретних ЦОМ і тому були певною мірою *мовами машинно-орієнтованими* й лише незначною мірою полегшували працю програміста.

Починаючи з 1956, укр. математики запропонували кілька способів записування алгоритмів та методів програмування: метод граф-схем алгоритмів, метод спеціалізованих програмувальних програм і метод адресного програмування, оснований на спец. алгоритм. мові, названій *адресною мовою*. Метод граф-схем набув поширення як метод формалізації поняття *блок-схем програм* і вплинув на розвиток питань теорії програмування. Метод спеціалізованих програмувальних програм набув розвитку й застосування в працях щодо складання *бібліотек стандартних підпрограм* і надалі його було покладено в основу розробки серії обчисл. машин з розвинутою системою безпосередньої інтерпретації (*«Промінь»*, *«МИР»* та ін.).

Використання алгоритм. мов і побудованих на них машинно- та процедурно-орієнтованих мов програмування як засобів для описування алгоритмів стало новим ступенем у розвитку систем А. п.; воно дає змогу розв'язувати завдання сумісності алгоритмів для реалізації їх на різних ЦОМ, спрощувати процес одержування й наладжування програм (див. *Наладжувальні програми*), одержувати точну документацію алгоритмів, організовувати обмін програмами, створювати умови для зберігання й модифікації програм, розробляти для оптимізації їх методи, що дають змогу поліпшувати ті чи ін. їхні характеристики, а також виробляти певні вимоги щодо *алгоритмічних структур ЦОМ*.

Праці щодо створення адресної мови вплинули на вибір параметрів при конструюванні кількох вітчизн. обчисл. машин, зокрема *«Киев»*, *«Днепр»*, «Промінь» і *«Днепр-2»*; адресна мова поширилася як вхідна мова систем автомат. програмування для машин «Киев», *«М-20»* та ін.

За рубежем праці щодо А. п. розвивалися з 50-х років 20 ст. в тому самому напрямі, тобто в напрямі автоматизації використання бібліотек стандартних підпрограм, побудови мов програмування, таких, як ЮНІКОД, ФЕРАНТІ та багатьох ін. Разом з тим велика кількість таких систем призводила до відокремлення колективів, що працювали на різних системах, і утруднювала процес обміну розробленими алгоритмами. В зв'язку з цим виникла ідея створити універсальні *мови процедурно-орієнтовані*. Однією з таких мов є ФОРТРАН. Універсальність мови часто призводить до того, що одержані програми мають гірші параметри щодо витрат пам'яті або часу обчислювань за ними (порівняно з програмами, одержуваними за допомогою умілих прийомів, які враховують ті чи ін. особливості машини). Проте зростання *швидкодії ЦОМ* і кількості їх робить цю втрату маловідчутною порівняно з тими вигодами, які дає застосування універсальних мов. У 1958 створено проект міжнародної мови програмування, орієнтованої на клас задач обчисл. математики, відомої під назвою АЛГОЛ-58, доороблений варіант якої схвалено 1960 і названо *АЛГОЛом-60*. Ця мова в середині 60-х років 20 ст. стала основою для багатьох розроблюваних мов і трансляторів.

Осн. призначенням трансляторів є забезпечувати істотне прискорення процесу одержування програм у машинних мовах і повніше використання машинних ресурсів. Крім перекладу алгоритмів з однієї мови (мови машинної вхідної) на іншу (*мову проміжну* чи мову ЦОМ), транслююча система забезпечує ще виявлення синтаксичних і ряду семан-

тичних помилок в алгоритмах, і цим частково розв'язується завдання наладжування програм. Крім того, завдяки включенню в систему відповідних оптимізаційних блоків, які обробляють алгоритми, застосовуючи еквівалентні перетворення на рівні вхідної або вихідної мови, транслююча система ще може забезпечити одержання програм, які задовольняють певні вимоги щодо їх якості.

Окрім транслюючих систем, дедалі більшого значення набувають інтерпретуючі системи, що їх (як і транслюючі) можна реалізувати програмними й схемними засобами. Інтерпретатор здійснює пооператорне послідовне оброблення (переклад на машинні команди) операторів алгоритмів, записаних його вхідною мовою, та інтерпретацію їх — виконання машинних команд, які реалізують цей оператор. Процеси перекладу виконуваного алгоритму та реалізації (інтерпретації) його при використанні цих систем тісно пов'язані, й це дуже зручно для відпрацьовування й наладжування програм, зокрема, коли ставлять на ЦОМ задачі дослідницького характеру. Системи такого роду набули найбільшої актуальності в зв'язку зі здійсненням на ЦОМ *режиму розподілу часу*. Проте повторне виконання того самого оператора в таких системах пов'язане з повторним перекладом його на мову інтерпретації (як правило, мову машини), й наслідком цього є той факт, що за швидкістю виконання готових програм системи інтерпретації поступаються перед системами трансляції.

Проблема трансляції та інтерпретації мови програмування поділяється, по суті, на проблему аналізу й проблему синтезу. В основу побудови перших трансляторів покладено ідею компонування робочої програми з програм, що відповідають окремим операторам первісного алгоритму. Транслятори такого роду стали багатопроходовими, тобто трансляторами, що під час їхньої роботи запис оброблюваного алгоритму чи його еквівалента проглядається кілька разів. Так, під час одного з проглядань можна обробляти всі описові частини алгоритму, в яких наводять характеристики оброблюваних об'єктів інформації; під час другого проглядання перекладають на проміжну мову арифм. оператори й т. д.; нарешті, здійснюється заг. *пам'яті розподіл* і присвоєння справжніх адрес. У разі, коли вхідна мова системи А. п. виявляється придатною для описування алгоритмів трансляції, створенням таких систем значною мірою розв'язується проблема автоматизації самого процесу конструювання трансляторів. Перший крок у цьому напрямі в СРСР було зроблено на основі адресної мови й відповідного транслятора з неї для розширення вхідної мови й створення трансляторів для ін. цифрових обчислювальних машин.

Поява мов для описування граматик мов програмування (т. з. *метамов*) створила передумови для побудови алгоритмів синтаксичного контролю й аналізу, здатних за заданим описом граматики одного з даних класів мов і алгоритму цією мовою видавати його синтаксичне «дерево». Істотно при цьому, що процес синтаксичного контролю чи аналізу для багатьох мов виявляється незалежним від конкретних особливостей ЦОМ. Завдяки цьому блок аналізу транслятора стає універсальним і обслуговує трансляцію для кількох мов деякого класу. Транслятори, в яких аналіз оброблюваної програми здійснюється на основі формального опису синтаксису первісної мови (певною метамовою), наз. с и н т а к с и ч н о   к е р о в а н и м и.

Проблема конструювання синтаксично керованих трансляторів, орієнтованих на широкий клас граматик, які мають апарат для свого розширення, стимулювала появу нових праць щодо формалізації синтаксису й семантики мов програмування. Ці останні грунтуються на природному методі задавання семантики за допомогою індукції за синтаксичною структурою речень мови. Поряд з цим до проблеми формалізації алгоритм. мови долучається й проблема формалізації синтаксичного й семантичного описів її. Цю проблему розв'язують, створюючи метамови для описування синтаксису й на його основі — метамови для описування семантики алгоритм. мов. Процеси трансляції та інтерпретації, які для досить широкого класу мов програмування відбуваються завжди в тих самих умовах, можна описувати алгоритмами, які залежно від значень деяких параметрів, що визначають конкретну мову, виконують задане перетворення інформації. В разі, коли запис первісною мовою транслюється на якусь універсальну машинно-незалежну мову, досить близьку до внутр. мов певного класу ЦОМ, формальне описування синтаксису й семантики мови набуває машинно-незалежної форми, й це дає змогу автоматизувати процес побудови трансляторів.

Дальший розвиток ідей А. п. привів до створення *операційних систем*, у яких, крім процесу програмування (чи перекладу алгоритмів на мову інтерпретації), автоматизовано комплекс усіх етапів розв'язування задач на ЦОМ — від аналізу задачі до синтезу програми й одержання результатів у вигляді, придатному для зберігання, документування чи розмноження.

Разом з тим, використовуючи спец. системні програми, операційна система повністю автоматизує роботу обслуговуючого персоналу ЦОМ. Сучасні операційні системи являють собою організовану сукупність алгоритмів, програм стандартних і *програм обслуговувальних*, *інформаційно-довідкових систем* і архівів даних, а також систем трансляції та інтерпретації, які забезпечують пакетну обробку програм і багатопрограмну роботу в режимі розподілу часу та в реальному масштабі часу.

Праця спеціаліста з програмування при наявності таких систем набуває більш творчого характеру, бо тепер вона пов'язана з розробленням нових і досконаліших методів розв'язування задач на ЦОМ та зі створенням

потужних систем матем. забезпечення ЦОМ і їхніх комплексів. Разом з тим, розвиток систем А. п. істотно впливає на проектування алгоритм. структур *обчислювальних систем*, указуючи шляхи дальшого вдосконалювання їх, насамперед внаслідок підвищування рівня безпосередньої інтерпретації цих систем.

Осн. тенденцією в розвитку А. п. є прагнення створювати засоби, які забезпечують реалізацію задач (програмування, налагоджування й розв'язування їх та нагромаджування й зберігання програм і даних) при мінімальних затратах праці програміста. Розв'язання цього завдання зумовить дальше застосування ЦОМ у спец. галузях. У плані цих праць особливої гостроти набуває проблема уніфікації й стандартизації засобів матем. і тех. забезпечення ЦОМ.

Розширення сфер застосування ЦОМ, у свою чергу, пов'язане з розроблянням відповідних спеціалізованих мов і бібліотек. Спроби створити всеосяжні мови (СИМУЛА-67, *ПЛ-1* і *АЛГОЛ-68*) стверджують закономірність розвитку мов, орієнтованих на проблеми. При цьому на перший план випливає проблема автоматизації процесу розроблянні засобів матем. забезпечення, які задовольняють ефективну реалізацію цих мов, і в зв'язку з цим створення метатрансляторів — систем програмування, в яких вхідна й вихідна мови відіграють роль параметрів (описуваних певними метамовами).

Літ.: Ершов А. П. [та ін.]. Алгоритмические языки и программирование. В кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 2. К., 1970.

К. Л. Ющенко.

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ ПРОЕКТУВА́ННЯ ЦОМ — використання автоматичних засобів у процесі проектування цифрової обчислювальної машини. Автоматизувати проектування ЦОМ необхідно для того, щоб полегшити це проектування насамперед у тій його частині, яка стосується виконання найбільш трудомісткої для проектувальника роботи, щоб надати в його розпорядження засоби для швидкої реалізації прийнятих ним рішень, формалізовані засоби спілкування з іншими проектувальниками, ефективні засоби для удосконалювання процесу проектування і, відповідно, проекту. У зв'язку з розвитком *обчислювальної техніки* і розробкою нових машин завдання А. п. ЦОМ стає дедалі важливішим і актуальнішим. Особливий інтерес становить використання для А. п. ЦОМ універсальних *обчислювальних машин*. У цьому разі А. п. ЦОМ полягає в створенні й використанні спеціального матем. і тех. забезпечення універсальних обчисл. машин, орієнтованого на розв'язування задач проектування ЦОМ. В історії розвитку А. п. ЦОМ можна виділити три стадії. На першій стадії розробляли конкретні автомат. пристрої, розраховані на виконування певної конкретної дії в процесі проектування ЦОМ. На наступній стадії розробляли програми для універсальних ЦОМ, які реалізували той чи інший *алгоритм* розв'язування порівняно невеликої задачі, яка виникала в процесі проектування. Третя стадія характеризувалася розробкою систем програм. Тепер, автоматизуючи проектування ЦОМ, використовують комплексний підхід, який полягає в розробці системи тех. і матем. засобів.

А. п. ЦОМ припускає наявність методики проектування, яка відображує процес проектування ЦОМ. Методика проектування являє собою сукупність моделей, алгоритмів та інших матем. засобів, у термінах яких можна здійснювати розв'язування задач проектування. Процес проектування ЦОМ складається з системного, алгоритмічного, логічного, технічного й технологічного проектування. На етапі с и с т е м н о г о проектування ЦОМ здійснюється проектування архітектури обчисл. машини й розробка її заг. блок-схеми. А л г о р и т м і ч н е проектування стосується розробки алгоритмів функціонування таких блоків машини, як центр. *процесор*, вибору *команд системи* машини, а також розробку алгоритмів реалізації обраної системи команд тощо (див. *Алгоритмічний синтез ЦОМ*). Л о г і ч н е проектування передбачає одержання логіч. структури пристроїв обчисл. машини стосовно до обраної елементної бази (див. *Блоковий синтез ЦОМ*, *Елементний синтез ЦОМ*). На етапі т е х н і ч н о г о проектування розробляють конструкцію обчисл. машини. Суть т е х н о л о г і ч н о г о етапу полягає в розробці технологічного оснащення й документації для виготовлювачів. Поділ процесу проектування на етапи досить умовний, він залежить від стану розвитку теорії й практики проектування ЦОМ.

Оскільки історія розробки ЦОМ порівняно коротка, теорії проектування їх у строгому розумінні ще немає. Досвід проектування конкретних ЦОМ дає змогу виділити з процесу проектування лише якусь сукупність задач проектування. Строга постановка задачі проектування може бути тільки при наявності засобів для точного описування проектованої ЦОМ. Такими засобами є *мови описування пристроїв ЦОМ*. В основі будь-якого опису ЦОМ лежить опис її структури (схеми), з якого роблять висновок про те, з яких компонент вона складається і які між ними зв'язки. Крім того, треба, щоб було описано процес функціонування цієї структури.

В процесі проектування роблять кілька описів проектованої ЦОМ. Вони відрізняються один від одного мірою деталізації й докладності. Напр., на системному етапі проектування традиційної ЦОМ описують блок-схему машини, яка становить структуру з пристрою керування, операційного пристрою, вхідних і вихідних пристроїв, запам'ятовувального пристрою тощо; на тех. етапі проектування описують структуру, що складається з конструктивних блоків, напр., плат і таблиці міжплатових з'єднань; на логіч. етапі описують структуру, що являє собою сітку з *логічних елементів ЦОМ* тощо. Повний опис проекту становить ієрархію

структурних описів з певними алгоритмами функціонування компонент.

Залежно від характеру результатів проектування ЦОМ і використовуваної інформації про проект задачі проектування можна поділити на задачі синтезу, аналізу, оптимізації та оцінки. Задачі синтезу полягають здебільшого в побудові структур наступного ієрархічного рівня. Задачі аналізу передбачають визначання різних якісних характеристик проекту ЦОМ. Оптимізаційні задачі полягають у тому, щоб перетворювати наявні описи проекту відповідно до заданих критеріїв, щоб змінити характеристики проекту. Нарешті, задачі оцінок мають на увазі прогнозування значень характеристик майбутніх структурних описів, тобто схем машини.

Техніка розв'язування задач проектування визначається метою прогнозування й від використовуваного матем. апарату. Напр., на етапі логіч. проектування ЦОМ задачами синтезу є задача *синтезу автоматів структурного*, задача синтезу *комбінаційної схеми*, задача блокового синтезу ЦОМ тощо; задачами аналізу є задача перевірки правильності функціонування автомата, задача аналізу комбінаційної схеми, задача синхронізування роботи *автоматів композиції* і т. ін.; задачами оптимізації є задача мінімізації кількості *регістрів* операційного пристрою, задача оптимізації кількості рівнів *мікропрограмного керування* ЦОМ, задача мінімізації затрат апаратури тощо.

З погляду задач проектування системний та алгоритмічний етапи проектування характеризуються передусім задачами аналізу. При цьому об'єктом аналізу є архітектура ЦОМ. Одним із поширених засобів розв'язування задач цього етапу є техніка моделювання, яка грунтується на представленні заг. блок-схеми ЦОМ як моделі *масового обслуговування системи*. Системний та алгоритмічний етапи проектування — найменш формалізовані етапи. На логіч. етапі проектування є всі зазначені типи задач. Методи розв'язування задач грунтуються на результатах сучасної алгебри, *автоматів теорії*, *алгоритмів теорії*, *логіки математичної* тощо. Задачі тех. й технологічного етапів, які найбільше потребують автоматизації, не становлять принципових труднощів. Але постановка їх на обчисл. машині виявилася дуже важкою, бо для цього потрібна складна система обслуговування.

Для того, щоб використовувати як осн. засоби А. п. ЦОМ універсальні обчисл. машини, потрібно спочатку розв'язати такі задачі, як розробка алгоритмів і програм розв'язування задач проектування, а також розробка організації, зберігання, переміщування інформаційних масивів про проектовану ЦОМ та інших додаткових даних, необхідних у процесі проектування. При цьому передбачається розробка спец. техніки такого призначення: для обслуговування внесення змін у проект; обслуговування проектування в *діалога режимі* кількох проектувальників; обслуговування периферійних автомат. пристроїв, що їх використовують у процесі проектування й виготовляння схем ЦОМ; програмування задач проектування та обслуговування процесу проектування.

Є чимало експериментальних систем А. п. ЦОМ. Як правило, вони не універсальні. Їхнє призначення обмежується колом розв'язуваних задач проектування. Як приклад розглянемо такі системи А. п. ЦОМ: систему, яка обслуговує проектування машин сімейства «ІВМ-360», систему «ПРОЕКТ» і систему А. п. ЦОМ, яка грунтується на використанні мови *ЛЯПАС*. Система А. п. ЦОМ, яка обслуговує проектування «ІВМ-360», складається з сукупності алгоритмів і програм на «ІВМ-7090», призначених розв'язувати задачі тех. й технологічного проектування. Для цієї системи характерним є те, що в ній є стикування універсальної обчисл. машини, на яку розроблено систему, з спец. стендами та пристроями, які дають змогу автоматично розв'язувати деякі задачі типу перевірки правильності та надійності схем. Програми цієї системи поділяють на моделювальні й конструювальні. За допомогою моделювальних програм можна одержати результати моделювання схеми порядку 2—4 тис. логіч. елементів протягом 10—12 синхронізувальних тактів менше як за 30 *хв*. До конструювальних програм належать, напр., такі програми, як розподіл логіч. елементів по комірках та панелях; розміщування комірок на панелі; розміщування кабелю, що з'єднує панелі; проектування друкованого монтажу на панелі.

Система «ПРОЕКТ», що її розроблено в Ін-ті кібернетики АН УРСР, являє собою сукупність засобів спец. матем. забезпечення на ЕЦОМ «М-220», призначених розв'язувати задачі алгоритм., логіч. й тех. проектування центр. процесора ЦОМ. Ця система характеризується гнучким набором засобів для реалізації довільної методики проектування. Розв'язування задач проектування здійснюється в термінах директив проектування. Набір директив проектування досить багатий. Напр., на логіч. етапі проектування використовують такі осн. директиви: виділяння функціонального, керуючого та операційного блоків, блоковий синтез пристрою, синтез керуючого й функціонального блоків тощо. Крім власне директив проектування, в системі є великий набір зручних для користувачів директив обслуговування *пам'яті розподілу*, діалога, введення й виведення *даних* тощо.

Система А. п. ЦОМ, основана на використовуванні мови програмування ЛЯПАС, складається з *бібліотеки стандартних підпрограм*, у яких реалізовано алгоритми синтезу дискретних автоматів, розроблені в сучасній теорії автоматів.

Бурхливий розвиток ЦОМ, використовування *великих інтегральних схем*, ускладнення логіч. структури й схемна реалізація частин *математичного забезпечення ЦОМ* ведуть до зростання значення й до ускладнення за-

собів А. п. ЦОМ. Розробляється методика проектування ЦОМ сумісно з її матем. забезпеченням і комплекси тех. й матем. забезпечення її реалізації.

Літ.: Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин. «Кибернетика», 1967, № 5; Применение вычислительных машин для проектирования цифровых устройств. М., 1968 [бібліогр. с. 252—254]; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Математическое обеспечение автоматизированной системы проектирования вычислительных машин и систем (ПРОЕКТ). «Кибернетика», 1970, № 4; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. О языках описания данных в автоматизированной системе проектирования вычислительных машин (ПРОЕКТ). «Кибернетика», 1970, № 6; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. О методике проектирования вычислительных машин в системе ПРОЕКТ. «Кибернетика», 1971, № 2; Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971 [бібліогр. с. 502—504]; Кейс П. [та ін.]. Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на твердом теле. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965.

В. М. Глушков, Ю. В. Капітонова, О. А. Летичевський.

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ ПРОЦЕ́СІВ МИ́СЛЕННЯ — див. *Алгоритмізація творчих процесів, Доведення теорем на ЕОМ* і *Штучний розум.*

АВТОМАТИЗА́ЦІЯ УПРАВЛІ́НСЬКОЇ ПРА́ЦІ — комплексна перебудова управлінської праці на основі створення автоматизованих систем управління різних рівнів. Для нижчих ланок завдання А. у. п. розв'язують, створюючи *автоматизовані системи управління підприємством* або установою, для вищих — системи управління галуззю пром-сті або нар. г-вом (див. *Автоматизовані системи управління* в народному господарстві).

АВТОМАТИЗО́ВАНА СИСТЕ́МА ОБРО́БКИ ЕКСПЕРИМЕНТА́ЛЬНИХ ДА́НИХ — обчислювальна система, що здійснює машинну обробку результатів вимірювання величин або параметрів досліджуваного об'єкта чи явища й формування їх у зручному для зберігання й наступного аналізу вигляді та забезпечує у процесі функціонування (програмними й апаратурними засобами) обмін інформацією з експериментатором. Оброблену інформацію для експрес-аналізу виводять на пристрої короткочасного відображування (екран, електроннопроменеві трубки), для тривалого зберігання — на магнітні, паперові та *перфораційні стрічки*, перфокартки тощо. Осн. ланкою сучас. А. с. о. е. д. є ЦОМ. Залежно від того, чи входить досліджуваний об'єкт до складу керованих системою пристроїв, А. с. о. е. д. може бути або безпосередньо зв'язана з об'єктом, або автономна. Діапазон можливостей А. с. о. е. д. щодо керування об'єктом досліджень дуже широкий: від керування апаратурою вимірювань і знімання експериментальних даних до керування станами й динамікою об'єкта в процесі експерименту. Керуючі діяння на об'єкт, вироблені в А. с. о. е. д. за результатами обробки знятих експериментальних даних і прикладені до об'єкта в межах заданого періоду вимірювань, утворюють у процесі керування *зворотний зв'язок.* В основу розробки А. с. о. е. д. можна прийняти *алгоритм* керування експериментом, що являє собою замкнений цикл операцій розкривання невизначеності (див. мал. 1 у ст. *Система керування науковим експериментом*). А. с. о. е. д. складається з двох взаємозв'язаних частин: матем. забезпечення й тех. оснащення. Матем. забезпечення — це *програми* обчислювань, запрограмовані процеси сортування, перетворювання, редагування, нагромаджування, відображування, введення, виведення й керування цими процесами, включаючи вироблення керуючих діянь на зовн. об'єкти. Тех. оснащення — це пристрої *обчислювальної техніки* й зв'язку, що здійснюють операції з потоками дискретних і неперервних сигналів, які представляють величини, символи та їхні відношення. Тех. оснащення забезпечує виконання всього комплексу матем. операцій та їхніх комбінацій. Розробляють і запроваджують А. с. о. е. д., як правило, поетапно. Створенню матем. забезпечення передує вибір або розробка методів обчислювань, програмувальної системи, ф-цій і складу програми-диспетчера. Створенню засобів тех. оснащення А. с. о. е. д. передує аналіз і формування операцій у людино-машинній системі «експериментатор — об'єкт досліджень — обчисл. комплекс» (іл. між с. 40—41). Розробляючи матем. забезпечення, беруть за основу сукупність матем. моделей M_m досліджуваних явищ, програм експериментів, алгоритмів обчислювань і форм представляння результатів. Тех. оснащення розробляють, враховуючи специфіку матем. забезпечення, склад операцій у людино-маш. системі та інформаційні характеристики експериментальних даних. Найважливішими з цих характеристик є інформаційна ємність експерименту C_I (*біт*) — кількість одиниць інформації, що їх знімають з об'єкта під час проведення єдиного експерименту, й потужність потоку експериментальних даних (*біт/сек*) — кількість одиниць інформації, що їх знімають за одиницю часу. Ємність нагромаджувачів, пам'ять машини та ін. елементи А. с. о. е. д. проектують, беручи за основу прийняту інформаційну ємність експерименту. Потужність потоку даних визначає швидкодію пристроїв передавання, перетворювання та обчислювання даних.

Система «експериментатор — об'єкт досліджень — обчисл. комплекс» забезпечує виконання операцій керування (автоматичного чи ручного) об'єктом, процесів знімання експериментальних даних (активний експеримент) і вимірювання непрямих параметрів некерованого об'єкта (пасивний експеримент) і операції перетворювання й стискування даних. В А. с. о. е. д. можна здійснювати, крім того, експрес-аналіз одержаних результатів вимірювань, контроль за процесом індексації в маш. масивах і викликання з пам'яті машини на засоби відображення чи друкуван-

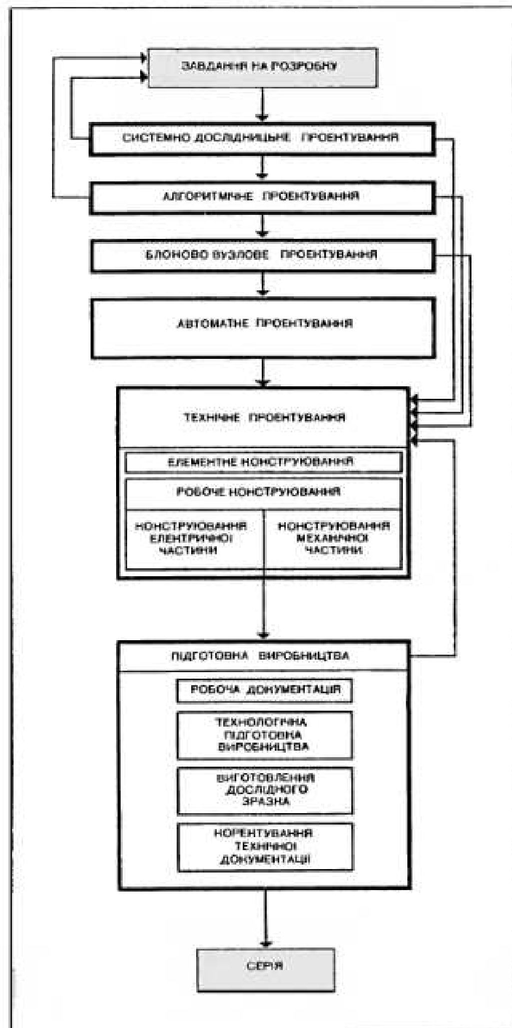
ня проміжних результатів перетворювання, стискування та обчислювань. Режим роботи А. с. о. е. д. включає, як правило, переадресацію маш. масивів, переривання маш. лічби, переформовування вивідних результатів обчислювань і первинне обробляння експериментальних даних. Маш. реалізацію зазначених операцій виконують за сервісними програмами, що входять у програму-диспетчер. Т. ч. автоматизація експерименту на базі А. с. о. е. д. не лише забезпечує маш. реалізацію обчислювань, а й змінює алгоритм виконання всієї сукупності операцій у системі «експериментатор — об'єкт дослідження — обчисл. комплекс».

Структуру побудови А. с. о. е. д. визначають: а) за метою експерименту (вивчення навколишньої природи — гідро-, аеро- й геофіз. дослідження, дослідження технолог. процесів у хім., металург. та ін. галузях пром-сті, випробовування зразків нової техніки й дослідження космічного простору тощо); б) за видами експериментів (активний, пасивний) та в) за ступенем невизначеності матем. моделі об'єкта досліджень. Ефективність функціонування А. с. о. е. д. оцінюють, як правило, за критеріями, що випливають з екстремальної властивості мінімізації часу ітерацій у замкненому циклі алгоритму керування експериментом. Осн. ефект роботи А. с. о. е. д. полягає в скороченні заг. часу експериментальних досліджень і досягають його завдяки швидкодії обчисл. пристроїв для обробки масивів експериментальних даних у максимально можливій кількості елементів замкненого циклу. Сучасні А. с. о. е. д. у сфері випробовувань зразків нової техніки забезпечують скорочення часу повної обробки експериментальних даних ~ у 10 раз, у задачах експрес-аналізу — в 20—30 і більше разів. При гідро-, аеро- й геофіз. дослідженнях значення фактора зменшення часу поступається, як правило, перед значенням ефекту стискування обсягів первинних експериментальних даних внаслідок обробки, обчислювань і формування результатів. Сумарний ефект стискування обсягів інформації внаслідок застосування А. с. о. е. д. може досягати 50-кратної величини (відношення обсягу первинних даних до обсягу збережуваних даних у *біт*). Робота А. с. о. е. д., оснащеної сучас. матем. забезпеченням і ЕОМ зі швидкодією до мільйона операцій за секунду, еквівалентна роботі сотень обчислювачів і техніків при ручних методах обробки експериментальних даних.

Літ.: Вычислительные системы, в. 35. Новосибирск, 1969; Ж у к К. Д. Автоматизація наукового експерименту. «Вісник АН УРСР», 1970, № 3; Механизация и автоматизация управления, № 5. К., 1970.

К. Д. Жук.

АВТОМАТИЗО́ВАНА СИСТЕ́МА ПРОЕКТУВА́ННЯ — комплекс технічних і математичних засобів, призначених для автоматизації процесів проектування з участю людини. Сукупність етапів проектування, пов'язаних певною технологічною послідовністю, спрямовано на розв'язування осн. задачі системи (ОЗС). Природно, що ОЗС, її процедурний зміст щодо А. с. п. значною мірою залежить від сфери застосування проектованих на цій системі тех. засобів. Так, напр., А. с. п. у сфері суднобудування у функціональному відношенні значно відрізняється від А. с. п. у сфері *обчислювальної техніки*. У першому випадку А. с. п. має добре розвинуті пристрої відтворювання великих форматів креслеників та введення їх в ЦОМ. У другому — ці пристрої поступаються перед пристроями виведення електр. схем, друкованих плат та ін.



Типова блок-схема процесу проектування на основі автоматизованої системи проектування.

конструкторсько-технологічних документів. У матем. забезпеченні ці системи характеризуються алгоритм. забезпеченням фіз. розрахунків, що супроводять процес проектування, змістом інформаційних структур, зовн. мовами системи тощо. Типову блок-схему процесу

проектування на базі А. с. п. показано на мал. Дослідження ОЗС дає змогу визначити склад і тех. вимоги до тех. і матем. засобів А. с. п.

Основу технічних засобів А. с. п. становить центр. обчислювач *(процесор)*, у ролі якого, як правило, виступає ЦОМ більшої потужності з ЦОМ-супутником або без неї (якщо потужності першої вистачає для розв'язання ОЗС). Оскільки А. с. п. видає графічну (креслярську) документацію, то зрозуміло, що ця система повинна мати добре розвинуті засоби введення, виведення й розмножування графічної інформації та документації. Оскільки розв'язування ОЗС алгоритмізовано недостатньою мірою, людина повинна втручатися в процес проектування, щоб керувати ним. Тому в складі тех. засобів повинні бути пристрої оперативного відображування графічної інформації та спец. пульти керування системою.

Математичне забезпечення А. с. п. складається з двох осн. частин: зовнішнього й внутрішнього. Зовнішнє матем. забезпечення — це матем. засоби спілкування людини (проектувальника) з системою. До його складу входять мови представлення первісної інформації, засоби поповнювання інформаційної системи та мови керування роботою А. с. п. (командно-операційні мови), які дають змогу вести діалог людина—система. Ці мови часто наз. «сервісними». Напр., запис наказу (команди) «ПОВЕРНУТИ КРЕСЛЕНИК № 0024/а 30° ОХ екр. № 3», означає: повернути кресленик на кут 30° відносно осі ОХ і вивести результат на екран № 3.

Внутр. матем. забезпечення — це матем. засоби, що забезпечують розв'язування ОЗС в автоматизованому режимі. Функціонально-внутрішнє матем. забезпечення А. с. п. складається з таких компонентів: з *операційної системи*, програмного забезпечення процедур розв'язування ОЗС та інформаційної системи (ІС). До складу операційної системи входять *транслятори* з зовн. мов А. с. п., програми розширення функціональних особливостей штатної операційної системи центр. обчислювача (програми, що забезпечують роботу нештатних тех. засобів центр. обчислювача) і т. з. програми завантаження (програми, які керують обчисл. процесом розв'язування процедур ОЗС в інтерпретуючому режимі).

Програмне забезпечення процедур розв'язування ОЗС складається, по-перше, з програми фіз. розрахунків, що забезпечують виконання всіх розрахунків, які супроводять проектування. Склад цих програм цілком залежить від того, в якій сфері застосовують А. с. п. Напр., у суднобудуванні — це розрахунки статики, динаміки й фіз. параметрів судна; в обчисл. техніці — це розрахунок електр. характеристик схем елементів, логічних ланцюгів та ін.; по-друге, до програмного забезпечення входять програми геом. перетворень, напр., програми побудови класичних ліній, тіл і фігур, програми зміни масштабу й деформації кресленика чи тіла, поворотів, зсувів та ін. маніпуляцій, а по-третє, програми організаційно-системного характеру, напр., програми відкривання й закривання програми, формування інформаційних (робочих) полів, програми забезпечення надійності зберігання інформацій, доступу до *масивів інформаційних* тощо.

Інформаційна система (ІС) включає в себе структуру та способи представлення інформації на носіях матем. пам'яті А. с. п.; програми функціонування ІС (поповнювання, видавання на запит і забезпечення процедури розв'язування ОЗС), напр., програми пошуку кресленика чи окремого його елемента, програма поповнювання кресленика ліній тощо; програми, що забезпечують самозберігання і статистичну обробку інформації. До них належать програми, які забезпечують дублювання й переміщування в зв'язку з динамікою (показниками попиту) обчисл. процесу, програми внесення змін у всю структуру інформаційного масиву на проектований виріб, програми очищання масивів від невикористаної інформації тощо.

Вище розглянуто функціональне визначення складу тех. і матем. засобів А. с. п., виходячи з спільності етапів проектування. Кількість вимог до цих засобів визначається в процесі досліджування ОЗС, при аналізі її окремих етапів та ступеня алгоритмізації їх. Слід відзначити, що саме вибирання оптим. складу тех. і матем. засобів та структури А. с. п. є предметом дослідження ОЗС у певній сфері людської діяльності.

Літ.: Глушков В. М. Перспективы автоматизации проектирования вычислительных машин. «Вестник АН СССР», 1967, № 4; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин. «Кибернетика», 1967, № 5; Глушков В. М. Основные принципы построения автоматизированных систем управления. К., 1969; Кейс П. [та ін.]. Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на твердом теле. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965.

Я. П. Дрималик, Ю. Т. Митулинський.

АВТОМАТИЗО́ВАНИЙ ПО́ШУК ДОВЕ́ДЕНЬ ТЕОРЕ́М — *взаємодія людини з обчислювальною машиною*, спрямована на пошук доведень теорем. Система А. п. д. т. включає комплекс засобів спец. матем. забезпечення ЕОМ, призначених для пошуку доведень теорем, а також для перевірки на очевидність і новизну тих чи інших тверджень у розглядуваній теорії та для коригування гіпотез, побудови природного доведення, для інформаційно-довідкових цілей тощо. Особливістю більшості робіт з *доведення теорем на ЕОМ* є прагнення створити універсальні *програми*, орієнтовані на самостійний пошук доведення теорем машиною. Такий підхід не відповідає досвідові, нагромадженому в інших галузях застосування ЕОМ. Природний шлях, яким іде машинна математика,— це розвиток систем *автоматизації програмування* та засобів взаємодії людини з машиною. Цей шлях є, очевидно, одним з реалістичних шляхів розв'язання проблеми А. п. д. т. Він передбачає зміщення центра ваги роботи в цій галузі

від універсалізації програм для ЕОМ до кооперації математика й ЕОМ, до створення спеціалізованих систем автоматизації програмування й *операційних систем*, які дають змогу в разі потреби швидко програмувати пошук доведення навіть однієї теореми і здатні працювати, коли потрібно, в реальному масштабі часу з математиком, котрий шукає доведення цієї теореми. Людина при цьому визначає принциповий напрям, план доведення, проміжні гіпотези, різні методи й прийоми доведення, а машина реалізує накреслений план пошуку, застосовує методи, що їх рекомендувала людина, робить проміжні логічні викладки та видає інформацію про стан пошуку, про одержані нею результати і про невдачі — для прийняття людиною рішення.

У матем. забезпеченні А. п. д. т. виділяють такі складові частини: засоби для описування *даних* у системі (зовн. та внутр. мови системи); систему *алгоритмів* для розв'язування різних задач, що виникають у процесі пошуку; засоби (мову) спілкування з системою в *діалога режимі;* спец. операційну систему; автоматизацію і методику програмування. Треба, щоб формалізована мова для записування матем. теорій була зручна для практичного використання в процесі роботи з системою. Для цього до неї вводять досить багатий запас первісних *предикатів*, операцій та ф-цій. Частина їхніх властивостей (напр., асоціативність) враховується вже у внутр. представленні мови, і це може значно полегшити пошук. Щоб підвищити ступінь практичності мови, доцільно включати до обсягу поняття ф-ції і певні конструкції, що їх часто використовують у звичайній мові. Під конструкцією в заг. випадку розуміють багатозначну n-місну функцію ($n=0, 1, \ldots$). Напр., вираз «підмножина множини M» можна розглядати як одномісну багатозначну ф-цію «підмножина» (M), аргумент якої набуває значень із класу множин (тобто має тип «множина»). Інші приклади конструкцій: *група*, підгрупа (G), одиниця (G). Треба, щоб в описах конструкцій були описи можливого типу їхніх аргументів і типу значень конструкції. Завдяки цьому можна будувати дерево конструкцій у вигляді суперпозицій відповідних конструкцій. Вибір придатної конструкції є одним з вирішальних моментів, які забезпечують успіх доведення.

Пошук доведення за допомогою машини зручно організувати як роботу евристичних програм різних рівнів, які включено до комплексу засобів спец. матем. забезпечення ЕОМ. Ієрархічна побудова програм дає змогу швидко здійснити пошук одного з варіантів доведень. Програма нижнього рівня реалізує т. з. алгоритм очевидності й містить набір операторів — підпрограм, завданням яких є елементарні перетворення оброблюваної інформації. Ця програма перебирає варіанти виведення, які використовують найпростіші логічні й теоретико-множинні прийоми, та перевіряє конкретні приклади і здійснює аналітичні викладки. Більшість перетворень, виконуваних у процесі роботи алгоритму очевидності, імітують дії спеціаліста у подібних ситуаціях. Програма вищого рівня (залежно від ситуації) перерозподіляє послідовність операторів 1-ї програми, задаючи тим самим якийсь новий метод доведень. Програми ще вищих рівнів призначені для вдосконалювання програм нижчого рівня, нагромаджування досвіду, самонавчання тощо. Якщо програми найнижчого рівня містять евристики, основою яких є найзагальніші методи доведення (метод ланцюгового висновку, метод аналогії тощо), то програми 2-го рівня використовують евристики, розробляти які набагато складніше (евристики *розпізнавання образів*, що стосуються вибирання найефективніших методів або вибирання найвигідніших цілей, семантичні евристики, що грунтуються на використанні інтерпретації середовища, і багатокрокові евристики планування). А програми найвищих рівнів використовують найскладніші евристики: евристики узагальнення попереднього досвіду й евристики індуктивних передбачень.

Осн. засобами програмування в системі А. п. д. т. є *мова процедурно-орієнтована* програмування та мова директив. Мову директив використовують для звертання до окремих робочих програм у процесі пошуку доведення. Директиву може вводити користувач, її можуть породжувати робочі програми в процесі роботи. Система програм, яка складає спеціалізовану операційну систему, розподіляє ресурси (компоненти обладнання ЕОМ) і визначає порядок виконування інструкцій, що надходять від користувача.

Проблема А. п. д. т. пов'язана з іншою складною й цікавою проблемою — моделюванням мислення й відрізняється від неї використанням передусім не якихось творчих здатностей машин, а їхніх потужних виконавчих можливостей при постійній взаємодії з людиною. З розвитком автоматизованих систем пошуку доведень і, насамперед, алгоритмів пошуку в напрямі побудови евристичної надбудови, роль математика полягатиме переважно у визначенні нових понять і в формулюванні нових пропозицій, а майстерність довести нову теорему, використовуючи машину, полягатиме у вмінні сформулювати ряд проміжних теорем і лем.

Літ.: Чернявский А. Л. Моделирование процесса решения сложных логических задач на вычислительных машинах (эвристическое программирование). «Автоматика и телемеханика», 1967, № 1; Глушков В. М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта. «Кибернетика», 1970, № 2; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 491—546].

Ф. В. Ануфрієв, З. М. Асельдеров, В. Ф. Костирко.

АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ в народному господарстві — системи управління підприємствами, установами, територіальними об'єднаннями, міським господарством, галузями, відомствами тощо, основані на регулярному застосовуванні сучасних математичних методів і технічних засобів автоматичної обробки

інформації в обліку, аналізі, плануванні, організації, проектуванні й підготовці виробничо-господарської діяльності.

Можливості автоматизації різних інформаційних процесів є основними наук.-тех. передумовами створення автоматизованих систем управління (АСУ) в нар. г-ві. За допомогою розроблених тех. засобів можна докорінно змінити технологію реалізації інформаційних процесів в управлінні: підвищити вірогідність та оперативність даних, які відображають стан виробничо-госп. діяльності, спростити процеси фіксування даних; поліпшити зберігання інформації й прискорити пошук і групування необхідних відомостей, звівши тим самим до мінімуму участь людини в підготовці звітної інформації; поліпшити зв'язки й інформованість різних ланок управління г-вом; упорядкувати документооборот, вилучивши з обігу всі проміжні дані; поліпшити форми подавання даних для управління (апаратура відображення даних); своєчасно розв'язувати складні задачі аналізу, прогнозування й оптимізації планування й організації нар. г-ва.

Тех. передумовою для побудови таких систем було створення й пром. виробництво ЕОМ, а потім і комплексних *обробки даних систем*, здатних автоматизувати інформаційні процеси. Створені за останні роки різні пристрої, які полегшують спілкування людини з тех. засобами обробки даних, особливо на етапах фіксування та відображення інформації, значно прискорили процес впроваджування АСУ в народне господарство.

АСУ характеризується кількісно новою організацією інформаційних процесів, інтегрованим характером усієї системи інформації, автомат. плануванням розв'язування задач, органічною єдністю засобів, методів та організації розв'язування задач управління. На основі автоматизації інформаційних процесів можливе використання найдосконаліших *моделей математичних* і методів розв'язування задач оптим. планування, проектування й управління.

Відмінності АСУ від традиційних систем управління, які грунтуються на ручному й механізованому виконанні інформаційних процесів чи на разовому використанні ЕОМ, сформульовано у вигляді спец. принципів, які визначають осн. підходи до створення й організації функціонування АСУ. Автоматизація і механізація окремих процесів і стадій управління не зменшує обсягу робіт по підготовці даних до розв'язування задачі. За цих умов велике місце займають питання введення й виведення інформації, низька типізація, а, отже, й розпаралелювання в підготовці програмного апарата, трудомістка експлуатація *програм* і тех. комплексу обробки інформації. Ці вади утруднюють розв'язування задач перспективного довгострокового прогнозування на основі оперативних і об'єктивних даних, оперативне коректування планових завдань, збільшують запізнювання в поданні даних для управління.

Системи управління в нар. г-ві ефективні лише тоді, коли, по-перше, задачі обліку й управління розв'язують в єдиному комплексі, коли охоплено всю систему руху інформації — від первинної до видавання систематизованих даних керуючим органам. По-друге, для ефективності АСУ необхідно, щоб функціональну діяльність, на яку спрямовано управління, було охоплено єдиною матем. моделлю (комплексом взаємоузгоджених матем. моделей різних рівнів), коли на основі цієї моделі автоматично ставлять і розв'язують задачі оптим. планування й управління. При цьому найістотніше, щоб матем. моделі й задачі оптимізації на основі цієї моделі були нерозривно пов'язані з внутрішньомашинною інформацією про хід виконання планових завдань і виключали участь людини на проміжних стадіях підготовки інформації для цих задач. Необхідно також, щоб розв'язування задач, порядок, організація й диспетчеризація визначалися й відбувалися здебільшого автоматично — лише в цьому разі системи управління можуть бути справді ефективними, інакше значно зменшуються продуктивність машини й оперативність розв'язування задач, а, отже, знижується й ефективність управління.

Фундаментальне значення має для АСУ принцип одноразового введення *даних* у машину, згідно з яким багаторазове використовування будь-яких відомостей під час розв'язування задач на ЕОМ не повинне приводити до повторного введення якихось даних у пам'ять ЕОМ.

Принцип автомат. фіксування інформації й фіксування відхилень вимагає макс. усунення людини від стадій фіксування фактів під час виконування процесів виробничо-госп. діяльності, спрямовує на відображення, де це можливо, тільки відомостей, які вказують на відхилення характеристик реального виконання якогось процесу від уявлень про нього. Цей принцип веде, в першу чергу, до скорочення інформації, яку вводять у машину, а тим самим і до зменшення помилок в інформації. Принцип суміщування повідомлень і приписів дає змогу зіставляти планову й технологічну інформацію з інформацією, яка відображує реальне виконання процесів, і організовувати ефективний контроль над змістом даних в АСУ. В цьому полягає одна з осн. переваг АСУ над іншими способами застосування технологічних засобів обробки даних в управлінні.

Організація інформаційних процесів в АСУ найефективніша в тому разі, коли інформація про подію фіксується майже одночасно з подією, яка відбувається, й виконується принцип нерегламентованого машиною введення повідомлень, а також принцип одночасного з введенням автомат. контролю й відбраковування повідомлень. Одночасності досягають за допомогою засобів автомат. фіксування інформації та внаслідок регламентованого оформлення виробничо-госп. документації на машинних носіях у вигляді, пристосованому

для введення даних у машину, або навіть одночасного з оформленнями документів введення даних у машину. Для виконання цих принципів потрібно, загалом кажучи, щоб ЦОМ використовували в *режимі розподілу часу*. Принцип автомат. контролю повідомлень приводить до різкого зменшення кількості помилок у даних, створює сприятливі психофізіол. умови для роботи служб інформації.

Наступним важливим принципом у проектуванні й організації функціонування АСУ є принцип базових масивів, який полягає в тому, що всю багаторазово використовувану інформацію треба спочатку згрупувати в спец. масиви. Завдання служб інформації полягає в тому, щоб підтримувати на рівні постійної готовності ці базові масиви. Принцип моделювального характеру базових масивів дає змогу визначати й організовувати ці масиви. Найповнішою й багаторазово використовуваною інформацією в АСУ є інформація, яка відображує уявлення (моделі) про процеси виробничо-госп. діяльності, факти виконання цих процесів, а також стан і динамічні характеристики об'єктів управління (інформаційна модель). Звідси стає зрозумілим принцип недоторканності базових масивів, який, у свою чергу, визначається принципом незалежності процесів фіксування інформації й розв'язування задач в АСУ. Цей принцип стверджує, що інформація, яка міститься в базових масивах, може змінитися тільки внаслідок виконання реальних процесів виробничо-госп. діяльності (інформаційна модель) або зміни проектної документації (конструкторсько-технічні, календарно-планові нормативи й приписи). Важливим є й принцип організації базових масивів в електромагн. пам'яті машини, бо перфокарткова організація пам'яті явно неефективна, потребує великої кількості обслуговуючого персоналу, приводить до використання застарілої техніки в орг-ції інформаційних процесів.

Характерною особливістю АСУ є й принцип внесення змін — постійне оновлювання базових масивів і самої схеми формування цих масивів, яке здійснюють, вносячи зміни в уже сформовані масиви. Велику роль у формуванні базових масивів, фіксуванні інформації й загалом у функціонуванні АСУ відіграє принцип замовчування: якщо в повідомленні про певний факт не відображено якихось регламентованих параметрів, то їх можна взяти з приписів. Те саме й для програми обробки даних: пропущений, неназваний параметр або покажчик беруть у загальноприйнятому (напр., середньостатистичному) значенні, щоб не припиняти розв'язування задачі. Принцип замовчування має виключне значення на стадії впровадження систем, особливо під час підготовки нормативної й технологічної інформації, бо дає змогу сформувати ці дані, поступово уточнюючи параметри й величини, які було спочатку якось задано, виходячи з принципу замовчування.

Для розвитку системи важливим є й принцип «гостинності», зокрема, базових масивів: розширення й інтенсифікація виробн. приводять до збільшення кількості одночасно фіксованих даних про об'єкти й процеси виробничо-госп. діяльності. Принцип інформаційної єдності даних вимагає однозначної (з врахуванням принципу замовчування) побудови структури даних, системи йменування даних, тобто, щоб одні й ті самі чи тотожні факти й об'єкти не можна було віднести до різних множин чи угруповань, щоб різні користувачі могли розуміти їх однаково. Принцип однозначності найменувань у системі визначає однозначний вибір ідентифікаторів (які дорівнюють в АСУ найменуванню об'єкта чи властивості). Застосовувати цей принцип в АСУ не тільки не доцільно, а й шкідливо: на різних стадіях обробки даних (особливо внутрішньомашинної) одним і тим самим об'єктам і показникам для підвищення ефективності обробки даних можуть присвоюватися різні ідентифікатори, тому важливо, щоб надалі було забезпечено однозначне переведення одних позначень в інші.

Сучас. засоби обробки даних різко зменшують вимоги до йменування даних — особливо порівняно з лічильно-перфораційними машинами. Тому в АСУ намагаються замінювати класифікатори, шифри й коди словниками та *мовами інформаційними*, які полегшують спілкування людини з системою. Інші вимоги ставлять в АСУ й до вхідних документів, і до форм відображування даних. Напр., в АСУ не треба уніфікувати форми первинної інформації — якоюсь мірою це навіть суперечить одному з найголовніших принципів, які лежать в основі ефективності АСУ,— принципові фіксування відхилів. Ця сама вимога правильна і щодо вихідної інформації. Тут найправильнішим є послідовне втілювання в життя принципу відображення даних у вигляді, максимально зручному для користування. Принцип уніфікації звертання до базових масивів важливий і для обміну інформацією між споживачами й АСУ, а також між різними АСУ чи АСУ різних рівнів.

Часто говорять про принцип результативності інформації в АСУ, підкреслюючи тим самим, що проміжна інформація в процесі розв'язування задач — це «внутрішньомашинна» справа. Має значення й принцип автомат. інформаційного стикування задач, який полягає в тому, щоб уникати проміжного введення інформації між двома різними задачами, якщо тільки не потрібний аналіз і коректування даних на основі знань та інтуїції висококваліфікованого спеціаліста.

При створенні АСУ висунуто ще й принцип нових задач, відповідно до якого для нової техніки обробки даних, для найновіших матем. моделей і методів треба не просто переводити традиційно організовані інформаційні процеси на нову тех. базу, а докорінно реорганізовувати всю систему обробки даних та управління. Особливо легко простежити за цим на організації бухгалтерського обліку в АСУ (див. *Бухгалтерського обліку автомати-*

зація), де певною мірою відбувається повернення (по спіралі) до меморіально-ордерної форми рахівництва. Конкретизацією цього принципу є принцип моделювального характеру розв'язування планово-управлінських задач, який відображує нагромаджений досвід розв'язування цих задач. Особливо важливим є те, що імітаційне моделювання як засіб розв'язування оптимізаційних задач інваріантне по відношенню до використовуваних різноманітних критеріїв, які залежать від ситуації. Принцип різнорівневих моделей підкреслює необхідність будувати й використовувати моделі різного ступеня детальності й агрегації для різних цілей (прогнозування, прикидань плану, перспективного й поточного планування, оперативного планування та диспетчеризації). Однак при цьому треба, щоб було виконано вимогу автомат. інформаційного стикування цих моделей, у т. ч. імітаційних моделей та інформаційної моделі.

Керуючу інформацію в АСУ, як і первинну, завжди можна віднести до якихось об'єктів і процесів. Отже, найелементарніші відомості відображувального та приписувального характеру завжди мають об'єктно-процесну прив'язку. Принцип об'єктно-процесної прив'язки первинних і керуючих документів відіграє важливу роль на стадії розробки й створення систем. Не всі дані, які виробляються в АСУ, мають строгу спрямованість на функції, що їх реалізує ця система, т. з. звітна інформація в киберн. аспекті здійснює те саме інформаційне стиковування задач і моделей різних рівнів.

Добитися всіх переваг АСУ над іншими формами організації обробки даних у системах управління можна тільки тоді, коли виконано принцип автомат. організації й диспетчеризації розв'язування задач і реалізації інформаційних процесів в АСУ. З усього сказаного випливає, що необхідно сформулювати й принцип моделювального характеру матем. забезпечення АСУ — не тільки для того, щоб реалізувати моделювальні алгоритми розв'язування задач планування й управління і зобразити процеси та об'єкти у вигляді інформаційної моделі, а й для того, щоб розв'язувати задачі організації, диспетчеризації та реалізації інформаційних процесів. Тех. комплекси АСУ повинні забезпечувати виконування перелічених принципів.

АСУ аж ніяк не ліквідує функцій управління як функцій аналізу та прийняття рішень, докорінних змін зазнають тільки технологія й організація матеріальної основи управління — процесів фіксування, циркуляції, обробки та використовування інформації. Вже перші розроблені та впроваджені АСУ довели свою життєздатність та ефективність. Впроваджено *автоматизовані системи управління підприємством* й АСУ технологічними процесами; автоматизація й системна організація інформаційних процесів набули великого поширення на транспорті, в торгівлі, у викладанні і в охороні здоров'я. ЕОМ використовують для оперативного перерозподілу ресурсів у галузях та відомствах, для розв'язування задач розміщування виробн. і матеріально-тех. постачання. В деяких міністерствах введено в дію перші черги галузевих АСУ (ГАСУ). XXIV з'їзд накреслив розгорнуту програму впровадження АСУ в народне г-во й поставив завдання розробити загальнодержавну автоматизовану систему збирання інформації, обліку, планування та управління нар. г-вом на базі єдиної держ. мережі обчисл. центрів (див. *Обчислювальних центрів мережі*).

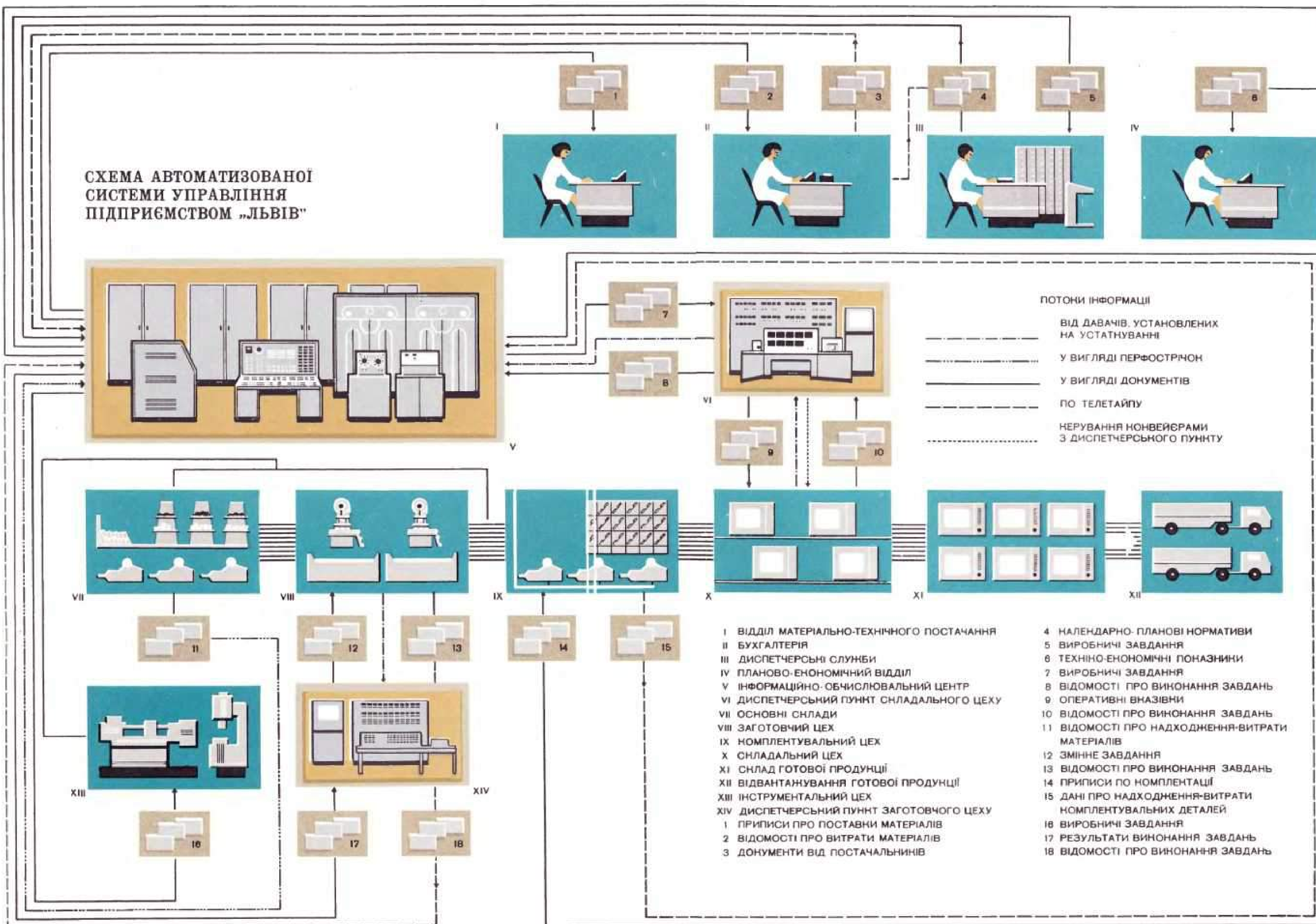
Літ.: Автоматизированные системы управления предприятием. К., 1966; Кибернетика и вычислительная техника, в. 12. К., 1971; Механизация и автоматизация управления, № 3. К., 1972; Актуальные проблемы управления, кн. 1. М., 1972; Глушков В. М. Введение в АСУ. К., 1972 [бібліогр. с. 304—308].

В. В. Шкурба.

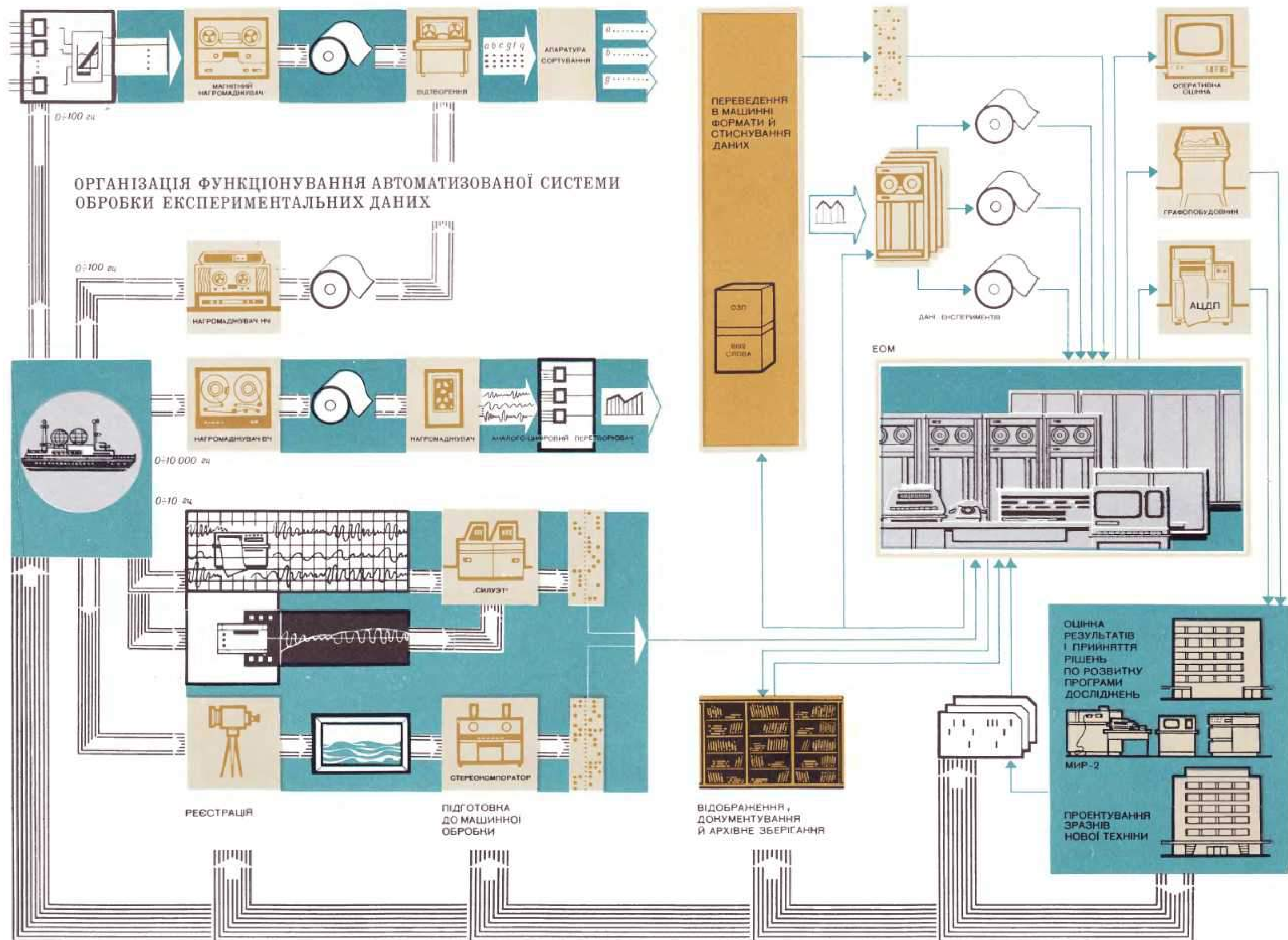
АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВОМ (АСУП) — системи управління виробничо-господарською діяльністю підприємств, у які органічно входять інтегровані *обробки даних системи*, головна мета яких — автоматизація інформаційних процесів на підприємстві й удосконалювання форми організації виконування цих процесів.

Складність управління сучас. виробництвом привела до заміни простого керівництва системами управління. Це принципово нові форми управління, основані на суворій упорядкованості виконування багатьох функцій управління, зокрема на координуванні спец. функцій безпосереднього управління (див. *Багатоконтурна система автоматичного керування*). Складність управління підприємствами зумовлюється багатьма причинами. Головні з них: велика кількість елементів системи (устаткування, робітники, технологічні операції) і високий ступінь їхнього взаємозв'язку в процесі виробничо-госп. діяльності, невизначеність результатів виконання багатьох процесів (брак, збої, несвоєчасне постачання, нерегулярність попиту) тощо. Істотним є те, що об'єктами й суб'єктами управління на підприємстві є люди, а регулювати поведінку людей можна не так уже й явно та прямолінійно. Складні ситуації виникають ще й тому, що підприємства постійно змінюються, розвиваються як системи (є самоорганізовуваними системами), що до завдань управління ними належать і проектування, й управління процесами цієї зміни та розвитку.

Створення і впровадження на підприємстві АСУП приводить до того, що інформаційним процесам, організації їх, проектуванню, підготовці й виконуванню приділяють таку саму увагу, як і виробничим. У структурі управління підприємством виникає спеціалізований підрозділ — *інформаційно-обчислювальний центр підприємства* (ІОЦ). Цей підрозділ відповідає за впорядкування, регламентацію та безпосереднє виконування інформаційних процесів на підприємстві. Осн. потоки інформації реалізуються на підприємстві через його ІОЦ.



До ст. Автоматизовані системи управління підприємством.



До ст. Автоматизована система обробки експериментальних даних

Сучасні тех. засоби обробки *даних* дають змогу організувати виконування інформаційних процесів на основі принципово нової технології. На підприємствах в умовах АСУП внаслідок того, що рух і переробка інформації в багато разів прискорюються, вдається значно скоротити запізнювання між відхилами від нормального, запланованого ходу процесу, з одного боку, і прийняттям рішень — з другого; з'являється можливість бачити «температурний листок» підприємства, швидше виявляти виниклі чи можливі збої і своєчасно запобігати їм чи ліквідувати їх. АСУП дає змогу розв'язувати й такі задачі, що їх раніше не розв'язували через трудомісткість, затрати часу і витрати,— це оптим. перспективне й оперативне планування виробн., оперативний розподіл і використовування ресурсів. По-новому організовують і роботу апарату управління. Працівник управління стає невід'ємною ланкою в людино-машинній системі управління, що нею є АСУП, праця його чіткіше проектується, планується, регламентується й контролюється.

Суть розробляння АСУП — удосконалювання системи потоків інформації (як матеріальної основи всієї системи управління) на підприємствах, системи виробляння й приймання перспективних і оперативних рішень. Істотно змінюється й організація власне інформаційних функцій в управлінні. ІОЦ поступово «вбирає» в себе всі роботи (і служби) інформаційного характеру й перетворюється на єдиний координаційно-керуючий центр підприємства, де знання, досвід і навички спеціалістів управління якнайкраще поєднуються з швидкодією автомат. засобів переробки інформації. Більшість розв'язуваних на підприємстві задач (розробляння техпромфінплану підприємства, обчислювання затрат і собівартості продукції, прогнозування тех. показників і продуктивності праці) дають прийнятні вірогідні результати лише тоді, коли організовано людино-машинні методи розв'язування їх.

В *автоматизованих системах управління* (АСУ) за допомогою сучасних тех. засобів реалізуються процеси, характерні для інформаційних систем: фіксування інформації про ті процеси виробничо-госп. діяльності, які відбуваються, відображування стану й динаміки цієї діяльності в т. з. базових масивах, які виконують функцію інформаційної моделі підприємства. Інформаційна модель підприємства за допомогою програмного апарату матем. забезпечення АСУП дає змогу одержувати різні систематизовані дані про всі етапи виробничо-госп. діяльності. Інформаційна модель постачає й первісні дані під час розв'язування задач економ. прогнозування та планування. Реалізація в системі управління тільки функцій інформаційної системи значно скорочує документооборот на підприємстві, ліквідуючи різноманітні т. з. проміжні документи, введені, як правило, для раціоналізації традиційних ручних форм документообороту, приводить до підвищення вірогідності та оперативності відомостей, поліпшує культуру виробн. й управління на підприємстві. Найбільшого економ. ефекту вдається досягти тоді, коли на підприємстві розв'язано задачі прогнозування і особливо оптим. планування виробн. Своєчасне прогнозування можливих збоїв у виробн. (напр., внаслідок некомплектності постачання матеріалів чи виробництва заготовок) дає змогу вжити заходів по ліквідації цих збоїв чи їхніх наслідків. Розв'язання задач оптим. добору програм підприємства й розподілу їх за періодами дає змогу значно підвищити рентабельність виробн. Розв'язання задач оптим. *календарного планування* виробн., оптим. розподілу матеріальних та трудових ресурсів для виконання робіт сприяє поліпшенню фондовіддачі, завантаження устаткування та використання ресурсів.

Принципово «позамашинними» в АСУП залишаються: 1) первинні документи, в яких фіксуються безпосередньо результати виконання процесів виробничо-госп. діяльності; 2) приписи технологічного та організаційного характеру, що їх розробляє людина; 3) заявки на одержання тих чи інших даних, на розв'язування задачі; 4) вихідні документи і дані, які виводяться з пам'яті ЕОМ на різні друкувальні чи індикаційні пристрої. Вся інша (проміжна) інформація, яка займала велике місце в традиційних системах управління, стає суто «внутрішньомашинною».

В АСУ виділяють функціональні та забезпечувальні *підсистеми*. Ф у н к ц і о н а л ь н і підсистеми безпосередньо виконують функції управління виробничо-госп. діяльністю. Такими функціями є, напр., конструкторсько-технологічна підготовка виробн.; тех. підготовка виробн.; постачання, комплектування й складування; виробництво (основне й допоміжне), збут, реалізація продукції, фінансові операції та бухгалтерський облік; економ. аналіз виробничо-госп. діяльності; облік кадрів. Залежно від складності управління тією чи іншою функцією та її виконування в АСУП і виділяють ту чи іншу підсистему, напр. підсистему тех. підготовки виробн. чи оперативного планування та диспетчеризації осн. виробництва.

З а б е з п е ч у в а л ь н і підсистеми виконують власне інформаційні процеси в АСУП і відповідають за підготовку та організацію їх. Найчастіше виділяють системи матем., програмного, тех., інформаційного й організаційного забезпечення. До матем. забезпечення включають моделі, методи й *алгоритми*, їхнє обгрунтування розв'язування задач і виконування інформаційних процесів в АСУП. Програмне забезпечення — це комплекс програм та інструкцій до них для розв'язування задач на ЕОМ. Тех. забезпечення включає техніку автоматизації й механізації виконування інформаційних процесів в АСУ, а також інструкції щодо експлуатації їх та забезпечення надійного функціонування. Інформаційне забезпечення регламентує потоки й підготовку інформації в АСУП, організацію викону-

вання інформаційних процесів в ІОЦ. Організаційне забезпечення регламентує дії кожного працівника управління, кожного робітника по відношенню до системи інформації і всієї схеми прийняття рішень в АСУП. Програмне забезпечення поділяють на спеціальне та загальне. Спец. програмне забезпечення спрямоване на одержання документів і відомостей виробничо-госп. значення. Загальне програмне забезпечення включає *програми*, призначені для перетворювання даних (сортування, групування, злиття) безвідносно до їхнього змісту. Чим вищий рівень загального програмного забезпечення, тим легше будувати спец. програмне забезпечення.

Найповніше всі перелічені елементи АСУП представлено, напр., у системі «Львів», яку розроблено і впроваджено на Львівському телевізійному заводі. В цій системі всі інформаційні процеси, включаючи фіксування й підготовку первинної інформації, яка відображує хід і стан виробн. і госп. діяльності, обробку цієї інформації й підготовку різної звітності, зосереджено в координаційно-керуючому центрі (ККЦ) підприємства. В ККЦ зосереджено інформаційно-обчисл. комплекс системи, з'єднаний *каналами зв'язку* з місцями виникнення інформації — робочими місцями, верстатами, складами, диспетчерськими пультами цехів та дільниць і пультами тех. контролю. Виконування виробничих процесів, надходження матеріалів та комплектувальних деталей, здавання готової продукції, фінансові операції фіксуються в спец. документах і передаються в ККЦ імпульсами від давачів і *лічильників*. Уся ця інформація нагромаджується в запам'ятовувальних пристроях *електронних обчислювальних машин* і використовується для підготовки довідкових і звітних документів та розв'язування різних задач.

У системі «Львів» можна розв'язувати такі задачі. Задачі управління виробництвом. Оперативно-календарне планування заготівельних цехів: визначання величин партій деталей і періодичності їх пуску у виробн.; перевірка достатності виробничих потужностей цеху; побудова оптим. плану-графіка з урахуванням коефіцієнта важливості пуску-випуску деталей; видавання цехові оперативного плану виробн. з урахуванням наявності деталей у незавершеному виробн.; щоденне видавання зведення результатів роботи цехів; видавання щоденних змінних завдань тощо.

Управління цехами масового виробн. (цех складання телевізорів, деревообробний цех), яке полягає у видаванні змінних завдань, змінних рапортів, добових рапортів та оперативних планів виробн. Управління комплектувально-заготівельним цехом полягає у видаванні чотириденного дефіциту, тризмінного дефіциту надходження, витрачання й наявності деталей на кожну добу. Визначання річної потреби в дублерах оснащення в місячному резерві для заготівельних цехів, складання графіків споживання й виробн. оснащення й інструменту.

Задачі планування матеріально-тех. забезпечення виробн. і техніко-економ. планування: визначання нормативних затрат на осн. виробництво (по телевізорах), відхилень від нормативних затрат, щоденного виконання плану реалізації, податку, обороту й прибутку по телевізорах, щоденного виконання плану цехами осн. виробництва в натуральному й грошовому виразі. Планування кількості осн. робітників за професіями та розрядами й фонду заробітної плати цехам осн. виробництва; визначання потреби в матеріалах і комплектувальних виробах для цехів осн. виробництва, дефіциту матеріалів і комплектувальних виробів, рівня запасів матеріалів на складах заводу, наднормативів і неліквідів на складах заводу, складання зведеної відомості щоденного виконання плану цехами осн. виробництва, плану реалізації, прибутку й рентабельності по заводу.

Задачі обліку включають: облік товарно-матеріальних цінностей на складах заводу, товарно-матеріальних цінностей у складах цехів і відділів, осн. засобів, готової продукції, реалізації телевізорів, касових операцій, банківських операцій, розрахунків з підзвітними особами, розрахунків з дебіторами тощо, залишків, надходження й витрати сировини й матеріалів, залишків, надходження й витрати комплектувальних виробів, розрахунки з постачальниками за одержані матеріальні цінності, складання балансу деталей власного виробн.

У системі розв'язано задачі контролю над роботою і простоями осн. устаткування, завдяки цьому можна організувати дійовий облік завантаженості й використання устаткування по всьому заводу, а особливо на найвідповідальніших ділянках виробн.

Для забезпечення ефективного розв'язування цих задач управління виробн., планування та обліку, нагромадження облікової й підготовки довідкової інформації в системі «Львів» розроблено й функціонує сучасний комплекс обробки даних, оснащений спец. програмно-матем. апаратом. Як центр. обчислювач комплексу використовують дві (спочатку була одна) універсальні ЕОМ «Минск-22», доукомплектовані блоками переривання програми (БПП), блоком додаткових команд (БДК), блоком захисту пам'яті (БЗП), блоком динамічного аналізу збою (БДАЗ), блоком зв'язку з оператором (БЗО). В ЕОМ, що їх використовують як центр. обчислювач, передбачено об'єднання їх за допомогою блока обміну (БО) по зовнішній та оперативній пам'яті й зовнішньому пристрою (іл. між с. 40—41).

Характерною особливістю роботи ЕОМ у складі тех. комплексу АСУП є системний режим її використовування: робота в замкненому контурі управління підприємством в *реальному масштабі часу*, автоматизоване розв'язування багатьох взаємопов'язаних задач управління окремими виробничими підрозділами підприємства й підприємством загалом, автомат. керування черговістю й по-

слідовністю розв'язування задач. Схемно-програмний апарат розподілу часу, яким керує програма-диспетчер, дав змогу сумістити безперервний обмін оперативною інформацією з процесами розв'язування осн. задач управління й обробки даних. Інші пристрої, що їх розроблено в тех. комплексі системи «Львів», забезпечують дистанційне введення в осн. обчислювач оперативної виробничої інформації від різних джерел безпосередньо в момент її виникнення, а також виведення необхідних повідомлень у різні виробничі підрозділи і служби апарату управління виробн. Взаємозв'язано з обчисл. комплексом працюють розроблені спеціально для системи «Львів» диспетчерські пункти заводу й цехів, табло й лічильники для візуального стеження за параметрами, які визначають заг. динаміку виробництва.

Впровадження системи «Львів» привело до значного зростання ефективності управління підприємством, виробничо-госп. діяльності загалом, забезпечило додаткове збільшення випуску продукції на 7%, зниження рівня запасів на 20%, прискорення оборотності оборотних засобів на 10%, скорочення інженерно-технічного та адміністративно-управлінського персоналу. Економ. ефективність системи становить близько півмільйона карбованців економії за рік, строк окупності її — один рік.

Літ.: Автоматизированные системы управления предприятием. К., 1966; Автоматизированные системы управления предприятием, в. 1—4. К., 1968—69; Механизация и автоматизация управления, № 3. К., 1969; Кибернетика и вычислительная техника, в. 12. К., 1971; Глушков В. М. Введение в АСУ. К., 1972 [бібліогр. с. 304—308]. *В. В. Шкурба.*

АВТОМАТИЗОВАНОГО НАВЧАННЯ КЛАС — учбове приміщення, обладнане технічними засобами для реалізації програмованого навчання. Використовують його для поліпшення якості керування навчальним процесом, для повнішої реалізації потенціальних можливостей *програмованого навчання* та контролю. Осн. особливістю автоматизованого навчання є керована самостійна робота слухача. Тех. пристрої А. н. к. призначено для забезпечення процесу навчання, в результаті якого слухачі набувають нових знань, умінь і навиків. Застосування А. н. к. в навчальному процесі приводить до збільшення продуктивності праці викладача й тих, кого навчають. Кожного слухача уявляють відносно самостійним об'єктом керування, тобто керування його діяльністю здійснюють і викладач, і *навчальна програма*. Система керування навчанням при цьому є двоступеневою. На верхньому ступені перебуває викладач, на нижньому — тех. навчальні пристрої (див. *Навчальна машина*). Така побудова системи керування дає змогу розподіляти перероблювану інформацію відповідно до пропускної здатності її ступенів.

Ступенева (ієрархічна) побудова системи керування процесом групового навчання забезпечує перехід від одноканального (усередненого) розімкненого керування навчанням до багатоканального (диференційованого) замкненого керування. Кожний слухач при цьому може вивчати матеріал на доступному йому рівні складності й у посильному темпі. Викладач, завдяки тому, що частину його функцій покладено на навчальні пристрої, одержує змогу найактивніше й цілеспрямовано керувати навчально-виховним процесом. Одним з його гол. завдань на уроці в класах для автоматизованого навчання є заповнювати своєю діяльністю все те, чого не враховано чи не можна врахувати наперед у навчальній програмі, а також раціонально поєднувати програмовані методи навчання з традиційними. Вивільнення викладача від багаторазового дублювання однакових питань дає йому змогу якісніше проводити індивідуальну роботу з тими, кого навчають, повніше використовувати свою кваліфікацію й методичну майстерність.

За діапазоном виконуваних у навчальному процесі завдань А. н. к. поділяють на спеціалізовані та багатофункціональні. Відмітною рисою багатофункціональних класів є те, що в них форми взаємодії між людиною і тех. пристроями практично не залежать від змісту й мети навчання (або контролю). Це означає, що один і той самий клас можна використовувати для навчання (або контролю) з різних предметів. Основу устаткування будь-яких типів А. н. к. становлять навчальні або контролюючі пристрої. Ними оснащують робочі місця тих, кого навчають. Крім цих пристроїв, у комплекти устаткування найдосконаліших А. н. к. включають кіноапаратуру й телевізори, діапроектори й епіпроектори, відображувальну й реєструючу апаратуру та ін. Застосовують цю апаратуру, щоб раціоналізувати працю викладача на різних етапах навчання, щоб вивільнити його від виконання трудомістких і нетворчих функцій по збиранню та обробці статистичного матеріалу. Багато А. н. к. мають пульти керування всім комплексом тех. засобів, використовуваних у класі. Наявність таких пультів полегшує обслуговування та експлуатацію класів для автоматизованого навчання, дає змогу здійснювати оперативний контроль навчання всієї навчальної групи. Блок-схему типового А. н. к. наведено на мал. 1.

За характером керування робочими місцями розрізняють два типи А. н. к. До першого належать класи, устатковані тех. пристроями автономного виконання. Працюють з такими пристроями, як правило, індивідуалізовано, викладач лише спостерігає за навчанням і, коли треба, відповідно впливає на того чи ін. слухача. До 2-го типу належать А. н. к. з централізованим керуванням. Такі класи мають заг. систему зв'язку робочих місць (пультів) слухачів з пультом керування. Навчання й контроль у таких класах можуть здійснюватися в індивідуальному темпі й у темпі, що його встановлює викладач. Найдосконалішими й найперспективнішими А. н. к. з централізованим керуванням є навчальні комплекси, виконані на основі ЦОМ (іл. між с. 472—473). Завдяки великій швидкодії

та обсягові пам'яті машини А. н. к. є ефективним засобом керування навчанням великої кількості учнів (до сотень і тисяч чол.). При цьому є змога використовувати найдосконаліші (зокрема, адаптивні) навчальні програми й способи взаємодії людини з тех. пристроями, забезпечувати виконання ширшого кола навчальних завдань. Окрім реалізації навчальних програм, навчальний комплекс забезпечує ще й збирання та обробку статистичного матеріалу про якість засвоєння знань

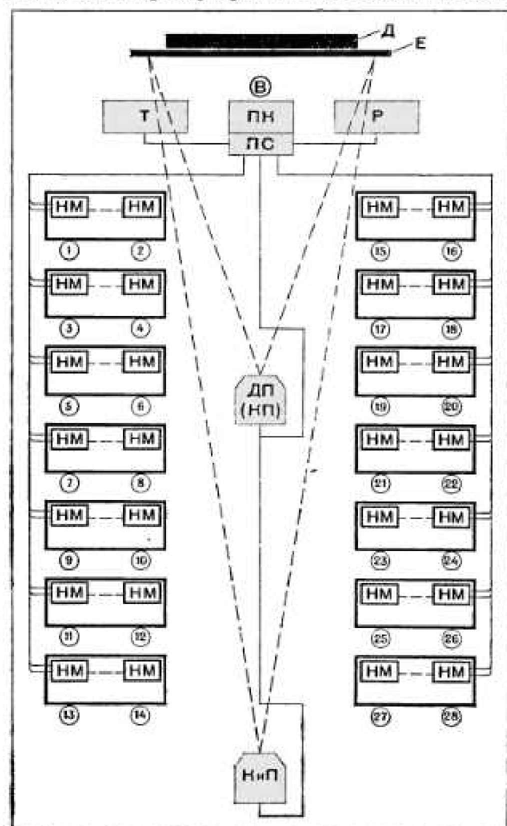


Схема типового класу автоматизованого навчання. *1 — 28* — робочі місця слухачів; *В* — робоче місце викладача; *ПК* — пульт керування; *НМ* — навчальні (контролюючі) машини; *КнП* — кінопроектор; *ДП* (*КП*)—діапроектор (кадропроектор); *Д* — класна дошка; *Е* — екран; *Т* — відображувальне табло; *Р* — реєструюча апаратура; *ПС* — пристрій спряження *ПК* з технічними засобами.

і цим створює умови для точного кількісного аналізу й прогнозування процесу навчання.

До складу навчального комплексу, крім ЦОМ і робочих місць слухачів, входять пульт керування, засоби зберігання й видавання навчальної інформації та засоби відображення і реєстрації результатів навчання. Пульт керування призначено для здійснення поточного контролю за навчанням і керуванням тех. засобами комплексу. Засобами зберігання навчальної інформації можуть бути альбоми програмованих матеріалів, діафільми, кінофільми або відеомагнітофонні записи. Залежно від типу цих засобів і способу видавання інформації визначають і конструкцію робочих місць слухачів. Перший тип робочих місць забезпечує адресацію слухача до певної сторінки чи параграфа навчальної програми, другий — експонування з екрана проектора, третій — експонування з екрана телевізора замкненої телевізійної системи і т. д. Перспективність використання навчальних комплексів зумовлюється й тим, що застосування їх для навчання великої кількості слухачів можна зробити економічно вигіднішим, ніж використання А. н. к., оснащених тех. засобами автономного виконання. Див. також *Взаємодія людини з обчислювальною машиною.*

Літ.: Ростунов Т. И. Программированное обучение и обучающие машины. К., 1967 [бібліогр. с. 128—129]; Применение ЭВМ в учебном процессе. М., 1969; Столаров Л. М. Обучение с помощью машин. Пер. с англ. М., 1965.

О. Г. Михнушов, М. А. Шишонок.

АВТОМА́ТИКА (грец. αὐτόματος — самодіючий) — 1) Галузь теоретичних і прикладних знань про автоматично діючі пристрої й системи. Термін А. стосується значно ранішого періоду розвитку досліджень і практичних розробок у галузі автом. регулювання й керування. Зі становленням і швидким розвитком *кібернетики* в рамках цього нового наук. напряму визначився великий розділ — *кібернетика технічна,* до якої складовою частиною ввійшла й А. як *автоматичного керування теорія* разом з теор. і прикладними основами створення й організації функціонування відповідних тех. засобів *(керуючих обчислювальних машин,* керуючих пристроїв, давачів, *виконавчих механізмів* та пристроїв, що забезпечують взаємодію людини з обчислювальною машиною в *системах автоматизованих).* 2) Сукупність механізмів і пристроїв, що діють автоматично.

Див. *Агрегатна уніфікована система, Пневмоніка, Телемеханіка* й *Універсальна система елементів промислової пневмоавтоматики.*

Б. Б. Тимофєєв.

«АВТОМА́ТИКА» — український науково-технічний журнал. Висвітлює наукові досягнення в галузі теорії автоматичного регулювання, екстремальних, оптимальних, адаптивних і самонастроюваних систем, інформаційних та інтерполяційних систем, біоніки та евристичного програмування, комплексної автоматизації та застосування обчислювальної техніки, нових елементів і пристроїв автоматики, надійності й технічної діагностики, теорії автоматів та цифрових обчисл. машин. Видає «А.» Інститут кібернетики АН УРСР з 1956. Виходить 6 раз на рік укр. мовою, а також англ. мовою у США.

АВТОМАТИ́ЧНА ОБРО́БКА ДА́НИХ — виконування комплексу операцій над даними за допомогою цифрової обчислювальної машини (ЦОМ) для перетворювання різних відомостей і фактів на відомості, що являють цінність з певного погляду. А. о. д. є обов'язковою складовою функцією АСУ. Осн. носіями відомостей на підприємствах, в установах і орг-ціях є документи — первинні, на-

громаджувані, технологічні — та графіки, креслення, схеми, номенклатури-цінники, прейскуранти, специфікації та ін.; даними можуть бути й показники контрольно-вимірювальних приладів і лічильників, годинників і табло; вони можуть виникати під час листування, нарад, зборів і бесід. Все це характеризує різноманітність форм подавання, джерел виникнення й засобів реєстрування та зберігання даних. Прикладами типових завдань А. о. д. є нараховування зарплати на підставі відомостей про час, який затратили робітники, або обсяг продукції, яку вони виробили; інвентаризація складського майна на основі аналізу накладних на одержані й відправлені товари, визначання потреби в сировинних ресурсах підприємства на основі виробничого плану, облік збуту товарів, облік попередніх замовлень квитків на літак, обробка історій хвороб для збирання статистики і т. д. Як правило, А. о. д. піддають *масиви* даних. Звичайно до масиву включають однорідні за формою й структурною організацією записи; як правило, число записів у масиві не визначене; в кінці масиву після останнього запису дається вказівка про вичерпання масиву. Розрізняють осн. масиви, до яких включаються записи про стан певних об'єктів обліку або планування, і масиви поточних записів про зміни, які стосуються цих самих об'єктів. Основні масиви, що мають усі необхідні нормативно-розцінкові, довідкові й ін. сталі дані, періодично оновлюються на основі масивів поточних даних і підтримуються в стані готовності. Чим повніші за змістом основні масиви, тим економічніше можна провадити А. о. д.

Процес А. о. д. складається з одержування вихідних даних, перетворювання їх за певним планом, з урахуванням нових даних, і повідомлення результатів. Одержування вихідних даних передбачає три стадії: збирання, або первинний облік, перезаписування для надання фактам форми, зручної для обробки, та перевірку. При збиранні даних факти фіксують у момент звершення їх, а обробку даних можна виконати й пізніше, в міру потреби. Для автомат. збирання даних створюються спец. пристрої (табельні годинники з перфострічками або перфокартами, буквоперфоруючі пристрої, *читаючі автомати* та ін.). Механізація первинного збирання даних — одна з найважливіших передумов А. о. д., бо первинний облік трудомісткіший за обробку інформації. Осн. носіями інформації при первинному обліку є папір, перфокартки й перфострічки; однак для дальшої обробки за допомогою ЦОМ їх треба замінювати ефективнішими для алгоритмічної обробки на ЦОМ носіями, такими, як *стрічки магнітні, диски магнітні* та ін. Дані з одних носіїв на інші, як правило, переписуються автоматично програмами або спец. пристроями. Одержуючи вихідні дані, велику увагу приділяють перевірці їхньої повноти й точності та відповідності встановленим для них форматам і формам подання, а також — границям області зміни (щодо числових величин). Перетворювання даних полягає в перегруповуванні їх та зміні їхніх значень. Характерною рисою цього процесу є багаторазове повторювання однотипних операцій для послідовних груп даних. Перегруповування даних включає в себе зміну послідовності й вставляння, вилучення або вибір окремих позицій масивів. Необхідність перегруповувати дані виникає тоді, коли записи певного типу використовуються для складання кількох звітів; далі, в процесі збирання даних, у зв'язку з одночасною фіксацією їх, вони можуть бути й змішані довільно. Та оскільки процедури обробки й організації масивів ефективніше реалізуються над упорядкованими послідовностями записів, то записи звичайно піддають *сортуванню даних*. Типовими процедурами обробки даних є: пошук і вибирання записів масиву, що мають зазначену властивість; ущільнювання масиву або вилучання деяких реквізитів із записів масиву; перекомпоновування реквізитів у запису; зливання записів кількох масивів у записи нового масиву; переміщування значень реквізитів з одних записів в інші; обчислювання значень вихідних даних за арифм. формулами; приймання елементарних рішень. Різноманітність форм подання даних у масивах, зумовлена різноманітністю пристроїв збирання й носіїв інформації, потребує включення до системи А. о. д. процедур взаємних перетворювань даних на різні форми подання й формати. Повідомлення одержаних результатів полягає в *редагуванні даних* і поданні їх у формі, зручній для споживачів вихідних даних; споживачами можуть бути й людина, й нова програма А. о. д.

Для ефективного проектування процесів А. о. д. широко застосовують *мови програмування*. Необхідними властивостями мови програмування, орієнтованої на А. о. д., є можливість оперувати зі складними ієрархічними структурами даних; різноманітність допустимих у ній форм подання й форматів даних; розвинутий апарат для введення й виведення даних; можливість звертатися до довільної вершини дерева даних, змінювати структуру дерева даних і будувати нові дерева; наявність засобів перекомпоновування, зливання, ущільнювання, пошуку, вибирання і т. д. та можливість видавати документи заданої форми. Мовами програмування для описування процесів А. о. д. є *КОБОЛ*, який дуже поширився як стандартна мова, орієнтована на А. о. д., ТАБСОЛ, ФАКТ, *ПЛ-1* та розроблені в Радянському Союзі мови *АЛГЕК, АЛГЕМ* та інші.

Внаслідок розширення масштабів і збільшення темпів виробництва та значного ускладнення зв'язків між галузями нар. г-ва й підприємствами не можна раціонально керувати господарством, не переробляючи величезного обсягу інформації, що на окремих підприємствах і в орг-ціях обчислюється десятками мільйонів показників та мільярдами позначень. Потік інформації безперервно

збільшується внаслідок величезного зростання суспільного виробн. й дедалі ширшого застосування математичних методів при визначенні різних показників діяльності підприємств та організацій. А. о. д. забезпечує не лише скорочення адм.-управлінського персоналу, а й, найголовніше, — швидке, повне й точне збирання даних, точну обробку їх для одержання рішень, які дають можливість оперативно керувати складним виробництвом.

Літ.: Королев М. А. Обработка экономической информации на электронных машинах. М., 1965; Китов А. И. Программирование информационно-логических задач. М., 1967 [бібліогр. с. 327]; Лавров С. С., Гончарова Л. И. Автоматическая обработка данных. Хранение информации в памяти ЭВМ. М., 1971 [бібліогр. с. 156—160]; Schmidt R. N., Meyers W. E. Electronic Business Data Processing. New York — Chicago — San Francisco — Toronto — London, 1963; Грегори Р., Ван Горн Р. Система автоматической обработки данных. Пер. с англ. М., 1965; Современное программирование. Языки для экономических расчетов. Пер. с англ. М., 1967. *Л. П. Бабенко.*

АВТОМАТИ́ЧНИЙ АНА́ЛІЗ МЕДИ́ЧНО-БІОЛОГІ́ЧНИХ ПРОЦЕ́СІВ — обробка даних про біомедичні процеси, представлені у формі кривих, яка виконується частково або повністю за *алгоритмами*, що реалізуються на обчислювальній машині широкого призначення чи на спеціалізованій ЕОМ. Об'єктом аналізу може бути будь-який із процесів, що відбуваються в організмі, лікувальному закладі чи в зовнішньому середовищі, представлений у вигляді графіка, кривих, ряду чисел, карт, розподілу біопотенціалів тощо. Графічними виразами медично-біол. процесів є електрокардіограма (ЕКГ), електроенцефалограма (ЕЕГ), електроміограма (ЕМГ), імпульсна активність (ІА) нервових клітин, графіки температури та ін. Розрізняють аналіз дискретних сигналів (напр., ІА) і аналіз неперервних сигналів (напр., ЕЕГ, ЕМГ та ін.).

Графічне представлення інформації застосовують у *кібернетиці біологічній* для вивчення властивостей *біологічної системи* для побудови її фіз. або матем. моделі за допомогою аналогових і цифрових ЕОМ. У *кібернетиці медичній* ця форма представлення інформації потрібна для діагностики, прогнозу, оцінки перебігу захворювання та впливу лікарських засобів при моделюванні лікувального процесу, зміни стану зовнішнього середовища та ін. Моделі аналізу медично-біол. інформації є переважно математичними. Широко застосовують автокореляційний і спектральний аналіз складного біол. процесу, напр., аналіз скоротливої функції міокарда можна здійснювати методом балістокардіографії. Цей метод аналізу дає змогу виділяти на ЕКГ випадкові й періодичні складові досліджуваного процесу навіть у тих випадках, коли дослідник не бачить нічого, крім безладно розподілених у часі хвиль і піків.

Все частіше використовують означення кроскореляційної ф-ції, яка показує ступінь зв'язку між двома-трьома процесами в певні моменти часу, напр., між частотами дихання й серцевого ритму, між тривалістю фаз серцевого циклу і ступенем підвищення тиску крові в порожнинах серця та ін. Істотно, що ЕОМ при цьому не тільки обчислює ряди показників, а й будує графіки автокореляційної та ін. ф-цій. Дуже поширеною є автомат. побудова *гістограм*, амплітудних розподілів, часових інтервалів, фаз і латентних періодів. Перспективним є застосування алгоритмів багатофакторного аналізу, бо процеси в живому організмі є результатом взаємодії багатьох факторів. Для побудови моделей цих процесів необхідні кількісні оцінки кожного фактора зокрема.

Апарат *математичної статистики* й *імовірностей теорії* не є вичерпним для А. а. м.-б. п., успішно можна поєднувати статистичні, часові й логічні методи аналізу. До таких методів треба віднести вивчення спектра в динаміці, статистичне вивчення часових співвідношень між екстремальними точками й точками перегину, методи евристичного вивчення показників та ін.

Для А. а. м.-б. п. існують спеціалізовані обчислювальні пристрої, які передбачають обробку інформації за жорсткою схемою різних алгоритмів. Прикладами таких пристроїв є «Нейрон-1» (СРСР), «САТ-400» (США), «АТАС-401», «АТАС-501» (Японія) та ін. Обчисл. машини широкого призначення обробляють інформацію за широким списком алгоритмів. Однак проблема введення інформації в ЦОМ, пов'язана з автомат. аналізом, викликає значні труднощі. Тому для зчитування і переведення її, напр., на перфострічку застосовують пристрої типу «Силуэт», «Маск» і «График», а введення інформації здійснюється за допомогою перфострічок і перфокарток. Іноді для введення інформації у вигляді електричного сигналу використовують *аналого-цифрові перетворювачі*, напр., «Биокод».

З середини 60-х років в СРСР і за кордоном (США, Японія, Франція, Англія і ФРН) ведуться роботи по створенню спеціалізованих біомедичних обчисл. комплексів, призначених для збирання й автомат. обробляння біоінформації.

Літ.: Математический анализ электрических явлений головного мозга. М., 1965; Кибернетика и вычислительная техника, в. 4. К., 1969; Кибернетика в медико-биологических исследованиях. М., 1971. *А. О. Попов, І. Д. Пономарьова.*

АВТОМАТИ́ЧНИЙ ЦИ́ФРО-ДРУКУВА́ЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ — див. *Алфавітно-цифровий друкувальний пристрій.*

АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ ТЕО́РІЯ — розділ *кібернетики технічної*, об'єктом дослідження якого є системи автоматичного керування (САК) різної природи й ступеня складності. А. к. т. розробляє принципи побудови систем керування й вивчає основні закономірності процесів, які відбуваються в них. А. к. т. є однією з наукових і методологічних основ, на яких цілеспрямовано об'єднуються зусилля спеціалістів різного профілю, які беруть участь у створенні сучасних складних САК. При вивченні процесів керування А. к. т. абстрагується від природи й конструктивних особливостей складових частин САК. Замість реальних об'єктів в А. к. т.

розглядають їхні адекватні *моделі математичні*.

Основи А. к. т. як науки закладено в працях англ. фізика Дж.-К. Максвелла (1831—79), рос. вченого І. О. Вишнеградського (1832—95), словацького теплотехніка А. Стодоли (1859—1942) і рос. математика О. М. Ляпунова (1857—1918). А. к. т. досліджує дві осн. проблеми: 1) *систем автоматичного керування аналіз* та 2) *систем автоматичного керування синтез*. Першою було поставлено таку найпростішу, але актуальну й досі, задачу керування, яка полягає в підтримуванні заздалегідь заданих сталих значень керованих координат об'єкта при відомих і змінюваних тим чи іншим способом збуреннях, які діють на нього. Осн. завданням систем такого роду (систем стабілізації) є компенсувати *збурювальні діяння* на об'єкт. Це можна здійснювати двома різними способами, які відображають два основні принципи керування, використовувані в теорії та практиці побудови САК.

За принципом керування САК ділять на *системи керування розімкнені* й *системи керування замкнені*. У перших *керуюче діяння* формується у функції виміряного тим чи іншим способом збурювального діяння з метою компенсувати його. Найістотніша вада такого способу керування полягає в тому, що при цьому принципово неможливо компенсувати діяння інших невимірюваних збурень. Крім того, розімкнені САК принципово не здатні досить тривалий відрізок часу керувати нестійкими об'єктами керування. В замкнених САК реалізується фундаментальна ідея *зворотного зв'язку*, згідно з якою відхилення дійсних значень регульованих координат від їхніх потрібних значень використовують, щоб формувати керування, яке вертає систему до потрібного стану. Ця ідея, відома під назвою принципу к е р у в а н н я з а в і д х и л е н н я м (або керування зі зворотним зв'язком), лежить і нині в основі дії більшості сучасних САК різного ступеня складності й призначення. Універсальність цього принципу проявляється, зокрема, в тому, що застосовуючи його, можна керувати нестійкими об'єктами керування.

Характер осн. проблем А. к. т. найлегше визначити, розглянувши одну з типових задач керування. Нехай задано об'єкти керування, описані рівнянням $\dot{x} = f(x, u, t)$, де x — вектор фазових координат, та його початковий стан $x(0) = x_0$. Потрібно визначити таке програмне керування $u^* = u(t)$, яке переводить об'єкт із стану x_0 в деякий інший кінцевий стан x_T. При цьому треба, щоб на траєкторії руху $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$ досягався *екстремум* деякої міри якості роботи системи.

Так, напр., якщо об'єктом керування є літальний апарат, а заданою метою — зліт і досягнення положення x_T, то мірою якості може служити час T виконання програми або витрата енергії на виконання програми. Таким чином, виникає задача визначення незбуреного руху (за термінологією Ляпунова) $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$, який має бажані, зокрема, екстремальні якості. Однак, усяка спроба реалізувати подібний програмний рух виявляється необгрунтованою навіть за точної реалізації $u^* = u^*(t)$, бо завжди існують неврахованi раніше (нехай навіть дуже малі, але постійно діючі) збурення (напр., у випадку літального апарата — турбулентність атмосфери тощо) і крім того через різні причини дійсний початковий стан $x_0^* \neq x_0$. Тому дійсний рух об'єкту буде істотно відрізнятись від програмного. У зв'язку з цим виникає задача визначення такого додаткового керування із зворотним зв'язком $v = u - u^* = v(y)$, де $y = x - x^*$ — відхилення від програмного руху, яке забезпечувало б загасаючий характер збуреного руху $\dot{y} = \varphi(y, v(y), t)$, де $\varphi(\cdot) = f(y + x^*, v + u^*, t) - \dot{x}^*$, тобто забезпечило б стійкість потрібного незбуреного руху. Таким чином, центральною проблемою в А. к. т. й, зокрема, в теорії замкнених систем є проблема стійкості в тому чи іншому розумінні. Оскільки до останнього часу А. к. т. застосовували майже виключно до об'єктів керування, математичні моделі яких описувалися за допомогою диференціальних або скінченнорізницевих рівнянь (лінійних або нелінійних), то при аналізі стійкості САК широко використовували якісні методи прикладної математики. Використовуючи спочатку існуючі в математиці методи розв'язання задач аналізу стійкості, А. к. т. надалі стимулювала їхній розвиток і розвинула нові, які не існували раніше в теорії коливань, частотні методи аналізу стійкості лінійних систем (див. *Стійкості критерії*), застосовувані при аналізі стаціонарних і нестаціонарних САК — і неперервних, і дискретних, з розподіленими й зосередженими параметрами. Специфічні особливості нелінійних САК привели до постановки нової задачі про абсолютну стійкість, найефективніші розв'язки якої тепер вдається одержувати за допомогою частотних критеріїв абсолютної стійкості. Якщо до 50-х років 20 ст. при аналізі стійкості в А. к. т. як матем. моделі САК як правило використовували детерміновані моделі, які в багатьох випадках виявлялися неадекватними реальним САК, то в 60-х роках значного прогресу досягнуто в постановці й розв'язуванні нових задач аналізу стохастичної стійкості САК, чиє поводження описується лінійними й нелінійними диф. або різницевими рівняннями, коефіцієнтами яких є випадкові функції часу з відомими статистичними характеристиками. Відповідна модифікація розвинутих раніше в А. к. т. частотних критеріїв стійкості й тут дала змогу одержати конструктивні результати.

Оскільки багато САК працюють у режимі *автоколивань*, то природно, що в А. к. т. істотного розвитку набули методи аналізу періодичних режимів, основані, зокрема, на використанні в своєрідній формі методу малого параметра.

А. к. т. розвивалася на основі тісного взаємного зв'язку з кількома розділами математики. При цьому в міру розширення, ускладнення й підвищення вимог до якості роботи САК створювалися й нові методи досліджування цих систем. Так, напр., потреба враховувати випадковий характер збурень спричинила появу нового розділу в А. к. т.— статистичної динаміки САК і залучення для розвитку цього наукового напряму методів *імовірностей теорії* та *випадкових процесів теорії* й поставила перед ними нові завдання.

Для А. к. т. 2-ї половини 50-х — 60-х років 20 ст. характерний інтенсивний розвиток методів синтезу САК, які розв'язують 2-у з осн. проблем А. к. т., а саме: визначають структуру й параметри керуючих пристроїв (регуляторів) на основі строго сформульованих вимог до характеру збуреного руху керованого об'єкта при відомій його матем. моделі й заданих обмеженнях, накладуваних на керування і клас збурень, які діють на об'єкт керування. Істотну роль при постановці й розв'язуванні задачі синтезу САК, природно, відіграє вибір *критерію якості систем автоматичного керування*. Оскільки до роботи САК часто ставлять різноманітні, інколи й суперечливі вимоги, то очевидно, що розв'язати проблему оптимізації таких систем — аж ніяк не тривіальне завдання.

Серед різних методів синтезу, розвинутих в А. к. т., особливе місце через специфічний характер постановки задачі й обмежень, накладуваних на елементи САК, займають методи синтезу інваріантних і автономних САК (див. *Інваріантність систем автоматичного керування* та *Автономність*). Стосовно до лінійних систем при обмежених за модулем збуреннях, які діють на САК, задача інваріантності формулюється як задача відшукання такої структури і значення параметрів керуючого пристрою (регулятора), які б забезпечували інваріантність вимушеного руху певної частини координат керованого об'єкта відносно заданої групи збурень, які діють на нього. Стосовно до лінійних (стаціонарних і нестаціонарних; неперервних і дискретних) систем проблеми інваріантності й автономності досить повно досліджено й було продемонстровано багато прикладів практичного використання одержаних розв'язків. Спеціально розглянуто питання фізичної реалізовності інваріантних систем. Для нелінійних САК (слід зазначити, що всі реальні САК треба віднести до цього класу) все ще немає досить докладно розроблених інженерних методів синтезу інваріантних систем.

Близькою до цих задач є задача параметричної інваріантності (теорії чутливості), тобто одержання незалежності поведінки системи від зміни коефіцієнтів диф. або різницевих рівнянь, що описують її поведінку.

Домінуюче положення в А. к. т. займають методи синтезу САК, основані на використанні інтегральних критеріїв оцінки якості, для яких як підінтегральну функцію використовують яку-небудь опуклу (найчастіше квадратичну) функцію фазових координат і керування, обчислювану на заданому скінченному $(0, T)$ або напівнескінченному інтервалі часу. При цьому задачу синтезу оптим. керування збуреним рухом формулюють як задачу варіаційного числення: знайти керування $u(x)$, яке надає мінімуму функціоналові $I = \int_0^T f(x, u)\, dt$ при обмеженнях: $u \in R$, $\dot{x} = f(x, u, t)$. Тут останнє рівняння — рівняння об'єкта; $x(t)$ — вектор фазових координат; u — вектор керуючих діянь; R — закрита область *допустимих керувань*. Для дискретних систем аналогічним чином формулюється задача дискретного варіаційного числення. Найповніше розроблено методи розв'язування цієї задачі для лінійних динамічних систем при квадратичному функціоналі I, названі методами аналітичного конструювання регуляторів. Ці методи дають змогу знайти керування у вигляді функції фазових координат, тобто знайти таким способом структуру й параметри керуючого пристрою (регулятора). Труднощі розв'язування задач аналітичного конструювання регуляторів для нелінійних об'єктів спричинили появу різних методів синтезу субоптимальних САК, для яких вдається одержати розв'язок задачі в аналітичній формі. Але при цьому лишаються труднощі аналітичного й обчислювального характеру при визначенні оцінки близькості оптимального та субоптимального керувань. Сформульовані в А. к. т. задачі синтезу оптим. програмного керування нелінійними об'єктами за наявності обмежень на керування у вигляді нерівностей стимулювали появу таких неокласичних методів розв'язування нових задач варіаційного числення, як *Понтрягіна принцип максимуму* та *програмування динамічне* Беллмана. Ці методи виявились дуже ефективними для певних програмних керувань, але спроби використання їх для керування збуреним рухом, тобто для керування в реальному масштабі часу, скільки-небудь складними об'єктами в багатьох випадках наштовхуються на майже нездоланні труднощі обчислювального характеру.

Оскільки роботами багатьох авторів доведено можливість розв'язувати задачі синтезу статистично оптим. систем керування з залученням того самого апарату неокласичного варіаційного числення, то й тут можливості реалізації одержуваних теоретичних результатів такі самі.

Оцінюючи стан проблеми розробки методів синтезу оптим. САК, слід сказати, що розв'язано лише окремі задачі синтезу замкнених нелінійних систем керування, а вся ця проблема все ще чекає свого розв'язання, бо наявні результати не можуть задовольнити потреби практики проектування та конструювання САК.

Роботами рад. і зарубіжних учених за останні роки методи синтезу оптим. систем узагаль-

нено й перенесено на порівняно мало досліджений в А. к. т. клас систем — на *системи керування з розподіленими параметрами.*

Для А. к. т. 60-х років 20 ст. характерним є чітке розуміння тієї істотної обставини, що прийняття апріорі якоїсь незмінної матем. моделі об'єкта керування неадекватне в багатьох випадках дійсному станові речей при проектуванні й (або) експлуатації САК. В одних випадках це наслідок того, що через складність процесів, які відбуваються в об'єкті керування, одержання його матем. моделі на основі відомих фіз. або хім. законів виявляється практично нерозв'язною задачею, в інших — це може бути наслідком того, що в процесі експлуатації САК під впливом неконтрольованих зовнішніх і (або) внутрішніх збурень відбуваються зміни її параметрів. Внаслідок цього з'явився новий науковий напрям в А. к. т.— методи *ідентифікації об'єктів керування.* Тут, як і взагалі в А. к. т., найістотніші й найповніше завершені результати одержано при розв'язуванні задач ідентифікації лінійних систем, а для нелінійних систем задовільні розв'язки одержано лише в деяких окремих випадках.

Для А. к. т. кінця 50-х і початку 60-х років 20 ст. характерна поява групи нових розділів її, пов'язаних з дослідженням нових різновидів САК, назви яких утворено сполученням слова «само» з іншими словами, напр.: «самонастроювані», «самоорганізовані», «самонавчальні» та ін. системи керування. Слово «само» якраз і відображає суть справи, а саме: процес автомат. пристосовування (адаптації) системи до змінюваних внутрішніх і зовнішніх умов її роботи. В останні роки на зміну цій строкатості в нових термінах прийшов єдиний термін «адаптивні системи керування», під яким розуміють клас САК, які дають змогу внаслідок обробки поточної інформації поповнювати нестачу апріорної інформації й так досягати найкращих, з певної точки зору, значень показника якості роботи системи (див. *Адаптація* в кібернетиці).

З цього класу адаптивних систем керування найпростіші — замкнені *системи екстремального регулювання* — можна виділити в самостійний підклас. Тут, як і для задач А. к. т. взагалі, залежно від характеру збурень існують детерміністична й статистична постановки задачі дослідження; першу формулюють у вигляді задачі аналізу постульованої структури керуючого пристрою (часто вибір її здійснюють на інтуїтивній основі), другу — у вигляді задачі синтезу оптим. регулятора. Значною мірою ці задачі можна вважати вже розв'язаними. Але загальна теорія адаптивних систем керування перебуває лише на етапі свого становлення та нагромадження окремих результатів. Хоч при дослідженні адаптивних систем використовують різні постановки задач і різні матем. методи, але осн. тенденція проявляється в тому, що задачі адаптивного керування розглядають як задачі, які мають за самою своєю суттю ймовірнісний характер, і щоб розв'язати їх, вдаються до методів теорії статистичних розв'язань, *стохастичної апроксимації методів* та до методів керованих випадкових процесів теорії, які інтенсивно розвиваються останнім часом. Так, напр., застосування ідей стохастичної апроксимації для вивчення адаптивних систем керування виявилося досить ефективним і дало змогу з єдиної методологічної точки зору розглянути й розв'язати не тільки ряд задач адаптивного керування, а й ряд задач, що стосуються таких проблем, як *розпізнавання образів,* навчальні системи, питання фільтрації, задачі теорії надійності та *ігор теорії.*

Але, незважаючи на певні успіхи в розвитку теорії адаптивних систем керування, при практичному використанні одержуваних розв'язків для задач керування складними динамічними об'єктами, які характеризуються, зокрема, порівняно високою розмірністю і складністю внутрішньої структури, виникають істотні труднощі обчислювального характеру, значною мірою аналогічні тим, які виникають при реалізації алгоритмів оптим. керування в їхній детерміністичній постановці. Відмічені вже труднощі аналітичного розв'язування задач керування складними нелінійними об'єктами природно привели до того, що дедалі більшу роль у досліджуванні САК і в конструюванні їх, як і взагалі в *кібернетиці,* відіграють методи аналогового й цифрового моделювання їх, які з допоміжного засобу досліджування все більше й більше перетворюються на найефективніший спосіб досліджування дійсно складних САК. У зв'язку з цим *цифрові обчислювальні машини,* за допомогою яких дедалі частіше реалізують *алгоритми* керування, перетворюються на найдійовіший засіб досліджування й синтезу відповідних алгоритмів керування.

Наприкінці 60-х років 20 ст. дедалі частіше поставала необхідність розв'язувати задачі керування окремими підприємствами та виробництвами, робота яких оцінюється з точки зору деяких економ. критеріїв. Характерними для цих задач є складність об'єктів керування, яка проявляється, зокрема, у великій розмірності їх (регульованих і контрольованих координат бувають сотні й тисячі), та у неоднорідності структури цих об'єктів, до складу яких, окрім механізмів, машин і автоматів, як ланки й елементи системи входять і людські колективи, а їхню поведінку не завжди ж можна формалізувати. Методи ефективного розв'язування таких задач лише розробляються, а самі ці задачі потрапляють водночас до «сфери дії» таких наук, як власне А. к. т., *кібернетика економічна* і кібернетика технічна, теорія великих (або складних) систем, теорія *операцій дослідження* й *системотехніка.*

Природно, що така А. к. т., якою вона сформувалася, не може задовольняти вимог, які ставляться до теорії керування складними системами. Це стає очевидним хоч би тому, що А. к. т. навіть не має мови, придатної для описування подібного роду систем. Методи досліджування та способи проектування таких

складних систем керування розроблятимуть, очевидно, в рамках загальнішої наукової дисципліни — технічної кібернетики, щодо якої А. к. т. є лише складовою частиною.

Літ.: Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. М., 1949; Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [бібліогр. с. 594—618]; Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [бібліогр. с. 347—381]; Теория автоматического регулирования, кн. 1—3, ч. 1—2. М., 1967—69 [бібліогр. кн. 1, с. 743—763; кн. 2, с. 653—674; кн. 3, ч. 1, с. 588—604, ч. 2, с. 352—365]; Летов А. М. Динамика полета и управление. М., 1969 [бібліогр с. 347—352]; Понтрягин Л. С. [та ін.]. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969 [бібліогр. с. 383—384]; Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Пер. с англ. М., 1964; Современная теория систем управления. Пер. с англ. М., 1970.

В. М. Кунцевич.

АВТОМАТІВ АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ — див. *Абстрактна теорія автоматів.*

АВТОМАТІВ АЛГЕБРИЧНА ТЕОРІЯ — див. *Алгебрична теорія автоматів.*

АВТОМАТІВ АНАЛІЗ — знаходження за заданим у тому чи іншому вигляді автоматом відображення «вхід — вихід», що його реалізує цей автомат. Часто таке відображення можна інтерпретувати як обчислення предиката, й оскільки кожен предикат повністю характеризується своєю множиною істинності, то завдання аналізу автомата зводиться до знаходження цієї множини (кажуть, що автомат розпізнає цю множину). Для багатьох класів автоматів добре відомі класи розпізнаваних ними множин. Напр., *Тьюрінга машини* розпізнають усі рекурсивно перелічні множини, автомати з магазинною пам'яттю (недетерміновані) — контекстно вільні мови, *автомати скінченні — події регулярні*. Але не завжди за заданими автоматом і множиною вдається визначити, чи розпізнає автомат саме цю множину. В заг. випадку для довільного класу автоматів чи навіть для довільного конкретного автомата ця проблема є алгоритмічно нерозв'язною. Якщо накласти обмеження на способи задавання автоматів і множин, то для багатьох випадків вона стає розв'язною. Напр., якщо регулярні події задавати регулярними виразами, а скінченні автомати — матрицями переходів і виходів, то існує заг. конструктивний спосіб (*алгоритм* аналізу скінченних автоматів), за допомогою якого можна знаходити регулярні вирази для подій, представних у довільному скінченному автоматі.

Літ.. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]. *М. І. Кратко*

АВТОМАТІВ ГОМОМОРФІЗМ. Хай задано два автомати $A = \langle Q, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ і $A' = \langle Q', X', Y', \delta', \lambda' \rangle$. Нехай f є відображення множини Q на Q', φ — відображення множини X на X' і ψ — відображення множини Y на Y'. Якщо $\delta(q, x) = g$, $\lambda(q, x) = y$ і $\delta'(f(q), \varphi(x)) = f(g)$, а $\lambda'(f(q), \varphi(x)) = \psi(y)$, тоді трійка $\langle f, \varphi, \psi \rangle$ наз. гомоморфізмом A на A', а A' наз. **гомоморфним образом** A. Аналогічно визначається гомоморфізм A в A' (в цьому випадку f — відображення Q в Q', φ — X у X' і ψ — Y у Y'), але тоді гомоморфним образом A буде не весь автомат A', а лише якийсь його підавтомат. Якщо автомати задаються як унарні універсальні алгебри (див. *Автоматів способи задавання*), тоді поняття А. г. збігається з поняттям гомоморфізму універсальних алгебр.

М. І. Кратко.

АВТОМАТІВ ДЕКОМПОЗИЦІЯ — задавання скінченного автомата як композиції кількох автоматів (див. *Автоматів композиції*). Проблеми, що тут виникають, є типовими для структурної теорії автоматів (див. *Синтез автоматів структурний*) і водночас вони аналогічні проблемам, які виникають у сучасній алгебрі, коли дану алгебричну систему задають як сукупність кількох простіших систем того самого виду. Прикладом може бути *груп теорія* та її структурна теорія.

У зв'язку з тим, що існують різні поняття композиції, задачу А. д. можна ставити порізному: розглядати задання автоматів у вигляді прямої суми, добутку, паралельно-послідовного з'єднання тощо. Цікавим є насамперед той випадок, коли автомати, що становлять композицію, є в певному розумінні простішими за первісний автомат: напр., у них менше станів, менше вхідних каналів, якщо їхня ф-ція переходів у певному розумінні простіша, тощо. Отже, задача А. д. допускає багато варіацій.

Щоб уточнити постановку задачі, введемо поняття моделювання. За аналогіями з алгебри, можна визначити, що автомат A моделює автомат B тоді й тільки тоді, коли автомат B ізоморфний якомусь підавтоматові автомата A (моделювання 1-го роду). Але таке поняття, запозичене з алгебри, де гол. інтерес становлять елементи алгебри й відношення між ними, є занадто сильним і не відображує специфіки *автоматів теорії*. В цій теорії цікавляться гол. чин. поведінкою «вхід — вихід» автомата. Еквівалентними вважають два автомати, що мають однакову поведінку (але, можливо, різну кількість станів). Тому природно дати таке визначення: автомат A моделює автомат B, якщо поведінка його, з точністю до перейменування вхідних і вихідних букв, збігається з поведінкою автомата B, або точніше,— автомат A моделює автомат B тоді й тільки тоді, коли B є гомоморфним образом якогось підавтомата автомата A (моделювання 2-го роду).

Осн. завдання А. д.— розробляти ефективні процедури, які дають змогу знаходити для заданого автомата композицію автоматів, що моделює первісний автомат. Це завдання аналогічне завданню розчленувати складну систему на простіші й у багатьох практичних випадках воно має важливе значення.

Найбільше вивчено А. д. в паралельно-послідовні з'єднання. Щоб пояснити одержані при цьому результати, розглянемо лише *Мура автомати* без виходу (аналогічні результати є й для Мілі автоматів з виходом). Скінченні автомати в цьому випадку зручно розглядати як скінченні унарні алгебри. Ав-

томатові $A = \langle Q, \lambda \rangle$ відповідає алгебра $\mathfrak{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$, де осн. множина алгебри $\mathfrak{A}$ — це множина станів автомата Q і кожній букві вхідного алфавіту X відповідає одна (унарна) ф-ція з сигнатури $\mathfrak{A}$ так, що $f_i(g) = \lambda(x_i, g)$. І навпаки: кожну таку скінченну алгебру можна вважати за скінченний автомат. Кожна алгебра має дві тривіальні конгруенції: «0» (у кожному класі цієї конгруенції — є точно по одному елементу множини Q) і «1» (конгруенція з єдиним класом, який складається з усього Q). Крім цих двох тривіальних конгруенцій, алгебра $\mathfrak{A}$ може мати й ін. конгруенції. Якщо на множині всіх конгруенцій цієї алгебри ввести природне відношення порядку, то ця множина стане скінченною граткою, причому зазначені тривіальні конгруенції будуть відповідно нулем і одиницею цієї гратки. Коли застосовують моделювання 1-го роду й один автомат вважають простішим за другий, якщо він має менше внутр. станів, то справджуються такі теореми: 1) автомат A можна задати як послідовне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли алгебра $\mathfrak{A}$ має хоча б одну нетривіальну конгруенцію; 2) автомат A можна задати як паралельне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли алгебра $\mathfrak{A}$ має дві нетривіальні конгруенції Π_1 і Π_2, такі, що $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = 0$ (множення конгруенцій визначається зазначеним вище відношенням порядку: якщо $\Pi_1 = \{R_1, \dots, R_k\}$, $\Pi_2 = \{S_1, \dots, S_p\}$, то $\Pi_1 \cdot \Pi_2$ складається з усіх непустих перетинів вигляду $R_i \cap S_j$). Для цього випадку задача декомпозиції повністю розв'язується наведеними теоремами. Справді, якщо $\Pi_1 < \Pi_2$, то конгруенція Π_1 визначає якусь конгруенцію алгебри $\mathfrak{A}_{\Pi_2}$ і, отже, $\mathfrak{A}_{\Pi_2}$ можна також піддати декомпозиції. Отже, гратка конгруенцій несе осн. інформацію про всі декомпозиції автомата A.

Багато в чому аналогічними є результати, одержані при моделюванні 2-го роду. Означимо квазіконгруенцію алгебри $\mathfrak{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$ як таку систему підмножин $\{Q_1, \dots, Q_k\}$ множини Q, що 1) $\bigcup_i Q_i = Q$; 2) якщо $Q_i \leqslant Q_j$, то $i=j$ і 3) для будь-яких i, j знайдеться таке s, що $f_i(Q_j) = Q_s$. Очевидно, що кожна конгруенція є квазіконгруенцією. Тривіальними квазіконгруенціями будуть ті самі дві конгруенції 0 і 1, які наведено вище. Доведено такі теореми: 1) автомат A, що має n станів, можна задати як послідовне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли існує нетривіальна квазіконгруенція алгебри $\mathfrak{A}$, що має менше як n підмножин Q_i; 2) нехай Π_1 і Π_2 — квазіконгруенції алгебри $\mathfrak{A}$, що мають відповідно k_1 і k_2 підмножин і $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = 0$. Тоді автомат A можна задати як паралельне з'єднання двох автоматів, які мають k_1 і k_2 станів. Для цього розроблено апарат т. з. алгебри пар, який дає змогу описувати А. д.

Щоб сформулювати наступні результати, введемо ще одне визначення: скінченний автомат наз. перестановним, якщо кожна буква його вхідного алфавіту визначає якусь перестановку множини внутр. станів. З кожним перестановним автоматом пов'язана група перестановок, породжена перестановками, що відповідають усім його вхідним буквам. Доведено таку теорему: будь-який скінченний автомат можна задати як паралельно-послідовне з'єднання автоматів, що мають не більше як по два внутр. стани, й перестановних автоматів, що їхні групи перестановок ділять групу перестановок первісного автомата. Навіть більше, якщо група перестановок первісного автомата має якийсь простий нормальний дільник, то в будь-якому його розкладі знайдеться автомат, що його група перестановок має той самий простий нормальний дільник. Отже, якщо просту групу «закладено» в первісному автоматі A, то вона буде і в одній з компонент. Тут поняття простоти пов'язується з ф-цією переходів. Перестановні автомати вважаються простішими за неперестановні, а з двох перестановних A вважають простішим за B, якщо група перестановок A ділить групу перестановок B. Найпростішими при цьому будуть автомати, в яких групи перестановок — прості. Вони далі не розкладаються в паралельно-послідовні з'єднання.

Наведені вище теореми дають змогу сформулювати такий результат, що стосується й *повноти проблеми* в теорії автоматів: будь-який скінченний автомат можна задати як паралельно-послідовне з'єднання автоматів, що мають не більше як по два внутр. стани, й перестановних автоматів, перестановки яких породжують прості групи. Якщо ф-ції *алгебри логіки* чи багатозначних логік розглядати як автомати з одним станом, то визначення простоти через кількість внутр. станів чи складність ф-ції переходів (як це було зроблено вище) для них не мають сенсу. Тут один автомат можна вважати простішим за інший, коли в ньому менше вхідних каналів (тобто одна ф-ція простіша за іншу, якщо вона є ф-цією від меншого числа аргументів). У цьому випадку одержано ряд результатів. Див. *Булеві функції*.

Літ.: Krohn K., Rhodes J. Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines. «Transactions of the American mathematical society», 1965, v. 116; Hartmanis J., Stearns R. E. Algebraic structure theory of sequential machines. Englewood Cliffs, 1966 [бібліогр. с. 206—208]; Zeiger H. P. Cascade synthesis of finite-state machines. «Information and control», 1967, v. 10, № 4; Muller D. E., Putzolu G. R. Frequency of decomposability among machines with a large number of states. «Journal computer and system sciences», 1968, v. 2, № 3.

М. І. Кратко.

АВТОМА́ТІВ ДОБУ́ТОК — один із способів *автоматів композиції*.

АВТОМА́ТІВ ІГРИ — колективна взаємодія автоматів (детермінованих чи ймовірнісних), за якої кожний автомат імітує гравця, а платіжна матриця гравцям невідома. Кожна партія гри полягає у виборі кожним з автоматів певного вихідного сигналу з множин вихідних сигналів, які є в автомата. Після вибору

значення вихідного сигналу (одноходової чистої стратегії даного гравця) інформація про вибір усіх автоматів надходить на певний пристрій (середовище, або оракул). Середовище має інформацію про матрицю платежів і на основі даних про вибрані вихідні сигнали автоматів формує вхідні сигнали на кожен з автоматів. Вхідний сигнал імітує величину виграшу, одержаного автоматом у цій партії. Після цього починається реалізація нової партії гри.

А. і. можна класифікувати за типами автоматів, які беруть участь у грі, за способом визначання виграшів автоматів і властивостями платіжної матриці. Було показано (для найпростіших випадків — аналітично, для складніших — моделюванням процесу гри на ЕОМ), що за певних умов автомати, граючи в *гру антагоністичну* з нульовою сумою, за кількістю партій виходять асимптотично на оптим. *стратегії мішані*, а в іграх з нульовою сумою — на точку рівноваги (точку Неша).

Особливістю колективної взаємодії автоматів є можливість такого впливу середовища на автомати, за якого автомати виходитимуть не з принципу досягнення кожним з гравців свого «особистого» благополуччя, а з принципу досягнення спільного благополуччя всього колективу гравців. У зв'язку з цим рад. математик М. Л. Цетлін (1924—66) сформулював принцип спільної каси. За спільної каси середовище підсумовує виграші всіх автоматів і ділить одержаний результат на кількість гравців, які беруть участь у грі. Отже, наприкінці кожної партії гри всі гравці одержують однакові виграші. Було показано, що принцип спільної каси в деяких випадках приводить колектив гравців у точку рівноваги. Див. також *Поведінка автоматів у випадкових середовищах.*

Літ.: Цетлин М. Л. Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. «Успехи математических наук», 1963, т. 18, № 4.

Д. О. Поспелов.

АВТОМА́ТІВ ІЗОМОРФІ́ЗМ — такий *автоматів гомоморфізм*, при якому f, φ і ψ є взаємно однозначними відображеннями. Автомати A і A' в цьому випадку наз. ізоморфними. З погляду абстрактної теорії автоматів ізоморфні автомати не відрізняються один від одного. *М. І. Кратко*

АВТОМА́ТІВ КОМПОЗИ́ЦІЇ — операції, що їх використовують, щоб породжувати одні автомати з інших. Часто композицією наз. і результати таких операцій, тобто одержані *автомати*. Зазначені операції мають алгебр. характер і є основою структурних побудов в *алгебричній теорії автоматів*. Найчастіше розглядають такі А. к.

Пряма сума. Цю операцію застосовують до множини автоматів $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$, такої, що вхідний і вихідний алфавіти кожного автомата $\mathfrak{A}_i$ однакові, а множини станів A_i попарно не перетинаються. В результаті операції одержують автомат $\mathfrak{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, такий, що $A = \bigcup_i A_i$ і значення ф-ції переходів $\delta(a, x)$ і виходів $\lambda(a, x)$ збігаються зі значеннями $\delta_i(a, x)$ і $\lambda_i(a, x)$ того автомата $\mathfrak{A}_i$, який містить стан a.

Прямий добуток. Ця операція, коли її застосувати до множини автоматів $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$, дає автомат $\mathfrak{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, такий, що A є декартовим добутком множин A_i ($A = \prod_i A_i$), а X та Y — відповідно множин X_i та Y_i ($X = \prod_i X_i$, $Y = \prod_i Y_i$. Ф-ції переходів і виходів задають співвідношеннями: $\delta(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \langle \delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n) \rangle$, $\lambda(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \langle \lambda_1(a_1, x_1), \ldots, \lambda_n(a_n, x_n) \rangle$.

Схрещений добуток. Двомісна операція, яку застосовують до автоматів без виходів. З автоматів $\langle A_1, X, \delta_1 \rangle$ та $\langle A_2, X, \delta_2 \rangle$ одержують автомат $\langle A, X, \delta \rangle$, такий, що $A = A_1 \times A_2$ та $\delta(\langle a_1, a_2 \rangle, x) = \langle \delta_1(a_1, \varphi(a_2, x)), \delta_2(a_2, \psi(a_1, x)) \rangle$, де $\varphi: A_2 \times X \to X$ та $\psi: A_1 \times X \to X$ — однозначні ф-ції. Схрещений добуток, у якому $\psi(a, x) = x$, наз. напівпрямим добутком.

Узагальненням операцій прямого, схрещеного й напівпрямого добутків є операція добутку автоматів. Якщо цю операцію застосувати до множин автоматів $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$, то вона дає автомат $\mathfrak{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, такий, що $A = \prod_i A_i$, а X' та Y' — певні задані множини. Ф-ції переходів і виходів задають за допомогою двох заданих однозначних відображень $\varphi: (\prod_i A_i) \times X \to \prod_i X_i$ та $\psi: (\prod_i A_i) \times X \to Y$ так: $\delta(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, x) = \langle \delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n) \rangle$ та $\lambda(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, x) = y$, де $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \varphi(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, x)$ та $y = \psi(\langle a_1, \ldots, a_n, x)$.

Суперпозиція. Це двомісна операція, яка дає по такій парі автоматів, що вихідний алфавіт першого автомата збігається зі вхідним алфавітом другого $\langle A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle$, $\langle A_2, Y_1, Y_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$, автомат $\langle A, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$ такий, що $A = A_2 \times A_1$, $\delta(\langle a_2, a_1 \rangle, x) = \langle \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)), \delta_1(a_1, x) \rangle$ та $\lambda(\langle a_2, a_1 \rangle, x) = \lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x))$. Використовуючи всі згадані вище операції, можна з даної множини автоматів породжувати нові автомати. Це становить теор. інтерес для *автоматів теорії*, а особливо має важливе значення для практичних застосувань її. Зокрема, алгебр. методами досліджували *повноти проблему* в теорії автоматів та різні *автоматів декомпозиції.*

Літ.: Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов. «Успехи математических наук», 1961, т. 16, в. 5.

М. І. Кратко.

АВТОМА́ТІВ МІНІМІЗА́ЦІЯ — див. *Мінімізація числа станів автомата.*

АВТОМА́ТІВ ПОВЕДІ́НКА — див. *Поведінка автоматів.*

АВТОМА́ТІВ ПРЯМА́ СУ́МА — операція, що її застосовують до множини автоматів $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$, що в ній вхідний і ви-

хідний алфавіти кожного автомата $\mathfrak{A}_i$ однакові, а множини станів A_i попарно не перетинаються. Результатом операції є автомат $\mathfrak{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, в якому $A = \bigcup_i A_i$ і значення ф-цій переходів $\delta(a, x)$ і виходів $\lambda(a, x)$ збігаються зі значеннями $\delta_i(a, x)$ і $\lambda(a, x)$ автомата $\mathfrak{A}_i$, який містить стан a. Див. *Автоматів композиції*.

АВТОМА́ТІВ СИ́НТЕЗ — побудова автомата за заданою його поведінкою «вхід — вихід». Проблему синтезу найдокладніше досліджено для *автоматів скінченних*, бо до цього випадку зводиться багато практичних задач, пов'язаних з проектуванням різноманітних керуючих та обчисл. пристроїв дискретної дії. Синтез нескінченних автоматів здебільшого становить теор. інтерес. Він не завдає великих труднощів, бо до синтезованих автоматів, як правило, не ставлять додаткових вимог, крім єдиної,— щоб вони реалізували потрібне відображення «вхід — вихід». А воно задається так, що метод синтезу є досить простим. Напр., за частково рекурсивною функцією, заданою формулою, в якій використано тільки знаки операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, неважко побудувати *Тьюрінга машину*, що обчислює цю функцію. Складніша проблема виникає лише тоді, коли доводиться синтезувати нескінченні автомати, виходячи з практичних задач, напр., у випадку *автоматів регістрових*. До синтезу таких автоматів вдаються, проектуючи операційні пристрої ЦОМ.

Трудноці А. с. залежать в основному від того, як задано умови функціонування автомата. Чим виразнішою є мова, яку застосовують для задавання умов функціонування автомата (тобто, чим вона зручніша для замовника), тим складніший метод синтезу. В багатьох випадках може виявитися, що єдиного методу синтезу не існує. Тому для ряду класів автоматів, зокрема для скінченних автоматів, розробляють спец. мови, за допомогою яких зручно задавати умови функціонування автоматів і для яких існують методи синтезу (див. *Мова логічна для задавання автоматів*, *Регулярні події та вирази*).

Процес синтезу складного скінченного автомата здебільшого поділяють на кілька етапів. На 1-му етапі, який наз. етапом блокового синтезу, автомат поділяють на окремі блоки, визначають завдання, що повинні розв'язувати ці блоки, накреслюють заг. план обміну інформацією між блоками. На 2-му етапі, який наз. етапом абстрактного синтезу, виходячи з завдань, що їх повинні розв'язувати блоки, визначають обсяг пам'яті, потрібної для кожного блока, і встановлюють ті зміни станів пам'яті під впливом вхідних сигналів, які має реалізувати даний блок для того, щоб він міг виконувати поставлені перед ним завдання. На 3-му етапі — етапі структурного синтезу — здійснюють вибір елементів для побудування схеми і встановлюють правила поєднання цих елементів. У багатьох випадках елементи задають заздалегідь, тоді схему будують на цих елементах. На 4-му етапі — етапі надійнісного синтезу — перетворюють побудовані схеми, щоб забезпечити надійність функціонування їх. Нарешті, якщо автомат треба побудувати з фіз. елементів, на 5-му етапі — етапі тех. синтезу — виявляють спотворення сигналів, які виникають через неідеальність застосовуваних елементів, і вживають заходів, щоб усунути ці спотворення. Первісними даними для наступного етапу синтезу є, як правило, результати, одержані на попередньому етапі.

Наведений вище поділ А. с. на етапи дає змогу лише загалом орієнтуватися в тому, які стадії проходить розв'язування завдання А. с. У ряді випадків доводиться допускати ті чи інші відхилення від наведеної вище послідовності етапів. Напр., проводячи синтез досить простих автоматів, етап блокового синтезу звичайно опускають. Навпаки, при синтезі особливо складних автоматів іноді доводиться багато разів повертатися до цього етапу. При деяких спец. прийомах синтезу етапи абстрактного, структурного й тех. синтезу так переплітаються між собою, що не завжди вдається чітко розмежувати їх. Нарешті, враховувати міркування надійності звичайно починають на раніших етапах. В результаті цього на останньому етапі одержують остаточний розв'язок. Проблема А. с. є оберненою проблемі *автоматів аналізу*, але здебільшого складніша за неї.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469].

В. М. Глушков, М. І. Кратко.

АВТОМА́ТІВ СПО́СОБИ ЗАДАВА́ННЯ — способи описування структури або алгоритму функціонування автоматів. Залежно від ступеня деталізації й цілей дослідження автомат можна задавати, по-перше, автоматним відображенням, тобто відповідністю між послідовностями вхідних і вихідних сигналів (див. *Оператор автоматний*), або *алгоритмом* обчислювання функцій переходів і виходів (алгоритм. описування); по-друге, сіткою з відомих автоматів (структурне описування). Часто використовують мішане описування, де автомат описують як *сітку логічну* або *автоматів композицію*, складену з автоматів, які, в свою чергу, можна описувати алгоритмічно або структурно.

Особливе значення для практики мають *автомати скінченні*. Алгоритм функціонування скінченного автомата можна задавати множиною регулярних виразів, таблицею переходів та виходів, графом переходів та виходів, матрицею переходів чи спеціальною програмою.

Скінченні автомати можна розглядати і як скінченні унарні алгебри. В цьому випадку основна множина алгебри — це множина станів автомата, а кожній букві вхідного алфавіту X відповідає одна унарна функція сигнатури алгебри так, що значення $f_i(g_j)$ — це стан, у який переходить автомат, коли, перебуваючи в стані g_j, він одержує на вхід бук-

ву x_i. Кожну скінченну унарну алгебру можна, в свою чергу, розглядати як скінченний автомат.

Структуру скінченного автомата задають сіткою з елементарних автоматів. Найчастіше структура являє собою композицію регістра станів і *комбінаційної схеми*. Відповідність між послідовностями вхідних і вихідних сигналів іноді зручно задавати явно, виписуючи для кожної вхідної послідовності на що вона переробляється. Цей спосіб застосовують, коли автоматне відображення є частковим, зі скінченною областю визначення. Нескінченне автоматне відображення зручно задавати за допомогою скінченної системи регулярних виразів. При цьому кожній букві y вихідного алфавіту ставлять у відповідність множину всіх тих послідовностей — слів, які це автоматне відображення переводять у вихідні слова, що закінчуються буквою y. Таблиця переходів автомата явно задає ф-цію переходів. Якщо автомат має n станів і m вхідних букв, то таблиця переходів містить відповідно n стовпчиків та m рядків, а на перетині i-го стовпчика і j-го рядка — значення ф-ції переходів для i-го стану та j-го вхідного сигналу. *Граф* переходів і виходів являє собою графічне задавання функції переходів та виходів (див. *Абстрактного автомата граф*). У ньому є n вершин, які відповідають станам; стани i та j з'єднано спрямованим до j ребром, позначеним буквою X (вхідний сигнал), якщо значення ф-ції переходу для пари (i, X) дорівнює j. Для *Мілі автомата* ребра, крім вхідних сигналів, помічено ще й відповідним значенням ф-ції виходів. Для *Мура автомата* значеннями ф-ції позначають вершини графа. *Автомата матриця переходів* являє собою квадратну табл. $n \times n$. Кожному станові автомата відповідає стовпчик і рядок. На перетині i-го рядка і j-го стовпчика в табл. виписують множину таких вхідних сигналів X, для яких значення ф-ції переходів для пари (i, X) дорівнює j. Програма автомата являє собою послідовність відмічених операторів — команд. Мітки команд відповідають станам автомата. Кожна команда складається з послідовності рядків. Кожний рядок має вигляд: $E(\overline{X})\,F(\overline{Y})\,N$, де $E(\overline{X})$ — якась умова, задана на множині вхідних сигналів, $F(\overline{Y})$ — *диз'юнкція* вихідних сигналів, N — мітка команди. Кожний рядок означає: якщо для вхідних сигналів автомата виконано умову $E(\overline{X})$, то слід видати вихідні сигнали, які входять у $F(\overline{Y})$, і перейти до виконання команди з міткою N. У багатьох випадках задавання автомата програмою — економніше за інші способи задавання. Особливо зручно застосовувати його для задавання не повністю визначених і недетермінованих автоматів. При синтезі *автомата керуючого*, який надалі править за блок ЦОМ, програму його роботи часто наз. мікропрограмою. Структуру автомата задають явним переліченням усіх її компонент та зв'язків між компонентами.

Автомат може мати алгоритмічні й структурні описи. Відповідність між ними задають табл. *кодування станів автомата*, вхідних і вихідних сигналів, що беруть участь в алгоритм. описові, і, відповідно, станами, вхідними та вихідними сигналами компонент, що беруть участь у структурному описові. Якщо автомат задають у вигляді регістра станів і комбінаційної схеми, то цю композицію найкраще задавати у вигляді переліку елементів — компонент регістра і системи ф-цій збуджень, які керують перемиканням станів цих елементів. Нескінченні автомати найчастіше задають у вигляді композиції якогось скінченного автомата і нескінченного автомата з регулярним законом породжування станів і вихідних сигналів. Див. також *Автоматів декомпозиція*, *Автоматів теорія*, *Мова логічна для задавання автоматів*, *Мова описування пристроїв ЦОМ*.

Літ.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]. *Ю. В. Капітонова.*

АВТОМА́ТІВ СТРУКТУ́РНА ТЕО́РІЯ — див. *Структурна теорія автоматів*.

АВТОМА́ТІВ СУПЕРПОЗИ́ЦІЯ — двомісна операція, яка дає по парі автоматів $\langle A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1\rangle$, $\langle A_2, Y_1, Y_2, \delta_2, \lambda_2\rangle$, де вихідний алфавіт першого автомата збігається з вхідним алфавітом другого, автомат $\langle A, X_1, Y_2, \delta, \lambda\rangle$, в якому $A = A_2 \times A_1$, $\delta(\langle a_2, a_1\rangle, x) = \langle \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)), \delta_1(a_1, x)\rangle$ та $\lambda(\langle a_2, a_1\rangle, x) = \lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x))$. Див. *Автоматів композиції*.

АВТОМА́ТІВ ТЕО́РІЯ — розділ теоретичної кібернетики, в якому вивчаються називані *автоматами* чи машинами математичні моделі реально існуючих (технічних, біологічних та ін.) чи принципово можливих пристроїв, що переробляють дискретну інформацію дискретними часовими тактами. А. т. виникла гол. чин. під впливом потреб техніки цифрових обчислювальних і керуючих машин та внутрішніх потреб теорії алгоритмів і матем. логіки. Поняття «автомат» помітно варіюється залежно від характеру названих пристроїв, від прийнятого рівня абстракції та доцільного ступеня загальності (автомати скінченні, нескінченні, зростаючі, ймовірнісні, детерміновані, автономні тощо).

Що ж до питання про вироблення такого поняття «автомат», яке характеризувалося б максимальним ступенем загальності й разом з тим могло правити за основу для постановки й розв'язування досить змістовних задач, то його ще не можна вважати повністю розв'язаним. До того ж поняття «автомат» можна вважати й окремим випадком загального поняття «керуюча система».

Термін «А. т.» увійшов в ужиток у 50-і роки 20 ст., хоч відповідна проблематика значною мірою почала складатися ще в 30-і роки в рамках теорії алгоритмів і теорії релейних пристроїв. Уже тоді в *алгоритмів теорії* було сформульовано достатньо загальні поняття обчисл. автомата (див. *Тьюрінга машина*) і (неявно) поняття *автомата скінченного* (головка Тьюрінгової машини). Було встановле-

но, що для здійснення найрізноманітніших ефективних перетворювань інформації зовсім не обов'язково будувати щоразу спеціалізовані автомати; в принципі все це можна зробити на одному універсальному автоматі за допомогою придатної *програми* й придатного кодування. Цей теор. результат пізніше набув інженерного втілення у вигляді сучасних універсальних обчисл. машин. Проте розгорнуте вивчення процесів, які протікають в автоматах різного роду, й загальних закономірностей, яким вони підлягають, почалося згодом лише в рамках А. т. Різницю в постановках між задачами теорії алгоритмів і А. т. можна коротко охарактеризувати як різницю між питаннями про те, що можуть робити автомати і як вони це роблять. Оскільки залучення інших типів автоматів (відмінних від машин Тьюрінга) явно не розширює запасу обчисленних перетворень інформації, то для теорії алгоритмів таке залучення має лише епізодичний характер і пов'язане тільки з застосовуваною технікою доказів. А для А. т. такий розгляд стає вже самоціллю. Теоретичні й прикладні задачі автоматики, обчисл. техніки й програмування, моделювання біол. поведінки тощо продовжують стимулювати проблематику А. т. Проте А. т. вже виробляє й власну внутрішню проблематику. В А. т. широко застосовують апарат алгебри, *логіки математичної*, *комбінаторного аналізу* (включаючи *графів теорію*) та *імовірностей теорії*.

В А. т. досить чітко вимальовуються окремі її напрями, зумовлені вибором досліджуваних типів автоматів (скінченних, імовірнісних тощо), прийнятим рівнем абстракції (див. *Абстрактна теорія автоматів* і *Структурна теорія автоматів*) або специфікою застосовуваних матем. методів (див. *Алгебрична теорія автоматів*). Разом з цим споріднені задачі й методи інтенсивно розвиваються в теорії релейних пристроїв, у теорії ЦОМ і в теорії програмування, тому часто буває важко розмежувати сфери дії цих теорій і А. т.

Поведінка й структура. В основі А. т. лежать точні матем. поняття, що формалізують інтуїтивні уявлення про функціонування й поведінку автомата та про його структуру (внутрішню будову). З погляду поведінки автоматів їх найчастіше розглядають як перетворювачів словникової інформації, тобто перетворювачів послідовностей букв на послідовності букв. Реалізовуване перетворення інтерпретується звичайно як обчислення значень якоїсь ф-ції (оператора) за заданими значеннями аргументів або як перетворення записів умов задач певного типу на записи відповідних розв'язків. Зокрема, т. з. розпізнавальні автомати, сприймаючи вхідну інформацію, реагують на неї так, що деякі вхідні послідовності сигналів вони сприймають, а інші — відхиляють. У цьому розумінні вони розпізнають або, як ще кажуть, представляють множини вхідних послідовностей. Нарешті, породжувальний автомат функціонує як автономна система, не пов'язана з вхідною інформацією; його поведінка визначається тим, які вихідні послідовності він здатний породжувати. Наведена класифікація в термінах перетворення, розпізнавання та породжування залежить від правил функціонування автомата, тобто від програми взаємодії його внутрішніх станів зі вхідними (такими, що надходять із зовнішнього середовища) і вихідними (такими, що видаються в зовнішнє середовище) сигналами. Нехай Q, X, Y — відповідно множини внутрішніх станів вхідних і вихідних сигналів автомата. Якщо це детермінований автомат, його програма формалізується в термінах ф-ції переходів Ψ та ф-ції виходів Φ, які вказують для кожного вхідного сигналу $x \in X$ й кожного стану $q \in Q$ стан $\Psi(q, x)$, в який переходить автомат, і вихідний сигнал $\Phi(q, x)$, що його він видає при цьому.

Абстрактна А. т. характеризується вищим рівнем абстракції: у ній поняття автомата ототожнюється з поняттям програми автомата, тобто з п'ятіркою $\langle X, Y, Q, \Psi, \Phi \rangle$, при повному абстрагуванні від його структури. Структура автомата відображає спосіб його організації з найпростіших взаємодіючих компонент (елементарних автоматів або просто — елементів), що в належний спосіб сполучені в єдину систему. Напр., обчисл. машину складено з елементарних комірок типу *тригерів*, інверторів і т. ін.; нервову систему побудовано з *нейронів*. Структурна класифікація автоматів визначається характером допустимих з'єднань (напр., з'єднання можуть бути сталими або ж можуть змінюватися в процесі роботи, піддаватися тим чи іншим геом. обмеженням) та специфікою функціонування і взаємодії застосовуваних елементів (напр., елементи можуть лише обмінюватися інформацією або ж вони можуть породжувати й нові елементи, нарощуючи структуру). Формалізація структурних понять здійснюється в термінах різного роду схем (див. *Сітка логічна*, *Автомати ітеративні*). А. М. Колмогоров накреслив підхід, який привів до формулювання досить загального та все ще конструктивного поняття структури автомата (див. *Автомати зростаючі*), яке, очевидно, охоплює всі відомі типи структур автоматів і всі ті, що їх можна передбачити на сучасному рівні науки. Цілком очевидно, що є тісний зв'язок між структурою автомата і його поведінкою. Проте роздільно вивчати кожен з цих двох аспектів при значному абстрагуванні від іншого не лише можна, а й часто й корисно при постановці та розв'язуванні багатьох важливих проблем. Таке вивчення здійснюють відповідно в абстрактній (поведінковій) і структурній теорії автоматів.

Типи автоматів. Найпоширенішою є класифікація автоматів і відповідних розділів А. т., присвячених різним типам автоматів, за такими ознаками. 1) Обсяг пам'яті. Скінченні й нескінченні автомати характеризуються відповідно скінченністю й нескінченністю обсягу пам'яті (кількістю внутрішніх станів). Скінченними автоматами є окремі блоки сучасних обчисл. машин і навіть маши-

на загалом. Мозок також можна розглядати як скінченний автомат. Нескінченні автомати являють собою природну матем. ідеалізацію, що походить з уявлення про автомат із скінченним, але неозоро великим числом станів. При цьому мається на увазі лише потенціальна нескінченність пам'яті, яка проявляється в тому, що пам'ять, хоч і лишається скінченною в кожний момент часу, але може необмежено зростати. Така ідеалізація виникла вперше в галузі теорії алгоритмів у процесі уточнення інтуїтивного уявлення про алгоритм. Структурно-зростаючий автомат уявляють у вигляді сполучення елементів, здатних до розмножування й нарощування схеми. Сучасні ЕОМ можна розглядати як зростаючі (а разом з тим і потенціально нескінченні) автомати в такому розумінні: щоб обчислення в усіх випадках можна було доводити до кінця, доводиться припускати можливість необмеженого нарощування зовнішньої (на магнітній стрічці) пам'яті. 2) Механізм випадкового вибору. У детермінованих автоматах поведінку й структуру в кожний момент часу однозначно визначено поточною вхідною інформацією та станом автомата, що склався в попередній момент. В імовірнісних (стохастичних) автоматах вони залежать ще й від деякого випадкового вибору. Стохастичні автомати не слід плутати з недетермінованими, в яких також порушено умову однозначності (проте без участі будь-якого механізму випадкового вибору).

Проблеми і методи. До центральних проблем А. т. належать проблеми аналізу, тобто описування поведінки автомата, виходячи з заданої його програми або структури, і синтезу — тобто конструювання автоматів, поведінка яких задовольняла б поставлені вимоги. З цими проблемами тісно пов'язані й багато інших задач, які інтенсивно досліджуються (повнота й універсальність, мінімізація мови, асимптотичні оцінки тощо). Найкраще аналіз і синтез досліджено в теорії скінченних детермінованих автоматів, причому їх неоднаково трактують в абстрактній і структурній теоріях автоматів. Так, напр., у структурній теорії під синтезом (див. *Синтез автоматів структурний*) розуміють побудову схеми з заданого асортименту елементів, яка була б оптимальною (чи близькою до оптимальної) щодо деякого критерію складності схем. Тут переважають комбінаторно-інформаційні методи й асимптотичні оцінки (К. Шеннон, С. В. Яблонський, О. Б. Лупанов та ін.). В абстрактній теорії автоматів задовольняються побудовою програми функціонування автомата (див. *Синтез автоматів абстрактний*), напр., у вигляді ф-цій переходу та виходу для скінченного автомата, яка звичайно править за первісний матеріал для дальшого розгортання структурного синтезу. Тут використовують переважно алгебричні (С.-К. Кліні, В. М. Глушков та ін.), математико-логіч. (Б. А. Трахтенброт, Р. Бюхі та ін.), ігрові (Р. МакНотон) методи й поняття. Проблема аналізу й синтезу скінченних детермінованих автоматів посідає значне місце й у теорії релейних пристроїв.

У теорії *експериментів з автоматами* (Е. Мур) розробляють методи, які дають змогу за відомостями, одержуваними при зовнішньому спостеріганні за поведінкою автомата, встановлювати програму його функціонування або принаймні деякі її властивості. Ці методи можна розглядати як своєрідний прийом абстрактного синтезу й розшифровування автоматів (Я. М. Барздінь). Роботи К. Шеннона, М. Рабіна та ін. дали поштовх розвиткові теорії ймовірнісних автоматів у таких напрямах: 1) якою мірою поняття й методи теорії детермінованих автоматів переносяться на стохастичні автомати; 2) яких спрощень обчисл. процесу можна досягти при виході з вужчого класу детермінованих автоматів у ширший клас *автоматів імовірнісних*. Вивчення зростаючих автоматів зосереджено в основному на таких проблемах: 1) розробка моделей зростаючих автоматів і вивчення окремих класів їх (ітеративні автомати — Ф. Хенні, *автомати регістрові* — В. М. Глушков, *автомати самовідтворювані* — Дж. фон Нейман, узагальнені зростаючі автомати — А. М. Колмогоров, Я. М. Барздінь); 2) оцінка обчислювальних здатностей і складностей обчислювань зростаючих автоматів (Я. М. Барздінь, Б. А. Трахтенброт, Ю. Хартманіс, Г. С. Цейтін, М. Рабін та ін.).

Зв'язок з іншими науковими напрямами. Значення теорії алгоритмів і теорії релейних пристроїв для А. т. вже пояснено вище. Слід указати й на зворотну віддачу А. т., методи якої дали змогу розв'язувати деякі задачі, що виникли в матем. логіці й теорії алгоритмів (Р. Бюхі). Проблематика, що складається в теорії зростаючих автоматів (напр., *складність обчислювань*), перебуває по суті на межі теорії алгоритмів і асимптотичних закономірностей структурного синтезу автоматів. А. т. і математична лінгвістика тісно пов'язані. Одним з важливих понять матем. лінгвістики є *граматика породжувальна* — об'єкт, дуже близький до породжувального автомата. Тому окремі досить важливі положення теорії граматик можна в принципі віднести до А. т. В абстрактній теорії автоматів матем. питання навчання та доцільної поведінки одного індивідуума чи колективу було уточнено й досліджено в термінах *автоматів ігор* (М. Л. Цетлін). Корисним виявився й зв'язок теорії скінченних автоматів з теорією проектування ЦОМ і теорією програмування (В. М. Глушков, О. А. Летичевський).

Літ.: Гаврилов М. А. Теория релейно-контактных схем. М.—Л., 1950 [бібліогр. с. 298—299]; «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 399—402]; Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [бібліогр. с. 306—316]; Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [бібліогр. с. 389—395]; Автоматы. Пер. с англ. М., 1956.

Б. А. Трахтенброт.

«АВТОМА́ТИКА И ТЕЛЕМЕХА́НИКА» — радянський науково-технічний журнал. Висвітлює теоретичні й прикладні питання автоматики й телемеханіки, розглядає проблеми кібернетики, що стосуються питань заг. теорії автомат. керування, теорії й методів побудови систем автомат. оптимізації й самонастроюваних систем, теорії релейних схем і скінченних автоматів, застосування обчисл. пристроїв в автоматиці, проблем надійності тощо. «А. и т.» висвітлює й методи теоретичного й експериментального досліджень автоматизовуваних виробничих процесів та принципи побудови систем автомат. контролю й керування виробничими процесами. Видає його з 1936 (перерва в 1942—45) Академія наук СРСР. Виходить 12 раз у рік.

АВТОМА́ТНЕ ВІДОБРА́ЖЕННЯ — те саме, що й *оператор автоматний*.

АВТОНО́МНІСТЬ — незалежність будь-якої з множини регульованих величин у *багатоконтурній системі автоматичного керування* від решти регульованих величин або від усіх задавальних діянь, крім одного, що відповідає їй. Умову А. вперше сформулював і застосував 1934 рад. вчений І. М. Вознесенський (1887—1946). Він поставив і розв'язав задачу про те, щоб зміна однієї якоїсь з n регульованих величин могла відбуватися незалежно від зміни решти $n-1$ величин, тобто автономно. Поняття А. запровадили також 1950 А. С. Боксенбом та Р. Худ (США).

Об'єкт регулювання в заг. випадку може мати m входів $\theta_i(p)$ та n виходів $Y_i(p)$, зв'язаних між собою внаслідок особливостей фіз. процесів, які відбуваються в ньому, так що кожне вхідне діяння впливає на всі або кілька регульованих величин $Y_i(p)$, де $m \geqslant n$. Домогтися А. кожної регульованої величини можна за допомогою відповідно спроектованої системи керування.

Розглянемо випадок, коли $m = n$. Залежність $Y_i(p)$ та $\theta_i(p)$ (мал.) виражається рівнянням

$$Y_i(p) = \sum_{k=1}^{n} E_{ik}(p)\,\theta_k(p),\ k,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

де $E_{ik}(p)$ — *передавальна функція*, яка зв'язує i-у вихідну величину $Y_i(p)$ з k-им вхідним діянням $\theta_i(p)$ в об'єкті. Таблиця $E_{ik}(p)$ утворює матрицю передавальних ф-цій E, в цьому випадку при $m = n$ — квадратну.

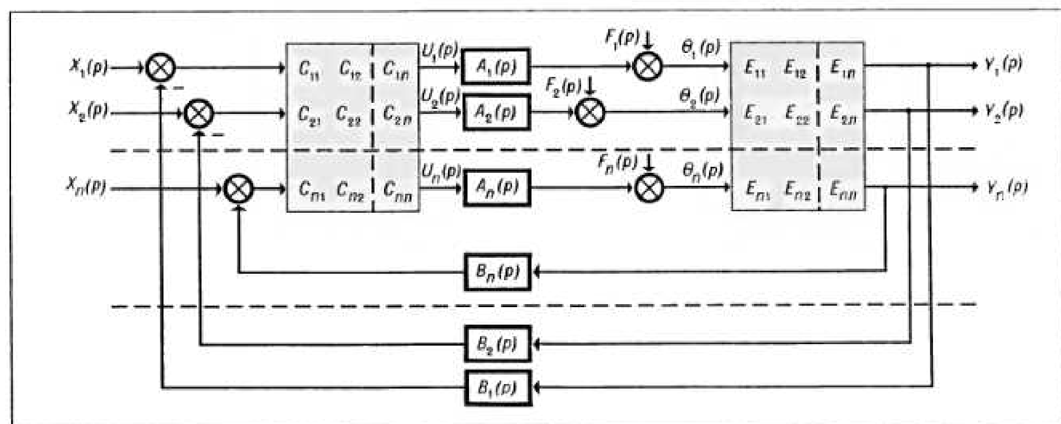
У системах з багатьма регульованими змінними, як і в звичайних системах, задавальне діяння системи $X_i(p)$ порівнюється з регульованою величиною $Y_i(p)$, яка відповідає їй, а розузгодження сприймає регулятор, який виробляє сигнал $\theta_i(p)$, що надходить на i-й вхід об'єкта регулювання. Керуюче діяння $U_i(p)$ і, отже, $\theta_i(p)$ (див. мал.) формуються як лінійні форми від усіх розузгоджень за допомогою передавальних ф-цій $C_{ik}(p)$ регулятора, які зв'язують $U_i(p)$ з розузгодженням $[X_k(p) - B_k(p)\,Y_k(p)]$:

$$U_i(p) = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}(p)\,[X_k(p) - B_k\,Y_k\,(p)]. \tag{2}$$

Таблиця передавальних функцій $C_{ik}(p)$ також утворює в цьому випадку квадратну матрицю C. Вхідна величина об'єкта

$$\theta_i(p) = A_i(p)\,U_i(p) + F_i(p), \tag{3}$$

де $A_i(p)$ — передавальна функція i-го виконавчого елемента системи, $F_i(p)$ — збурення, яке діє на i-му вході об'єкта. На основі аналізу системи рівнянь (1—3) можна одержати умови А. Будь-яка з регульованих величин $Y_i(p)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ буде авто-



Структурна схема автономної системи керування.

номною щодо всіх «чужих» задавальних діянь $X_k(p)$, $k \neq i$, якщо кожна передавальна функція $\frac{Y_i(p)}{X_k(p)}$ тотожно дорівнює нулеві для всіх k; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, тобто

$$\frac{Y_i(p)}{X_k(p)} = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} \equiv 0,$$

крім передавальної функції щодо «свого» задавального діяння, $k = i$,

$$\frac{Y_i(p)}{X_i(p)} = \frac{\Delta_i(p)}{\Delta(p)} \neq 0,$$

де $\Delta(p)$ — головний визначник системи рівнянь (1—3), $\Delta_k(p)$ — визначник, що його одержують з $\Delta(p)$, замінивши i-ий стовпчик стовпчиком коефіцієнтів при $X_k(p)$. Ці умови А., що їх іноді наз. **критерієм** А., виконуються, якщо додержують таких співвідношень:

$$\frac{A_i(p)\,C_{ik}(p)}{A_k(p)\,C_{kk}(p)} = \frac{|E_{ki}(p)|}{|E_{kk}(p)|}, i, k=1, 2, 3, \ldots, n,$$

де $|E_{kk}|$ та $|E_{ki}|$ — алгебр. доповнення елементів E_{kk} та E_{ki} головного визначника $|E|$.

У процесі роботи, крім керуючих діянь, на об'єкт діють і різного роду збурення $F_i(p)$. За цих умов для здійснення високоякісного керування не достатньо забезпечити лише А., а потрібно водночас вжити заходів щодо поліпшення якості перехідного процесу та компенсації збурень (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

А. широко застосовують у складних автомат. системах, таких, напр., як системи керування турбореактивними авіац. двигунами з форсажною камерою, системи регулювання парових турбін, системи керування безпілотними літальними апаратами тощо.

Літ.: Вознесенский И. Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров «Автоматика и телемеханика», 1938, № 4—5; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 364—371]; Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. Пер. с англ. М., 1956 [бібліогр. с. 447—450]. *А. Г. Шевельов.*

АВТОНО́МНОСТІ КРИТЕ́РІЙ — див. *Автономність*.

АВТОПІЛОТУВА́ННЯ — автоматичне керування польотом літальних апаратів. Здійснює його автоматич. система — автопілот, без участі людини. А. передбачає керування лінійними (висота польоту, бічне відхилення від заданого напряму й пройдена відстань) та кутовими (кут тангажу, крену, рискання, атаки й ковзання) координатами літальних апаратів. Для керування цими координатами докладаються відповідні сили й моменти, що діють на літальний апарат. Їх створюють або аеродинамічні керуючі поверхні — рулі висоти й напряму, елерони або спец. реактивні газові рулі та зміна тяги двигунів.

Керування лінійними координатами здійснюється в літальних апаратах здебільшого через кутові. Так, щоб змінити висоту, відхиляють руль висоти, який створює момент, що повертає літальний апарат і так змінює кут тангажу, а з ним і кут атаки. А зміна кута атаки спричинює зміну підіймальної сили і отже й висоти польоту. Через те, що літальний апарат має три ступені вільності відносно кутових рухів, для керування його польотом система А. повинна мати не менше як три канали керування (за креном, тангажем і курсом), зв'язані в заг. випадку в єдину систему.

Осн. функції системи А. по кожному з трьох каналів: вимірювати відхилення лінійних або кутових координат від заданого значення, перетворювати й посилювати ці відхилення, формувати керуючі сигнали й підсилювати їх за потужністю та діяти ними на відповідні органи керування так, щоб політ відбувався, як це бажано, тобто за заданою траєкторією, з потрібною швидкістю тощо. Під час польоту в збуреній атмосфері на літальний апарат діють невпорядковані пориви вітру, які спричинюють відхилення координат від заданого значення й збуджують небезпечні коливання, які можуть призвести до втрати керованості й до руйнівних перевантажень. Автомат. керування за таких умов можна поліпшити, якщо ввести спец. додатковий канал керування й за його допомогою діяти на особливий орган, який безпосередньо керує підіймальною силою літального апарата. Завдяки цьому можна ефективно зменшити (парирувати) збурювальне діяння атмосфери.

Щоб задати потрібні координати, що характеризують політ, у системі передбачено задавачі програмних сигналів керування. Лінійні координати, напр. висоту польоту, вимірює барометричний або радіотехнічний висотомір, бічне відхилення — спец. радіотех. засоби. Кутові координати вимірюють гіроскопічні прилади.

На мал. дано схему автомат. керування висотою польоту. Істинна (виміряна) висота польоту H, значення якої перетворюється на відповідну електр. напругу, порівнюється з заданим значенням висоти $H_з$, яке також подано електр. напругою, й різниця їх, пропорційна відхиленню H від $H_з$, попередньо підсилюється. З неї формується керуючий сигнал, що підсилюється за потужністю й діє на рульову машинку, а вона відхиляє руль висоти (РВ) так, що виникає момент, який і повертає літак навколо осі z, перпендикулярної до площини малюнка, а внаслідок цього змінюються кут тангажу ϑ і кут атаки α; зміна α спричинює зміну величини підіймальної сили й, отже, й висоти польоту H. Система А. здійснює керування літальним апаратом на основі принципу *зворотного зв'язку*. В таких системах за певних співвідношень між величинами аеродинамічних коеф. літального апарата й передавальними числами

автопілота можуть виникнути небажані коливання. Треба, щоб автопілот так був наладжений, щоб ці коливання не виникали. Але аеродинамічні коеф. дуже змінюються залежно від режиму польоту літального апарата, через це потрібно переналаджувати автопілот. Системи А., в яких передавальні числа автопілота автоматично наладжуються відповідно до зміни аеродинамічних коеф. літального апарата, наз. **самоналастроюваними**. Такі системи універсальніші за звичайні системи А. В принципі так само

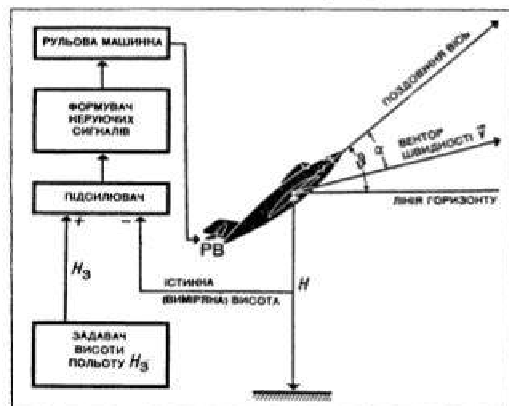


Схема автоматичного керування висотою польоту літака.

здійснюється А. й іншими літальними апаратами: керованими ракетами, космічними апаратами та вертольотами. Різниця лише в способах вимірювання положення літального апарата в просторі та в координатах, які характеризують це положення, у способі формування керуючих сигналів та в будові органів керування, за допомогою яких змінюється положення літального апарата в просторі.

Найважливіше практичне завдання на сучасному етапі розвитку А.— розробляти і впроваджувати системи широкого призначення, які автоматично керують літальними апаратами на всіх етапах польоту, включаючи злітання й посадку, при повній відсутності видимості та в дуже збуреній атмосфері.

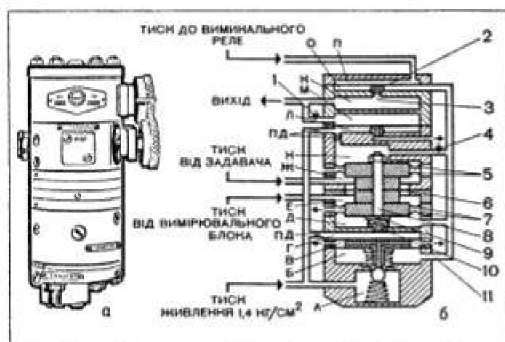
Літ.. Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. М., 1964 [бібліогр. с. 692—698]; Колосов С. П., Стромилов В. М. Основы автоматического пилотирования. М., 1959; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 364—371]. *А. Г. Шевельов.*

АГРЕГА́ТНА УНІФІКО́ВАНА СИСТЕ́МА (АУС) — система пневматичних засобів автоматизації загальнопромислового призначення, побудована за агрегатним принципом, згідно з яким її складають з окремих блоків, які добирають за функціональною ознакою. Вхідні та вихідні параметри блоків уніфіковано. Агрегатний принцип побудови системи дає змогу різними поєднуваннями блоків у схемах, при порівняно невеликій кількості їх, створювати системи керування виробничими процесами різної складності.

Залежно від виду енергоносія АУС може мати три гілки: електричну, пневматичну й гідравлічну (не поширилася). Найбільше розвинуто й широко впроваджено пневматичну гілку. До комплекту пристроїв АУС входять блоки: вимірювальні, регулювальні (з пропорційним і пропорційно-інтегральними *регулювання законами*), передування (діяння за похідною), регулювання співвідношення двох параметрів, підсумовування, множення на коеф., множення двох параметрів, добування квадратного кореня, піднесення до квадрата, сигналізації, підсилювання за потужністю та задавачі й прилади контролю. Щоб застосовувати пристрої АУС у схемах з електр. приладами, в цій системі передбачено пневмоелектр. та електропневматичні перетворювачі. За уніфіковані вхідні й вихідні параметри АУС прийнято тиск стиснутого повітря, який змінюється в діапазоні 0,2—1 *кГ/см²* надлишкових. Живлення блоків здійснюється очищеним стиснутим повітрям за тиску 1,4 *кГ/см²* надлишкових. Блоки уніфіковано й конструктивно: вони мають стандартні вузли, деталі й приєднувальну арматуру. Реєструвальні й показувальні прилади контролю являють собою сильфонні манометри з межами вимірювання 0,2—1 *кГ/см²*. На мал. показано зовн. вигляд і принципову схему пропорційно-інтегрального регулювального блока 4РБ-32А системи, який є найскладнішим і має найбільшу кількість уніфікованих деталей і вузлів.

Робота регулювального блока, як і більшості блоків АУС, грунтується на принципі компенсації зусиль, що виникають на мембранах внаслідок змінювання тиску повітря, підводжуваного до пневматичних камер блока. Регулювальний блок має такі осн. вузли: підсилювач потужності (камери А, Б, В і Г), елемент порівнювання (камери Е й Ж), зворотного зв'язку (камери Д і К), ізодрому (камери Л і М) і вимикальне реле (камери Н, О і П) для переходу на ручне керування. З лінії живлення повітря надходить у камеру А підсилювача й далі через постійні опори ПД (що являють собою капіляри) — в камери Г і Л. Якщо регульований параметр дорівнює його заданому значенню, тиски в камерах Е й Ж рівні. Тиски в камерах Д, К, Л і М також дорівнюють один одному. При відхиленні регульованого параметра тиск у камері Е змінюється, й на мембранах *5*, *6* і *7* виникає розбаланс сил; при цьому мембрани, разом зі штоком *8*, що зв'язує їх, переміщуються, й заслінка *9*, закріплена на штоку, змінює прохідний переріз сопла *10*, внаслідок чого змінюється тиск у камері Г. Ця зміна тиску посилюється в підсилювачі, а потім надходить у канал *11* і через камеру Н вимикального реле — у вихідну лінію блока, зв'язану з виконавчим механізмом. Негативний зворотний зв'язок здійснюється подаванням стисненого повітря в камеру Д. Величину коеф. підсилення регулятора (діапазону дроселювання) встановлюють дросе-

лем *4*, що змінює надходження стисненого повітря з каналу *11* у камеру позитивного зворотного зв'язку К. Час ізодрому встановлюється дроселем *1*, що регулює час заповнення глухої камери М. Дроселі *1* і *4* являють собою регульовані голчасті клапани. Коли повітря живлення надходить у камеру П, мембрана *2* перекриває сопло *3* і від'єднує вихід регулятора від виконавчого механізму. Межі наладжувань регулювального блока: діапазон дроселювання — 10÷250%, час ізодрому — 3 *сек*÷100 *хв*. В АУС передбачено



Регулювальний блок 4РБ-32А: *а* — загальний вигляд; *б* — принципова схема.

задавачі трьох типів: ручний — для встановлення постійного за величиною задавання та два програмні — з програмою, що змінюється в часі й залежно від параметра. Блоки й прилади АУС вибухо- й пожежобезпечні, прості в обслуговуванні й надійні в роботі, й це зумовило широке застосування їх для автоматизації виробничих процесів у багатьох галузях промисловості: нафтовидобуванні, нафтопереробці, хім., харчовій, газовій та ін.

Літ.: Березовец Г. Т., Малый А. Л., Наджафов Э. М. Приборы пневматической агрегатной унифицированной системы и их использование для автоматизации производственных процессов. М., 1965 [бібліогр. с. 211—212]; Прусенко В. С. Пневматические регуляторы. М.— Л., 1966 [бібліогр. с. 278—279]. *Г. Т. Березовець.*

АГРЕГА́ТНО-БЛО́КОВА ПОБУДО́ВА ЗА́СОБІВ ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНОЇ ТЕ́ХНІКИ — спосіб побудови засобів обчислювальної техніки компонуванням конструктивно й функціонально уніфікованих блоків, з'єднаних уніфікованими зовнішніми зв'язками в агрегати, з метою створення пристроїв, машин і систем для збирання, зберігання, переробляння й видавання інформації. Дає змогу розв'язати суперечність між вимогами однотипності виробів масового виробництва й різноманітністю засобів *обчислювальної техніки*. Різноманітності агрегатованих пристроїв за призначенням досягають поєднанням різнотипних, таких, що виконують певні функції, блоків, включених до складу пристроїв. Можливість поєднувати такі блоки в агрегати забезпечується вибором спряжень відповідних видів. Модифікування пристроїв агрегатної системи здійснюють зміною кількості або заміною окремих блоків та вузлів. Порівняно невелика кількість різновидів елементів агрегатної системи дає змогу одержати багато модифікацій пристроїв, побудованих за агрегатно-блоковим принципом. За таким принципом будують пристрої, які використовують для передавання сигналів та реалізації їх різні види енергії — електричні, пневматичні, гідравлічні й комбіновані (що використовують водночас різні види енергії) агрегатні уніфіковані системи засобів *автоматики* та обчислювальної техніки.

Однотипність елементів агрегатної системи дає змогу здійснювати масове виробництво їх, скорочує строки виготовлення, зменшує вартість апаратури, полегшує її експлуатацію та ремонт, зменшує номенклатуру й кількість запасних частин. Можливість задовольнити різноманітні вимоги, які виникають при автоматизації різних процесів та об'єктів, за допомогою порівняно невеликої кількості вихідних елементів визначає великий народногосподарський ефект від впровадження приладів, пристроїв, машин і систем, побудованих за агрегатно-блоковим принципом. Тенденція до створення агрегатованих автомат. інформаційних, керуючих та обчисл. систем і типових рядів обчисл. та керуючих машин почала виявлятися в зв'язку з безперервно зростаючим попитом на засоби обчисл. техніки для науково-тех. розрахунків, оперативного керування виробництвом та автоматизації технологічних процесів. За таких умов найефективнішими є машини, здатні суміщувати розв'язування завдань керування виробництвом загалом з автоматизацією виробничих процесів. При цьому можливі шляхи створення і окремих машин, і систем та сімейств машин, агрегатованих з набору функціональних пристроїв. Кращим є другий шлях, що дає змогу зменшити вартість машин і систем за рахунок широкого використання уніфікованих вузлів та елементів, послідовності розроблюваних пристроїв та прогресивних технологічних розв'язків.

За агрегатним принципом побудовано, наприклад, машини й системи «Libratrol», «*IBM-360*», «GE-600» (США), «ARCH», «KDF-7» (Англія), система 4004 фірми «Siemens» (ФРН) і розроблені в СРСР системи «АУС», «СОУ-1», «*Днепр-2*», «АЦС», «УСЕППА» та ін. А.-б. п. з. о. т. яскраво виражено в агрегатній системі *АСОТ*, в агрегатній системі засобів збирання та первинного переробляння інформації («АСПІ») та в комплексі технічних засобів для локальних інформаційно-керуючих систем («КТЗЛІКС»).

Літ.: Наумов Б. Н., Захаров В. Г., Филинов Е. Н. Основные принципы создания агрегатных комплексов средств вычислительной техники для систем управления. «Управляющие системы и машины», 1972, № 1. *В. М. Єгипко.*

А́ДАМСА МЕ́ТОД — один з числових методів розв'язування задачі Коші. Див. *Коші задачі для звичайних диференціальних рівнянь способи розв'язування.*

АДАПТА́ЦІЯ в кібернетиці — процес нагромадження й використання інформації в системі, спрямований на досягнення дея-

кого, здебільшого оптимального в певному розумінні, стану чи поведінки системи при початковій невизначеності та зовнішніх умовах, що змінюються. При А. можуть змінюватися параметри й структура системи, алгоритм функціонування, керуючі діяння тощо.

А. застосовують тоді, коли фактори, що впливають на систему, цілком або частково невідомі. В процесі А. система нагромаджує дані про ці фактори й визначає їхні характеристики. Прикладом системи з А. є автоматичний керований снаряд, який переслідує ціль, стратегія поведінки якої невідома. Найпростіші процеси з А. відбуваються в системах автомат. регулювання, напр., А. автопілота до зміни висоти польоту (див. *Автопілотування*). А. реалізується в адаптивних системах керування, у самоналаджуваних системах. У *розпізнаванні образів* проблема А. пов'язана з навчанням і самонавчанням розпізнавати сигнали. Причому, початкову невизначеність усувають за допомогою навчання або самонавчання, а нагромаджену інформацію використовують, щоб збільшити вірогідність розпізнавання. Див. також *Навчання розпізнавати образи*, *Самонавчання розпізнавати образи*. *Т. К. Вінцюк.*

АДАПТИ́ВНА СИСТЕ́МА — система, здатна пристосовуватися до змін внутрішніх і зовнішніх умов. Див. *Система керування адаптивна*.

АДРЕ́С МОДИФІКА́ЦІЯ — зміна адресної частини команди, що забезпечує звертання до комірок, які в ній явно не зазначено. Найчастіше А. м. реалізується шляхом використання індексних регістрів. Для кодування зв'язку адрес із регістрами відводяться спец. розряди команд. *Д. Н. Тодорой.*

АДРЕ́СА у програмуванні — цифрове або буквено-цифрове позначення поля (напр., окремої фізичної комірки) пам'яті ЦОМ. З А. комірки пов'язане поняття її вмісту — наявного в ній у даний момент *коду*, що зберігається там до вміщення в неї іншого коду, який знищує попередній. Використовують А. *в мовах машинних* і *мовах машинно-орієнтованих* для адресації — вказівок у командах операндів. Машинні комірки, А. яких можна використати в командах, становлять адресну, або головну, пам'ять машини. А. операнда наз. також її прямою А., або А. 1-го рангу. Істотну роль в описуванні машинних *алгоритмів* відіграють т. з. А. вищих рангів, використання яких полягає у зазначенні в командах А., що містить А. операнда. А., вмістом якої є А. операнда, наз. А. 2-го рангу цього операнда (інші її назви — непряма адреса, фіксатор і посилання — див. *Адресна мова*). Поняття рангу А. можна узагальнити на будь-яке ціле число. Використання А. вищих рангів — це зручний засіб для записування програм, бо дає можливість подавати їх у вигляді, що не залежить від місця розташування цих програм у пам'яті машини, від місця розташування оброблюваних ними даних та ін. параметрів задач.

У машинних і асемблерних мовах, окрім того, що зазначають операнди за допомогою задання в командах їхніх А. тих чи інших рангів, використовують і інші види адресації, напр., явну (або адресацію нульового рангу), при якій у команді зазначають не А. операнда, а безпосередньо сам операнд; адресацію за допомогою символьних А. — скінченних послідовностей букв або цифр, якими позначають поля пам'яті; відносних А. — А. операнда задають, зазначаючи додатний або від'ємний приріст до якоїсь іншої базової А. В окремих випадках, коли базовою А. є А. команди, що виконується в даний момент часу, відносну адресацію наз. поточною, а коли як базову А. використовують вміст спец. базового регістру — базовою адресацією. В операціях, які виконують команди ЦОМ, можуть, крім головної пам'яті, брати участь і інші сховища, напр., *регістри*, звертання до яких може здійснюватися без явного зазначення їх у команді. *К. Л. Ющенко.*

АДРЕ́СА МАТЕМАТИ́ЧНА — адреса поля у віртуальній (математичній) пам'яті машини. Віртуальна пам'ять в обсязі, порівнянному, як правило, з обсягом осн. пам'яті машини, формально передається в розпорядження програмістові (або системі автоматизації програмування); нумерація комірок у ній передбачається послідовна, починаючи з нуля. А насправді *операційна система* виділяє задачі в загальному випадку кілька не зв'язаних між собою ділянок реальної (основної або зовнішньої) пам'яті; при цьому відповідність між А. м. і фізичними адресами (тобто відображення віртуальної пам'яті на реальну пам'ять) міститься в таблицях операційної системи. Це відображення в процесі розв'язування задачі може багато разів змінюватись. В разі звертання програми до певної А. м. операційна система, використовуючи апаратні й програмні засоби, відшукує реальну комірку, що відповідає цій А. м., і виконує потрібну операцію з наявною в ній інформацією. Будучи адресою уявної пам'яті, А. м., як і адреса реальної фіз. пам'яті, може бути абсолютна, відносна, пряма, непряма тощо (див. *Адреса* у програмуванні). *А. І. Нікітін.*

АДРЕ́СНА МО́ВА — *алгоритмічна мова*, орієнтована на застосування як основа для створення *мов програмування*. Основу А. м. становить відношення *адреси* та вмісту; формалізація цього відношення дає змогу в простій формі описувати операції, реалізовувані на ЦОМ. Цю мову розроблено 1955—56 в СРСР. В А. м. елементи первісної інформації, результати розв'язання задач, а також конструктивні об'єкти, використовувані для побудови *програм* розв'язування задач, розглядаються як об'єкти певної системи *кодів* S, між якими встановлено певні співвідношення, що наз. операціями над кодами. Ці співвідношення дають змогу за звичайними правилами будувати вирази, значен-

нями яких також є коди, одержані в результаті виконання вказаних у них операцій. При цьому коди підмножини S_I ($S_I \subset S$), інтерпретованої як множина елементів первісної інформації, можуть задаватися в явному вигляді і за допомогою елементів деякої множини A ($A \subset S$), що наз. множиною адрес.

Операція виділення вмісту адреси, т. з. штрих-операція, задає відображення множини A в множину B ($B \subset S$), яка наз. множиною вмістів цих адрес. Таке відображення наз. адресним. Штрих-операцію позначають символом ′ (штрих), напр., $'a = b$, де $a \in A$ і $b \in B$. Штрих-операція є однозначною — кожній адресі відповідає лише один вміст. Ніяких обмежень щодо вибору множини A в А. м. не накладається. При кожній конкретній реалізації А. м. цю множину можна визначити певним конструктивним способом. У найпростішому випадку при орієнтації мови на певну машину за A можна прийняти множину адрес її оперативної пам'яті та програмних регістрів; в інших випадках як A можна розглядати множину *байтів* тощо. В загальнішому випадку при орієнтації мови на клас машин за A можна прийняти об'єднання деяких підмножин полів пам'яті. При цьому перетин A і B, як правило, не є пустим, виникає змога багато разів застосовувати штрих-операції, а це приводить до поняття «рангу адреси». Нехай b є вмістом адреси a, тобто $'a = b$, а c — вмістом адреси b, тобто $'b = c$; тоді a є адресою адреси коду c, де a наз. адресою 2-го рангу коду c або фіксатором (чи непрямою адресою) $^2a = '('a) = 'b = c$. Аналогічно визначають і адреси вищих рангів: $^ka = '(^{k-1}a)$. Адреса a наз. адресою нульового рангу коду a, 1-го рангу (чи просто адресою) відносно свого вмісту і т. д.

Операцію, обернену штрих-операції, наз. мінус-штрих-операцією, позначають її через «-1» вгорі зліва від аргумента ($^{-1}b = a$). Ця операція не є однозначною: одному вмістові b може відповідати множина адрес A_b таких, що для кожного $\alpha \in A_b$ маємо $'\alpha = b$. Для визначення та зміни адресного відображення вводять алгоритмічну операцію засилання на адресу (відповідає операції присвоювання в інших мовах) і позначають її символом $\Rightarrow$. Запис операції $b \Rightarrow a$ означає, що: 1) елемент a включається в множину A; 2) елемент b включається в множину вмістів B; 3) встановлюється відповідність $'a = b$; 4) всі раніше встановлені відповідності вигляду $'x = y$, де $x \neq a$, лишаються незмінними. В операції $b \Rightarrow a$, a і b можуть бути якимись функціями. Тоді значення функції b стає вмістом адреси, яка є результатом обчислення значення ф-ції a ($'a = b$). При конструюванні функцій, крім штрих-операцій, можна використовувати й арифметичні ($+$, $-$, $\times$, $:$), функціональні ($\sqrt{\ }$, sin, ln тощо), логічні ($\vee$, $\wedge$, $\neg$), відношення ($\neq$, $=$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $<$) та інші операції. Такі функції наз. адресними. Вираз $b \Rightarrow a$, де a і b — адресні функції, наз. адресною формулою перетворювання, або формулою засилання.

Процес перетворювання інформації на А. м. подають у вигляді адресної програми, яку задають первісним розподілом адрес в S і послідовністю адресних формул із зазначенням порядку застосування їх. Цей порядок задають за допомогою операторів циклу, умовного, безумовного та обчислюваного переходів, звертання до *підпрограм* і т. ін. Залежно від того, які об'єкти, що з них конструюється програма, можуть бути представлені в ній за допомогою вмістів адрес, розрізняють ступені А. м. На 1-му ступені за допомогою адрес задають елементи первісної інформації та *мітки*; на 2-му — вмістами адрес можуть бути й адреси; нарешті, на 3-му ступені вмістами адрес можуть бути ще й символи одно- та двомісних операцій.

Запис програми А. м. складається з двох частин: первісного адресного відображення та динамічної частини. Динамічною частиною програми наз. список адресних рядків. Первісне адресне відображення звичайно задають співвідношенням виду: $'a = c$; серед цих співвідношень можуть бути й такі, в яких c не є елементом первісної інформації, а тому їх можна записувати у вигляді елементарних формул засилання вигляду $c \Rightarrow a$. Сукупність таких рівностей наз. статичною частиною адресної програми. А. м. допускає вільне варіювання об'ємів статичної й динамічної частин, тобто інформацію з статичної частини можна переносити до динамічної частини і навпаки. В процесі розв'язування будь-якої задачі провадиться огляд інформації, що стосується її. Кажуть, що програма оглядає код, якщо його адреса якогось рангу міститься в адресній програмі. Застосування адрес вищих рангів розширює можливості огляду кодів програми. Програмування зводиться головним чином до побудови схем огляду інформації. Схемою огляду послідовності кодів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. циклічну адресну програму, на i-му з циклів якої оглядається i-й елемент послідовності. Під час побудови схем огляду інформації для впорядкування елементів до множин вводять операції слідування: елементи первісної інформації впорядковують за допомогою адрес, у яких вони містяться за деяким рангом; відношення слідування на множині адрес задають найчастіше за допомогою арифм. операцій для цілих чисел (машинних адрес).

На основі А. м. розроблено сім'ю мов програмування, що відрізняються одна від одної вибором символіки, набором операторів, рівнем алгоритмізації введених до них операцій слідування в множині адрес і ступенем представлення об'єктів, з яких конструюються програми за допомогою вмістів адрес. Залежно від цього виділяють рівні, стилі й ступені А. м. Рівень А. м. визначається рівнем впорядкованості адрес і рівнем алгоритмізації введених до них операцій слідування. Розріз-

няють три осн. рівні мови: загальноалгоритмічний, рівень умовних адрес і рівень конкретних адрес. При загальноалгоритмічному рівні приймають найприроднішу для програмованої задачі множину адрес і в тих випадках, коли цього потребує задача, вводять операції слідування, описувані загальноматематичними засобами (напр., за допомогою індексів). При рівні умовних адрес адреси впорядковують лише виходячи з вимог задачі; передбачається впорядковування окремих масивів адрес, оброблюваних алгоритмом, взаємне ж упорядкування масивів та інші питання, пов'язані з фактичним *пам'яті розподілом*, не розв'язуються. Звичайно масиви являють собою арифм. послідовності адрес, першу з яких (чи нульову) задають. Послідовності, визначувані різними початковими адресами, передбачаються неперетинними. Операція слідування описується, таким чином, уже алгоритмічно. Напр., операція слідування по індексах для елементів матриці, розміщених по рядках, починаючи з адреси $a0 + 1$, має вигляд $a0 + (i - 1)n + j$, де n — порядок матриці. Рівень конкретних адрес — це виконання якогось алгоритму на конкретній машині, й у зв'язку з цим і розв'язуються питання визначення справжніх операцій слідування. Передбачається, що множину адрес, за винятком програмних регістрів, повністю впорядковано. В А. м. закладено можливість переходити від рівня до рівня, починаючи від найабстрактнішої алгоритмічної мови й кінчаючи повним розподілом адрес для цієї машини. Вибір певного алфавіту, набору елементарних операцій і допустимих формул мови визначає її стиль. Розрізняють мову публікацій, вхідні мови конкретних *трансляторів* і машинні стилі, запис алгоритмів якими відрізняється від машинного запису тільки кодуванням.

Завдяки можливості описувати адреси як функції якихось параметрів А. м. можна описувати й довільні схеми огляду інформації та складні інформаційно-логічні й економічні алгоритми і складні процеси перегляду й пошуку інформації, організованої в ланцюгові *списки* і *спискові структури;* алгоритм. процеси такого роду не можна описувати за допомогою алгоритм. мов типу АЛГОЛ, не залучаючи допоміжних засобів. У цьому відношенні А. м. випередила алгоритмічні мови, створені за кордоном для спискової обробки символічних виразів (напр., *ЛІСП* тощо). Принципова особливість А. м. полягає в їхній природній інтерпретації як *мов ЦОМ внутрішніх*. Тому при складанні конкретних *мов машинно-орієнтованих* дослідник може використати апарат адресних алгоритмів як зручну систему понять для описування алгоритмів та *елементних структур ЦОМ*, а також для описування трансляторів та інтерпретаторів мов програмування. Роботи з адресного програмування вплинули на розробку структур і систем команд ряду ЕЦОМ (зокрема, «Киев» і «Днепр-2»). Засоби А. м. увійшли як складова частина до мов програмування, таких, як *АЛГЕМ* та А-КОБОЛ — мова, орієнтована на описування алгоритмів трансляції. Поняття А. м. набули дальшого розвитку в мовах *ПЛ-1*, *АЛГОЛ-68*, *СИМУЛА*.

Літ.: Ющенко Е. Л. Адресное программирование. К., 1963 [бібліогр. с. 285—286]; Бабенко Л. П. Об использовании языка типа КОБОЛ для описания трансляторов. «Кибернетика», 1965, № 5.

В. П. Сьомик, К. Л. Ющенко.

АІКА (International Association for Analog Computation) — див. *Міжнародна асоціація з аналогових обчислювань*.

АЛГЕБРА АЛГОРИТМІВ — система, що складається з двох алгебр $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{B}$, які називають відповідно алгеброю операторів та алгеброю умов. Елементи алгебри $\mathfrak{A}$ — це часткові перетворення (оператори) якоїсь абстрактної множини B, а елементи алгебри $\mathfrak{B}$ — часткові предикати (умови), які визначено на множині B. А. а. використовують для описування перетворювань, виконуваних дискретними перетворювачами (див. *Дискретних перетворювачів теорія*). В цьому разі множину B наз. інформаційною множиною.

Осн. операція алгебри $\mathfrak{A}$ — це звичайна операція множення (суперпозиції) операторів. Крім цієї операції, для кожної умови β з $\mathfrak{B}$ в алгебрі $\mathfrak{A}$ визначають ще дві операції, які наз. β-диз'юнкцією та β-ітерацією операторів. Результатом β-диз'юнкції $(P \vee Q)$ двох операторів P та Q є оператор R, такий, що для будь-якого стану $b \in B$, $bR = bP$, коли умова β істинна на стані b, $bR = bQ$, якщо $\beta(b)$ хибна й, нарешті, оператор R вважається невизначеним на стані b, якщо $\{\beta(b)$ не визначена. Результатом β-ітерації $\{\beta P\}$ оператора P є оператор Q, такий, що для будь-якого $b \in B$ має місце $bQ = bP^n$, де n — найменше з чисел $m = 0, 1\ldots$, таких, що $\beta(bP^m)$ істинне ($bP^0 = b$ для будь-якого оператора P). На множині $\mathfrak{B}$ умов визначено звичайні булеві операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$, які поширюються і на випадок, коли значення умов на деяких елементах множини B не визначено. Напр., диз'юнкція $\alpha \vee \beta$ двох умов є нова умова γ. Ця умова набуває значення «1» на тих елементах множини B, на яких одна з умов α або β набуває значення «1». Значення «0» вона набуває на тих елементах, на яких α та β дорівнюють «0», і вона є не визначеною, якщо одна з умов α та β не визначена, а друга дорівнює «0». Крім цих операцій, визначають і операцію $P \cdot \alpha$ множення оператора на умову. Результатом виконання цієї операції є умова β, значення якої дорівнює значенню умови α після виконання оператора P. Якщо в А. а. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ зафіксувати систему твірних (елементарні оператори й елементарні умови), то елементи алгебри операторів і алгебри умов можна задавати як вирази, складені з цих твірних та операцій системи алгебр. Такі вирази наз. регулярними операторними й умовними виразами, а оператори та умови, які діють на множині B і які можна задавати

таким чином, наз. регулярними операторами й умовами. В застосуваннях теорії дискретних перетворювачів до проектування обчисл. машин А. а. наз. ще й мікропрограмними алгебрами, а регулярні операторні вирази — регулярними мікропрограмами.

З кожною інтерпретацією вхідних і вихідних сигналів дискретного перетворювача на інформаційній множині B пов'язують А. а. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, за елементарні оператори обираючи оператори f_y, що відповідають символам вихідного алфавіту, а за елементарні умови — умови вигляду $\mu(b) = x$, де μ — функція виходів *автомата операційного* B, а x — символ вхідного алфавіту.

Осн. співвідношення між дискретними перетворювачами й А. а. встановлює така теорема про регуляризацію: будь-який оператор, заданий дискретним перетворювачем, можна задавати як операторний регулярний вираз в А. а., що відповідає інтерпретації вхідних і вихідних сигналів цього дискретного перетворювача. На цій теоремі грунтуються застосування А. а. до розв'язування практичних задач — проектування дискретних пристроїв і задач програмування. Вивчення структури та співвідношень конкретних А. а. дає змогу виконувати глибокі еквівалентні перетворювання алгоритмів, заданих у вигляді регулярних виразів, відшукуючи такі вирази, які дають оптимальну з точки зору того чи іншого критерію реалізацію алгоритму у вигляді дискретного перетворювача.

Літ.: Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5. *О. А. Летичевський.*

АЛГЕБРА ЛІНІЙНА — один з найбільших і найважливіших розділів сучасної алгебри, що широко застосовується в усіх галузях математики, в багатьох галузях механіки та фізики, а також у кібернетиці. Важко точно окреслити межі А. л., бо протягом свого тривалого істор. розвитку вона не раз розширювалася й видозмінювалася, вбираючи все нові й нові поняття в зв'язку з запитами теорії та практики. На сучас. етапі розвитку можна, дещо умовно, вважати, що А. л. — це та галузь алгебри, яка вивчає властивості векторних просторів (у т. ч. деякі узагальнення, такі, як модулі) та їхні лінійні відображення. Хоча в самостійний розділ А. л. виділилась аж на межі 19 і 20 ст., більшість її проблем і методів мають багатовікову історію розвитку в рамках алгебри, теорії чисел, геометрії та аналізу. Дослідження щодо розв'язання цих проблем і тепер становлять осн. зміст А. л.; за останні десятиріччя до них приєдналися нові проблеми, що випливають насамперед із сучасної обчислювальної математики й кібернетики.

Найдавнішою проблемою А. л. є задача знаходження розв'язків лінійних рівнянь систем і вивчення властивостей таких розв'язків. Практичні методи розв'язування лінійних рівнянь з одним невідомим і найпростіших систем з двома невідомими були відомі вже в глибоку давнину — в Єгипті та Вавілоні. Їх вивчали й у середні віки араб. математики. Це зумовлене тим, що необхідність розв'язувати практичні задачі на обчислювання площ та об'ємів, розподіл робочої сили в торговельних угодах тощо приводила в найпростіших випадках до пошуку розв'язків систем лінійних рівнянь. Але в заг. вигляді задачу знаходження розв'язку певної системи з n рівнянь з n невідомими розв'язали тільки в 17—18 ст. Г. В. Лейбніц (1646—1716) і Г. Крамер (1704—52). Вони запровадили поняття визначника й обгрунтували відповідне обчислення визначників. Дослідження невизначених (тобто таких, що мають більше як один розв'язок) і несумісних (таких, що не мають розв'язків) систем здійснили тільки в 19 ст. К.-Ф. Гаусс (1777—1855) і Л. Кронекер (1823—91). Потреба в таких дослідженнях поставала в аналітичній геометрії та в аналізі при вивченні ф-цій кількох невідомих, а також у теорії лінійних дифер. рівнянь. Зокрема, поступово з'ясувалося, що гол. метод ефективного розв'язування лінійних диференціальних, а потім і інтегр. рівнянь у механіці, фізиці й техніці полягає в переході до наближених до них систем алгебр. лінійних рівнянь і до знаходження розв'язків цих рівнянь. Тут наука зіткнулася з таким явищем: знаходження числових розв'язків великих систем лінійних рівнянь, які містять сотні й тисячі невідомих (а саме до таких систем зводяться прикладні задачі), вимагає виконання величезної кількості арифм. операцій. У зв'язку з цим у 20 ст. виник окремий, особливо важливий для практики, напрям — обчисл. методи А. л., до завдань якого належить розроблення й вивчення ефективних процедур, *алгоритмів* для якнайшвидшого й надійного відшукання розв'язків великих систем лінійних рівнянь. Істотне зрушення в цьому питанні намітилося лише після того, як досягла достатнього рівня обчисл. техніка, особливо після створення ЕОМ.

Друга важлива тема А. л. — вивчення лінійних перетворень вигляду:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Ця тема виникла спершу в аналітичній геометрії в зв'язку з перетвореннями координат: саме за зазначеною схемою перетворюються декартові координати точки при переході від однієї системи координат до іншої. Дослідження А. Келі (1821—95), Ж. Сільвестра (1814—97), Ф. Клейна (1849—1925) та ін. привели до далекосяжного зближення геометрії й алгебри на основі таких центр. понять, як «лінійне перетворення» (див. *Оператори лінійні*), «квадратичні форми» тощо, які й досі є найважливішими поняттями в сучасній А. л. Це зближення стало особли-

во плідним, коли наприкінці 19 ст. розробили й увели в ужиток зручну адекватну систему позначень і мову викладу, що належить до неї,— мову числових векторів і матриць. Само поняття «вектора» виникло спочатку в механіці (вектор-сила, вектор-швидкість і т. п.). Потім воно виявилося зручним для геом. досліджень, спочатку в двовимірному і тривимірному просторах, а наприкінці 19 ст. Г. Грасман (1809—77) поклав векторне числення в основу побудови та вивчення n-вимірного простору. Лише в 20-х роках 19 ст. векторна алгебра в рамках А. л., що утворилася тоді, набула остаточного аксіоматичного оформлення в поняття «векторний простір» (або «лінійний простір»). Водночас в А. л. було обгрунтовано й обчислення матриць (див. *Алгебра матриць*).

Приблизно тоді згадані поняття набули далекосяжних узагальнень, їх почали застосовувати в нових галузях, причому одразу в кількох напрямах (напр., виникла і почала розвиватися «нескінченновимірна геометрія»). У працях Д. Гільберта (1862—1943) вперше методи досліджень і поняття А. л. було систематично перенесено на простори ф-цій, що їх розглядають як нескінченновимірні векторні простори. Цей погляд було покладено в основу вивчення дифер. та інтегр. рівнянь, варіаційного числення та ін. галузей аналізу. Монографія Гільберта і Куранта «Методи математичної фізики» стала основоположною для цього напряму. Цю нову галузь іноді, на відміну від А. л., наз. лінійним, або функціональним, аналізом. Центр. поняттям лінійного аналізу є поняття топологічного векторного простору. Друге узагальнення пов'язане з розглядом векторних просторів та їхніх лінійних перетворень над довільними полями. Особливо цікаві поля раціональних та алгебр. чисел, поля алгебр. функцій і, врешті, скінченні поля. Векторні простори над скінченними полями, раніше добре відомі лише алгебристам і фахівцям з теорії чисел, в останні роки стають важливими для деяких розділів матем. апарату кібернетики: *дискретного аналізу*, багатозначної логіки (див. *Логіка багатозначна*) й для теорії кодів з виправленням помилок. Виявилося, що методи, поняття й результати «класичної» А. л., природно, поширюються й на випадок векторних просторів над довільними полями.

Особливо плідним видається перенесення на дискретний випадок скінченних полів техніки матричного числення. В дискретному аналізі й у багатозначній логіці успішно застосовується добре розроблений апарат А. л., а такий розділ, як лінійні *коди*, в певному розумінні стає останнім часом проностотаки одним з нових розділів А. л. Відповідно до завдань таких розділів кібернетики, як *програмування лінійне, операцій дослідження, ігор теорія*, виникла і бурхливо розвивається нова галузь А. л.— теорія систем лінійних нерівностей і близькі до неї теми — опуклі тіла й *опуклі многогранники*. Важливість цієї тематики стала очевидною вже в 30—40-х роках 20 ст., коли в працях з теорії ігор, з матем. питань планування виробн. тощо наука зіткнулася безпосередньо з необхідністю детально досліджувати розв'язки систем лінійних нерівностей і відповідного геом. аналога — опуклих многогранників у n-вимірних просторах. Виявилося, що ця тема, цікава сама по собі з точки зору алгебри й геометрії, була до цього представлена лише небагатьма окремими працями. А починаючи з 40-х—50-х років, особливо коли після появи ЕЦОМ стали виявляти інтерес до алгоритмів ефективного знаходження числових розв'язків лінійних нерівностей, ця галузь сформувалася у велику самостійну теорію всередині А. л., яку розробляють математики багатьох країн.

Літ.: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970; Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Пер. с нем., т. 1—2. М.— Л., 1951; Линейные неравенства и смежные вопросы. Пер. с англ. М., 1959 [бібліогр. с. 421—458]; Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц. М., 1963 [бібліогр. с. 262—285]; Артин Э. Геометрическая алгебра. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 280—281]. *Л. А. Калужнін.*

АЛГЕБРА ЛОГІКИ — важливий випадок *логік багатозначних*, в якому вивчають властивості функцій, що приймають за значення, як і їхні аргументи, елементи із заданої двоелементної множини, а також сімейства і алгебри таких функцій, які містять як операції суперпозиції, і деякі аналоги їх. Іноді замість терміну «А. л.» застосовують термін «двозначна логіка».

А. л. почала формуватись у 19 ст. у працях англ. математика Дж. Буля. А. л. створено головним чином для розв'язування традиційних логічних задач алгебр. методами. З появою *множин теорії* (70-і роки 19 ст.) і розвитком *алгебри множин*, яка увібрала в себе частину первісного предмета А. л., та в зв'язку з дальшим розвитком *логіки математичної* предмет А. л. значно змінився.

Об'єктом вивчення стали ф-ції А. л. і різні операції над ними. Згодом клас ф-цій А. л. було розширено до класу ф-цій, аргументи яких, як і самі ф-ції, набувають значення елементів фіксованої скінченної множини E; розширився й набір операцій над ф-ціями. Іноді під А. л. розуміють саме останню концепцію. Проте для застосувань найбільше значення має той випадок, коли потужність згаданої множини E дорівнює двом. Дослідження в А. л. тісно пов'язані з іншим підходом до вивчення висловлювань — з т. з. *численням висловлювань*. Вживані в звичайній мові логічні зв'язки «і», «або», «якщо..., то», «еквівалентне», частка «не» тощо дають змогу з уже заданих висловлювань будувати нові, «складніші» висловлювання. Так, з висловлювань «$x > 2$», «$x \leqslant 3$» за допомогою зв'язки «і» можна одержати висловлювання «$x > 2$» і «$x \leqslant 3$», за допомогою зв'язки «або» — висловлювання «$x > 2$» або «$x \leqslant 3$» і т. д.

Істинність чи хибність одержаних таким способом висловлювань залежить від істинності чи хибності початкових висловлювань і

відповідного трактування зв'язок як операцій над висловлюваннями. Для позначення істинності вводять символ і (або 1), а для позначення хибності — символ х (або 0). Зв'язки «і», «або», «якщо..., то», «еквівалентне» позначають відповідно значками & (*кон'юнкція*), $\vee$ (*диз'юнкція*), $\rightarrow$ (*імплікація*) і $\sim$ (еквівалентність); для заперечення вводиться знак ‾ (рисочка вгорі). Крім індивідуальних висловлювань, почали використовувати й змінні висловлювання, тобто такі змінні, значеннями яких можуть бути будь-які наперед задані індивідуальні висловлювання. Поняття ф-ли, що є формалізацією поняття «складного» висловлювання, вводиться індуктивно. Нехай $a, b, c, \ldots$ — індивідні, а $x, y, z, \ldots$ — змінні висловлювання. Кожну з цих букв наз. ф-лою. Якщо значком * позначити будь-яку з перелічених вище зв'язок, а $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ — формули, то $(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})$ і $\overline{\mathfrak{a}}$ теж є формули. Приклад ф-ли: $((x \& y) \rightarrow \overline{z})$. Зв'язки й частку «не» почали розглядати як операції над величинами, що набувають значень «0» і «1», і результатом застосування їх також є числа «0» або «1» (див. *Логічні операції*).

Введені операції дають змогу кожній ф-лі при заданих значеннях висловлювань, що входять до неї, приписати одне з двох значень — «0» або «1». Так кожну формулу можна одночасно розглядати як певний спосіб задавання або реалізації ф-цій А. л., тобто таких ф-цій, які визначено на наборах з нулів та одиниць і які також набувають значень «0» або «1». При цьому формули $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{b}$ наз. еквівалентними (позначення $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$), якщо вони реалізують рівні ф-ції. Для задавання ф-цій А. л. іноді використовують табл., що містять усі набори значень змінних і значення ф-цій на цих наборах. Це т. з. табличний спосіб задавання ф-цій. А самі таблиці наз. **істиннісними таблицями**. Так, напр., зведена таблиця, що задає ф-ції $\overline{x}$, $x \& y$, $x \vee y$, $x \rightarrow y$ та $x \sim y$, має вигляд:

x	y	$\overline{x}$	$x \& y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Аналогічними є таблиці й для довільних ф-цій А. л. Для перетворення ф-л на еквівалентні ф-ли важливу роль відіграють такі рівності:

$$x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x \qquad (1)$$

(закон комутативності);

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (2)$$

(закон асоціативності);

$$x \& (y \vee x) = x, \; x \vee (x \& y) = x \qquad (3)$$

(закон поглинання);

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z) \qquad (4)$$

(закон дистрибутивності);

$$x \& \overline{x} = 0 \qquad (5)$$

(закон суперечності);

$$x \vee \overline{x} = 1 \qquad (6)$$

(закон виключеного третього);

$$x \rightarrow y = \overline{x} \vee y, \quad x \sim y = (x \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y}). \qquad (7)$$

Ці рівності, що їх можна встановити, напр., за допомогою істиннісних таблиць, дають змогу вже без таблиць одержувати інші рівності. Методом одержання цих рівностей є т. з. тотожні перетворення, які змінюють власне ф-лу, але не ф-цію, яку реалізує ця формула. Напр., користуючись законами поглинання, одержують закон ідемпотентності $x \vee x = x$. За допомогою цих рівностей у деяких випадках можна істотно змінити запис ф-ли, викинувши в ній «зайві» дужки. Так, співвідношення (1) та (2) дають змогу замість ф-л $(\ldots(\mathfrak{a}_1 \& \mathfrak{a}_2) \& \ldots) \& \mathfrak{a}_s)$ і $(\ldots(\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2) \vee \vee \ldots) \vee \mathfrak{b}_s)$ використати компактніший запис $\mathfrak{a}_1 \& \mathfrak{a}_2 \& \ldots \& \mathfrak{a}_s$ і $\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{b}_s$. Перший з цих виразів наз. кон'юнкцією співмножників $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$, а другий — диз'юнкцією доданків $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_s$. Рівності (5), (6) і (7) показують ще й те, що константи «0» і «1», імплікацію та еквівалентність, розглядаючи їх як ф-ції, можна передати через кон'юнкцію, диз'юнкцію та заперечення. Більше того, всяку ф-цію А. л. можна виразити ф-лою, яку записують символами &, $\vee$, ‾.

Множина всіх ф-л, у побудові яких беруть участь змінні висловлювання, деякі з символів &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, ‾ і констант «0» і «1», наз. мовою над даними символами й константами. Рівності (1) — (7) показують, що для всякої ф-ли в мові над &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, ‾, 0, 1 знайдеться еквівалентна їй ф-ла в мові над &, $\vee$, ‾, «0», «1»: напр., $(x \rightarrow y) \sim z = ((\overline{x} \vee y) \& z) \vee \vee ((\overline{\overline{x} \vee y}) \& \overline{z})$. Особливу роль у такій мові відіграє клас ф-л, які можна записати у вигляді $\mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{a}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{a}_s$, «0» чи «1», де $s \geqslant 1$ і кожне $\mathfrak{a}_i$ — або змінне висловлювання, або його заперечення, або кон'юнкція їх; при цьому жодне $\mathfrak{a}_i$ не містить однакових співмножників виду x і $\overline{x}$ одночасно, і всі $\mathfrak{a}_i$ попарно не дорівнюють один одному. Тут дужок не ставлять, бо припускають, що кон'юнкція зв'язує «дужче», ніж диз'юнкція, тобто при обчислюванні за заданими значеннями змінних треба спочатку обчислити значення $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$. Ці вирази наз. *диз'юнктивними нормальними формами* (ДНФ). Будь-яку ф-лу $\mathfrak{N}$ у мові над &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, ‾, 0, 1, що реалізує ф-цію А. л., яка відрізняється від «0», за допомогою рівностей (1) — (7) можна звести до рівної їй ДНФ, яка містить усі змінні висловлювання ф-ли $\mathfrak{N}$ і будь-яке

число інших змінних, при цьому кожне $\mathfrak{a}_i$ в цій ДНФ містить одні й ті самі змінні. Таку ДНФ наз. досконалою ДНФ ф-ли $\mathfrak{N}$; для «0» досконалою ДНФ є сама формула «0». Можливість зведення до досконалої ДНФ лежить в основі *алгоритму*, що встановлює еквівалентність або нееквівалентність двох наперед заданих формул. Цей алгоритм полягає ось у чому: зводять досліджувані ф-ли $\mathfrak{N}_1$ та $\mathfrak{N}_2$ до досконалих ДНФ, що містять усі ті змінні, які є і в $\mathfrak{N}_1$, і в $\mathfrak{N}_2$, і дивляться, чи збігаються одержані вирази, чи ні. Якщо вони збігаються, то $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$, а якщо ні, то $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$. Важливу роль в А. л. та її застосуваннях відіграє скорочена ДНФ. ДНФ наз. скороченою, якщо задовольняються такі умови: по-перше, в ній немає таких пар доданків $\mathfrak{a}_i$ та $\mathfrak{a}_j$, що будь-який співмножник з $\mathfrak{a}_i$ є і в $\mathfrak{a}_j$; по-друге, для будь-яких двох таких доданків $\mathfrak{a}_i$ та $\mathfrak{a}_j$, з яких один містить співмножником якусь змінну, а другий — заперечення цієї змінної (за умови, що іншої змінної, для якої має місце це саме, в цій парі доданків нема), у цій самій ДНФ є доданок $\mathfrak{a}_k$, що дорівнює кон'юнкції решти співмножників цих двох доданків. Будь-яку ДНФ за допомогою рівностей (1) — (7) можна звести до скороченої ДНФ, яка дорівнює їй. Напр., скороченою ДНФ для ф-ли $((x \sim (y \to z)) \to (x \,\&\, z))$ є $\bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee z \vee x \,\&\, y$. Ф-ли $\mathfrak{N}_1$ та $\mathfrak{N}_2$ еквівалентні тоді й тільки тоді, коли збігаються їхні скорочені ДНФ. Крім ДНФ, вживають кон'юнктивні нормальні форми — КНФ (так називають вирази, які можна одержати з ДНФ, замінивши в них знаки $\vee$ на &, а & на $\vee$ і 0 на 1). Напр., з ДНФ $x \,\&\, y \vee \bar{x} \,\&\, z$ одержують КНФ $(x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee z)$. Операцію (або ф-цію) f наз. двоїстою для операції φ, коли табл., що задає f, можна одержати з табл., яка задає φ, замінивши в ній скрізь «0» на «1», а «1» на «0» (включаючи заміну значень ф-цій). Напр., кон'юнкція і диз'юнкція двоїсті між собою, заперечення двоїсте самому собі, константи «1» та «0» двоїсті одна одній і т. д. Перетворювання ф-л, при якому знаки всіх операцій у виразі замінюють на знаки двоїстих їм операцій, константу, «0» замінюють на «1», а «1» — на «0», наз. перетворенням двоїстості. Якщо правильною є рівність $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ і $\mathfrak{a}^*$ двоїсте $\mathfrak{a}$, а $\mathfrak{b}^*$ двоїсте $\mathfrak{b}$, то правильною буде й рівність $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$, яку називають двоїстою попередній. Це т. з. принцип двоїстості. Прикладами двоїстих рівностей є пари законів (1), (2) і (3); рівність (5) двоїста рівності (6), кожна КНФ двоїста якійсь ДНФ. Досконалу КНФ і скорочену КНФ визначають як такі КНФ, що двоїсті їм вирази є відповідно досконалою ДНФ і скороченою ДНФ.

Досконалі й скорочені ДНФ та КНФ зручно використовувати для розв'язування задачі знаходження всіх гіпотез і висновків із заданої ф-ли. Під гіпотезою ф-ли $\mathfrak{a}$ розуміють таку ф-лу $\mathfrak{b}$, що $(\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}) = 1$; а під висновком ф-ли $\mathfrak{a}$ — таку ф-лу $\mathfrak{b}$, що $(\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}) = 1$. Гіпотезу ф-ли $\mathfrak{a}$ наз. простою, якщо вона є кон'юнкцією змінних або їхніх заперечень і після відкидання будь-якого з її співмножників перестає бути гіпотезою ф-ли $\mathfrak{a}$. Аналогічно цьому, висновок із ф-ли $\mathfrak{a}$ наз. простим, якщо він є диз'юнкцією змінних або їхніх заперечень і після відкидання будь-якого з її доданків перестає бути висновком із ф-ли $\mathfrak{a}$. Розв'язок задачі знаходження гіпотез і висновків полягає в зазначенні алгоритму, який будує всі прості гіпотези й висновки для заданої ф-ли, і в одержанні з них, за законами (2) — (7), решти гіпотез і висновків. Алгоритм спирається на такі факти. Якщо $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ мають одні й ті самі гіпотези й висновки відповідно. Доданок ДНФ є гіпотезою цієї ДНФ; співмножник КНФ є висновком з цієї КНФ. Якщо $\mathfrak{a}$ — гіпотеза виразу $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{c}$ — також гіпотеза для $\mathfrak{b}$; якщо $\mathfrak{a}$ — висновок з виразу $\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}$ також є висновком з $\mathfrak{b}$. Якщо $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{c}$ — гіпотези виразу $\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}$ також є гіпотезою для $\mathfrak{b}$; якщо $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{c}$ — висновки з $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{c}$ також є висновком з $\mathfrak{a}$. У досконалої ДНФ немає інших гіпотез (які не містять букв, що не входять у цю ДНФ), крім диз'юнкції деяких її доданків чи ДНФ, що дорівнюють їм. У досконалої КНФ немає інших висновків, крім кон'юнкцій деяких її співмножників чи виразів, що дорівнюють їм. Скорочена ДНФ є диз'юнкцією всіх її простих гіпотез; скорочена КНФ є кон'юнкцією всіх її простих висновків. Скорочена ДНФ має важливі застосування. Слід відзначити насамперед задачу мінімізації ф-цій А. л., що є частиною задачі синтезу керуючих систем. Мінімізація ф-цій А. л. полягає в побудові такої ДНФ для заданої ф-ції, яка реалізує її і має найменше сумарне число співмножників у своїх доданках, тобто має мінім. складність. Такі ДНФ наз. мінімальними. Кожну мінімальну ДНФ для заданої ф-ції А. л., яка відрізняється від константи, можна одержати з скороченої ДНФ цієї ф-ції, викинувши деякі доданки. Для деяких ф-цій скорочена ДНФ може збігатися з мінімальною ДНФ. Це стосується, напр., монотонних ф-цій, тобто таких ф-цій, які реалізуються ф-лами над &, $\vee$, 0 і 1.

В мові над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, 0, 1, $+$, де знак $+$ інтерпретують як додавання за модулем 2, встановлюються такі співвідношення:

$$x \vee y = ((x \,\&\, y) + x) + y, \quad \bar{x} = x + 1; \qquad (8)$$

$$x \to y = \bar{x} \,\&\, y, \quad x \sim y = (x + y) + 1; \qquad (9)$$

$$x + y = (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y), 1 = x \vee \bar{x}. \qquad (10)$$

За допомогою цих ф-л можна переводити ф-ли мови над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{\ }$, 0, 1 в еквівалентні їм формули мови над &, $+$, 1 і навпаки. Тотожні перетворювання в такій мові здійснюються за допомогою рівностей, встановлених для кон'юнкції і таких додаткових рівностей:

$$x + y = y + x; \quad (11)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z); \quad (12)$$

$$x \& (y + z) = x \& y + x \& z; \quad (13)$$

$$x \& x = x, \quad x + (y + y) = x, \ x \& 1 = x \quad (14)$$

(тут також вважають, що кон'юнкція зв'язує дужче, ніж знак $+$). Цих рівностей досить для того, щоб з них за допомогою тотожних перетворювань, як і при розгляді мови над $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $^{-}$, 0, 1, можна було вивести будь-яку правильну рівність у мові над $\&$, $+$, 1. Вираз цієї мови наз. зведеним поліномом, якщо він або має вигляд $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_s$, де $\mathfrak{a}_1$ є «1» або змінне, або кон'юнкція різних змінних без заперечень ($\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_j$ при $i \neq j$ і $s \geqslant 1$), або дорівнює $1 + 1$. Напр., вираз $x \& y \& z + x \& y + 1$ є зведеним поліномом. Будь-яку формулу А. л. за допомогою тотожних перетворювань можна звести до зведеного полінома. Рівність $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ має місце тоді й тільки тоді, коли зведений поліном для $\mathfrak{a}$ збігається зі зведеним поліномом для $\mathfrak{b}$.

Крім розглянутих мов, існують і інші, рівносильні їм (дві мови наз. рівносильними, якщо за допомогою певних правил перетворювань кожна ф-ла однієї з цих мов переводиться в якусь еквівалентну їй ф-лу в іншій мові і навпаки). В основу такої мови досить покласти будь-яку систему операцій (і констант), яка має ту властивість, що через операції (і константу) цієї системи можна виразити будь-яку ф-цію А. л. Такі системи наз. функціонально повними. Прикладами повних систем є $\{x \vee y\}$, $\{x \vee y, \bar{x}\}$, $\{x + y, 1, x \& y\}$ тощо. Існує алгоритм, який за довільною скінченною системою ф-цій А. л. встановлює її повноту або неповноту.

Алгоритм грунтується на такому факті. Система ф-цій А. л. є повною тоді й тільки тоді, коли вона містить ф-ції $f_1(x, y, \ldots, v)$ і $f_2(x, y, \ldots, v)$ такі, що $f_1(0, 0, \ldots, 0) = 1$ $f_2(0, 0, \ldots, 0) = 0$, а також ф-ції f_3, f_4, f_5, де $f_3 \neq f_3^*$, f_3^* — ф-ція, двоїста до f_3, f_4 — не монотонна, а для f_5 зведений поліном має доданок $\mathfrak{a}$, в якому є більше як один співмножник (усі ці ф-ції не обов'язково повинні бути різні). Розглядають і мови, в основі яких лежать такі системи операцій, що не є функціонально повними. Таких мов безліч. Між ними є нескінченна множина попарно не порівнянних мов (тобто за допомогою тотожних перетворювань не можна перекладати з однієї мови на іншу). Але для кожної мови, побудованої на основі тих чи інших операцій А. л., існує така скінченна система рівностей цієї мови, що будь-яку рівність цієї мови можна вивести з рівностей цієї системи за допомогою тотожних перетворювань. Таку систему наз. дедуктивно повною системою рівностей даної мови. Напр., рівності (1) — (6) — становлять повну систему рівностей мови над $\&$, $\vee$, $^{-}$, 0, 1.

Розглядаючи ту чи іншу зі згаданих мов разом з якоюсь повною системою рівностей цієї мови, іноді абстрагуються від таблицевого задавання операцій, що лежать в основі цієї мови, й від того, що значеннями її змінних є висловлювання. Замість цього можливі різні інтерпретації мови, що складаються з тієї чи іншої сукупності об'єктів (які є значеннями змінних) і системи таких операцій над об'єктами цієї множини, які задовольняють рівності з повної системи рівностей цієї мови. Так, мова над $\&$, $\vee$, $^{-}$, 0, 1 внаслідок цього перетворюється на мову *булевої алгебри*; мова над $\&$, $+$, 1 — на мову булевого кільця (з одиницею); мова над $\&$, $\vee$, $^{-}$ — на мову дистрибутивної структури тощо. А. л. розвивається переважно під впливом задач, які виникають в галузі її застосувань. З них найважливішу роль відіграють застосування А. л. в теорії електр. схем. Для описування цих схем іноді доводиться використовувати не лише звичайну двозначну А. л., а й розглядати ті чи інші її багатозначні узагальнення.

Літ.: Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. «Протоколы секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете», 1884, т. 2, в. 4; Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959; Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. Пер. с нем. М., 1947 [бібліогр. с. 297—298]; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [бібліогр. с. 113—115]. *В. Б. Кудрявцев.*

А́ЛГЕБРА МА́ТРИЦЬ — розділ алгебри, в якому вивчають матриці й різні операції над ними. Матриці — це прямокутні або квадратні таблиці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де a_{ik} — елементи якоїсь множини S; кажуть, що A — матриця над S. Найчастіше S — якась числова множина (множина всіх комплексних, дійсних, раціональних, цілих чи ін. чисел) або (у загальнішому випадку) S — носій якоїсь *алгебричної структури* (кільця, поля, *групи*, *булевої алгебри* тощо). У таких випадках операції, визначені на S, поширюються природно й на сукупність матриць над S так, що вона в свою чергу становить алгебр. структуру. Вивчення властивостей таких алгебр. структур і застосування їх у різних розділах математики становить зміст теорії матриць. Надалі (якщо протилежне не застережено) вважатимемо, що S — або кільце R, або навіть поле K (бо це вичерпує майже повністю всі випадки, які трапляються в практиці).

Послідовності $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) — рядки, а послідовності $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) — стовпчики матриці

A. Послідовність $(a_{11}, a_{22} \ldots)$ наз. діагоналлю матриці A. Матриця розміром $m \times n$ (коротко — $m \times n$-матриця) — це матриця з m рядками й n стовпчиками (колонками), при $m = n$ її наз. квадратною матрицею порядку n. Сукупність таких матриць над множиною S позначимо через $M_n(S)$ (або $M_n(R)$ чи $M_n(K)$). Ця сукупність з операціями додавання й множення, які визначено далі, наз. матричними алгебрами над множинами. Матриці розміром $(1, n)$ та $(m, 1)$ наз. відповідно рядковими і стовпчиковими векторами. У теорії матриць часто трапляються матриці таких окремих видів: нульова матриця $O_{m,n}$ розміром $m \times n$ (якщо всі $a_{ik} = 0$); діагональна матриця, тобто квадратна матриця, всі елементи якої поза діагоналлю дорівнюють нулеві:

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & c_2 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & c_n \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

скалярна матриця (якщо в D всі $c_i = c$); одинична матриця (якщо всі $c = 1$), позначають її E. Матрицю

$$A^{\text{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

наз. транспонованою до матриці A. Сума матриць A і B однакового розміру $m \times n$ і множення матриці на скаляр визначають за ф-лами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \ldots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \ldots & ca_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \ldots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

З цими операціями сукупність матриць розміром $m \times n$ над кільцем R утворює модуль, а при $R = K$ (де K—поле)— векторний простір розмірності $m \times n$. Множення матриць A і B визначається лише тоді, коли A — $(m \times n)$-матриця, B — матриця розміром $n \times k$. Тоді добуток $C = A \cdot B$ — матриця розміром $m \times k$, при цьому

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mk} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

де $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$.

Зокрема, множення скрізь визначено для квадратних матриць однакового порядку n з $M_n(R)$. Визначення операції множення матриць (4) пов'язано з застосуванням матриці для описування лінійних відображень (див. *Оператори лінійні*) та перетворенням координат. Нехай, напр., V і W — векторні простори відповідно розмірності m і n над R і нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ і $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \ldots, \vec{d}_n$ — базиси цих просторів. Лінійне відображення $\mathcal{A}: V \to W$ (V у W) повністю визначається образами $\vec{e}_1\mathcal{A}, \ldots, \vec{e}_m\mathcal{A}$ базисних елементів; їх, зображують у свою чергу через базис $d_1, d_2, \ldots d_m$ так:

$$\vec{e}_i\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_j \qquad (5)$$

і матриця

$$A = (a_{ij}) \qquad (6)$$

повністю визначає відображення $\mathcal{A}$. Якщо тепер U — якийсь третій векторний простір $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$ — його базис), $\mathcal{B}$ — лінійне відображення $\mathcal{B}: W \to U$, $B = (b_{jl})$ — його матриця для базисів $\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_m$ і $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$, то лінійному відображенню $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, що його одержують, послідовно застосувавши $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, відповідає матриця C, що дорівнює добуткові $A \cdot B$, який визначено за законом (4). При $V = W = U$ з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ у V відповідні матриці є квадратними, бо вони перебувають у взаємно однозначній відповідності з лінійними операторами простору V. і алгебра $M_n(K)$ квадратних матриць n-го порядку ізоморфно зображує алгебру лінійних операторів n-вимірного векторного простору над полем K.

Відповідність $\mathcal{A} \to A$ залежить від обраного базису $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. При переході до нового базису $\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n$ за допомогою матриці переходу C лінійному операторові $\mathcal{A}$ відповідає матриця CAC^{-1}, де C^{-1} — т. з. обернена матриця матриці C, тобто $C \cdot C^{-1} = E$. Матриці A і CAC^{-1} наз. подібними.

Центр. задача теорії лінійних операторів і матриць: з-поміж усіх матриць CAC^{-1} знайти найпростішу (це т. з. задача зведення матриць до нормальної форми). В частинних випадках — це діагональна матриця, в якій по діагоналі стоять власні значення матриці (тобто корені характеристичного полінома $|xE - A|$), так що нормальну діагональну форму однозначно визначено аж до порядку, в якому йдуть один за одним діагональні елементи. У заг. випадку матриці зводяться або до т. з. нормальної форми Жордана (якщо $К = C$ — поле комплексних чисел), або до нормальної форми Фробеніуса (якщо поле К — довільне). Зведення матриці до нормальної форми застосовують, щоб спростити алгебр. дії над матрицями, при розв'язуванні лінійних дифер. рівнянь, в операторному численні та в багатьох інших задачах геометрії й механіки.

Матриці використовують для описування й досліджування *білінійних та квадратичних форм*. При переході до іншого базису $\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n$ за допомогою матриці переходу C матриця білінійної форми перетворюється за законом $A = CAC^{\mathrm{T}}$, де C^{T} — транспонована матриця. Тим самим перетворення матриці білінійної форми здебільшого відрізняється від перетворення матриці лінійного оператора. Збіг буває тільки для тих матриць переходу, для яких $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$ — це т. з. ортогональні матриці. Симетричним білінійним формам відповідають симетричні матриці, тобто такі, для яких $a_{ik} = a_{ki}$. Зокрема, симетричні матриці завжди можна звести до діагонального вигляду (до головних осей), навіть якщо обмежитись ортогональними матрицями переходу. Зведення до головних осей — одна з центр. операцій *алгебри лінійної* і теорії матриць. Її застосовують у геометрії та механіці. Можуть бути й узагальнення на випадок нескінченновимірних просторів та «нескінченних» матриць.

Велике значення, особливо для *імовірностей теорії*, мають матриці над полем дійсних чисел з невід'ємними коефіцієнтами. Якщо всі $a_{ik} \geqslant 0$ і сума елементів кожного рядка дорівнює 1, то матрицю наз. стохастичною. Такі матриці використовують для визначення однорідних *Маркова ланцюгів* зі скінченним числом станів. Коеф. a_{ik} матриці інтерпретують як перехідні ймовірності, а n-ий степінь матриці описує ймовірності переходу станів процесу за n кроків. Важливою є поведінка послідовності $A, A^2, \ldots, A^n$ при $n \to \infty$, тобто «гранична» поведінка процесу. Тим самим алгебра й аналіз стохастичних матриць становлять матем. апарат теорії марковських ланцюгів.

Лінійні оператори й квадратичні форми в нескінченновимірних векторних просторах над полем дійсних чи комплексних чисел описують за допомогою нескінченних матриць різного вигляду. Розглядають матриці з лічбовою множиною рядків і стовпчиків. Інше узагальнення — це розглядати як матриці дійснозначні чи комплекснозначні ф-ції $F(x, y)$, скрізь визначені на якомусь квадраті $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant a$. У цьому разі множини рядків і стовпчиків мають потужність континууму. Для визначеності осн. операцій А. м. і передусім операції множення (4) та в разі нескінченних матриць виникає необхідність накласти на коефіцієнти таких матриць ті чи інші властивості збіжності. Це питання стосується функціонального аналізу. Для застосування матриць у *логіці математичній* (у теорії предикатів) і в *абстрактній теорії автоматів* значну роль відіграють матриці над двоелементною булевою алгеброю $\mathfrak{B} = \{0, 1\}$. Операції додавання і множення таких матриць у формулах (3) і (4) слід тоді розуміти як булеве додавання і множення. Іноді замість двоелементної булевої алгебри $\mathfrak{B}$ у таких випадках розглядають матриці над полем з двох елементів (див. *Жегалкіна алгебра*). Рад. математик І. І. Жегалкін (1869—1947) застосував цей апарат для дослідження розв'язності формул *числення предикатів вузького*. У *математичній економіці* матриці часто використовують при складанні балансів та в теорії систем лінійних нерівностей, які застосовують у *програмуванні лінійному*.

Літ.: Цейтлин М. Л. Применение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем. «Доклады АН СССР», 1952, т. 86, № 3; Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967 [бібліогр. с. 562—570]; Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 359—361].

Л. А. Калужнін.

АЛГЕБРА МНОЖИН — розділ *множин теорії*, який вивчає операції над підмножинами (частинами) заданої множини й поведінку цих операцій при відображеннях множин. А. м. застосовують у теор. кібернетиці і в техніці. Ідеї А. м. висловив Дж. Буль 1847. Водночас він дав перше формулювання сучасної (символічної, або математичної) логіки.

Нехай E — множина, яку фіксують при побудові А. м.; наз. її універсальною множиною. Розглянемо всі можливі підмножини E: $A, B, C, \ldots$, в т. ч. всі множини E й пусту множину $\varnothing$. Якщо E скінченне і складається з n елементів, то кількість таких частин дорівнює 2^n. Для частин E вводимо операції об'єднання $A \cup B$, перетинання $A \cap B$ і доповнення $\complement A = E/A$. Внаслідок цього множина 2^E всіх частин E перетворюється на алгебр. систему. Нехай E, F — дві універсальні множини і $\varphi: E \to F$ — відображення.

Тоді для будь-яких $A, B \subset F$ маємо

$$\varphi^{-1}(A \cup B) = \varphi^{-1}(A) \cup \varphi^{-1}(B),$$
$$\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B),$$
$$\varphi^{-1}(\complement A) = \complement\varphi^{-1}(A).$$

У цьому розумінні будь-яке відображення φ зберігає структуру А. м. Співвідношення $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ справджується для всіх $A, B \subset E$, але в заг. випадку лише $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$; якщо φ ін'єктивне, то $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$. Якщо φ бієктивне, маємо також $\varphi(\complement A) = \complement\varphi(A)$ $(A \subset E)$. Для будь-якої сім'ї множин A_ι $(\iota \in \in \mathrm{I})$ справджуються співвідношення

$$\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{\iota\in \mathrm{I}} A_\iota = \bigcup_{\iota\in \mathrm{I}}\varphi^{-1}(A_\iota), \ \varphi^{-1}\Big(\bigcap_{\iota\in \mathrm{I}} A_\iota\Big) = = \bigcap_{\iota\in \mathrm{I}}\varphi^{-1}(A_\iota),$$

а також, якщо φ бієктивне, відповідні співвідношення для φ. Ці співвідношення можна віднести до А. м. лише в разі скінченної множини I, бо операції над нескінченною кількістю множин не належать до А. м. Проте такі операції мають важливі значення в теорії міри. Легко перевірити, що введені операції мають такі властивості:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad (1)$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \qquad (1')$$
$$A \cup B = B \cup A; \qquad (2)$$
$$A \cap B = B \cap A; \qquad (2')$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad (3)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad (3')$$
$$A \cup \varnothing = A; \qquad (4)$$
$$A \cap E = A; \qquad (4')$$
$$A \cup \complement A = E; \qquad (5)$$
$$A \cap \complement A = \varnothing. \qquad (5')$$

Перевірка полягає в тому, що беруть довільний елемент лівої частини й доводять, що він належить і правій частині і навпаки. Можна провести аналогію (неповну) між переліченими властивостями і властивостями додавання та множення чисел; операції $\cup$, $\cap$ аналогічні додаванню та множенню, (1) і (1') є аналоги асоціативних, (2) і (2') — комутативних законів додавання та множення, (3) — аналог дистрибутивного закону; $\varnothing$ у (4) відповідає нулеві, E в (4') — одиниці. Не мають аналогів операція $\complement$ і, отже, (5) і (5'), а також «другий дистрибутивний закон» (3'). В А. м. операції $\cup$, $\cap$ цілком рівноправні (на відміну від операцій в арифметиці). З алгебр. боку $\cup$ та $\cap$ є бінарними операціями на множині 2^E всіх підмножин E. Але, незважаючи на зазначені аналогії з арифметикою, множина 2^E з будь-якою з цих операцій не становить *групи*, бо $E \cup E = E \cup \varnothing$, $E \cap \varnothing = \varnothing \cap E$ і, отже, в А. м. не існує однозначно визначених обернених елементів для $\cup$ та $\cap$ (для $\cup$ існує одиничний елемент $\varnothing$, для $\cap$ — одиничний елемент E). Якщо $\mathfrak{a}(E)$, $\mathfrak{a}(F)$ — А. м. над універсальними множинами E, F, то будь-яке відношення $\varphi : E \to F$ визначає обернений гомоморфізм $\varphi^{-1} : \mathfrak{a}(F) \to \mathfrak{a}(E)$, який зіставляє з кожною підмножиною $A \subset F$, що її розглядають як елемент $\mathfrak{a}(F)$, підмножину $\varphi^{-1}(A) \subset E$, що її розглядають як елемент $\mathfrak{a}(E)$. При цьому для тотожного відображення $e_E : E \to E$ маємо $e_E^{-1} = e_{\mathfrak{a}(E)}$ (тотожний гомоморфізм $\mathfrak{a}(E)$ на себе) і $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ (це співвідношення означає, що коли $\varphi : E \to F$, $\psi : F \to G$, $\chi : E \to G$, $\chi = \psi \circ \varphi$, то з $\psi^{-1}(A) = B, \varphi^{-1}(B) = C$ випливає $\chi^{-1}(A) = C$). Як і в арифметиці, закони (1), (2), (3) можна узагальнити на будь-яку кількість множин:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$= (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

(заг. асоціативний закон; існує аналогічний закон для перетинання);

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \cdots \cup A_{k_n}$$

для будь-якої перестановки $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ (заг. комутативний закон, існує аналогічний закон і для перетинання);

$$A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n) =$$
$$= (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n),$$
$$A \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n) =$$
$$= (A \cup B_1) \cap \cdots \cap (A \cup B_n)$$

(заг. дистрибутивні закони).

Симетрія операцій $\cup$, $\cap$ приводить до такого принципу двоїстості: нехай справджується якесь співвідношення між підмножинами $A, B, \ldots$, записане за допомогою знаків $\cup, \cap, \complement, \subset, \supset, =$. Тоді справджується й «двоїсте» співвідношення, одержане з даного співвідношення шляхом заміни цих знаків, відповідно, на $\cap, \cup, \complement, \supset, \subset, =$, символів пустої множини $\varnothing$ на E і E на $\varnothing$, при цьому символи множин заг. виду А, В, ... не змінюються. У застосуванні до співвідношень (1) — (5) принцип двоїстості дає (1') — (5'), і навпаки. Доводять принцип за індукцією, спираючись на (1) — (5), (1') — (5'), що їх перевіряють безпосередньо. Приклади двоїстих співвідношень:

(6) $A \cup E = E$;	(6') $A \cap \varnothing = \varnothing$;
(7) Якщо для всіх A $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$;	(7') Якщо для всіх A $A \cap B = A$, то $B = E$;
(8) $\complement\varnothing = E$;	(8') $\complement E = \varnothing$

(9) $A \cup A = A$ (9′) $A \cap A = A$

(закони ідемпотентності);

(10) $A \cup (A \cap B) = A$ (10′) $A \cap (A \cup B) = A$

(закони поглинання);

(11) $\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B$;

(11′) $\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

(закони де Моргана).

Закони (11) і (11′) узагальнюються на будь-яку кількість множин:

$$\complement \Big(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\Big) = \bigcap_{\iota \in I} (\complement A_\iota), \quad \complement \Big(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in I} (\complement A_\iota) \qquad (11)_I$$

(доповнення об'єднання дорівнює перетинанню доповнень, і навпаки). Такі співвідношення «самодвоїсті», тобто переходять самі в себе за принципом двоїстості:

(12) Якщо $A \cup B = E$ і $A \cap B = \varnothing$, то $B = \complement A$;

(13) $\complement\complement A = A$ (закон подвійного заперечення).

Зауважимо ще, що для $A, B \subset E$ твердження $A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ рівносильні одне одному. Операція різниці в А. м. зводиться до основних: $A \setminus B = A \cap \complement B$. У деяких випадках потрібно вводити симетричну різницю (або диз'юнктивну суму) множин $A \perp B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (загальноприйнятого позначення немає). Ця операція має властивості $A \perp B = B \perp A$ (комутативність), $(A \perp B) \perp C = A \perp (B \perp C)$ (асоціативність), $A \perp A = \varnothing$, $A \perp \varnothing = A$.

Логічне тлумачення А. м. Про елементи x множини E можна робити висловлювання, істинні чи хибні (див. *Числення висловлювань*). Кожне висловлювання можна звести до вигляду: x має властивість α. Нехай A_α — множина всіх елементів E, що мають цю властивість; тоді попереднє висловлювання рівносильне висловлюванню: «$x \in A_\alpha$». Тим самим встановлюється взаємно однозначна відповідність між висловлюваннями про елементи E і підмножинами $A \subset E$; нехай $Pr(A)$ — висловлювання, що відповідає А. Висловлювання з'єднують зв'язками $\vee$ («або»), $\wedge$ («і»); перед висловлюванням ставлять знак заперечення $\neg$ («не»). Висловлювання $Pr(A \cup B)$ означає: $x \in (A \cup B)$, а це рівносильне $x \in A$ або $x \in B$ (не виключаючи й випадку, коли $x \in A$ і $x \in B$). Те саме записують у вигляді *диз'юнкції* $Pr(A) \cup Pr(B)$. Аналогічно перевіряють і решту тотожностей:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) \vee Pr(B),$$
$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \wedge Pr(B),$$
$$Pr(\complement A) = \neg\, Pr(A).$$

Отже, осн. операції А. м. еквівалентним способом описуються мовою логіки. Зауважимо ще, що $Pr(E)$ — тотожно (для всіх x) істинне висловлювання, $Pr(\varnothing)$ — тотожно хибне, а включення $A \subset B$ рівносильне $Pr(A) \to Pr(B)$, де $\to$ — зв'язка «випливає». І навпаки, числення висловлювань виходить з якоїсь множини «елементарних висловлювань» $V, W, \ldots$, з яких решту висловлювань одержують, застосовуючи операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Нехай $x = \{v, w, \ldots\}$ — набір значень відповідних висловлювань $V, W, \ldots$, де кожне значення $v, w, \ldots$ є символ «істина» або символ «хибність». Такі найрізноманітніші набори x утворюють множину E. Тоді будь-яке «складне» висловлювання $S(V, W, \ldots)$, побудоване з $V, W, \ldots$, істинне для якоїсь підмножини $A \subset E$ наборів x і, отже, його можна привести до вигляду: $x \in A$. А. м. у заг. розумінні складається з повної сім'ї $\mathfrak{A}$ (не обов'язково всіх) частин E, стійкої щодо операцій $\cup$, $\cap$, $\complement$, тобто такої, що коли $A, B \in \mathfrak{A}$, то $(A \cup B) \in \mathfrak{A}$, $(A \cap B) \in \mathfrak{A}$, $\complement A \in \mathfrak{A}$. Такі А. м. важливі в ряді випадків, коли треба виділити підмножини або спец. виду, або з «добрими» властивостями, які забезпечують можливість дальших побудов. Розглянемо, напр., на дійсній осі R півінтервали $[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}$, відкриті справа. Візьмемо як E скінченний замкнений інтервал. Тоді множини вигляду $\mathfrak{N} = (\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i)) \cap E$ (з будь-яким k) являють собою об'єднання скінченної кількості неперетинних відрізків, які лежать в E (правий з них може бути замкнений справа). Такі множини утворюють А. м. у заг. розумінні; позначимо її $\mathfrak{M}(E)$. Аналогічні А. м. можна побудувати в евклідових просторах будь-якої розмірності R^m за допомогою півінтервалів

$$[a, b) = \{x \mid a_i \leqslant x_i < b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Проблема міри та σ-алгебри. Нехай E скінченне і $\mu(A)$ ($A \subset E$) — кількість елементів А. Тоді $\mu(A) \geqslant 0$ і $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ при $A \cap B = \varnothing$. Мірою на А. м. наз. функцію з дійсними значеннями, яка визначена на множині елементів алгебри і має ті самі властивості. Для нескінченного E введення міри натрапляє на труднощі, зумовлені «патологічними» властивостями нескінченних підмножин (найважливіший випадок, коли $E = R^m$ або E є множина в R^m). Для подолання цих труднощів розглядають «звужені» А. м., напр., $\mathfrak{M}(E)$. За $\mu(\mathfrak{N})$ ($\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}(E)$) беруть суму довжин відрізків, що становлять $\mathfrak{N}$. Проте одержана А. м. з мірою для більшості цілей надто вузька; її розширюють до більшої А. м. $\mathfrak{A}$, яка не містить усіх підмножин E, але «досить багата» на множини (напр., до алгебри всіх підмножин E, які можна виміряти за Борелем або за Лебегом). Такі розширені А. м. містять уже всі множини, які трапляються в аналізі та інших галузях математики. Вони мають і важливі додаткові властивості: якщо $A_k \in \mathfrak{A}$ ($k =$

$= 1, 2, \ldots)$, то $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \in \bar{\mathfrak{A}}$, $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \in \bar{\mathfrak{A}}$. А. м. з цими властивостями наз. σ-а л г е б р а м и м н о ж и н. Міра, визначена на початковій А. м. $\mathfrak{A}$, поширюється й на $\bar{\mathfrak{A}}$, при цьому одержують цілком адитивну міру: якщо $A_k \in \bar{\mathfrak{A}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

І м о в і р н і с н е т л у м а ч е н н я. Випадково обрана точка $x \in E$ може з якоюсь імовірністю $P(A)$ належати множині $A \subset E$ (напр., на стіл кидають кульку, й вона зупиняється в якійсь частині стола або поза цією частиною). З теореми додавання імовірностей випливає, що при $A \cap B = \varnothing$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, бо події «$x \in A$» та «$x \in B$» в цьому разі несумісні. При цьому множини A та B мають бути «досить добрими», щоб відповідні ймовірності мали сенс. У ряді випадків вдається визначити А. м. з частин E (навіть σ-А. м.), на якій $P(A)$ має властивості міри (навіть цілком адитивної). Така ймовірнісна міра, крім того, має властивість $P(E) = 1$, бо вірогідній події («попадання в E») приписується ймовірність 1.

З в ' я з о к з б у л е в и м и а л г е б р а м и. Якщо абстрагуватися від смислу символів множин та операцій $\cup$, $\cap$, C, то А. м. являє собою абстрактну алгебр. систему, яка підлягає аксіомам (1) — (5),(1′) — (5′). Таку систему наз. б у л е в о ю а л г е б р о ю. Всі співвідношення А. м. можна формально вивести з цих аксіом (при цьому асоціативні закони (1) і (1′) можна видалити зі списку аксіом, бо вони випливають з решти аксіом). Формальне виведення співвідношень без т. з. інтерпретацій має, напр., ту перевагу, що його виконує машина. Рад. математик І. І. Жегалкін (1869—1947) запропонував модифікацію булевої алгебри, в якій замість операції об'єднання використано операцію додавання за модулем 2 (див. *Жегалкіна алгебра*). В різних застосуваннях трапляються ще й інші модифікації. З розвитком А. м. значна частина комбінаторики (теорії скінченних множин) почала розвиватися в рамках А. м., і її розглядають у ширшому розумінні — як алгебру, що включає, окрім булевих операцій або операцій, які можна виразити через булеві, й нові операції над множинами підмножин і над *відношеннями* (напр., операції проектування, декартового добутку, «зрізу» тощо). У зв'язку з цим було розроблено циліндричні й поліадичні алгебри, а також алгебри відношень. Ці напрями останнім часом інтенсивно розвиваються, задовольняючи запити теор. кібернетики (теорія автоматів, матем. лінгвістика, кодування, *дискретний аналіз* тощо).

Літ.: А л е к с а н д р о в П. С. Введение в теорию множеств и теорию функций, ч. 1. М.— Л., 1948; Х а л м о ш П. Р. Теория меры. Пер. с англ. М., 1953 [бібліогр. с. 283—285]; С т о л л Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Пер. с англ. М., 1968.

О. В. Гладкий.

А́ЛГЕБРИ ПОДІЙ — *алгебри універсальні*, елементами яких є множини слів певного алфавіту, тобто події. Оскільки поняття *подія* збігається з поняттям мови в теорії *мов формальних*, то можна говорити і про алгебру мов. До осн. операцій А. п. відносять операції об'єднання, множення та ітерації (див. *Регулярні події та вирази*) й теоретико-множинні операції перетину й доповнювання. При вивченні різних класів подій, напр., представних в автоматах того чи іншого виду, дуже часто треба з'ясувати таке питання: чи є цей клас подій певною А. п. з тими чи іншими добре описуваними властивостями. Тому для теорії автоматів характерними є чимало теорем, що встановлюють замкненість чи незамкненість різних класів подій щодо зазначених вище та інших операцій над подіями. Однією з найбільш вивчених алгебр є алгебра регулярних подій. Вона має багато цікавих властивостей: вона скінченно-породжувана, є макс. алгеброю, що містить усі скінченні події (тобто події, що складаються з скінченної кількості слів), тощо. А. п. є й клас контекстно-вільних мов, що відіграє важливу роль у теорії формальних мов. Але властивості цієї алгебри не описуються так добре, як властивості алгебри регулярних подій, яка є підалгеброю алгебри контекстно-вільних мов. Як додаткові операції до алгебри регулярних подій часто вводять і операції перетину й доповнювання, відносно яких клас регулярних подій буде замкненим.

Серед операцій над подіями розглядають і операцію ділення події на слово, яка необхідна в *автоматів синтезі*, операцію комутативного замикання, пов'язану з комутативною алгеброю регулярних подій, та багато інших операцій. Дуже загальним видом операції є операція суперпозиції події S алфавіту $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ і системи подій $S_1, S_2, \ldots, S_n$ якогось алфавіту A. Внаслідок такої операції $S(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ одержують подію алфавіту A, яка містить усі такі слова (і тільки їх), які одержують, замінивши в словах, що належать S, кожне входження символу s_i якимось словом з події S_i. Багато операцій над подіями можна трактувати як суперпозиції з конкретно обраним S, напр., множення S_1S_2 — це суперпозиція подій S, що складається з одного слова s_1s_2, та системи подій S_1 і S_2. У плані загальноалгебричних проблем для алгебри подій вивчали й проблему аксіоматизації. Питання про скінченну аксіоматизовність алгебри регулярних подій у його класичній постановці розв'язано негативно: не існує скінченної системи тотожностей, з яких за допомогою певних спеціальних правил виведення (т. з. правил заміни й підстановки) можна вивести будь-яку тотожність в алгебрі регулярних подій. Але підалгебра алгебри регулярних подій, що складається з усіх подій, які містять пусте слово, вже є скінченно-аксіоматизовною.

Розширивши певним чином правила виведення, можна досягти скінченної аксіоматизовності алгебри регулярних подій. Так, можна ввести таке додаткове правило: якщо

$$X = XS \cup R, \qquad (1)$$

де $e \overline{\in} S$, вивідне, то вивідним є й $X = RS^*$ і навпаки. Це правило виведення з'являється не випадково: воно зумовлене великими можливостями, які дає апарат розв'язування рівнянь. Проблему розв'язування рівнянь можна поставити для будь-якої універсальної алгебри, але вона не тільки в заг. постановці, а й відносно окремих класів рівнянь здебільшого буває надто складною. У довільній алгебрі рівняння має вигляд $F(x) = G(x)$, де $F(x)$ і $G(x)$ — вирази, побудовані із змінної x, елементів алгебри й операцій алгебри. Якщо рівняння має розв'язок, та ще й єдиний, то він є засобом неявного задавання певної нової операції для елементів алгебри. Так, рівняння (1) при $R = e$ задає ітерацію події S.

Істотним є те, що рівняння (1) належить до т. з. лінійних рівнянь. Розгляд систем лінійних рівнянь в А. п. дає нові засоби для вивчення алгебричних і теоретико-автоматних залежностей, зокрема, дає змогу здійснювати аналіз скінченних автоматів. Система лінійних рівнянь має вигляд:

$$X_i = A_{i1}X_1 \cup A_{i2}X_2 \cup \cdots \cup A_{in}X_n \cup B_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

де коефіцієнти A_{ij} — елементи цієї алгебри подій. При деяких обмеженнях на входження пустого слова в коефіцієнти A_{ij} така система має єдиний розв'язок. Якщо при цьому всі A_{ij} і B_i регулярні, то й усі X_i регулярні. Існує алгоритм розв'язування системи (2), аналогічний алгоритмові Гаусса для систем звичайних лінійних рівнянь. Виявляється, події, представні в *автоматі скінченному* його станами, пов'язані системою лінійних рівнянь. Процедура складання цієї системи з наступним розв'язуванням її може бути алгоритмом аналізу скінченних автоматів. Крім систем рівнянь, в А. п. вивчали й системи рівнянь вигляду

$$X_i = S_i(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ (i = 1,2,\ldots, n), \qquad (3)$$

де S_i — події, а вирази в правих частинах вважають за суперпозиції. Така система завжди має розв'язки (один з її розв'язків є мінімальним у розумінні теоретико-множинного включення); при деяких обмеженнях, пов'язаних зі входженням пустого слова в S_i, система (3) має єдиний розв'язок. Для теорії формальних мов інтерес становлять системи, в яких S_i — скінченні події. Розв'язком такої системи (єдиним чи мінімальним) є кортеж з n контекстно-вільних мов $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Системи вигляду (3) тісно пов'язані з засобом описування (задавання) різних формальних мов, зокрема, за допомогою контекстно-вільних граматик (див. *Граматика породжувальна*).

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Ginzburg A. Algebraic theory of automata. New York — London, 1968 [бібліогр. с. 157—160].

В. Г. Боднарчук.

АЛГЕБРИ УНІВЕРСАЛЬНІ. Алгеброю універсальною наз. об'єкт, що його задають якась множина — A-носій алгебри — і якийсь (може й нескінченний) набір ф-цій $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$, $i = 1, 2, \ldots$, скрізь означені на A й зі значеннями в A, що наз. операціями алгебри $\mathfrak{A}$. Число аргументів n_i операції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$ наз. арністю цієї операції. Розрізняють операції: унарні, бінарні, тернарні і т. д. Виділяють і нульарні операції (під цим, як завжди, розуміють константи — зафіксовані елементи носія). Упорядкований набір $\{f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots\}$ символів операцій А. у. з зазначенням їхньої арності наз. сигнатурою алгебри $\mathfrak{A}$.

А. у. — одне з осн. понять алгебри. Майже всі *алгебричні структури* (*півгрупи*, *групи*, *структури*, кільця та ін.) є А. у. в означеному вище розумінні. Так, напр., кільце цілих чисел Z можна розглядати як А. у., носієм якої є множина цілих чисел, а сигнатура складається з трьох бінарних операцій — додавання, віднімання та множення. Будь-яку півгрупу можна вважати А. у. з сигнатурою, що складається з однієї бінарної операції — множення. Групу, природно, вважають А. у. з трьома операціями: однією бінарною (множення), однією унарною (взяття оберненого елемента) і однією нульарною (константа одиниця). До поняття А. у. не входить така важлива алгебрична структура, як поле, коли його розглядати як множину з чотирма бінарними операціями — додаванням, відніманням, множенням і діленням. І справді, бінарна операція ділення $x_1 : x_2$ не є означеною для $x_2 = 0$. Для таких випадків розглядають, окрім А. у., і т. з. часткові універсальні алгебри (ч. у. а.), в означенні яких не вимагається, щоб операції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$ їхньої сигнатури були всюди означеними функціями. Загальнішим є поняття «алгебрична система», яке ввів А. Тарський під назвою «реляційна система» і під яким розуміють такі ч. у. а., в яких, окрім операцій на носії A, задано й деякий набір *предикатів* (термін «алгебрична система» запропонував А. І. Мальцев). До алгебричних систем належать, напр., упорядковані групи, в яких окрім операції множення означено й бінарний предикат порядку.

Поняття «А. у.» ввів під назвою «абстрактна алгебра» в 30-х роках 20 ст. амер. алгебрист Г. Біркгоф. Йому належать і перші осн. результати теорії А. у. Широкого розвитку ця теорія набула в 50-х роках. Тоді саме в межах матем. логіки (див. *Логіка математична*) — в працях А. Тарського, А. Робінсона і особливо А. І. Мальцева — було розроблено мову й апарат, що їх використовували для

розв'язування деяких загальних задач у теорії груп, півгруп та ін. розділах алгебри. Потім апарат матем. логіки широко застосовували в теорії моделей алгебричних систем, зокрема в теорії А. у. Крім цього, теорія А. у. використовує й теоретико-множинний апарат теорії категорій. Теорія А. у. розвивається в межах загальної алгебри, широко використовуючи математико-логічні й теоретико-категорійні поняття і методи. Значних успіхів у цій галузі досягли рад. вчені А. І. Мальцев і його співробітники (Новосибірськ) та О. Г. Курош із співробітниками (Москва). За кордоном ця галузь розвивається переважно в США (А. Тарський, Р. Ліндон), а також в Англії (П. Кон), Польщі (І. Лось, Е. Марчевський) і Японії (К. Шода). В теорії А. у. тепер вивчають в основному класи цих алгебр з однаковою сигнатурою, причому такі, коли між операціями сигнатури виконуються відношення, що відповідають деякому наборові замкнених формул *числення предикатів вузького*. Такі класи А. у. наз. аксіоматизовними класами А. у., а відповідні набори замкнених формул — системами аксіом цього класу. Аксіоматизовними класами є звичайні алгебричні структури (групи, кільця, поля і т. д.), аксіоми яких можна записати формулами вузького числення предикатів. Напр., аксіому теорії груп про те, що множення в групі допускає ліве обернення; записують так: $\forall(x)\ \forall(z) \ni (y)\ (y \cdot x = z)$.

Одним з осн. завдань теорії А. у. є вивчення властивостей і взаємозв'язку аксіоматизовних класів А. у. Серед цих класів докладніше вивчено ті, що задаються аксіомами, складеними з тотожностей. Такі класи наз. многовидами А. у., екваціонально означуваними класами, або примітивними класами. Фундаментальна теорема про многовиди А. у., яку довів Г. Біркгоф, стверджує, що клас А. у. є многовидом тоді й лише тоді, якщо він замкнений щодо таких теоретико-множинних операцій: взяття підалгебри, перехід до гомоморфного образу й утворення декартового добутку. Подібні характеристики було встановлено й для ін. типів аксіоматизовних класів. Вивчення означуваності А. у. деякого аксіоматизовного класу системами твірних і визначальних відношень є важливим завданням теорії А. у. в кібернетиці. Велике значення має поняття вільних А. у. деякого аксіоматизовного класу. Вільні алгебри даного класу — це (не зовсім) такі алгебри цього класу, в яких решту А. у. можна одержати як гомоморфні образи. Вільні алгебри існують не в усіх аксіоматизовних класах, але там, де вони є, напр., у многовидах, вони відіграють значну роль. Теорія А. у. вивчає будову груп автоморфізмів і півгруп ендоморфізмів А. у., а також граток підалгебр і граток конгруенцій.

Теорія А. у. об'єднує багато паралельних розділів класичних відгалужень загальної алгебри й разом з тим має і власну проблематику, яка дедалі розширюється. Результати теорії А. у. мають велике значення для дальшого розвитку різних галузей кібернетики. З абстрактного погляду будь-яку цифрову автоматичну машину (ЦАМ) і взагалі будь-який автомат. пристрій дискретної дії можна вважати за деяку А. у. Природно, напр., вважати множину станів оперативної пам'яті ЦАМ носієм деякої А. у., а набір її операцій — операціями відповідної А. у. З абстрактного погляду властивості означеної так А. у. відображують функціональні можливості ЦАМ. Тому в абстрактній теорії цифрових автоматів, а також у теорії програмування широко застосовують ті розділи алгебри, які належать до теорії А. у. Тут маємо прямий зв'язок кібернетики з теорією А. у. Теорія А. у. тісно пов'язана з розділами матем. логіки, теорією *рекурсивних функцій* і *алгоритмів теорією*. Так, у матем. логіці деякі вчені (А. Ліндербаум, Є. Расьова, Р. Сікорський, А. Тарський та ін.) трактують формалізовані матем. теорії як А. у. Носій А. у., зіставленої з деякою формалізованою теорією, складається в цьому разі з сукупності правильно побудованих формул даної теорії, а операції відповідають її теоретико-висловлювальним зв'язкам і *кванторам*. Застосування такої операції до заданих формул полягає в утворенні нової формули, яку знаходять із цих заданих формул як послідовність, що складається з запису їх, дужок і знака зв'язки або знака квантора. Напр., результат операції, що відповідає *кон'юнкції*, застосований до формул X і Y, є формулою $(X)\,S\,(Y)$. Знайдену А. у. наз. алгеброю формул даної теорії. В алгебрі формул впроваджується конгруенція, за якою формули, що їх виводять одну з одної за правилами виведення теорії, вважають за еквівалентні. Тоді формалізованою теорією вважають фактор-алгебру алгебри формул за цією конгруенцією. Такий підхід дає змогу вивчати формалізовані матем. теорії в межах теорії А. у. Цю ідею викладено і в праці Є. Расьової і Р. Сікорського. Див. також *Алгебра логіки* і *Моделей теорія*.

Літ.: Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1962 [бібліогр. с. 383—387]; Биркгоф Г. Теория структур. Пер. с англ. М., 1952 [бібліогр. с. 370—398]; Кон П. Универсальная алгебра. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 329—338]; Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 356—372]; Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 568—578].

Л. А. Калужнін.

АЛГЕБРИЧНА ТЕОРІЯ АВТОМАТІВ — розділ теоретичної кібернетики, який вивчає дискретні автомати з абстрактно-алгебричного погляду. Поняття автомата, що його розглядають в А. т. а., являє собою абстрактну модель пристрою, що функціонує в дискретному (автоматному) часі, перероблюючи послідовності вхідних сигналів (стимулів) на послідовності вихідних сигналів (реакцій). У процесі функціонування автомата відбувається послідовна зміна його внутр. станів.

Стан, у якому перебуває автомат у даний момент часу, однозначно визначає відповідність між його вхідними й вихідними сигналами. Такого роду пристрої становлять основу сучасної *обчислювальної техніки*, а також численних дискретних систем автомат. контролю й керування. Спроби математично описати інформаційні моделі біол. систем та їхню поведінку також приводять (за певної абстракції) до поняття автомата.

Строге поняття автомата визначають так. Автоматом наз. об'єкт $\mathfrak{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, який задають трьома основними (непустими) множинами A, X, Y, що їх відповідно наз. множиною станів, вхідним алфавітом (який складається з вхідних сигналів або входів) і вихідним алфавітом (який складається з вихідних сигналів або виходів) та двома ф-ціями — ф-цією переходів δ: $A \times X \to X$ і ф-цією виходів λ: $A \times X \to Y$. Автомат наз. скінченним, якщо скінченними є множини A, X і Y. З погляду заг. алгебри автомат є трьохосновною *алгеброю універсальною* з двома операціями δ і λ. Відповідно до цього визначають вживані у заг. алгебрі поняття: *автоматів ізоморфізм, автоматів гомоморфізм, підавтомат*, систему твірних тощо.

Часто розглядають і клас автоматів, для яких фіксовано алфавіти X і Y (такі автомати називатимемо X-Y-автоматами), й гомоморфізми, що діють на ці алфавіти тотожно.

Кожний символ $x \in X$ вхідного алфавіту автомата $\mathfrak{A}$ задає на множині A його станів монарну операцію $a \to \delta(a, x) = ax$ і відповідно до цього X-Y-автомат іноді розглядають як алгебру з множиною X монарних операцій і ф-цією виходів λ. У цьому разі автомат $\mathfrak{A}$ зручно ототожнювати з множиною A його станів, розглядаючи цю множину як алгебру, для якої, крім системи операцій X, створено ф-цію виходів λ. Така точка зору особливо доречна, коли розглядають автомати без виходів, тобто об'єкти, які задають лише за допомогою множини станів, вхідного алфавіту й ф-ції переходів. Автомати без виходів (X-автомати) наз. також акцепторами, на відміну від заг. поняття автомата, який наз. трансдьюсером, або *Мілі автоматом*. Важливу роль відіграє й окремий випадок Мілі автомата — автомат Мура, який характеризується властивістю $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$. Ф-цію μ наз. ф-цією міток, і її часто розглядають замість ф-ції виходів автомата Мура.

Точним визначенням перетворення інформації, яке виконує автомат, є визначення відображення, що його індукує стан автомата. Щоб сформулювати це визначення, розглянемо вільні півгрупи $F(X)$ і $F(Y)$, породжені множинами X і Y, тобто множини слів алфавітів X і Y. Ці півгрупи наз. вхідною та вихідною півгрупами автомата відповідно. Поширимо ф-ції переходів і виходів на півгрупи $F(X)$ і $F(Y)$, вважаючи, що $ae = a$ (e — пусте слово), $\delta(a, px) = \delta(\delta(a, p), x)$, тобто $a(px) = (ap)x$, $\lambda(a, e) = e$, $\lambda(a, px) = \lambda(a, p)\lambda(ap, x)$, де $p \in F(X)$, $a \in A$. Відображення $\varphi_a : F(X) \to F(Y)$, що його визначають за рівністю $\varphi_a(p) = \lambda(a, p)$, наз. відображенням (оператором), яке індукує стан a автомата A. Кажуть також, що відображення φ_a представлене в автоматі A станом a. В деяких випадках в автоматі фіксують початковий стан. Такі автомати наз. ініціальними, а говорячи про відображення, представлене в ініціальному автоматі, мають на увазі відображення, представлене його початковим станом.

Відображення, представні в автоматах (автоматні відображення), характеризуються тим, що вони зберігають довжину слів і початкові відрізки. Це означає, що відображення φ: $F(X) \to F(Y)$ автоматне тоді й лише тоді, коли довжина слова $\varphi(p)$ дорівнює довжині слова p і $\varphi(p)$ є початковим відрізком слова $\varphi(pq)$ для будь-яких p, $q \in F(X)$ (див. *Оператор автоматний*). Стани a та b (того самого чи різних автоматів з заг. вхідним і вихідним алфавітом) наз. еквівалентами, якщо $\varphi_a = \varphi_b$. Автомати A та B еквівалентні, якщо кожний стан одного з них еквівалентний якомусь станові іншого. Автомат наз. зведеним, якщо всі його стани попарно нееквівалентні.

Відображення $a \to \varphi_a$, що їх індукують різні стани автомата A, пов'язані співвідношенням $\varphi_a(x)\varphi_{ax}(p) = \varphi_a(xp)$ $(x \in X, p \in F(X))$, яке однозначно визначає відображення φ_{ax} через відображення φ_a, тому можна перетворити множину відображень $\{\varphi_a\}_{a \in A}$ на автомат, визначаючи на цій множині ф-ції переходів і виходів за допомогою співвідношень $\varphi_a x = \varphi_{ax}$, $\lambda(\varphi_a, x) = \varphi_a(x)$. Цей автомат є зведеним, бо відображення, що його індукує стан φ_a, збігається з відображенням φ_a. Відображення $a \to \varphi_a$ є гомоморфізмом, а збудований автомат ізоморфний фактор-автоматові автомата A щодо конгруентності, яка збігається з відношенням еквівалентності станів. Із сказаного випливає така теорема: в класі всіх еквівалентних між собою X-Y-автоматів існує один і з точністю до ізоморфізму лише один зведений автомат, на який гомоморфно відображується будь-який автомат цього класу. На цій теоремі ґрунтуються методи мінімізації *автоматів скінченних*. Можна показати, що клас відображень, представних у скінченних автоматах Мура, збігається з класом відображень, представних у скінченних автоматах Мілі. Для класу автоматів Мура має місце теорема, аналогічна наведеній.

До поняття представлення зображень в автоматах близьким є поняття представлення подій. Подією в алфавіті X наз. довільну множину слів півгрупи $F(X)$. Кажуть, що подію S представлено в X-Y-автоматі A вихідним сигналом $y \in Y$ (множиною вихідних сигналів $Y^* \in Y$) при початковому стані a, якщо $\varphi_a(p) = qy$ $(\varphi_a(p)) = qy^*$, де

$y^* \in Y^*$ тоді й тільки тоді, коли $p \in S$. Систему подій $(S_y)_{y \in Y}$, що складаються з слів p, таких, що $\varphi(p) = qy$, однозначно визначає відображення φ. Якщо $\varphi = \varphi_a$, то події S_y представлено вихідними сигналами $y \in Y$ автомата A при початковому стані a. Тому часто, замість представлення відображень, розглядають представлення подій. В автоматах Мура представлення подій множинами вихідних сигналів зводиться до представлення їх множинами станів. Подія S представна в автоматі A множиною станів $A^* \subset A$ при початковому стані $a \in A$, якщо $ap \in A^*$ тоді й тільки тоді, коли $p \in S$.

Одним з важливих завдань А. т. а. є вивчення відображень або подій, представних у тих чи ін. класах автоматів. Здебільшого це завдання розв'язують шляхом створення мов для описування подій, представних у відповідних класах автоматів. Найповніше щодо цього вивчено клас скінченних автоматів. Клас подій, представних у скінченних автоматах, збігається з класом регулярних подій (див. *Алгебри подій*, *Регулярні події та вирази*). Це твердження є однією з важливих теорем теорії скінченних автоматів, а доведення її дає розв'язання проблем абстрактного аналізу й синтезу скінченних автоматів (див. *Синтез автоматів абстрактний*), які мають велике застосовне значення. З класів нескінченних автоматів найповніше досліджено клас *автоматів магазинних*. Події, представні в таких автоматах, є контекстно-вільними мовами.

Важливу роль в А. т. а. відіграє зв'язок автоматів з півгрупами. Кожний вхідний сигнал $x \in X$ автомата A визначає перетворення $f_x : a \to ax$ множини станів автомата A. Півгрупу G_A, породжену всіма такими перетвореннями, наз. півгрупою автомата A. До півгрупи G_A здебільшого додають одиницю — тотожне перетворення ε, розглядаючи його як перетворення, що його індукує пусте слово. Для кожного слова $p \in F(X)$ можна визначити перетворення $f_p : a \to ap$. Співвідношення $f_{pq} = f_p \cdot f_q$ показує, що відображення $\gamma : p \to f_p$ є гомоморфізмом вільної півгрупи $F(X)$ на півгрупу G_A. Півгрупу G_A автомата A можна розглядати як X-автомат, якщо вважати $f_p x = f_{px}$. Відображення $\xi_a : G_A \to A$, що його визначають за рівністю $\xi_a(p) = f_p(a) = ap$, є гомоморфізмом автомата G_A в автомат A. І $F(X)$ можна розглядати як X-автомат з ф-цією переходів $\delta(p, x) = px$ (вільний автомат, породжений станом e). Тоді γ буде гомоморфізмом автомата $F(X)$ на G_A. Гомоморфізми γ і $\gamma'_a = \gamma\xi_a$ індукують розбиття R і R'_a півгруп $F(X)$ на класи слів, які мають однакові образи при гомоморфізмах γ і γ'_a відповідно. Розбиття R'_a є автоматним, тобто для будь-якого класу S цього розбиття й будь-якого $x \in X$ знайдеться клас S', такий, що $S_x \subset S'$. Це розбиття визначає відношення конгруентності на автоматі $F(X)$, фактор-автомат за яким ізоморфний підавтоматові $A(a)$ автомата A, породженому станом a (він складається з усіх станів виду ap, де $p \in F(X)$). Розбиття R є півгруповим, тобто для будь-якої пари S' і S'' його класів знайдеться клас S такий, що $S'S'' \subset S$. Це розбиття визначає відношення конгруентності на півгрупі $F(X)$, і фактор-півгрупа за цим відношенням є ізоморфною півгрупі G_A. Якщо автомат A породжується станом a, тобто $A(a) = A$, то R є макс. півгруповим розбиттям, вписаним у розбиття $R'a$. В заг. випадку R є макс. півгрупове розбиття, вписане у всі розбиття R'_a $(a \in A)$.

Поняття півгрупи автомата можна використати для класифікації автоматів за властивостями їхніх півгруп. При цьому півгрупу розглядають як абстрактну півгрупу (а не півгрупу підстановок). Кажуть, що автомат A належить до півгрупи G, якщо його півгрупа ізоморфна G. Фіксуючи якийсь клас півгруп, можна одержати клас автоматів, які належать до цих півгруп. Напр., комутативні автомати — це автомати, що належать до комутативних півгруп, групові автомати — це автомати, що належать до груп. Скінченні автомати й тільки вони належать, очевидно, до скінченних півгруп. Розбиття R'_a складається, як бачимо з визначення, з подій, представлених різними станами в автоматі A при початковому стані a. Для будь-якої системи M подій $\{S_\alpha\}$ в алфавіті X можна побудувати систему K розбиттів $\{S_\alpha, F(X) \setminus S_\alpha\}$ і макс. автоматне розбиття R', вписане у всі розбиття системи K. Воно визначить (єдиним способом) автомат, у якому представлено всі події системи K. Тоді можна сказати, що система K належить до півгрупи, яка збігається з півгрупою автомата, що його збудовано таким способом. Цю півгрупу визначають макс. півгруповим розбиттям, вписаним у всі розбиття системи K. Описана вище конструкція дає змогу поширити півгрупову класифікацію на системи подій. Так, скінченні системи регулярних подій і тільки вони належать до скінченних півгруп. Системи комутативних подій, тобто подій, які разом з кожним словом містять і всі слова, що їх одержують з даного слова, переставивши букви, і лише вони належать до комутативних півгруп.

Важливу роль в *автоматів теорії* відіграє поняття *автомата недетермінованого*, тобто автомата, в якого ф-ції переходів і виходів є багатозначними. Для недетермінованих автоматів застосовують таку термінологію: якщо $b \in \delta(a, x)$, то кажуть, що автомат A може перейти від діяння вхідного сигналу x із стану a в стан b. Аналогічно визначають можливість переходу від діяння вхідного слова. Для недетермінованих автоматів можна визначити поняття представлення події

так. Нехай A — недетермінований X-автомат, $A_0 \subset A$, $A^* \subset A$. Подія, представна в A при множині A_0 початкових станів і множині A^* заключних станів збігається з множиною всіх слів, що від їхнього діяння автомат може перейти з множини A_0 в A^*. Для скінченних автоматів перехід до недетермінованих автоматів не дає нічого нового, бо довільна подія, представна в скінченному недетермінованому автоматі, представна також і в скінченному детермінованому автоматі. Зовсім інше — нескінченні автомати. Так, клас подій, представних у недетермінованих магазинних автоматах, ширший за клас подій, представних у детермінованих магазинних автоматах (здебільшого для магазинних автоматів розглядають випадок, коли множини A_0 й A^* скінченні). Але водночас клас недетермінованих магазинних автоматів особливо цікавий у зв'язку з тим, що в них можна представити будь-які контекстно-вільні мови й лише їх. У зв'язку з застосуванням магазинних автоматів в *автоматизації програмування* та теорії перекладу, тепер досліджують і деякі узагальнення їх. Вище припускали, що вхідна й вихідна півгрупи автомата вільні. Переходячи до довільних півгруп, можна одержати поняття узагальненого автомата. Узагальнений автомат задають множиною станів, вхідною півгрупою G, вихідною півгрупою H і ф-ціями переходів і виходів, які задовольняють аксіоми $\delta(a, g_1, g_2) = \delta(\delta(a, g_1), g_2)$, $\lambda(a, g_1, g_2) = \lambda(a, g_1)\lambda(\delta(a, g_1), g_2))$. Для випадку, коли вхідна й вихідна півгрупи мають ліве скорочення, можна одержати теорему про зведений автомат. Проте узагальнені автомати вивчалися тільки в дуже спец. випадках. Автомати, в яких вхідна й вихідна півгрупи є підпівгрупами вільної півгрупи, застосовують у теорії мов і в *кодуванні теорії*. У разі, якщо вхідна півгрупа є прямим добутком кількох вільних півгруп, це відповідає багатострічковим одностороннім машинам. Події, представні в таких автоматах (n-арні відношення між словами), для недетермінованих автоматів можна охарактеризувати алгебрично як елементи алгебри відношень, аналогічної алгебрі регулярних подій, тобто як алгебри з операціями об'єднування, півгрупового множення та ітерації, породженої скінченними відношеннями.

Важливу роль в А. т. а. відіграє вивчення різних способів *автоматів композиції*, тобто операцій, за допомогою яких з простіших автоматів можна будувати складніші. В структурній теорії автоматів вхідні й вихідні сигнали є декартовими степенями якогось фіксованого структурного алфавіту (здебільшого — це двійковий алфавіт $\{0,1\}$). Компоненти символу структурного алфавіту відповідають фіз. каналам, по яких здійснюється паралельне передавання сигналів. У цьому разі композицію визначають, ототожнюючи деякі вхідні й вихідні канали автоматів, які входять до композиції. Осн. завданнями структурної теорії автоматів є: проблема *синтезу автоматів структурного*, проблема оптимізації та *повноти проблема* систем автоматів. Проблема структурного синтезу полягає у відшуканні представлення довільного скінченного автомата (з точністю до ізоморфізму чи еквівалентності) у вигляді композиції заданого типу автоматів, які входять до заданого базису. Оптимізаційні завдання структурної теорії полягають у відшуканні схем мінім. складності, що реалізують заданий автомат. Проблема повноти полягає в розпізнаванні того, чи можна за фіксованого способу композиції з заданих автоматів побудувати будь-який скінченний автомат (з точністю до ізоморфізму чи еквівалентності).

У зв'язку з застосуванням теорії автоматів до теорії матем. машин важливе значення має поняття багаторегістрового автомата (див. *Автомат регістровий*) як нескінченного автомата спец. типу, за допомогою якого зручно вивчати операційні пристрої обчисл. машин. Це поняття відіграє центр. роль нового напряму в теорії автоматів — *дискретних перетворювачів теорії*. У цій теорії вивчають взаємодію двох автоматів — скінченного керуючого й нескінченного операційного автомата. *Автомат керуючий* задає якесь перетворення, визначене на множині станів операційного автомата. Задані так перетворення можна розглядати як елементи спец. *мікропрограмної алгебри*. Використання співвідношень цієї алгебри дає змогу здійснювати оптимізацію керуючого автомата. Важливу роль при цьому відіграє півгрупа операційного автомата, що лежить в основі мікропрограмної алгебри. Саме наявність співвідношень у цій півгрупі її дає змогу провадити якнайглибші перетворення керуючих автоматів.

Літ.: Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов. «Успехи математических наук», 1961, № 16, в. 5; Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5; Elgot C. C., Mezei J. E. On relations defined by generalized finite automata. «IBM journal of research and development», 1965, v. 9, № 1; Glushkov V. M., Leticevskii A. A. Theory of algorithms and discrete processors. В кн.: Advances in information systems science, v. 1. New York, 1969.

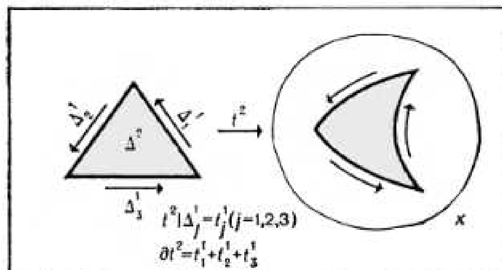
В. М. Глушков, О. А. Летичевський.

АЛГЕБРИЧНА ТОПОЛО́ГІЯ — загальна назва розділів *топології*, в яких застосовуються алгебричні методи. А. т. поділяють на теорію гомологій, гомотопічну топологію та дифер. топологію. Нехай X — топологічний простір. Роль «геометричних фігур» в X відіграють ланцюги, визначувані так. Нульвимірний ланцюг c^0 складається зі скінченного числа точок t_j^0, які мають цілочислові коеф. α_j; c^0 записується як формальна лінійна комбінація $\sum \alpha_j t_j^0$. Неперервне відображення t^1 відрізка $[0,1]$ в X наз. одновимірним симплексом простору X; скінченні формальні суми $c^1 = \sum \alpha_j t_j^1$ наз. одновимірними ланцюгами (аналог системи орієнтованих дуг). Анало-

гічно цьому з неперервних відображень трикутника в X будуються двовимірні ланцюги (аналог системи орієнтованих поверхонь, поділених на «криві трикутники»), з неперервних відображень тетраедра в X — тривимірні ланцюги і т. д. Для ланцюгів природно визначається операція додавання. Для двовимірного симплексу $t^2 : \Delta^2 \to X$, де Δ^2 — трикутник-прообраз, відображення t^2 можна розглядати лише на границі Δ^2; цим визначається одновимірний ланцюг з трьох симплексів ∂t^2, який наз. границею t^2. Для будь-якого двовимірного ланцюга $c^2 = \sum \alpha_j t_j^2$ граничний оператор ∂ визначається вимогою лінійності: $\partial c^2 = \sum \alpha_j \partial t_j^2$. Аналогічно оператор ∂ визначається для ланцюгів будь-якої розмірності; він переводить r-вимірний ланцюг в $(r-1)$-вимірний, а 0-вимірний, за означенням, — у нуль. Наочний смисл оператора ∂ — перехід від «орієнтованої поверхні» c^2 до «граничної кривої» ∂c^2, орієнтацію якої узгоджено з орієнтацією c^2 так, як це робиться в теорії поверхневих інтегралів. Так само ∂c^3 є алгебр. аналогом «граничної поверхні» тіла c^3, взятої з належною орієнтацією (мал.). Оскільки границя поверхні є замкнена крива, а границя тіла — замкнена поверхня, природно сподіватися, що «границя границі» дорівнює нулеві, тобто $\partial\partial t^2 = 0$ ($(r-1)$-вимірний ланцюг «без доданків»). Це співвідношення можна довести формально. Роль граничного оператора в аналізі визначається з теореми Стокса, яку можна записати у вигляді

$$\int_{c^2} d\omega = \int_{\partial c^2} \omega, \qquad (*)$$

де ω — дифер. форма $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, а $d\omega$ одержують з ω відомим способом («диференціал» форми ω). Якщо $\partial c = 0$, ланцюг c наз. **ц и к л о м**. Якщо z — цикл і в X існує такий ланцюг c, що $\partial c = z$, то z наз. циклом, гомологічним нулеві (або просто границею). Всі ланцюги простору X розмірності r утворюють абелеву групу $C_r(X)$, цикли — підгрупу $Z_r(X) \subset C_r(X)$, а границі — підгрупу $B_r(X) \subset Z_r(X)$. Цикли z_1^r, z_2^r гомологічні ($z_1^r \sim z_2^r$), якщо різниця їх є границею; це — відношення еквівалентності між циклами, і класи еквівалентності є класами суміжності $z_r(X)$ за $B_r(X)$; їх наз. класами r-вимірних гомологій простору X. Роль класів гомологій видно тоді, коли в (*) $d\omega = 0$, тобто (P, Q, R) — безвихрове векторне поле; в цьому разі $\int_{z_1} \omega = \int_{z_2} \omega$, якщо цикли z_1, z_2 гомологічні в околі X, де задано поле. Класи гомологій становлять групу $Z_r(X)/B_r(X) = H_r(X)$, яку наз. r-вимірною групою гомології простору X ($r = 0, 1, 2, \ldots$). Якщо тепер $\varphi : X \to Y$ — неперервне відображення, то для кожного симплексу t^r простору X $\varphi \circ t^r$ є симплекс простору Y, і цим задається гомоморфізм абелевих груп $\hat{\varphi} : C_r(X) \to C_r(Y)$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$). Можна довести, що $\hat{\varphi}\partial = \partial\hat{\varphi}$ («образ границі є границя образу»); звідси $\hat{\varphi}(Z_r(X)) \subset Z_r(Y)$, $\hat{\varphi}(B_r(X)) \subset B_r(Y)$ і кожен клас гомологій X переходить у якийсь клас Y, тобто визначено гомоморфізм $\varphi_* : H_r(X) \to H_r(Y)$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$). При цьому для тотожного відображення e_X маємо $e_{X*} = e_{H_r(X)}$ (тотож-



ний гомоморфізм) і для відображень $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ маємо $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. Розглянемо категорію K (див. *Множин теорія*) всіх топологічних просторів та їхніх неперервних відображень, категорію L усіх абелевих груп та їхніх гомоморфізмів. Відповідності $T(X) = H_r(X)$, $T(\varphi) = \varphi_*$ визначають функтор, що відображає K в L. Це дає змогу зводити топологічні властивості просторів та відображень до більш спрощених, але водночас доступніших властивостей груп і гомоморфізмів. Напр., нехай треба довести, що не існує неперервного відображення кулі D на її ж граничну сферу S, при якій точки S переходять самі в себе. Коли φ — таке відображення, то розглянемо ще $\psi : S \to D$, яке відображає всі точки S у себе; тоді $\varphi \circ \psi = e_S$, $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$, $\varphi_* \circ \psi_* = e_{H_r(S)}$ для всіх r; тому φ_* має бути епіморфізмом $H_r(D) \to H_r(S)$. Обчислення груп гомології показує, проте, що $H_2(D) = 0$, $H_2(S) \neq 0$ і відображення φ не може існувати. Операція диференціювання форм d в (*) та узагальнений процес «інтегрування» форм також природно включаються в А. т. (теорія когомологій).

Г о м о т о п і є ю неперервних відображень $\varphi_0 : X \to Y$, $\varphi_1 : X \to Y$ наз. сім'ю відображень $\varphi_t : X \to Y$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$), яка неперервно залежить від параметра t і в якій φ_0, φ_1 — задані відображення. Якщо φ_0, φ_1 зв'язані гомотопією (гомотопні), то можна довести, що відповідні гомоморфізми абелевих груп $\varphi_{i*} : H_r(X) \to H_r(Y)$ ($i = 0, 1$) збігаються. Доведення полягає в тому, що для будь-якого циклу z^r простору X образи $\varphi_t(z^r)$ «замітають» $(r+1)$-вимірний ланцюг в Y («кривий циліндр»), границею якого є різниця

«основ», тобто $\widehat{\varphi}_1(z^r) - \widehat{\varphi}_0(z^r)$; отже, $\widehat{\varphi}_1(z^r) \sim \widehat{\varphi}_0(z^r)$ в Y. Звідси видно, як задачі теорії гомотопій можна в деяких випадках звести до теорії гомологій: якщо в $H_r(X)$ знайдеться такий клас гомологій ζ, що $\varphi_{0*}(\zeta) \neq \varphi_{1*}(\zeta)$, то φ_0 не гомотопне φ_1. А коли треба довести, що двоє відображень є гомотопними, то в найпростіших випадках вдаються до геом. конструкцій гомотопій, а в складніших — існування гомотопій встановлюють за допомогою алгебр. техніки. У деяких випадках вдається повністю перелічити «гомотопічні класи» відображень X в Y, тобто класи еквівалентності за відношенням гомотопії. Напр., існує лічбова множина класів відображень S^2 в S^2 (S^2 — «звичайна» сфера у тривимірному просторі). Нехай S^3 — тривимірна сфера, тобто множина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ в чотиривимірному евклідовому просторі R_4 з індукованою з R_4 топологією. Тоді існує «тривіальне» відображення $S^3 \to S^2$, при якому всі точки S^3 переходять в одну точку S^2. Можна довести, що існує відображення $S^3 \to S^2$, не гомотопне тривіальному.

Диференціальна топологія розглядає категорію диференційовних многостатностей та їхніх диференційовних відображень. Це — найважливіший клас просторів та відображень, безпосередньо пов'язаних з аналізом і геометрією; початкова постановка проблем топології у франц. математика А. Пуанкаре (1854—1912) стосувалася цього класу. В останні роки питання дифер. топології стояли в центрі уваги топологів. n-вимірна диференційовна многостатність є система, яка складається з топологічного простору X та множини гомеоморфних відображень $\varphi_\iota : G_\iota \to X$ ($\iota \in$ I) де G_ι — відкриті множини евклідового простору R^n; треба, щоб ці відображення задовольняли умови: 1) для кожної точки $x \in X$ існує таке φ_ι, що $x \in \varphi_\iota(G_\iota)$; 2) $\varphi_\iota^{-1} \circ \varphi_\varkappa$ — диференційовні відображення скрізь, де їх визначено ($\iota, \varkappa \in$ I). Диференційовність відображення $G \to R^n$, де $G \subset R^n$ — відкрита множина, означає, що в його координатному запису $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$ ($i = 1, \ldots, n$) функції y_i диференційовні кілька разів, а найчастіше — нескінченно диференційовні. Відображення φ_ι^{-1} наз. **картами** на X. За допомогою карти кожній точці $x \in \varphi_\iota(G_\iota)$ надають локальних координат — координат її прообразу $\varphi_\iota^{-1}(x)$ в G_ι. Відображення $X \to Y$ n-вимірної диференційовної многостатності X у k-вимірну диференційовну многостатність Y наз. диференційовним, якщо його зображують у локальних координатах диференційовними ф-ціями; це означає, що для будь-якої карти φ_ι на X і будь-якої карти $\psi_\varkappa$ на Y відображення $\psi_\varkappa^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\iota$ має бути диференційовне скрізь, де його визначено (див. схему):

$$\begin{array}{ccc} G_\iota \subset R^n & & H_\varkappa \subset R^k \\ \varphi_\iota \downarrow & & \uparrow \psi_\varkappa^{-1} \\ X & \xrightarrow{\ \varphi\ } & Y \end{array} .$$

Якщо $\varphi : X \to Y$ та $\psi : Y \to X$ — диференційовні відображення, $\psi \circ \varphi = e_Y$ та $\varphi \circ \psi = e_X$, то диференційовні многостатності X та Y наз. дифеоморфними; за цим відношенням диференційовні многостатності поділяють на класи. Наведемо характерний результат диференціальної топології. Нехай S^7 — семивимірна сфера (задається в R^8 рівнянням $\sum_{i=1}^{8} \varkappa_i^2 = 1$). Тоді серед топологічних просторів, гомеоморфних S^7 існує якраз 28 класів дифеоморфності диференційовних многостатностей.

Літ.: Фукс Д., Фоменко А., Гутенмахер В. Гомотопическая топология. М., 1967 [бібліогр. с. 156]; Хилтон П. Дж., Уайли С. Теория гомологий. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 442—443]; Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 110—112].

І. О. Шведов.

АЛГЕБРА́ЇЧНІ РІВНЯ́ННЯ — клас рівнянь у математиці. Див. *Рівнянь класифікація.*

АЛГЕБРА́ЇЧНІ СТРУКТУ́РИ — клас *алгебр універсальних*, сигнатури яких складаються з однієї чи двох бінарних операцій і довільного числа унарних (зовнішніх) операцій, що їх наз. і операторами (унарних операцій може й не бути). Бінарні операції при цьому задовольняють закони, схожі на ті, що їх задовольняють операції додавання та множення в різних областях чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних тощо). Такі закони або є тотожностями (напр., асоціативний, комутативний, дистрибутивний закони), або стверджують оборотність операцій. Термін А. с. запропонував Н. Бурбакі (псевдонім групи франц. математиків).

Протягом істор. розвитку математики поняття числа розширювалося й узагальнювалося. З доданням до натуральних чисел нуля та від'ємних чисел утворилася область цілих чисел; приєднання дробових чисел привело до чисел раціональних. Вимірювання в геометрії та проблеми аналізу привели до формування поняття дійсного числа. Завдання розв'язувати рівняння вищих степенів зумовило необхідність побудови комплексних чисел. Це послідовне розширення поняття числа здійснювалося при збереженні осн. властивостей фундаментальних операцій додавання та множення (т. з. принцип Ганкеля). У 19 ст. широке застосування математики в механіці та фізиці, а також внутрішньоматем. потреби привели до створення систем об'єктів різної (не обов'язково числової) природи, всередині яких природно здійснювалися бінарні операції, схожі на додавання й множення в числових сукупностях. Сюди відносять такі розділи, як векторна й тензорна алгебри, різні системи гіперкомплексних чисел (кватерніони Гамільтона й зовнішня алгебра Грассмана), матрична алгебра, чис-

лення підстановок і перетворень тощо. В таких системах бінарні операції, що відповідають додаванню й множенню, зберігали здебільшого не всі, а лише деякі зі звичних властивостей. Так, напр., при множенні матриць та при множенні підстановок комутативний закон не застосовний. Твердження, що добуток двох елементів дорівнює нулеві тільки тоді, коли один із співмножників дорівнює нулеві, може виявитися помилковим, напр., при множенні матриць або функцій. Водночас помічено, що для числення об'єктів інколи зовсім різної природи має місце далекосяжний паралелізм (напр., для раціональних операцій в області цілих чисел, з одного боку, і в області поліномів від однієї змінної — з другого). Такий паралелізм є результатом виконання однакових законів для осн. операцій. У 2-й пол. 19 ст. це привело до цілковитого переосмислення осн. завдань алгебри. З точки зору алгебри ізоморфні області не розрізняються, тому для неї важливішим є те, як здійснюються операції над об'єктами, а не те, над якими об'єктами вони здійснюються. У заг. випадку цю точку зору відображено в поняттях універсальної алгебри та *моделей теорії*. Але на практиці алгебра частіше оперує не з довільними універсальними алгебрами, а з такими, які традиційно склалися в узагальненні числових областей з бінарними операціями додавання та множення, тобто з алгебричної структури. Дослідження найзагальніших універсальних алгебр та моделей частково прилягають найімовірніше до галузі *логіки математичної*.

Якщо на якійсь множині M визначено одну бінарну операцію $M\ (\cdot)$, її наз. композицією, або множенням. Добуток елементів a, b позначають тоді $a \cdot b$. Для так визначеної універсальної алгебри можуть здійснюватись або не здійснюватись такі закони-тотожності. По-перше, асоціативний закон: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (для всіх $a, b, c \in M$). По-друге, комутативний закон: $ab = ba$ (для $a, b \in M$). Якщо на якійсь множині M визначено дві бінарні операції, то, як правило, одну з них вважають додаванням, другу — множенням. Позначають їх символами $+$ та $\cdot$, а саму універсальну алгебру M позначають $M\ (+, \cdot)$. Звичайно, асоціативний і комутативний закони можуть виконуватися і для додавання, і для множення або для одного з них. По-третє, додавання та множення звичайно зв'язуються тотожністю $a\,(b + c) = ab + ac$ ($(b + c)\,a = ba + ca$), яку наз. дистрибутивним (або розподільним) законом. В $M(\cdot)$ може іноді існувати елемент e такий, що $ae = ea = a$ для всіх $a \in M$. Такий елемент називають **нейтральним**; в алгебрах $M(+, \cdot)$ його наз. для додавання — нулем (0), для множення — одиницею (1). По-четверте, існування в $M\ (\cdot)$ нейтрального елемента (а в $M\ (+, \cdot)$ — відповідно нуля чи одиниці) — аксіома, яка також може здійснюватися в А. с. По-п'яте, важливою властивістю бінарних операцій є оборотність (або часткова оборотність). Права оборотність: для всіх a, $b \in M$ рівняння $ax = b$ має розв'язок (ліва оборотність — розв'язність рівняння $xa = b$). Двобічна оборотність рівнозначна існуванню оберненого елемента a^{-1} такого, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. По-шосте, ослаблена вимога: з $ax = ay$ випливає $x = y$ (відповідно: з $xa = ya$ випливає $x = y$), називається **законом скорочення**.

Здійсненність деяких з перелічених вище аксіом визначає різні А. с. Частина з цих А. с. має особливо важливе значення в теорії й практичних застосуваннях, зокрема в кібернетиці. Їм дано особливі найменування, вивчення їх і становить осн. зміст алгебри. Алгебри з однією скрізь визначеною бінарною операцією $M\ (\cdot)$, на яку не накладаються ніякі вимоги, наз. **групоїдами** (іноді моноїдами, або мультиплікативними системами). Групоїди, для яких множення є асоціативним, наз. *півгрупами*. Всередині півгруп виділяють класи півгруп з одиницею, півгрупи з однобічним та двобічним скороченням і комутативні півгрупи. Коли множення не обов'язково асоціативне, але оборотне справа й зліва, групоїд називають **квазігрупою**. Квазігрупи з одиницею наз. **лупами**. Інтерес до теорії квазігруп і луп дедалі зростає у зв'язку з застосуванням її в геометрії (сітки й тканини) і в *комбінаторному аналізі*. Якщо множення є й асоціативним і оборотним, то ця найважливіша алгебрична структура називається групою (див. *Груп теорія*). Накладення додатково комутативного закону виділяє в класі груп важливий підклас **комутативних** (або абелевих) **груп**.

Найважливішим є клас А. с. з двома бінарними операціями — **кільця**. Кільце — це алгебра $M\ (+, \cdot)$, в якій для операції додавання вона є абелевою групою, для множення — групоїдом, а додавання та множення в ній зв'язані лівим і правим законами дистрибутивності. Накладаючи послідовно на множення додаткові аксіоми, одержуємо класи кілець дедалі більш частинного вигляду з дедалі багатшою теорією: якщо множення асоціативне, то й кільце наз. асоціативним; в асоціативних кільцях виділяють комутативні, з комутативним множенням. Як правило, треба, щоб у кільці була одиниця для множення. Зрештою, добре вивченим класом кілець є комутативні кільця без дільників нуля (тобто такі, що з $ab = 0$ випливає $a = 0$ або $b = 0$), що їх названо областями цілісності. Вивчати цей клас почали в 19 ст. в зв'язку з розвитком арифметики раціональних та алгебричних чисел. Областями цілісності є й кільця поліномів та різні функціональні кільця. Дослідження комутативних кілець, особливо областей цілісності,— важливе завдання алгебр. геометрії — одного з найактуальніших розділів сучасної алгебри. Некомутативними кільцями є, напр., кільця матриць; цей розділ тісно пов'язаний з *алгеброю лінійною* та функціональним аналізом. Широко застосовують і деякі класи неасоціатив-

них кілець (у них асоціативний закон замінюють якоюсь слабшою вимогою). В матем. аналізі та в геометрії важливого значення набули кільця Лі, кільця Йордана, альтернативні кільця та ін. Ослаблення вимог до операції додавання розглядали рідше. Комутативність додавання випливає із здійсненності обох розподільних законів при дуже слабких додаткових аксіомах (напр., існування одиниці для множення). Тому, щоб одержати нетривіальні узагальнення кілець з некомутативною адитивною групою, треба знехтувати одним з розподільних законів. А. с., в яких має місце лише один розподільний закон (напр., лівий) і операція додавання визначає некомутативну групу, наз. м а й ж е к і л ь ц я м и. Вивчають їх у зв'язку з численним застосуванням у теорії груп.

Якщо $M(+, \cdot)$ — асоціативне кільце, в якому всі елементи, крім нуля, мають обернений елемент (через це операція множення є оберненою), то така А. с. наз. т і л о м. Якщо при цьому множення комутативне, то тіло наз. п о л е м. Поле — одна з історично перших і найважливіших алгебричних структур в алгебрі. Наприклад, добре відомими є поле раціональних чисел, поле дійсних чисел, поле комплексних чисел, поле алгебр. чисел, поля раціональних ф-цій, поля лишків за простим модулем тощо. Теорія полів — один з найширших і найкраще розроблених розділів алгебри.

До А. с. відносять і утворення, в яких, крім однієї чи двох операцій, є ще й певна кількість зовн. операцій — операторів. Область операторів для якоїсь алгебри $M(\cdot)$ або $M(+, \cdot)$ — це певна множина $\Sigma = \{\sigma\}$, яку наз. множиною операторів для $M(\cdot)$ [або $M(+, \cdot)$] така, що для будь-якого $\sigma \in \Sigma$ та $a,\ b \in M$, $\sigma(a) = M$, при цьому $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ у випадку $M(\cdot)$ і $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ та $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \times \sigma(b)$ для $M(+, \cdot)$. Кожен з операторів можна розглядати як додаткову унарну операцію на M. Множина операторів Σ — це здебільшого якась А. с. (півгрупа, група, кільце чи поле), операції якої узгоджені з операціями на M. Найвідомішими і найпоширенішими А. с. «з операторами» є векторні простори; в них, крім бінарної операції додавання, визначено операцію множення на скаляри, що перебігають якесь поле. Узагальненням векторних просторів є м о д у л і; в них як область скалярів беруть довільне асоціативне кільце R з одиницею, при цьому $1 \in R$ діє на адитивній групі модуля як одиничний оператор.

Сюди ж належить і поняття лінійної алгебри. Це асоціативне кільце $A(+, \cdot)$, для якого задано комутативне кільце R операторів, при цьому $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha \cdot (\beta a)$ і $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для $\alpha, \beta \in R$, $a \in A$. Крім того, $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ і $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$. Інакше кажучи — це А. с., яка є водночас і модулем над R і кільцем A, в яких операції узгоджено. Лінійними алгебрами є, напр., алгебри квадратних матриць з коеф. з якогось поля чи кільця, а також т. з. тензорні алгебри, які відіграють велику роль у геометрії. Нескінченновимірні алгебри над полем дійсних чи комплексних чисел мають важливе значення для функціонального аналізу.

В матем. аналізі розглядають здебільшого не «чисті» А. с., а такі, в яких поряд з бінарними операціями й операторами визначено ще й якусь *топологію* (тобто визначено якесь поняття «збіжності»), причому так, що всі розглядані операції неперервні в цій топології. Сюди належать передовсім топологічні векторні простори, топологічні групи, кільця, поля й алгебри. Вивчення таких «топологізованих» А. с. становить зміст т. з. топологічної алгебри, нового розділу, що перебуває на межі алгебри й топології. Такі структури використовують у матем. аналізі. Слід відзначити, що до алгебричних структур відносять і такі, для яких відповідні бінарні операції визначено не скрізь. До цих частинних алгебр належать такі важливі структури, як категорії.

Великий інтерес для застосувань у *дискретному аналізі* та в комбінаториці становлять скінченні А. с., тобто такі, які визначено на скінченних множинах M. Сюди належать скінченні групи, скінченні півгрупи, скінченні поля та скінченні векторні простори. Такі структури можна застосовувати і в теорії скінченних автоматів, у теорії лінійних *кодів*, в *алгебрі логіки* тощо.

Літ.: К у р о ш А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1962 [бібліогр. с. 383—387]; М а л ь ц е в А. И. Алгебраические системы. М., 1970 [бібліогр. с.384—387]; Б у р б а к и Н. Элементы математики, ч. 1, кн. 2. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Пер. с франц. М., 1962 [бібліогр.с. 494—496]; Л е н г С. Алгебра. Пер. с англ. М., 1968. *Л. А. Калужнін.*

АЛГЕ́К — *мова програмування* для описування економічних задач. Її розроблено 1964 як розширення універсальної алгоритмічної мови *АЛГОЛ-60* засобами мови *КОБОЛ*. А. має апарат для описування складових одиниць інформації (документів і *масивів* їх), текстових величин і процесів обробки їх з доступом до всіх елементів. Задання форматів величин дає змогу мати розгалужену систему процедур вводу і виводу. *Транслятор* з А. розроблено для машини «Минск-22». *М. А. Корольов.*

АЛГЕ́М — *мова програмування* для описування економічних і обчислювальних задач, побудована на базі *АЛГОЛ-60* і *КОБОЛу*. Розроблено цю мову 1964—66. Порівняно з АЛГОЛом А. містить додатково: рядкові (текстові) змінні та вирази, що їх використовують при операціях над символьною інформацією, складові змінні та масиви, які дають змогу представляти в машині різні форми економічних документів, і зазначення видів документів, що дають змогу задавати для значень змінних склад і розміщення різних типів символів (букви, цифри та ін.), що важливо для редагування значень під час видавання на друк. *Транслятор* з мови А. реалізовано на ЦОМ «Минск-22». *А. І. Китов.*

АЛГО́Л-60 — *алгоритмічна мова*, орієнтована на описування алгоритмів розв'язування задач чисельного аналізу. А.-60 прийняла 1960 Міжнародна конференція з АЛГОЛу в Парижі, у 1962 її переглянув і схвалив технічний комітет *Міжнародної федерації по обробці інформації* (ІФІП).

Мова А.-60 привернула до себе загальну увагу завдяки деяким новим узагальнюючим ідеям, найплодотворнішими з яких є: поняття блокової структури та сфери дії позначень, які дають змогу поділяти роботу над складанням великих *програм* на доступніші для огляду частини; можливість динамічного *пам'яті розподілу* і розвинутий апарат виклику *процедур*. А.-60 запроектовано не тільки як ефективну *мову програмування*, а й як засіб записування *алгоритмів*. Значення А.-60 пояснюється великим поширенням цієї мови, значною кількістю реалізацій та бібліотек описаних нею програм. Описування синтаксису А.-60 у вигляді нормальних форм Бекуса істотно вплинуло на дослідження над мовами програмування й дало поштовх дальшому розвиткові досліджень у галузі *мов формальних*.

Розрізняють три рівні мови А.-60: еталонну мову, мову публікацій і конкретні представлення. Е т а л о н н а м о в а є основою і посібником для створювання *трансляторів*, зразком для всіх конкретних представлень та основою для перекладу з мови публікацій на будь-які певні конкретні представлення. М о в а п у б л і к а ц і й допускає видозмінювання еталонної мови, щоб зручніше було друкувати або писати (наприклад, індекси, пробіли, показники степеня, грецькі букви), і використовується для формулювання та обміну інформацією. Символи мови можуть бути різними в різних країнах за наявності однозначної відповідності еталонному представленню. Кожне к о н к р е т н е п р е д с т а в л е н н я є, як правило, певною модифікацією еталонної мови, такою, яка визначається кількістю знаків у стандартному обладнанні введення, використовує набір знаків конкретної *цифрової обчислювальної машини* і є вхідною мовою транслятора для неї. Треба, щоб конкретні представлення супроводжувала спец. сукупність правил для перекладу з мови публікацій або з еталонної мови.

Програма, записана засобами мови А.-60, є сукупність описів величин і дій над ними. Розрізняють такі класи величин: прості змінні, *масиви*, *мітки*, перемикачі і *процедури*. Для позначення величин використовують *ідентифікатори*. Величина діє в тому операторі або виразі, в якому опис ідентифікатора, зв'язаного з цією величиною, має силу. Значеннями величин (залежно від їхнього класу) можуть бути: число (чи якась сукупність чисел), логічне значення (чи якась сукупність таких значень) або мітка. Значення числових величин мають типи: цілий (**integer**) і дійсний (**real**), значення логічних величин — логічний (або булевий — **Boolean**) тип.

Алфавіт еталонної мови строго зафіксовано, він складається з десяткових цифр від 0 до 9, малих і великих лат. букв, знаків операцій, розділових знаків, круглих і квадратних дужок і деяких спец. знаків. Із символів алфавіту за певними правилами утворюються елементарні конструкції — ідентифікатори, числа, рядки, змінні величини й покажчики функцій, арифм., логіч. і називальні вирази та описи, оператори й примітки. За допомогою міток, якими в разі потреби забезпечуються оператори, задається порядок виконання їх. Ідентифікатор змінної величини — це назва, що дається якомусь окремому значенню або сукупності значень. Рядок являє собою будь-яку послідовність символів алфавіту, взяту в малі дужки (і), і використовується як *параметр фактичний* процедури. Арифм., логіч. та називальний вирази є правилами для обчислювання числового й логічного значень і для одержання мітки оператора, відповідно. Описи визначають деякі властивості величин і зв'язують їх з ідентифікаторами. Описування ідентифікатора має силу в одному блоці. Описування можна посилити додатковим описувачем **own** (власний), і завдяки цьому зберігається значення якоїсь величини, описаної, таким чином, на момент повторного входження в цей блок. А.-60 має чотири види описів: типу, масиву, перемикача і процедури. Описування типу вказує, що деякі ідентифікатори є прості змінні цілого, дійсного або логіч. типу. Описуванням масиву визначається, що один або кілька ідентифікаторів становлять багатовимірні масиви змінних з індексами і задають розмірність цих масивів, границі індексів і типи змінних. Описуванням перемикача задається сукупність значень відповідного покажчика перемикача. Описування процедури задає процедуру, пов'язану з її ідентифікатором, і складається з заголовка і тіла. За допомогою приміток (**comments**) у програму мовою А.-60 можна включати будь-який текст, напр., для пояснення якоїсь ділянки програми або якоїсь конструкції.

Оператор — це конструкція, за допомогою якої дається вказівка виконати деяку дію або сукупність дій. Основними операторами А.-60 є *оператори присвоювання*, оператори переходу, пустий і процедури. О п е р а т о р п р и с в о ю в а н н я служить для присвоювання значення виразу одній або кільком змінним величинам або ідентифікаторам процедур-функцій. О п е р а т о р п е р е х о д у дає змогу змінити природну послідовність виконування операторів, явно визначаючи свого наступника за значенням називального виразу, що входить до нього. П у с т и й о п е р а т о р не виконує ніякої дії, його можна використати для вміщення мітки. Певну ділянку програми можна описати у вигляді процедури з набором *параметрів формальних*, а замість неї в програмі записати оператор цієї процедури з необхідним набором фактичних параметрів. Як звичайно, у вигляді процедур описують ділянки,

які повторюються або часто трапляються в різних програмах. В описі процедури є оператор, який наз. її тілом. Процедура описується один раз на початку блоку, де використовується оператор з ідентифікатором цієї процедури. Виконування оператора процедури зумовлює звернення до відповідного описування процедури, яке полягає у виконуванні її тіла після модифікації його, здійснюваної передбаченими в мові діями. До таких дій належать виклик параметрів за значенням і за назвою. Тіло процедури можна описати і якою-небудь іншою алгоритм. або машинною мовою. Іншим способом використання поняття процедури є описування процедур-функцій, звернення до яких здійснюється за допомогою покажчика функції. Цей покажчик можна використовувати як операнд в арифм. або логіч. виразах. Якщо фактичні параметри процедури не змінюються від одного звернення до іншого, то відповідні до них формальні параметри процедури можна опустити. Така процедура наз. процедурою без параметрів. В А.-60 є сукупність стандартних функцій, які не потребують описування. До них належать $abs\,(E)$ (абсолютна величина E),

$$sign\,(E)=\begin{cases}1, \text{ якщо } E>0;\\ 0, \text{ якщо } E=0;\\ -1, \text{ якщо } E<0,\end{cases}$$

$sin\,(E)$, $cos\,(E)$, $arctan\,(E)$, $entier\,(E)$

(найбільше ціле, яке не перевищує E), $sqrt\,(E)=\sqrt{E}$ та $exp\,(E)=e^{E}$.

В 1964 Міжнародний комітет ІФІП рекомендував як доповнення до мови А.-60 такі стандартні процедури обміну інформацією між програмою і зовнішніми носіями інформації: *inreal* — введення числа, *outreal* — виведення числа, *inarray* — введення масиву, *outarray* — виведення масиву, *insymbol* — введення символу, *outsymbol* — виведення символу, *length* — визначення довжини рядка. Тіла цих процедур записуються здебільшого мовою машини.

Осн. оператори можна використати для утворення складніших операторів: циклу, умовного, складеного і блоку. Оператор циклу складається з заголовка циклу та внутрішнього оператора. Заголовок циклу задає число повторень внутрішнього оператора. Таким заголовком наз. конструкція виду **for** ⟨змінна⟩: = ⟨список циклу⟩ **do**. Список циклу складається з елементів, які можна поділити на три типи: A — типу арифм. виразу, A **step** h **until** M — арифм. прогресії, A **while** B — перерахунку, де A, h, M — арифм. вирази, причому h — крок (різниця між двома послідовними значеннями змінної циклу) зміни змінної циклу, яка наз. параметром циклу, а B — логіч. вираз. У випадку елемента типу перерахунку кількість виконань внутрішнього оператора визначається умовою B, тобто цей оператор виконується, поки вираз B є істинним. Умовні оператори ведуть до пропуску або виконування деяких операторів залежно від поточних значень використаних у них логічних виразів. Сукупність операторів, взята в операторні дужки **begin** та **end**, наз. складеним оператором. Якщо, крім того, за символом **begin** ідуть описування, то така конструкція наз. блоком. Блоки і складені оператори можна вкладати один в одного. Програма мовою А.-60 є блоком або складеним оператором. Будь-який ідентифікатор, що використовується в якомусь блоці, можна описати в цьому блоці. Такі ідентифікатори наз. локалізованими в цьому блоці, і об'єкт, представлений яким-небудь із них усередині блоку, не існує поза цим блоком, а будь-який об'єкт, представлений тим самим ідентифікатором поза цим блоком, не можна використати всередині цього блоку. Ідентифікатори, які використовуються всередині блоку, але не описані в ньому, не локалізуються там, тобто представляють одні й ті самі об'єкти і всередині цього блоку, і в навколишніх блоках. Мітка, яка використовується в блоці, якщо її й не описано в ньому, діє так, ніби її описано в заголовку найменшого блоку, який охоплює позначений цією міткою оператор.

Приклади: 1) Описування процедури:

procedure *preobr* (*S*);

for *i* : = 1 **step** 1 **until** *k* **do** *M* 1 [*i*] : =*M* [*i*] ↑ *S*;

2) Описування процедури ф-ції:

real procedure *Sum* (*Mas*, *K*); **array** *Mas*;

begin real *S*; *S*:= 0;

for *i* : = 1 **step** 1 **until** *K*

do *S* : = *S* + *Mas* [*i*];

Sum : = *S* **end**;

3) А.-програма: для даних цілих чисел k, l, m, n знайти:

$$z=\frac{k!\ n!}{l!\ m!}$$

begin integer procedure *y* (*j*);

begin integer *i*, *Y*; *Y* : = 1;

for *i* : = **step** 1 **until** *j* **do** *Y* : = *Y* × *i*;

y : = *Y* **end**;

integer *k*, *l*, *m*, *n*; **real** *z*;

read (*k*, *l*, *m*, *n*); *z* : = *y* (*k*)/*y*(*l*)×

× *y* (*n*)/*y* (*m*);

print (*z*) **end**.

Наведену вище А.-програму написано в конкретному представленні, де *read* — оператор читання інформації з зовнішнього носія, а *print* — оператор друкування. А.-програма еталонною мовою являє собою рядок символів. Пробіли до уваги не беруться, але їх можна використати в тексті програми для забезпечення зручності читання. У мові публікацій допускається: замість індексних дужок [i] — зниження рядка, взятого в них,

і видалення їх, підняття показника степеня і видалення символу ↑, застосування дужок будь-якої форми — круглих, квадратних або фігурних, для основи степеня десять — підняття десятки і наступного цілого числа і вставлення відповідного знака множення.

А.-60 є базовою мовою для багатьох інших мов програмування. Робоча група ІФІП виробила скорочений варіант А.-60, у якому кожна програма, записана ним, автоматично є й програмою на мові А.-60 і має однакову семантику в обох мовах.

Літ.: Агеев М. И. Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60. М., 1965 [бібліогр. с. 93]; Сообщение о сокращенном АЛГОЛе-60 (ИФИП). «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1965, т. 5, № 3; Лавров С. С. Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60). М., 1972 [бібліогр. с. 182—183]; Мак-Кракен Д. Д. Программирование на АЛГОЛе. Пер. с англ. М., 1964; Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Пересмотренное сообщение. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 77].

А. І. Халілов.

АЛГОЛ-68 — міжнародна універсальна *алгоритмічна мова.* Розробив її 1968 колектив учених під керівництвом робочої групи з АЛГОЛу *Міжнародної федерації по обробці інформації.* В А.-68 проведено чітку відміну між «зовнішніми об'єктами», тобто, означуваними синтаксично складовими частинами *програми,* та «внутрішніми об'єктами», які є «значеннями» того чи іншого «виду» (цілого, дійсного, логічного та ін.). Внутр. об'єкти не можуть бути зображені мовою, але зовн. об'єкти можуть «володіти» ними. Прикладами зовн. об'єктів можуть бути «зображення». Так, зображення дійсного числа 2.87 завжди володіє внутр. об'єктом—дійсним значенням «дві цілі й вісімдесят сім сотих», а зображення логічного **істина** володіє логічним значенням «істина». Ін. прикладами зовн. об'єктів можуть бути «ідентифікатор», напр. $xy2$, і «опис тотожності», напр. **дійсн** $xy2 = 2.87$. Після «виконання» опису тотожності *ідентифікатор* у лівій частині починає володіти тим внутр. об'єктом, яким володіє зовн. об'єкт у правій частині цього опису тотожності. Ідентифікатор продовжує володіти цим значенням (тобто, не змінює його) до кінця виконання того «блоку» програми, в якому його «описано» цим описом тотожності.

Для підвищення точності обчислень числові значення можуть мати збільшену «довжину», напр., **довг ціл** x або **довг довг довг дійсн** y тощо. Мається на увазі, що зі збільшенням довжини підвищується точність зображення відповідних величин. До внутр. об'єктів А.-68 належать назви, які зовні не можна зобразити, бо в мові немає зображень, які б володіли назвами. Кожна назва «називає» якесь інше значення, яке й саме може бути назвою. Називання можна розглядати як аналог непрямої адресації в *мовах машинних* (див. *Адресна мова*). Кожна назва називає значення певного виду.

Опис тотожності **ціл** k (з опущеними знаком рівності та правою частиною) рівнозначний за означенням такому описові тотожності, в лівій частині якої стоїть **назв ціл** k, а права частина виробляє нову назву, якою й починає володіти k. Однак, описи тотожності **ціл** $i=1$ і **ціл** $j = s$ у тому самому блоці примушують i та j володіти відповідно одиницею і поточним — на момент виконання опису — значенням s, але не їхніми назвами. Це, зокрема, означає, що в цьому блоці можуть ставатися «присвоювання» $k := 10$ і $k := k + 1$, котрі примусять назву, яка володіє ідентифікатором k, називати спочатку число 10, а потім — число 11; однак, конструкції $i := 10$ або $j := 2$ в цьому випадку синтаксично недопустимі. Таким чином, на рівні відміни між якимсь видом і назвою цього виду в А.-68 запроваджуються відміни між константами та змінними якого завгодно виду. Прямокутні *масиви* довільної вимірності самі є значеннями й називаються в А.-68 «мультизначеннями». Так, напр., **[1 : n, 1 : m] дійсн** описує матрицю $n \times m$ з дійсними елементами, а **[4 : 13] назва [1 : рух] літ** — вектор, який складається з десятьох елементів, понумерованих, починаючи з номера 4, кожний з яких є назвою мультизначення. Останні, тобто одновимірні масиви буквених векторів з рухомою верхньою границею, наз. «рядковими» значеннями і для них в А.-68 існують зображення, напр., «це рядок». А.-68 дає змогу працювати з «вирізками» з масивів шляхом вилучення окремих елементів мультизначення й підмасивів, які розглядаються як мультизначення.

На відміну від мультизначення, всі елементи якого мають однаковий вид, «структурне значення» є впорядкованою послідовністю своїх елементів, що наз. «полями» і можуть належати до різних видів. Вони вибираються, на відміну від мультизначень, не за індексами, а за допомогою «покажчика поля», схожого на ідентифікатор. Вид структурного значення містить у собі інформацію про види його полів і про їхні покажчики. Зокрема, комплексні значення в А.-68 означено за допомогою «опису виду» як структури з двома дійсними полями

вид компл = структ (дійсн *re*, **дійсн** *im*).

Опис виду

вид список = структ (дійсн елемент, **назва список** наступний)

дає змогу моделювати списки в розумінні, напр., мови *ЛІСП. Підпрограми* А.-68, що є аналогами тіл процедур *АЛГОЛу-60*, також є значеннями. Вид підпрограми містить у собі інформацію про види всіх її параметрів (коли вони є) та про те, чи виробляє підпрограма значення і якщо виробляє, то якого виду. Зовн. об'єктами, що володіють підпрограмами, є «зображення підпрограм» та «ідентифікатори процедур»; напр., опис тотожності **проц** p = (**ціл** x, **назва ціл** y) **назва ціл**: $y := x$ примушує ідентифікатор процедури p володіти підпрограмою, зображення якої міститься у правій частині. Передавання *параметрів фактичних* при зверненні до *процедур* забезпечується описами тотожності. Так, наприклад, «виклик» p (a, c) за означенням, у певному контексті, рівнозначний

виконанню такого блоку (1) (**ціл** $x = a$, **назва ціл** $y =$ c; $y : = x$). Завдяки цьому в семантиці А.-68 непотрібно підкреслювати відміну між викликом за назвою та за значенням.

В А.-68 є й назви, що можуть називати значення різних видів. Так, опис тотожності **об (ціл, [ ] лог)** x дає змогу привласнювати змінній x ціле значення і мультилогіч. значення. Щоб з'ясувати, до якого поточного виду належить значення, називане назвою x, треба скористатись із спец. «відношень погоджуваності». Лише коли програміст користується з цих відношень явно, виникає потреба динамічної перевірки видів. Оператори і вирази в А.-68 мають спільну назву «речень», причому між ними немає чіткої різниці. Вважається, що будь-який оператор, у т. ч. блок, виробляє те значення, яке було одержано останнім перед завершенням оператора. Напр., блок (1), а отже і виклик процедури p (a, c), виробляє як значення назву, властиву ідентифікаторові y (або, що те саме,— ідентифікаторові c). Значенням, що його виробляє оператор, можна знехтувати, а можна й використати його, коли оператор входить до складнішого виразу. Напр., $m[(i : = 1), (j : = 1)] : = 1$ присвоює одиницю не лише верхньому лівому елементові матриці, а й змінним i та j, а опис тотожності

ціл $i = 1 +$ (**ціл** s; $s: = 4$; $s + 5$)

примусить ідентифікатор i володіти числом десять. Неявні, задавані не програмістом, а синтаксисом мови, перетворення первісних видів значень до видів, яких потребує контекст, у А.-68 наз. «зведеннями». При наявності описів **ціл** i; **дійсн** x; [1 : **рух**] **ціл** y; **об (ціл, дійсн)** z присвоювання $x : = 1$ потребуватиме «узагальнення» цілої одиниці до дійсної одиниці; $i + 1$ потребуватиме «розназивання» назви, якою володіє ідентифікатор i, до значення виду **ціл**; у присвоюванні $y : =2$ мається на увазі «укрупнення» скаляра 2 до одноелементного вектора; присвоювання $z : = x$ містить у собі, крім розназивання, ще й «об'єднування» дійсного значення до виду, який поєднує ціле й дійсне.

В А.-68 залишено оператори циклу тільки найпростішого вигляду. Параметр циклу може бути лише цілим і може змінюватися лише регулярним способом, причому його ідентифікатор вважається локалізованим у тілі циклу. Початкове значення, крок та кінцеве значення параметра мають бути цілими і не можуть змінюватися під час виконання оператора циклу. Закінчення циклу може відбуватися по досягненні параметром кінцевого значення або за деякою лог. умовою. Напр., оператор циклу може бути таким:

для i **від** 1 **крок** 2 **до** $2 \times n + 1$

доки $a\ [i] \neq 0$

цикл (**ціл** s; $s : = a\ [i]$; $a[i]: = a\ [i + 1]$;

$a\ [i + 1] : = s$).

У найпростіших випадках деякі частини заголовку можна пропустити, напр., **від 1, крок 1, доки істина**. Порядок виконання операцій у формулі визначається за їхнім пріоритетом та розставленням дужок. Стандартні бінарні операції ($+$, $-$, $\times$, $\diagup$, $\uparrow$, $>$, $<$, $\wedge$, $\vee$ тощо) розподілено за дев'ятьма пріоритетами, а унарні операції ($+$, $-$, $\neg$, **abs** тощо) мають десятий — найвищий пріоритет. Є змога ввести в блоці, зокрема в усій програмі, нову операцію або переозначити стару. Це досягається описуванням операції та (для нових бінарних операцій) описуванням пріоритету. Описування операції вводить або переозначує операцію лише для операндів тих видів, які специфіковано в описі. Так, описування операції

оп $- =$ (**дійсн** x, **дійсн** y) **дійсн**: **abs** $(x +$

$+ (- y))$

приведе до того, що різниця чисел у відповідному блоці завжди братиметься за модулем. В А.-68 умовні речення дають змогу обирати для виконання одне з двох речень залежно від поточного значення деякого логічного виразу. Кожне з двох альтернативних речень може, звичайно, бути й умовним. Введення спец. кінцевого символу «**щояк**» (укр. слово «якщо» у зворотному порядку складів) виключає двозначності, що виникають у зв'язку з умовними операторами АЛГОЛу-60.

Дії, з яких складається виконання частин програми, можуть виконуватись або послідовно, або «сумісно». Останнє означає, що взаємний порядок цих дій не визначено мовою. На практиці це дає змогу виконувати їх паралельно. Сумісно можуть, як правило, виконуватись операнди у формулах і фактичні параметри у викликах процедури. Крім того, в мові передбачено спец. «сумісні речення». Так, у наступному описі тотожності праворуч міститься сумісне речення, що заповнює елементи константного масиву:

[ ] **дійсн** $z =$ (3, 5, 1, 3, (**дійсн** $s : = 0$;

для i **до** n **цикл** $s : = s + a\ [i]$; s)).

Сумісне речення може моделювати паралельний процес, якщо попереду стоїть символ **пар**, а всередині використовуються операції $\uparrow$ та $\downarrow$, що забезпечують синхронізацію виконання окремих гілок цього процесу.

Програма А.-68 складається з «власне програми», яку пише програміст і яка міститься між «стандартним вступом» і «стандартним закінченням». Стандартний вступ містить у собі, зокрема, опис усіх операцій, допущених мовою, опис багатьох стандартних видів і «запити щодо обставин», які дають програмі змогу звертатися до певних стандартних функцій або констант, запитуючи їх про конкретні машинні «обставини» цієї реалізації, напр., про практично доступне подовження величин, про макс. розміри величин тієї чи іншої довжини тощо. Це дає змогу писати програми, які автоматично настроюються на різні машини. Обмін

із зовн. середовищем також забезпечується в А.-68 стандартними вступом і закінченням, які мають процедури, що точно описують різні режими введення й виведення інформації та редагування цієї інформації відповідно до бажаного формату. Зовн. середовище тлумачиться як деяка сукупність «фондів», що їх відкриває програма на каналах обміну. Фіз. властивості каналів визначаються реалізацією і враховуються в процедурах обміну.

Мову А.-68 означено на трьох рівнях: як «строгу мову», «розширену мову» і «мову зображень». Граматика ван Вейнгаардена, що її використано для задання синтаксису «строгої мови», передбачає наявність двох скінченних сімей породжувальних правил. За допомогою правил першої сім'ї для «метапонять», поданих як послідовності великих букв, напр., 'ВИД', породжуються їхні «термінальні породження», складені з самих тільки малих букв. Напр., для метапоняття 'ВИД' термінальними породженнями є 'цілий', 'дійсний' і нескінченна множина інших видів (деякі з них згадано вище). Правила другої сім'ї містять у собі вкраплені метапоняття. Якщо замінити в такому правилі всі входження кожного метапоняття на одне й те саме його термінальне породження, одержимо одне з породжувальних правил строгої мови. Так, із правила

'присвоювання виду назва ВИДУ: одержувач виду назва ВИДУ, символ присвоїти, джерело виду ВИД'

буде одержано нескінченну множину правил строгої мови, якщо всі входження слова 'ВИД' в одному випадку замінити на 'цілий', в другому — 'назва логічного', в третьому — на 'мульти довге дійсне' тощо. Послідовність малих букв, що починається з 'символ', напр., 'символ присвоїти', наз. «символом», а всі інші послідовності, напр., 'джерело виду логічний' — «поняттями».

За допомогою правил строгої мови з поняття 'програма' породжуються програми строгої мови як послідовності символів. Семантика строгої мови формулюється словами в термінах операцій деякої гіпотетичної машини, яка інтерпретує синтаксичні одиниці програми строгої мови. Програми розширеної мови одержують з програм строгої мови внаслідок деяких локальних перетворень. Зокрема, циклів та описів тотожностей без правої частини немає в строгій мові, натомість вони з'являються в розширеній мові як певні скорочення конструкцій строгої мови.

У мові зображень символи як послідовності малих букв замінюються на їхні «зображення». Так, напр., для символу 'присвоїти' рекомендовано зображення «: = », «..=», «.=»; для конкретної реалізації можна обрати одне з них або якесь зовсім нове. Винесення мови зображень на окремий рівень забезпечує незалежність А.-68 від особливостей друкувальних пристроїв конкретних реалізацій.

Літ.: Алгоритмический язык АЛГОЛ 68. «Кибернетика», 1969, № 6; 1970, № 1; Васильев В. А. Язык АЛГОЛ-68. М., 1972. *О. Ф. Рар.*

АЛГОРИТМ, алгорифм — система точно визначених правил дії (програма) з зазначенням, як і в якій послідовності ці правила застосовувати до первісних даних певної задачі, щоб одержати її розв'язок. Істотними рисами А. є: детермінованість (означеність) — однозначність виконання процесу при заданих первісних даних; дискретність означуваного алгоритмом процесу — розчленованість його на окремі елементарні акти, можливість виконання яких людиною або машиною не викликає сумніву; масовість — первісні дані для А. можна вибирати з якоїсь множини даних (потенціально нескінченної), тобто А. повинен бути застосовний не до однієї задачі, а до цілого класу однотипних задач. Поняття А.— одне з основних у математиці. Знаходження його для розв'язування різних типів задач є метою математики. Напр., будь-яке алгебричне рівняння k-го степеня має не більше як k різних коренів. Постає проблема знайти А., за допомогою якого, задавши коефіцієнт рівняння, можна було б визначити, скільки саме це рівняння має коренів і якої кратності, і такий А., який дав би змогу з будь-якою наперед заданою точністю обчислити ці корені. Такі А. знайдено в алгебрі: правило Штурма для визначення числа дійсних коренів алгебричного рівняння та алгоритм Лобачевського для знаходження цих коренів. Для інших задач, напр., для деяких типів диференціальних рівнянь, відповідний А. не знайдено, хоч встановлено, що для всіх задач даного типу розв'язок існує. З практичного погляду особливу цінність становлять А., що приводять до розв'язання задачі найкоротшим шляхом. До виникнення ЕОМ А., для здійснення яких необхідно було виконати кілька сот тисяч елементарних операцій, становили тільки теоретичний інтерес. Із застосуванням цих машин дослідження алгоритм. розв'язуваності різних класів задач набули безпосереднього практичного значення.

Розглянуте поняття А. лише в загальній формі характеризує обчислювальні процеси, звичайно описувані у вигляді словесних правил, схем, формул, *програм* та ін. Воно не є точним математичним визначенням, а лише пояснює значення слова А., в якому це слово використовується в математиці, оскільки в ньому не визначається, що слід розуміти під «правилами дії». Протягом тривалого часу поняття А. не змінювалось у своїй основі (хоч і набувало все більшої виразності), оскільки його розглядали тільки у зв'язку з побудовою конкретних А. і математики задовольнялися його змістовим розумінням. Лише в 30-х роках 20 ст., у зв'язку з питаннями обгрунтування математики і з розвитком *обчислювальної математики* та *обчислювальної техніки*, виникла необхідність розглянути загальні способи формалізації задач і процесів розв'язування їх, уточнити поняття А. як об'єкту матем. теорії (див. *Алгоритмів теорія*). Процес виконання А. наз. алгоритмічним процесом. Для дея-

ких первісних даних він закінчується одержанням шуканого результату після скінченної кількості кроків. Проте допускаються випадки, в яких процес виконання А. для деяких первісних даних безрезультативно обривається або продовжується необмежено. Прийнято вважати, що до цих первісних даних А. не застосовний.

Поняття А. тісно пов'язано з поняттям «алгоритмічна мова» (якою задано А.) і з поняттям «правило виконання А.» при заданих для нього первісних даних. *Алгоритмічна мова* і правило виконання (яке по суті саме є А. і його можна називати «алгоритмом виконання А.») природно виділяють певне сімейство А.

Кожна детермінована обчислювальна машина є автоматом, дії якого можна описати у вигляді якогось А. Такий А. є А. виконання *програм* зазначеної обчислювальної машини. Самі програми можна розглядати як певний клас А. При цьому алгоритмічною мовою є *команд система* обчислювальної машини.

М. А. Криницький.

АЛГОРИ́ТМ ЛОКА́ЛЬНИЙ — алгоритм, який обчислює властивості *(предикати)* окремих елементів множини й використовує на кожному кроці тільки інформацію про околи якогось елемента. Точне визначення А. л. вводять так. Нехай задано сімейство $\{\mathfrak{M}\}$ множин. Кожній парі $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ протиставимо множину $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, яку назвемо околом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, якщо виконано такі умови: 1) $\mathfrak{A} \in S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, 2) $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$, 3) якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_2$, $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$, то $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$.

В деяких задачах для $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ вводять лічбову систему околів $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, ..., $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, ... Нехай, наприклад, $\{\mathfrak{M}_f\}$ — сімейство множин $\mathfrak{M}_f$, складених з елементарних *кон'юнкцій*, які входять до скороченої *диз'юнктивної нормальної форми* (ДНФ) ф-ції f. Околом $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_f)$ назвемо сукупність усіх кон'юнкцій з $\mathfrak{M}_f$, таких, що відповідні їм інтервали мають непустий перетин з інтервалом $N_{\mathfrak{A}}$, відповідним кон'юнкції $\mathfrak{A}$.

Нехай визначено окіл $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_f)$ $(k-1)$-го порядку кон'юнкції $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}_f$. Околом $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_f)$ k-го порядку $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}_f$ назвемо сукупність усіх $\mathfrak{A}_i$ з $\mathfrak{M}_f$, для яких виконано одну з двох умов: 1) $N_{\mathfrak{B}} \cap N_{\mathfrak{A}_i}$ непусте і $\mathfrak{B} \in S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_f)$, 2) інтервал, який відповідає $\mathfrak{A}_i$, міститься в сумі інтервалів, кожному з яких відповідає кон'юнкція з $\mathfrak{M}_f$, що задовольняє умову 1). Неважко ввести і околи $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ для вершин і ребер *графа*.

Вважатимемо, що на па́рах $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ визначено систему двомісних предикатів $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, ..., $P_l(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, яку поділено на дві неперетинні підмножини $\langle P_1, \dots, P_r \rangle$, $\langle P_{r+1}, \dots, P_l \rangle$. Елементи першої підмножини назвемо основними предикатами, другої — допоміжними предикатами.

Вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l)$ наз. інформаційним, якщо $\alpha_i \in \{0, 1, \Delta\}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Вектор $\tilde{\alpha}$ наз. допустимим для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, якщо для всіх $\alpha_i \neq \Delta$ виконано рівність $\alpha_i = P_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Множину $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ всіх інформаційних векторів, допустимих для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, наз. інформаційною множиною $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$.

Нехай $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_t\}$; $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = \{(\alpha_{i1} \dots \alpha_{il})\}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Множину $\mathfrak{M}^* = \{\mathfrak{A}_1^{\alpha_{11} \dots \alpha_{1l}}, \dots, \mathfrak{A}_t^{\alpha_{t1} \dots \alpha_{tl}}\}$ назвемо допустимою для $\mathfrak{M}$. Клас $M^* = I(\mathfrak{M})$ всіх допустимих для $\mathfrak{M}$ множин $\mathfrak{M}^*$ назвемо інформаційним класом множини $\mathfrak{M}$ за системою предикатів $P_1, \dots, P_l$.

Очевидно, окіл $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ визначає окіл $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)$. Введемо систему ф-цій $\varphi_1, \dots, \varphi_l$; $\varphi_i(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)) = (\beta_1 \dots \beta_l)$. Ф-ції φ_i визначено на всіх парах $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ таких, що $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \in I(\mathfrak{M})$, і задовольняють такі умови: 1) $\alpha_j = \beta_j$, якщо $j \neq i$; 2) множина $\tilde{\mathfrak{M}}$, яку одержуємо з $\mathfrak{M}^*$ заміною елемента $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, допустима для $\mathfrak{M}$ $(\tilde{\mathfrak{M}} \in I(\mathfrak{M}))$. Для стислості пари $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ будемо позначати $(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$.

Уведемо часткову впорядкованість у деяких множинах (див. *Частково впорядкована множина*): 1) $M_1 = \{0, 1, \Delta\}$, $\Delta < 0$, $\Delta < 1$; 2) M_2 — множина інформаційних векторів довжини l: $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leqslant (\beta_1 \dots \beta_l)$, якщо $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, l$; 3) Множина елементів з позначками: $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \leqslant \mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, якщо $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leqslant (\beta_1 \dots \beta_l)$; 4) Множина $M = \bigcup_{\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}\}} I(\mathfrak{M})$: $\mathfrak{M}_1 \leqslant \mathfrak{M}_2$, якщо, по-перше, $\mathfrak{M}_1$ і $\mathfrak{M}_2$ належать до одного інформаційного класу $I(\mathfrak{M})$ і, по-друге, якщо $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l} \in \mathfrak{M}_2$, то $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leqslant (\beta_1 \dots \beta_l)$; 5) Множина околів $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)$: $S_1 = S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}_1^*) \leqslant S_2 = S(\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}, \mathfrak{M}_2^*)$, якщо $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$, а з умов $\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l} \in S_1$, $\mathfrak{B}^{\delta_1 \dots \delta_l} \in S_2$ випливає, що $(\gamma_1, \dots \gamma_l) \leqslant (\delta_1 \dots \delta_l)$.

Нехай A і B — елементи однієї з множин 1)—5). Якщо $A \leqslant B$ і $B \leqslant A$, то елементи A і B назвемо рівними за інформацією й позначимо $A \approx B$. Ф-цію $\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$ назвемо монотонною, якщо із співвідношення $S_1 \leqslant S_2$ випливає, що $\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S_1, \mathfrak{M}_1^*) \leqslant \varphi_i(\mathfrak{A}, \beta_1 \dots \beta_l, S_2, \mathfrak{M}_2^*)$, $i = 1, 2, \dots, \delta$.

Для визначення А. л. слід також ввести алгоритм упорядкування A_π і Δ — оператор за системою предикатів. Нехай M — довіль-

на множина, складена з елементів з інформаційними векторами, $N = \{1, 2, ..., l\}$. Розглянемо множину $M \tilde{\times} N$ всіх пар $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$, таких, що $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in M$, $j \in N$, $\alpha_j = \Delta$. Алгоритм A_π впорядковує множину $M \tilde{\times} N$. Δ — оператор за системою $i_1, ..., i_r$ над $\mathfrak{M}^*$ заміняє в інформаційних векторах усіх елементів з $\mathfrak{M}^*$ значення всіх координат, крім координат з номерами $i_1, ..., i_r$ на Δ. Позначають його $\Delta_{i_1 \dots i_r}(\mathfrak{M}^*)$. Алгоритм A повністю визначається системою предикатів $P_1, ..., P_l$, розбиттям її на основні $P_1, ..., P_r$ й допоміжні $P_{r+1}, ..., P_l$ предикати, системою монотонних функцій $\varphi_1, ..., \varphi_l$, $\varphi_i = \varphi_i(\mathfrak{A}_1, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$ і алгоритмом A_π. Нехай $\mathfrak{M}^* = \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{il}}, \mathfrak{M}^* \in I(\mathfrak{M})$. Опишемо перший крок *алгоритму*. До множини $M \tilde{\times} N$ застосуємо алгоритм $A_\pi(M = \mathfrak{M}^*)$. Виділяємо першу за порядком пару $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$, обчислюємо $\varphi_j(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\beta_1 \dots \beta_l)$, елемент $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ замінюємо на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$. Якщо $(\alpha_1 \dots \alpha_l) = (\beta_1 \dots \beta_l)$, беремо другу за порядком пару і т. д. Якщо для всіх елементів $(\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l}, j)$ виконано рівність $\varphi_j(\mathfrak{B}, \gamma_1 \dots \gamma_e, S, \mathfrak{M}^*) = (\gamma_1 \dots \gamma_l)$, алгоритм A закінчується після перегляду всіх пар з $M \tilde{\times} N$. У противному разі після вектора $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$ на новий вектор $(\beta_1 \dots \beta_l)$ відбувається перевірка — чи лишилися ще елементи, в яких на перших r місцях в інформаційних векторах є хоча б один символ Δ. Якщо таких елементів немає, алгоритм A закінчується. Якщо вони є — закінчується перший крок алгоритму.

Нехай виконано n кроків алгоритму A. Опис $(n + 1)$-го кроку точно відтворює опис першого кроку, якщо замість множини $\mathfrak{M}^*$ розглядати множину $\mathfrak{M}_n^*$, у яку перейшла $\mathfrak{M}^*$ після перших n кроків алгоритму A. Через монотонність φ_i, $i = 1, 2, ..., l$ алгоритм закінчиться після скінченного числа кроків.

Вихідними теоремами теорії А. л. є теорема єдності й теорема існування найкращого алгоритму. Перша теорема стверджує, що результат обчислювань осн. предикатів А. л. не залежить від алгоритму A_π (порядку проходження елементів множини $\mathfrak{M}^*$). Друга теорема стверджує існування у надто загальних припущеннях найкращого А. л., тобто алгоритму, який за заданою фіксованою системою околів при фіксованих, допоміжних предикатах обчислює задані осн. предикати завжди, коли це робить будь-який інший алгоритм.

Ця теорема має характер існування, тобто пряма побудова найкращого алгоритму з використанням доведення є утрудненою. Природно тому спробувати одержати найкращий алгоритм у явній формі. Цю задачу розв'язано лише для окремих випадків. Прикладом може бути задача побудови мінім. покрить множини M системою множин $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_l$. Коли як основні предикати розглянути P_1 ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_l, M$) —[$\mathfrak{A}$ не входить до жодного мінім. покриття M множинами з числа $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_l$] і P_2 ($\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_l, M$) —[$\mathfrak{A}$ входить у всі мінім. покриття множинами з числа $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_l$], то за порожньої множини допоміжних предикатів вдається побудувати А. л. обчислювання P_1, P_2. Розв'язано задачу обчислення властивості ребра графа входити чи не входити в якусь тупикову путь двома полюсами: побудовано найкращий А. л. Побудовано ще А. л. для задач спрощення ДФН. Ці алгоритми обчислюють властивість елементарної кон'юнкції входити чи не входити в *диз'юнктивну нормальну форму мінімальну* за околами першого, другого або третього порядку. Доведено необчисленність у класі А. л. властивості елементарної кон'юнкції входити до мінімальної ДНФ *булевої функції*. Точніше, якщо число предикатів, які беруть участь у визначанні А. л., дорівнює l, а порядок (індекс) околу дорівнює k, то при $k \cdot l < \text{const} \cdot 2^n$ існує булева ф-ція $f(x_1 \dots x_n)$, для якої про всяку елементарну кон'юнкцію, що входить до скороченої ДФН, алгоритм з параметрами k, l «не дізнається» — входить вона до мінімальної ДФН чи ні. При цьому накладаються не досить жорсткі обмеження на вид предикатів $P_1, ..., P_l$. Досліджено обчисленність усіх предикатів, пов'язаних із задачею мінімізації булевих ф-цій.

Літ.: Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Журавлев Ю. И. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. «Дискретный анализ», 1964, в. 3; Журавлев Ю. И. Локальные алгоритмы вычисления информации. «Кибернетика», 1965, № 1; 1966, № 2; Андон Ф. И. Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. «Кибернетика», 1966, № 6; Евдокимов А. А. О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе. «Математические заметки», 1969, т. 6, в. 3; Хуторянская И. В. Некоторые вопросы теории локальных алгоритмов на графах. «Кибернетика», 1971, № 1. *Ю. І. Журавльов.*

АЛГОРИ́ТМ РОЗПІЗНАВА́ННЯ — скінченна система правил, що за результатами вимірювань певних ознак об'єктів розпізнавання дає змогу визначити, до якого з можливих класів об'єктів належить кожний даний об'єкт. Див. *Правило вирішувальне* в розпізнаванні образів.

АЛГОРИ́ТМІВ ГРА́ФОВІ СХЕ́МИ, граф-схеми алгоритмів — способи задавання класів алгоритмів, що фіксують у своєму визначенні ті чи інші структурні властивості алгоритмів, абстрагуючись від решти властивостей, що визначають індивідуальність певного *алгоритму*. Конкретні алгоритми одержують із А. г. с. тією чи ін. інтерпретацією компонент схеми. Структурні властивості алгоритмів задають у вигляді

відношення порядку на множині операторів — порядку виконання їх. Це відношення порядку можна подати у вигляді *графа*, кожній вершині якого поставлено у відповідність оператор, а стрілки між вершинами інтерпретуються як твердження про можливість виконання одного оператора безпосередньо після другого. Цей граф є таким, що кожна вершина його має не більше, як два наступники. Одну з вершин виділено як початкову, а одну — як кінцеву. При інтерпретації А. г. с. вершині з одним наступником, яка наз. перетворювачем, поставлено у відповідність оператор перетворення інформації, а вершині з двома наступниками, яка наз. розпізнавачем,— предикат розпізнавання властивості інформації.

Перші поняття й проблеми, що належать до А. г. с. і пов'язані з формальними перетвореннями їх для програмування, ввели 1956 рад. математики О. А. Ляпунов і Ю. І. Янов та 1959 Л. А. Калужнін. Спочатку було систематично вивчено підклас А. г. с., у яких розпізнавачами є *булеві функції* змінних $p_1, ..., p_n$, а для кожного перетворювача зазначають, які з змінних $p_1, ..., p_n$ він може змінювати. Як інваріант було розглянуто множину шляхів у графі переходу, в яких враховують лише перетворювачі та значення змінних $p_1, ..., p_n$. При цьому визначенні еквівалентності було побудовано повну систему перетворень в умовах лінійного запису. А. г. с., що їх запропонував Ю. І. Янов, лягли в основу багатьох досліджень. Вони стосувалися вдосконалення системи перетворень, доведення незалежності окремих перетворень і поширення теорії на випадки, коли між операторами схеми та їхніми композиціями допускають відношення тотожності, що їх описує якась півгрупа над множиною операторів. Поняття А. г. с. є джерелом різних узагальнень і модифікацій, пристосованих для теоретичного програмування, воно привело до формулювання таких важливих понять, як *операторні схеми* та *алгоритмів схеми*.

Літ.. Калужнин Л. А. Об алгоритмизации математических задач. «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2; Ершов А. П., Ляпунов А. А. О формализации понятия программы. «Кибернетика», 1967, № 5. *А. П. Єршов.*

АЛГОРИ́ТМІВ ЕКВІВАЛЕ́НТНІСТЬ — *еквівалентності відношення* в класі алгоритмів. А. е. можна ввести різними способами. А. е. є, напр., еквівалентність, у якій перебувають ті й лише ті алгоритми, застосування яких до елементів з перетину їхніх областей означення (первісних даних) дає одні й ті самі результати (еквівалентність за скінченними результатами). Якщо при цьому області означення алгоритмів збігаються, то говорять, що це — повна А. е. Проблема розпізнавання А. е. в зазначених випадках у класі всіх алгоритмів є алгоритмічно нерозв'язною. Інтерес становлять і сильніші відношення еквівалентності, напр., відношення, в яких перебувають ті й лише ті алгоритми, в яких збігаються не лише кінцеві результати, а й усі проміжні. Іншим прикладом А. е. є відношення, в якому перебувають алгоритми, що синтаксично збігаються з точністю до перекодування; в разі перекодування, напр., типу послівного кодування, проблема розпізнавання еквівалентності алгоритмів, як і в деяких ін. випадках, є алгоритмічно розв'язною. Див. також *Алгоритмів рівносильні перетворювання.* *М. А. Криницький.*

АЛГОРИ́ТМІВ РІВНОСИ́ЛЬНІ ПЕРЕТВО́РЮВАННЯ — формальні перетворювання, які дають змогу перетворити заданий алгоритм на алгоритм, еквівалентний заданому в розширеному розумінні. Еквівалентність у розширеному розумінні тут означає властивість *алгоритмів* переробляти еквівалентні первісні дані на еквівалентні результати. Суть еквівалентності первісних даних і, відповідно, результатів визначають конкретно для кожного класу алгоритмів. Здебільшого первісні дані (й результати) двох алгоритмів вважають за еквівалентні, якщо за допомогою якогось досить простого прийому ці алгоритми можна перетворити один на одного. Графічна тотожність первісних даних (результатів) є окремим випадком їхньої еквівалентності, а *алгоритмів еквівалентність* — окремим випадком їхньої рівносильності. При А. р. п. кожен перетворюваний алгоритм розглядають у сукупності з областю його задання, яка може становити лише частину сфери його застосовності (тобто в сукупності з допустимими первісними даними задачі). Це приводить до того, що рівносильні алгоритми (еквівалентні в розширеному розумінні), в яких первісні дані й результати відповідно збігаються, все-таки можуть і не бути еквівалентними (напр., у випадку, коли не збігаються сфери застосовності рівносильних алгоритмів).

А. р. п. є найважливішим прийомом, до якого вдаються під час програмування і який здійснюють, як правило, на змістовому рівні, а не формально. При цьому в програмуванні виділяють три етапи: описування, одержування й перетворювання алгоритму. Етап описування задачі вхідною *мовою програмування* не формалізовано; його виконує складач *програми*, керуючись своїм досвідом та інтуїцією. Наступним етапом є поліпшення одержаного алгоритму в межах обраної вхідної мови (на практиці ці етапи здебільшого чергуються). Третім, останнім, етапом є рівносильні перетворювання одержаного алгоритму в програму (тобто в алгоритм *мовою машинною*); це виконує формально сама ЕОМ за допомогою спец. програми, що її наз. *транслятором*. Отже, під час програмування вдаються до рівносильного перетворювання алгоритмів і зі зміною мов, і без такої зміни (надалі, коли йдеться про рівносильні перетворювання алгоритмів, мають на увазі тільки перетворювання, під час яких мова не змінюється).

Перші дослідження в галузі А. р. п. стосувалися алгоритмів, заданих мовою логіч-

них схем (МЛС), яка, власне, й виникла як мова для описування дискретних процесів (зокрема, як вхідна мова програмування), зручна для А. р. п. Згодом вивчали А. р. п., використовуючи *адресну мову* програмування. Деякі питання А. р. п. розробляли, коли створювали транслятори. Під час створення програм *інформаційно-пошукових систем* було розроблено деякі прийоми А. р. п., які дали змогу передбачати автомат. рівносильні перетворювання окремих частин програм, щоб прискорити процес пошуку інформації. Доцільність такого прийому зумовлена тим, що найкращий вид програми пошуку не завжди можна визначити заздалегідь, бо *масив* інформації, в якому провадиться пошук, змінюється.

Точне визначення поняття А. р. п. залежить від мов, якими формально описують алгоритми, первісні дані до них і результати їх, бо прості прийоми перетворювання первісних даних (і результатів) один на одного, на яких грунтується поняття їхньої еквівалентності, пов'язані з особливостями цих мов. При А. р. п. в разі, коли алгоритми задано МЛС, первісними даними й результатами є т. з. стани пам'яті, що їх записують як послідовності рівності вигляду $x_i = \xi_i$, $i = 1, 2, \dots n$, де n — число комірок пам'яті, зайнятих інформацією, x_i — назви комірок, ξ_i — їхні стани (інформація, що міститься в комірках), а знак рівності вживають у розумінні «має значення». Для такого вигляду первісних даних і результатів цілком природно вельми простими вважати такі прийоми: переназивання комірок (зокрема, тотожне переназивання, тобто збереження їхніх назв); включення в первісні дані тих комірок, які не використовують у перетворюваному алгоритмі; вилучення з первісних даних таких фіктивних комірок; суміщення комірок, коли заздалегідь відомо, що в будь-якому варіанті первісних даних (результатів) стани цих комірок тотожні один одному; включення в первісні дані чи результати комірок, стани яких при будь-якому варіанті тотожні станам тих комірок, що вже є. В МЛС *еквівалентні перетворювання* входять до поняття А. р. п. Розширення поняття еквівалентності алгоритмів, пов'язане зі згаданим вище розумінням еквівалентності первісних даних (і результатів), а також з тим, що розглядають не сфери застосовності, а вужчі ділянки задавання алгоритмів, значно розширює можливості рівносильного перетворювання алгоритмів порівняно з можливостями еквівалентних перетворювань їх.

Алгоритми, задані МЛС, звичайно піддають А. р. п., щоб зекономити час на виконання їх (а, отже, й машинний час) або зекономити ємність *запам'ятовувальних пристроїв*. У першому випадку при А. р. п. зменшується кількість операцій, необхідних для одержання шуканого результату, а в другому — зменшується заг. кількість комірок, використовуваних під час виконання алгоритму (іноді замість цього мінімізують заг. кількість комірок, тобто їхніх назв, які фігурують у запису алгоритму).

Алгоритм МЛС задають у вигляді скінченного рядка, утвореного з операторів, які описують дії, і знаків переходу, які дають змогу під час виконання алгоритму визначити порядок виконування операторів. У разі, коли застосовують МЛС, А. р. п. поділяють на такі групи: 1) рівносильні перетворювання окремих операторів; 2) А. р. п., які не спричинюють внутр. змін операторів (перетворювання логічних схем алгоритмів); 3) А. р. п., пов'язані з перетворюваннями логічних операторів; 4) А. р. п., пов'язані з перетворюваннями нелогічних операторів; 5) переставляння операторів; 6) А. р. п., які враховують підпорядкованість операторів певним умовам (оператор залежить від якоїсь умови, якщо його можна виконати лише тоді, коли твердження, яке міститься в умові, є істинним). Описана система А. р. п. є повною для прямих чи спрямлюваних алгоритмів у тому значенні, що, коли два такі алгоритми еквівалентні в розширеному розумінні, то за допомогою скінченної кількості А. р. п. будь-який з них можна перетворити на інший. При цьому алгоритми, задані МЛС, наз. спрямленими, коли за допомогою деякої кількості перетворень їх можна звести до прямих, тобто до алгоритмів, при виконанні яких після роботи якогось оператора не може працювати жоден оператор, що міститься в рядку ліворуч від нього. Питання про повноту системи А. р. п. будь-яких алгоритмів, заданих МЛС, не розв'язано. Проблема визначення рівносильності (еквівалентності в розширеному розумінні) алгоритмів, заданих МЛС, еквівалентна широко відомій проблемі тотожності й, отже, належить до *нерозв'язних алгоритмічних проблем*.

В адресній мові програмування, як і в МЛС, первісними даними (і результатами) є стани пам'яті (*коди*, на множині яких задано штрих-функцію і які становлять собою назви комірок МЛС, а значення штрих-функції відповідають станам комірок). Відмінність адресної мови від МЛС (крім деяких синтаксичних відмінностей) полягає в тому, що за стани комірок у ній можуть правити, крім об'єктів (величин), ще й назви комірок. Поняття еквівалентності первісних даних (результатів) для алгоритмів, заданих адресною мовою й МЛС, є спільним. Але *оператори елементарні* (з яких утворюються інші оператори) МЛС є окремими випадками елементарних операторів адресної мови (в МЛС елементарний оператор задають у вигляді запису $x_i := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, еквівалентного записові адресною мовою $f('x_1 'x_2, \dots, 'x_n) \Rightarrow x_i$, який є окремим випадком запису елементарного оператора $\varphi \Rightarrow F$). Це приводить до того, що систему А. р. п., розроблену для алгоритмів, заданих МЛС, не можна безпосередньо переносити на алгоритми адресної мови, отже, розробка

А. р. п. для адресної мови є самостійною проблемою.

Сфера застосування А. р. п. не обмежується програмуванням. Вони є цінним апаратом під час практичної алгоритмізації, напр., творчих процесів (див. *Алгоритмізація творчих процесів*). У деяких випадках у результаті аналізу реальних процесів (напр., процесів керування) їх вдається описати у вигляді складних алгоритмів, виконати які практично неможливо. Лише після А. р. п. вдається одержати з них алгоритми, придатні для використання. На практиці доводиться мати справу з напрямленими А. р. п., мета яких — оптимізувати алгоритм за певним заданим критерієм. Розробка алгоритмів напрямленого застосування А. р. п. становить собою групу дуже важливих матем. проблем кібернетики. Результати, одержані в цій галузі, поки що незначні (напр., до них належить напрямлене застосування А. р. п. під час пошуку інформації, яке виконує сама ЕОМ, та деякі інші). Проте й там, де алгоритмів напрямлених перетворень ще не знайдено, напрямлені А. р. п. можна виконувати, щоправда, не самими ЕОМ в автомат. режимі, а з участю людей. Пошук необхідної послідовності А. р. п. можна здійснювати евристичними методами (вдаючись до інтуїції, здогадів та спроб) за допомогою ЕОМ, яка за спец. програмами й наказами, які в неї вводить математик, повинна виконувати трудомісткі перетворювання введеного в її пам'ять алгоритму і видавати інформацію про одержані результати.

Літ.: Поршнева В. Н. Об эквивалентных преобразованиях адресных комплексов. В кн.: Цифровая вычислительная техника и программирование, в.2. М., 1967; Криницкий Н. А. Равносильные преобразования алгоритмов и программирование. М., 1970.

М. А. Криницький.

АЛГОРИТМІВ СКЛАДНІСТЬ — величина, що характеризує складність (довжину) описування даного алгоритму (на відміну від сигналізуючої функції, що характеризує складність процесу обчислювання, яке здійснюється за даним алгоритмом). Залежно від точної концепції *алгоритму* це поняття складності можна різними способами уточнити. Єдиного, усталеного уточнення ще немає. Розглянемо випадки, які трапляються найчастіше.

Під складністю *нормального алгорифму* розуміють здебільшого довжину його зображення, тобто довжину запису всіх його формул підставок в один рядок (між ф-лами ставиться спец. роздільна буква). Під складністю *Тьюрінга машини* розуміють здебільшого кількість її внутр. станів. Іноді для характеристики складності машини Тьюрінга використовують кількість її команд.

Запропоновано й аксіоматичне визначення А. с. Розглянемо це визначення стосовно машин Тьюрінга. Нехай M_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) — допустима геделівська нумерація машин Тьюрінга. Цю нумерацію можна уявити собі як таку, при якій за номером машини можна ефективно відновити машину (тобто її *програму*), а за машиною (тобто за програмою) — її номер. Загальнорекурсивну ф-цію s наз. мірою складності машин тоді і тільки тоді, коли для будь-якого y існує не більш як скінченна кількість машин зі складністю y і коли існує ефективна процедура, яка для будь-якого y дає змогу визначити всі ті машини, що мають складність y.

Нехай s — довільна міра складності машини Тьюрінга. Легко довести, напр., таке твердження. Якщо U — довільний ефективно перелічний нескінченний клас машин Тьюрінга, то існує машина T, що належить U, і існує машина T' (не обов'язково з U) така, що T' і T обчислюють одну й ту саму функцію і складність T' менша, як складність T. Сформулюємо ще деякі результати. Нехай під складністю нормальних алгоритмів і машин Тьюрінга розуміють відповідно довжину зображення і кількість внутр. станів. Тоді будь-яку ф-цію *алгебри логіки* від N змінних можна реалізувати і нормальним алгоритмом в m-буквеному алфавіті зі складністю $\sim \frac{2^N}{\log_2 m}$ і машиною Тьюрінга з m-буквеним зовн. алфавітом зі складністю $\sim \frac{2^N}{N(m-1)}$

Вивчаються складності алгоритмів, що розв'язують скінченні куски *нерозв'язних алгоритмічних проблем*. Рад. математик А. А. Марков розглянув таку задачу: для будь-якої ф-ції алгебри логіки від N змінних побудувати зображення нормального алгоритму в алфавіті $\Phi = \{0, 1, a, b, c\}$, що обчислює дану ф-цію і має мінім. складність. Показано, що складність нормального алгоритму, який розв'язує цю задачу, має порядок 2^N. Вивчено питання про А. с., які розв'язують для перших n натуральних чисел проблему входження в рекурсивно перелічну множину (складність n-кусків рекурсивно перелічних множин). Для нормальних алгоритмів ця складність за порядком не перевищує $\log_2 n$ і в заг. випадку цю оцінку не можна знизити. Водночас можна легко показати, що існують множини, які задаються за допомогою досить простих логіч. засобів і які мають складність n-кусків порядку n. Показано також, що при загальнорекурсивному обмеженні часу роботи А. с. n-кусків рекурсивно перелічних множин може зростати експоненціально й за порядком досягти величини n.

Як видно з наведених прикладів, поняття А. с. використовують в основному, уточнюючи питання про те, якою є мінім. складність алгоритму, що описує той чи інший скінченний об'єкт. Цю мінім. складність часто наз. складністю даного скінченного об'єкта. Рад. математик А. М. Колмогоров запропонував інший підхід для визначення поняття складності скінченного об'єкта, що не залежить від обраної концепції алгоритму. За ідеєю Колмогорова, під складністю об'єкта x слід розуміти мінім. довжину «програми» p, яка дає змогу відновити x. Точне визначення

цього поняття залежить від того, який клас об'єктів розглядають і що розуміють під «методом програмування». Розглянемо, напр., клас N двійкових слів. Довжину слова p позначимо через $l(p)$. Нехай $\varphi(p)$ — частково рекурсивна ф-ція з N в N. Тоді складність слова x за φ є

$$K_\varphi(x) = \begin{cases} \min l(p), \text{ де } \min \text{ беруть по всіх } p \\ \text{таких, що } \varphi(p) = x \\ \infty, \text{ якщо не існує } p \text{ такого, що} \\ \varphi(p) = x. \end{cases}$$

Таке визначення складності залежить від виду φ. Проте є така теорема: існує частково рекурсивна функція $F(p)$ (її наз. оптимальною) така, що для будь-якої іншої частково рекурсивної функції $\varphi(p)$ справджується нерівність $K_F(x) \leqslant K_\varphi(x) + C_\varphi$, де C_φ не залежить від x. Оптим. ф-цію F раз і назавжди фіксують, і під складністю $K(x)$ слова x розуміють величину $K_F(x)$. Аналогічно можна визначити й складність ін. об'єктів, напр., складність частково рекурсивних функцій. Виявляється, що між введеною вище складністю $K(x)$, складністю $M_m(x)$ цих самих об'єктів і складністю $T_M(x)$ існує такий взаємозв'язок:

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log_2 m}; \quad T_M(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1)\log_2 K(x)},$$

де $K(x)$ — складність за Колмогоровим, $M_m(x)$ — складність, виражена через довжину зображення нормального алгоритму в m-буквеному алфавіті, $T_m(x)$ — складність, що виражена кількістю внутр. станів машини Тьюрінга з m-буквеним зовн. алфавітом.

Використовуючи запроваджене вище поняття складності, А. М. Колмогоров розвинув алгоритм. підхід до визначення поняття «кількість інформації». Потім цей самий підхід застосували й до визначення випадкової послідовності. Ідея цього визначення полягає в тому, що нескінченну послідовність вважають випадковою, якщо вона має нескінченно багато початкових кусків, у певному розумінні досить складних. Такі послідовності мають конструктивно описувані властивості, які, за *імовірностей теорією*, мають місце з імовірністю одиниці (напр., вони задовольняють закон великих чисел, закон повторного логарифма і т. д.).

Літ.. Кузьмин В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13; Марков А. А. О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1967, т. 31, № 1; Звонкин А. К., Левин Л. А. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 6; Блюм М. Об объеме машин. В кн.: Проблемы математической логики. М., 1970. *Я. М. Барздінь.*

АЛГОРИТМІВ СХЕМА — формальний опис основної ідеї побудови деяких сукупностей алгоритмів. В А. с. деякі елементи опису (умовні позначення) можна розглядати як змінні, що змінюються на множині слів в *алгоритмічній мові*. Якщо належним чином замінити ці «змінні» об'єктами з областей їхніх значень, то одержимо *алгоритм*, записаний зазначеною мовою. Отже, А. с. описує множину алгоритмів, кожен з яких одержують із даної А. с., належним чином вибравши змінні, що є значеннями елементів схеми. Прикладами А. с. є *операторні схеми* алгоритмів, *алгоритмів графові схеми*, логічні схеми алгоритмів. А. с. корисні при вивченні властивостей класів алгоритмів. Для практичних задач реалізації алгоритмів корисно здійснювати рівнозначні перетворювання їх. На кожному рівні абстракції опису алгоритмів можна побудувати системи рівнозначних перетворень, які дають змогу розв'язувати конкретні задачі щодо поліпшення їхньої якості в певному розумінні.

Визначаючи А. с., здебільшого виходять з деякого набору осн. символів, за допомогою яких будують елементарні вирази, що їх наз. **термами**. А. с. формально визначають як побудовані з термів вирази, які задовольняють певні умови. Запроваджують, як правило, процедуру виконання А. с., яка для кожної послідовності наборів значень логічних змінних однозначно визначає й значення схеми. Вводять і різні визначення рівнозначності (чи еквівалентності) А. с., якими описують відношення рівнозначності (відповідно еквівалентності) алгоритмів. А саме: якщо А. с. Σ_1 і Σ_2 рівнозначні, а $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ — алгоритми, описувані цими схемами й добуті з них при належній заміні термів операторами й мітками (однаково для обох схем), то $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ — рівнозначні алгоритми. Коли розглядати логічні А. с., граф-схеми алгоритмів і операторні схеми, виразно виступає лише логічна структура схеми. Порядок роботи операторів розглядають залежно від значень логічних умов, які входять до А. с. Властивості алгоритму, які визначаються природою операторів (зокрема, операторів умовного переходу), на цьому рівні абстракції не можна вивчити. Визнаючи А. с., частково враховують внутр. зміст операторів і логічних умов. Наступний (нижчий) рівень абстракції при вивченні алгоритмів передбачає, що структура операторів частково або цілком відома.

Літ. див. до ст. *Операторна схема.*

В. М. Поршнєва.

АЛГОРИТМІВ ТЕОРІЯ — розділ математики, в якому вивчаються теоретичні можливості ефективних процедур обчислень (алгоритмів) та їхнє застосування. Осн. поняття теорії — поняття алгоритму — як інтуїтивне поняття існує в математиці досить давно. Під *алгоритмом* розуміють точний припис для здійснення певної послідовності елементарних дій над початковими даними будь-якої задачі з певного класу (загалом нескінченного) однотипних задач, після виконання якої одержують розв'язок задачі. Прикладом алгоритму може бути правило знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел (алгоритм Евкліда). Формула для знаходження коренів квадратного рівняння також є своєрідною формою запису алгоритму. Вона вказує, які арифм.

дії і в якій послідовності треба виконати над коеф. квадратного рівняння, щоб одержати корені цього рівняння. А. т. є важливим розділом *логіки математичної*, який бурхливо розвивається. Інтерес до А. т. пояснюється, з одного боку, внутр. запитами самої математики (питання основ математики, конструктивний та інтуїціоністський напрями в математиці, алгоритм. проблеми алгебри тощо), а з другого — бурхливим розвитком електронної обчислювальної техніки й теор. кібернетики. Практичні й теор. питання реалізації алгоритмів на сучасних обчисл. машинах становлять зміст такого важливого розділу теор. кібернетики, як програмування.

Точні матем. поняття, які так чи інакше формалізували інтуїтивне поняття алгоритму, запропоновано лише в серед. 30-х років 20 ст. Те, що було запропоновано кілька різних уточнень, можна пояснити якоюсь мірою різноманітністю тих (конструктивних) об'єктів, для яких поняття ефективного (алгоритмічного) перетворення має сенс. Такими об'єктами можуть бути натуральні числа, скінченні послідовності натуральних чисел (кортежі), слова в певному скінченному алфавіті, матриці, скінченні графи і т. ін.

Історично перші з запропонованих понять можна поділити на два види.

1. Описується певний клас арифм. ф-цій (загалом кажучи, часткових), тобто ф-цій від скінченного числа натуральних аргументів з натуральними значеннями. Для цих ф-цій існують ефективні процедури знаходження значення ф-ції (якщо воно існує) за заданими значеннями аргументів. Функції з цього класу наз. частково рекурсивними (ч. р. ф.); а в разі, коли ч. р. ф. є всюди визначеними, їх наз. загальнорекурсивними (з. р. ф.). Клас ч. р. ф. ввели Ж. Ербран, К. Гедель і С. Кліні, виходячи з досліджень формалізованої арифметики за допомогою підходящих функціональних обчислень. Незалежно від них означення цього класу ф-цій дав А. Черч за допомогою т. з. числення λ-конверсій. Клас усіх ч. р. ф. і пропонується як означення для класу всіх арифметичних алгоритмічно обчислених ф-цій (див. *Черча теза*).

2. Описуються точні матем. поняття машини й обчисленності на машині. Такі поняття машини запропонували незалежно один від одного Е. Пост і А. Тьюрінг. Ці «теоретичні обчислювальні машини» здебільшого наз. *Тьюрінга машинами*. Виявилося, що клас арифм. ф-цій, для яких існує машина Тьюрінга, що обчислює за значеннями аргументів значення ф-цій (якщо воно існує), збігається з класом усіх ч. р. ф., і навпаки, кожну ч. р. ф. можна обчислити на підходящій машині Тьюрінга. В заг. рисах різницю між розглянутими вище видами означень можна сформулювати так: у першому дається точний опис класу обчисленних арифметичних ф-цій, у другому — точний опис певного класу алгоритм. перетворень (обчислень на машині Тьюрінга). Згодом було запропоновано й інші поняття, що уточнюють поняття алгоритму,— канонічні числення Е. Поста, *нормальні алгорифми* А. А. Маркова, алгоритми А. М. Колмогорова тощо. Для всіх цих уточнень виявилося, що обчисленними арифм. функціями є ч. р. ф. Отже, поняття ефективно обчисленної арифм. ф-ції можна вважати цілком визначеним. Проте ще немає найзагальнішого означення поняття алгоритм. обчисленності. Характерною особливістю майже всіх уточнень поняття алгоритму є подання відповідних понять у вигляді тих чи інших числень. Тому А. т. можна вважати розділом матем. логіки, де поняття числення — одне з основних.

Дослідження з А. т., як і наведені вище означення, можна, природно, поділити на два напрями.

I. Дослідження, в яких клас усіх ч. р. ф. є або осн. об'єктом, або осн. знаряддям дослідження. Розглянемо докладніше деякі розділи цього напряму. 1) Дослідження класу всіх ч. р. ф. (з. р. ф.): а) вивчення підкласів цього класу — примітивно рекурсивних ф-цій, елементарних функцій та ін.; б) класифікація ч. р. ф. за допомогою ієрархій; в) алгебр. вивчення класу ч. р. ф. та з. р. ф. (див. *Рекурсивні функції*). 2) Введення за допомогою ч. р. ф. нових понять і вивчення їх: а) означення (в термінах ч. р. ф), вивчення й класифікація рекурсивних та рекурсивно перелічних множин. Поняття рекурсивної та рекурсивно перелічної множин є одними з основних у сучасній А. т. Перше з них уточнює інтуїтивне поняття розв'язної множини (тобто множини, для якої існує алгоритм, що дає змогу за будь-яким елементом визначати, чи належить він до цієї множини, чи ні); а друге — поняття множини, для якої існує алгоритм послідовного перелічування всіх її елементів; б) порівнювання і класифікація алгоритм. природи довільних підмножин множини натуральних чисел. Основою для такого порівнювання є поняття *звідності* (m-звідність, tt-звідність, тьюрінгова звідність тощо) і поняття ступенів звідності. Поняття звідності та ряд інших понять дають змогу своєрідно класифікувати, розміщувати в ієрархії великий клас підмножин множини натуральних чисел. 3) Узагальнення й розширення понять. При визначенні деяких звідностей, напр., тьюрінгової звідності, виникають відносні поняття, такі, як функція, частково рекурсивна щодо множини A, множина, рекурсивно перелічна щодо A, та багато інших. Поняття звідності визначають уже не лише для множин, а й для класів множин (та функцій). Таким поняттям є, напр., поняття масової проблеми за Ю. Т. Медведєвим. Для введення поняття звідності масових проблем використовують поняття ефективного оператора. Зроблено спроби уточнити поняття обчисленності й для неконструктивних об'єктів, напр., визначити поняття обчисленого функціоналу скінченного типу, визначеного на нелічбовій множині функціоналів нижчого типу. Мож-

ливість використання результатів теорії рекурсивних ф-цій для довільних, не більш як лічбових, множин реалізується *нумерацій теорією.* В теорії нумерацій природно уточнюються багато алгоритм. проблем з алгебри та ін. розділів математики.

II. Дослідження, в яких основна увага приділяється механізмові обчислення. Є ряд важливих розділів А. т. цього напряму досліджень. 1) Теорія скінченних автоматів. *Автомати скінченні* — найбільш вивчений клас обчисл. пристроїв. Цю теорію застосовують, напр., проектуючи електронні обчисл. машини (ЕОМ). 2) Машини Тьюрінга. Ведуть дослідження можливостей таких машин для організації обчислювань з тими чи іншими обмеженнями, порівнюють роботу машини з різною кількістю стрічок, вивчають можливості обчислення за реальний час тощо. 3) *Автомати зростаючі.* Це поняття виникло в основному у зв'язку зі спробою дати найзагальніше визначення алгоритм. обчислення, а також у зв'язку з дослідженнями Дж. фон Неймана над самовідтворюваними машинами. 4) Вивчають багато спец. видів інших машин, пов'язаних часто з узагальненням поняття обчисленності, напр., машини з «оракулом» тощо.

Слід особливо відзначити проблему пошуку поняття *алгоритмів складності,* тобто поняття, яке інтуїтивно досить добре сприймається. Запропоновано кілька таких понять. 1) Складність алгоритму оцінюється за тими чи іншими параметрами роботи алгоритму (див. *Сигналізуюча функція*). Цей підхід пов'язаний головним чином з другим напрямом досліджень в А. т., тобто ці поняття визначають у термінах роботи конкретних обчисл. пристроїв (напр., машин Тьюрінга). 2) Складність алгоритму визначається через складність його програми (А. М. Колмогоров, А. А. Марков). Тут використовують поняття складності скінченних слів, яке запровадив А. М. Колмогоров. 3) Поняття складності запроваджують не для окремих алгоритмів, а для класу алгоритмів. Таке поняття складності класів можна ввести за допомогою понять теорії нумерацій.

Результати А. т. широко застосовують — від використання результатів теорії скінченних автоматів у практиці проектування ЕОМ до використання рекурсивних ф-цій у конструктивній математиці. Є й інші важливі застосування А. т. Першими результатами А. т., що мають і досі велике принципове значення для всієї математики, були *Геделя теореми про неповноту* формалізованої арифметики і теорема Черча про алгоритм. нерозв'язність (про неможливість алгоритму) проблеми розв'язування вузького числення предикатів. *Числення предикатів вузьке* є осн. численням сучасної матем. логіки. Проблема розв'язування його полягає в тому, щоб побудувати алгоритм, який дає змогу за будь-якою формулою вузького числення предикатів ефективно визначати, чи є ця формула довідною. Аналогічні проблеми розв'язування виникають і для конкретних формалізованих теорій (напр., теорії груп, кілець, арифметики тощо). Розділ матем. логіки, який вивчає такі проблеми розв'язування, має назву *елементарних теорій.* Алгоритм. проблеми виникають і в алгебрі (напр., проблема тотожності слів для півгруп і груп). Принципові результати щодо цього одержали рад. математики (нерозв'язність проблеми тотожності слів для півгруп довів А. А. Марков, а нерозв'язність проблеми тотожності для груп — П. С. Новиков).

Літ.: Марков А. А. Теория алгорифмов. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1954, т. 42 [бібліогр. с. 373—374]; Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. М., 1960 [бібліогр. с. 476—481]; Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 [бібліогр. с. 375—381]; Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Davis M. Computability and unsolvability. New York — Toronto — London, 1958; Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 587—599]. *Ю. Л. Єршов.*

АЛГОРИТМІЗА́ЦІЯ ВИРОБНИ́ЧИХ ПРОЦЕ́СІВ — формулювання математичного опису *(моделі математичної)* виробничого процесу. Джерелом початкової інформації для А. в. п. є теоретичні й експериментальні дані та евристичні, неформальні відомості про досліджуваний процес. Цю інформацію можна одержувати заздалегідь (апріорні дані) і безпосередньо в процесі досліджування (апостеріорні дані). Як правило, для складних пром. систем характерні великі обсяги й апріорних, і апостеріорних даних і значна частина евристичної інформації. Тому при А. в. п. прагнуть максимально використати засоби *обчислювальної техніки* для обробки великих масивів експериментальної й теор. інформації. Проте в загальному процесі вивчання складних виробництв істотну роль продовжує відігравати людина — спеціаліст із цієї галузі А. в. п., функції котрої поки що важко передати обчисл. машині. З цих самих причин А. в. п. часто проходить за індивідуальною схемою, найраціональнішою для цього складного об'єкта і конкретних умов цього дослідження. Найпоширеніша схема А. в. п. складається з таких типових етапів: 1) попереднього аналізу завдання алгоритмізації та обсягу дослідження; 2) структурного описування досліджуваного виробничого процесу; 3) теор. аналізу рівнянь зв'язку між параметрами процесу; 4) експериментального визначення статичних і динамічних характеристик цього процесу; 5) моделювання процесу й перевірки адекватності (відповідності) матем. опису реальному виробництву; 6) аналізу одержаної матем. моделі й розробки рекомендацій щодо поліпшення виробничого процесу; 7) формування оптимальних алгоритмів на основі рекомендацій попереднього етапу; 8) перевірки й коректування алгоритмічного забезпечення системи керування виробничим процесом в умовах експлуатації системи.

На стадії попереднього аналізу з'ясовують мету й основні етапи дослідження, оцінюють сподівану економіч. ефективність і з'ясову-

ють доцільність прийнятої схеми вивчання об'єкта й результатів його алгоритм. аналізу та ін. загальні питання. При цьому в умовах значної неповноти інформації дуже важливо використати наявні евристичні відомості й досвід дослідників. Тут ефективно застосовують методи, пов'язані з системним підходом до вивчання складних систем, з теорією їхньої організації. Зокрема, використовують метод послідовної формалізації описів виробничого процесу, при якому в міру нагромадження інформації про процес здійснюється перехід до нового рівня формалізації й деталізації матем. моделі. Етап структурного описування й аналізу пов'язаний із застосуванням методів сіткових зображень (блок-схеми, *графи*) для відображення зв'язків, що існують між параметрами й елементами виробничого процесу. На 3-му — 4-му етапах застосовують методи ідентифікації динамічних і статичних характеристик, пов'язані, зокрема, з теорією *статистичних оцінок* та з регресійним і факторним аналізом. При цьому використовують нагромаджені дані з описування фізико-тех. закономірностей у цій галузі виробничих процесів. В аналізі й оптимізації моделей застосовують індивідуальні прийоми розв'язування, залежно від конкретного завдання, й методи досліджування операцій, зокрема теорію статистичних розв'язків, *програмування лінійне* й *програмування динамічне*. Не завжди ці етапи є завершальними: багато виробничих процесів не дають найбільший ефект одразу після одноразової оптимізації режиму або реорганізації виробництва, яка ліквідує вузькі місця. Останні етапи (7—8) виконують, якщо обгрунтовано доцільність застосування керуючої та обчисл. техніки для автоматизації досліджуваного виробничого процесу.

Літ.: Алгоритмизация производственных процессов [в. 1—15]. К., 1963—69; Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. М., 1965 [бібліогр. с. 355—357]; Иванов В. В., Кулик В. Т. Состояние и развитие работ по алгоритмизации производственных процессов. «Механизация и автоматизация управления», 1967, № 6; Кулик В. Т. Алгоритмизация объектов управления. Справочник. К., 1968 [бібліогр. с. 335—343].

В. Т. Кулик.

АЛГОРИТМІЗА́ЦІЯ ТВО́РЧИХ ПРОЦЕ́СІВ — складання алгоритмів і програм для реалізації на електронних обчислювальних машинах процесів, що їх у психології мислення відносять до продуктивних (творчих). У вужчому розумінні А. т. п.— це моделювання на ЦОМ процесів, що імітують створення літ., музичних, художніх та ін. творів, що належать до сфери мистецтва. В широкому розумінні до А. т. п. відносять моделювання доцільного поводження, розв'язування задач *розпізнавання образів*, розв'язування задач щодо прийняття рішень тощо. Основою А. т. п. є *програмування евристичне*, яке полягає в побудові *алгоритмів* і *програм* на основі аналізу діяльності людини під час розв'язування аналогічних задач. Цей аналіз має зовн. характер і не зачіпає суті процесів, які відбуваються в мозку людини під час розв'язування задач. Основою творчого мислення людини є наявність у мозку моделі проблемної ситуації, над якою вона може провадити потрібні операції (узагальнення, абстрагування, індуктивні побудови, міркування за аналогією тощо). В сучасних ЕОМ поки що немає засобів відображення інформації, які забезпечували б побудову в пам'яті машини моделі проблемної ситуації чи моделі зовн. світу. Тому сама машина може виступати під час імітації творчих актів лише як виконавець того алгоритму, що його закладає в неї програміст. Проте допомога машини може виявитися корисною, коли необхідно виконати перебирання, що дає змогу знаходити різні варіанти розв'язування творчого завдання. Напр., заклавши в машину правила гармонії Палестріни, за їхньою допомогою можна одержувати різні муз. твори, генеруючи послідовність нот за допомогою *давача випадкових чисел* і відбираючи з цієї випадкової послідовності лише ті сполуки, що задовольняють правила побудування муз. фрази. Аналогічно цьому, заклавши в пам'ять машини певні ритмічні правила й правила римування, можна одержувати на машині різні віршовані твори, генеруючи слова за допомогою того самого давача випадкових чисел (звичайно, при цьому не можна сподіватися на те, щоб одержати семантично значущий вірш). Щоб А. т. п. була ефективною, треба ретельно вивчити алгоритмізовуваний процес і виявити всі осн. прийоми, застосовуючи які можна досягти мети. Якщо вдається виявити всю сукупність цих прийомів, то процес повністю формалізується й перестає бути продуктивним. Прикладом такого перетворення творчого процесу на репродуктивний, машинний процес, може бути програма Ван Хао для доведення теорем *числення висловлювань*. Цілковита формалізація привела до того, що ЦОМ у процесі своєї роботи може довести всі речення, що їх мислять у численні висловлювань з вибраною системою аксіом і правил виведення. Іншим прикладом такого типу може бути програма Стретчі для гри в шашки. Відповідно до цієї програми машина може грати в шашки без помилок, бо всі варіанти розвитку партій у ній уже закладено. Але шлях цілковитої формалізації задачі, на жаль, не завжди можливий, а часто й шкідливий. Коли маємо багато різноманітних ситуацій, що створюються в процесі розв'язування творчого завдання, і можливостей продовжувати процес пошуку результату багато, критерії оцінки якості одержаного розв'язку нечіткі, формалізація може не дати ніякої користі, і тоді ефективнішою буде наявність якоїсь невизначеності й недетермінованості при розв'язуванні завдання. При А. т. п. можуть з'являтися ділянки, які поки що не піддаються алгоритмізації. Тому сучасні програми, що імітують творчий процес, як правило, реалізуються в *діалога режимі* в людино-машинних системах переробки інформації. Див. також *Взаємодія людини з обчислювальною машиною.*

Літ.. П у ш к и н В. Н. Эвристика — наука о творческом мышлении. М., 1957; Г у т ч и н И. Б. Кибернетические модели творчества. М., 1969 [бібліогр. с. 61—62]; З а р и п о в Р. Х. Кибернетика и музыка. М., 1971 [бібліогр. с. 226—231]; Л е д л и Р. С. Программирование и использование цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 628—630]. *Д. О. Поспєлов.*

АЛГОРИТМІ́ЧНА МО́ВА — формальна мова, призначена для записування *алгоритмів*. Використання А. м. грунтується на можливості формального введення правил конструювання алгоритмів. При формальному описуванні алгоритмів істотна роль належить виборові засобів записування (кодування) перетворюваної інформації та задання алгоритм. інструкцій (дій) — елементарних кроків алгоритмів, з яких їх конструюють. А. м. визначають заданням алфавіту (чи словника первісних символів), синтаксису (граматики) й семантики. Певний (непустий) алфавіт А. м. використовують для кодування початкової (перетворюваної) інформації. Відомо, що навіть алфавіту з двох букв достатньо для кодування будь-якої інформації. Проте зазначений алфавіт здебільшого розширюють для зручнішого й економнішого кодування. Правила перетворювання інформації в різних алгоритмах дуже різноманітні й різні за змістом. Проте всі конкретні алгоритми можна скласти з невеликої кількості елементарних інструкцій. Набори інструкцій, з яких можна побудувати будь-які мислимі алгоритми, наз. а л г о р и т м і ч н о п о в н и м и. А. м. наз. універсальною, якщо в ній можна описати алгоритмічно повний набір інструкцій (а, отже, й будь-який алгоритм). Введення універсальної А. м. рівносильне заданню алгоритм. системи, тобто заг. способу записування алгоритмів.

Специфіка А. м. виражається гол. чин. у її семантиці й полягає в тому, що речення мови повинні бути алгоритмами, тобто послідовностями інструкцій, за допомогою яких перетворюють інформацію (реалізують алфавітні відображення). Кожна А. м. повинна мати засоби для задавання *операторів*, які перетворюють інформацію (дані), і операторів переходу (розпізнавачів), які визначають порядок виконання цих операторів. Оператори, в свою чергу, можуть позначати послідовності ін. значно елементарніших операцій. Напр., оператор множення багатозначних чисел позначає послідовність деяких дій над однозначними числами.

Мови, за допомогою яких будують класичні алгоритм. системи (*нормальні алгорифми* Маркова, *рекурсивні функції*, *Тьюрінга машини*, *Поста машини* та ін.), незважаючи на їхню універсальність, виявилися практично незручними для описування алгоритмів розв'язування задач при реалізації їх на ЦОМ. Причиною цього є те, що всі ці системи орієнтовано на розгляд фундаментальних теоретичних питань *алгоритмів теорії* й записування кожного більш-менш складного алгоритму в будь-якій з цих систем становить самостійну складну задачу. В зв'язку з цим розв'язування практичних задач за допомогою ЦОМ привело до появи значної кількості праць, присвячених створенню т. з. *мов програмування*, для яких А. м. становлять теор. основу.

К. Л. Ющенко.

АЛГОРИТМІ́ЧНА СТРУКТУ́РА ЦОМ — система функціональних засобів та принципів, на яких основується процес *переробки інформації в ЦОМ* на рівнях операцій над словами й над більшими одиницями інформації. *Алгоритми*, що належать до компонент алгоритмічної структури цифрової обчислювальної машини, на відміну від вводжуваних алгоритмів (програм), виконанням яких вони керують, фіксуються в машині структурним способом, тобто входять до складу системи внутр. матем. забезпечення і завжди доступні для безпосереднього використання (див. *Математичне забезпечення ЦОМ внутрішнє*). Ці алгоритми поділяють на стандартні й службові.

А. с. ЦОМ можна описати з різним ступенем деталізації. Найдокладнішому описові відповідає схема машини, складена з блоків, які виконують операції над окремими словами, тобто блоків типу *регістрів*, *лічильників*, *суматорів*, *дешифраторів* і керуючих автоматів у вигляді простих композицій цих блоків. Найменш деталізованим рівнем, пов'язаним з системою організації обчисл. процесу в ЦОМ, є т. з. а р х і т е к т у р а машини. Ця архітектура залежить від осн. принципів переробляння інформації на рівні операцій над *масивами* й завданнями загалом (типу «ввести масив», «розв'язати задачу» тощо). До структурних одиниць архітектури (щодо машини високого класу) належать: центральний *процесор*, призначений для заданої обробки інформації, система *запам'ятовувальних пристроїв*, системи пристроїв введення й виведення, у т. ч. й виносні пульти (безпосередньо зв'язані з машиною) та допоміжні процесори (процесор) для керування обміном інформації, попередньої обробки вводжуваної інформації та належного оформлення результатів, що виводяться.

Допоміжні процесори іноді конструктивно входять до складу центр. процесора або їх зовсім немає, тобто зазначені функції центр. процесор виконує під час переривання процесу заданої обробки інформації (а це означає, що клас машини знижується). З другого боку, до складу центр. процесора може входити ряд пристроїв переробляння інформації, що працюють одночасно,— процесорів, можливо з різним функціональним призначенням (це означає перехід машини у відповідний клас *обчислювальної системи*).

Осн. поняття, що ними характеризують А. с. ЦОМ, поділяють на три групи: 1) подання даних; 2) подання програм; 3) організація обчисл. процесу. Перші дві групи становлять програмний рівень в н у т р і ш н ь о ї м о в и машини, якою виражено виконувані нею завдання, а 3-я група визначає, яким чином у машині буде реалізовано завдання, що їх формулює користувач.

До 1-ї групи належать такі характеристики: структура *машинних слів* (числових або символьних), *система числення*, спосіб обліку порядку; до 2-ї групи — система операцій, структура командних слів, структура програмного рівня внутр. мови, спосіб подавання робочої (інтерпретованої та виконуваної) *програми*; 3-я група об'єднує такі характеристики: спосіб трансляції вихідної програми, методику виконання маш. операцій, систему структурної інтерпретації (у т. ч. й керування операціями), структуру *пам'яті ЦОМ* і системи розміщення, контролю, введення та виведення інформації, систему сполучення процесів обробки інформації та систему обслуговування користувачів (взаємодія машини з операторами).

Є ряд осн. характеристик А. с. ЦОМ: машинні слова, система числення, система операцій та ін. Машинні слова за структурою поділяють на два класи: не поділені й поділені на символи. Коди символів мають значення букв або недвійкових (в окремому випадку —десяткових) цифр і складаються з двійкових розрядів—у разі, коли структурний алфавіт двійковий. Поділ на символи супроводиться безпосереднім доступом до кожного з них.

Систему числення застосовують здебільшого двох видів — двійкову й двійково-десяткову з тим чи ін. способом кодування десяткових цифр. Другий вид системи числення поєднується з символьною структурою машинних слів. Серед різних способів обліку порядків чітко вирізняються два головні — з «плаваючою» комою (тобто з зазначенням її місця) та з комою, фіксованою перед першим старшим розрядом, причому перший спосіб переважає в універсальних, а другий — у спеціалізованих машинах.

Система операцій охоплює клас арифм. і логіч. операцій або ще й (залежно від ступеня розвиненості) операції над рядками, символами й розрядами, а то й складніші операції типу вбудованих стандартних процедур, які складаються з перелічених основних (базисних) операцій (елементарні ф-ції, операції над кодами з підвищеною розрядністю, над комплексними числами, матрично-векторні операції тощо). Істотна відмінність усіх стандартних процедур — запам'ятовування в процесі виконання їх ряду результатів базисних операцій (як проміжних), а для матрично-векторних операцій ще й багатокомпонентність вихідних даних. Крім осн. операцій щодо обробки інформації, зумовленої методами розв'язування задач, у системі операцій передбачаються й допоміжні операції, що готують для осн. операцій потрібні первісні дані або визначають дальші дії за програмою тощо (напр., обчислення адрес операндів).

Структуру командних слів визначають насамперед кількістю адрес у слові, т. з. адресністю команди, і способом вказування наступної команди. Крім того, розрізняють жорсткі операційно-адресні та гнучкі (що передбачають різні класи командних слів) типи цих структур — останні у внутр. мовах високого рівня (див. *Мова ЦОМ внутрішня)*, близьких до *мов процедурно-орієнтованих*.

Структуру програмного рівня внутр. мови визначають його заг. орієнтація або на користувача, який записує програму процедурно-орієнтованою алгоритм. мовою, або на виконавчу частину машини, для якої потрібний конкретизований запис необхідних дій, передбачених алгоритмом задачі, в послідовності виконання їх. Цей останній тип відповідає традиційним внутр. мовам, перший тип — внутр. мовам, розвинутим у напрямі зближення їх з процедурно-орієнтованими мовами програмування. В цьому разі структура внутр. мови зумовлюється мірою її наближення до алгоритм. мови. Заг. властивості внутр. мови цього типу, якщо вона великою мірою наближена до процедурно-орієнтованих алгоритм. мов, такі: природне записування виразів, залежність змісту операційних знаків від контексту, умовна адресація за допомогою символьного позначення величин, розвинута система машинних операцій, що охоплює широкий клас стандартних процедур. Ця остання властивість притаманна й традиційним внутр. мовам високого рівня.

Способів подання робочої програми є кілька. Головні з них: подання у вигляді маш. *кодів* у пам'яті машини й у вигляді набору з'єднань на спец. комутаційній панелі. Перший — домінуючий, другий трапляється лише в настільних, а також у деяких спеціалізованих машинах. Розрізняють три способи трансляції первісної програми — позаструктурний (тобто суто програмний), програмно-структурний та структурний способи, причому другий і третій характерні для машин з розвинутими внутр. мовами та мікропрограмним керуванням, орієнтованим на застосування *мови програмування*, а перший спосіб — для машин без такої орієнтації. В одній і тій самій машині для різних мов програмування можна використовувати різні способи трансляції.

Методику виконання операцій визначають залежно від вимог до машини щодо швидкодії та апаратурних затрат, враховуючи затрати часу на інтерпретацію програми. Розрізняють три осн. класи методів — послідовні, послідовно-паралельні та паралельні методи. Методи 2-го класу застосовують здебільшого в сучасних універсальних ЦОМ.

Система структурної інтерпретації залежить від програмного рівня внутр. мови машин і, в свою чергу, зумовлює його проміжні мікропрограмні рівні. Відповідно до цього виділяють розвинуті системи структурної інтерпретації, які, крім системи керування операціями, характеризуються й наявністю аналізуючої частини. Є прості й багатоступеневі мікропрограмні системи керування операціями. За способом дії вони бувають централізованого, централізовано-автономного й цілком автономного керування операціями

з синхронним або асинхронним часовими циклами роботи. Для великих і середніх універсальних машин, як правило, характерні здебільшого два останні способи з переважним використанням асинхронних циклів.

Структура пам'яті й система розміщення інформації зумовлені кількістю, призначенням і взаємодією запам'ятовувальних пристроїв у машині, способами звертання до них, способами розподілу пам'яті та адресації величин. Автомат. способи виконання двох останніх ф-цій поділяють на два класи — статичну, тобто заздалегідь плановану реалізацію цих ф-цій, і динамічну реалізацію, здійснювану в ході розв'язування задач. Крім того, розрізняють типи програмної та структурної систем розміщення інформації. Статичні способи, як правило, пов'язані з програмною реалізацією в процесі трансляції, динамічні — зі структурною реалізацією в процесі інтерпретації.

Система контролю (поточного й діагностичного) залежить від способів виявлення пошкоджень і разових відмов у процесі розв'язування задач, від можливості та способів автоматичної корекції помилок, методики діагностування причин неправильної роботи й проведення контролю в процесі профілактики.

Систему введення й виведення інформації визначають способи фіз. перекодування інформації, кількість і призначення ввідних і вивідних пристроїв і структура їхніх зв'язків з запам'ятовувальними пристроями й центр. процесором.

Система сполучення процесів обробки інформації, що властива високопродуктивним машинам, залежить від можливостей і способів суміщення в часі процесів розв'язування задач, введення первісних даних і виведення результатів обчислювань. Все перелічене визначається з урахуванням *пріоритету* й ефективності завантаження пристроїв машини. Найрозвиненіші системи сполучення забезпечують можливість розпаралелювання кожного з зазначених процесів шляхом реалізації відповідних процесорів у вигляді агрегатів автономних пристроїв, що працюють одночасно.

Система обслуговування користувачів визначається обраною «технологією» роботи з машиною. Є два види матем. експлуатації машин — режим роботи машини за повним великим завданням і режим «діалога» користувача з машиною (або режим їхньої спільної роботи як «інтенсивного діалога»). У машинах з мультипрограмною обробкою інформації перший вид матем. експлуатації машин пов'язаний з режимом пакетної обробки задач, а другий — з *режимом розподілу часу* між користувачами. Можна суміщати ці два осн. режими. Організацію зв'язку користувачів з машиною та всього процесу її роботи здійснюють *операційні системи*, різні види яких відповідають призначенню машин і «технології» експлуатації їх. Набір значень розглянутих характеристик визначає А. с. ЦОМ. Доцільно поєднавши типові значення характеристик, можна створити типові А. с. ЦОМ.

Літ.: Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. М., 1959; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [бібліогр. с. 480]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. М., 1968 [бібліогр. с. 583—585]; Глушков В. М. [та ін.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [бібліогр. с. 254—257]. *З. Л. Рабинович.*

АЛГОРИТМІЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЦОМ — один з етапів проектування ЦОМ. Див. *Автоматизація проектування ЦОМ*.

АЛГОРИТМІЧНИЙ СИНТЕЗ ЦОМ — описування формальною мовою функціонування *цифрової обчислювальної машини* та визначення основних характеристик майбутніх машин. А. с. ЦОМ є другим етапом у проектуванні обчислювальних машин. На першому етапі визначають архітектуру машини, набір операцій, які вона реалізує, декомпозицію майбутньої структури машини на великі блоки (пристрої) та швидкості роботи пристроїв і т. п. На етапі А. с. ЦОМ функціонування кожного пристрою і взаємодію між ними описують спеціалізованою *мовою формальною*. Це описування дає відправні дані для наступного етапу синтезу ЦОМ — *блокового синтезу ЦОМ*. Відомо кілька формальних мов, придатних для етапу А. с. ЦОМ: ЛОТІС, ЛОКС, АЛОС та ін. Спільним для всіх цих мов є принципи блоковості. Кожний блок (пристрій, вузол) описують незалежно від інших. Зв'язок між блоками здійснюється за допомогою загальних змінних, зіставлених з наборами значень сигналів на вхідних і вихідних каналах блока. В описі кожного блока є опис внутрішніх змінних блока, операторів, реалізовуваних блоком, і деяких часових співвідношень (останнє є не в усіх мовах). Значення зовнішніх каналів блока відповідає значенням зовнішніх змінних в описі, а значення внутр. змінних блока — значенням, фіксованим на деяких умовних *регістрах*, які є в цьому блоці. Описування на етапі А. с. ЦОМ має бути повним і несуперечливим. Проблема перевірки повноти й несуперечливості формального описування є досить важкою, її ще не розв'язано. Сукупність опису пристроїв формальною мовою та опису зв'язків між ними визначає *алгоритмічну структуру ЦОМ*. Ця структура є відправним об'єктом для моделювання проектованої ЦОМ на іншій реально існуючій ЦОМ при реальному потоці програм з інтерпретацією функціонування системи команд і структури проектованої машини засобами машини, на якій відбувається моделювання структур цифрової обчисл. машини. Виконування етапу А. с. ЦОМ зводиться не тільки до описування й моделювання алгоритмів, а й потребує розробки алгоритмів функціонування пристроїв обчисл. машин і розв'язання таких завдань, як, напр., вибір складу мікро-

операцій, визначення складу регістрів та їхнього призначення, а також розв'язання оптимізаційних завдань, зокрема, підвищення швидкодії пристрою внаслідок паралельного виконування операцій та ін. Див. також *Автоматизація проектування ЦОМ*. *Д. О. Поспєлов.*

АЛМО́ — мова машинно-орієнтована. Розроблено її 1965—66 як проміжну й базову мову універсальної системи програмування. А. являє собою вхідну мову абстрактної обчисл. машини, яку також наз. А. Машина А. має типові особливості, властиві найпоширенішим сучасним ЕОМ. У ній є кілька рівнів пам'яті, набір операцій, близьких до систем команд сучасних машин, тощо. В машині А. передбачено 4 види пам'яті: регістри-модифікатори (*M*-пам'ять), робочі регістри (*R*-пам'ять), оперативна пам'ять (*V*-пам'ять) і зовн. пам'ять (*EX*-пам'ять). Ці види пам'яті призначено зберігати значення — вводжувані, виводжувані й перероблювані в процесі виконання *програм*. Комірки, з яких складається кожна пам'ять, наз. с л о в а м и. Розмір слів, відведених для зберігання значень, невизначений, але в мові є засоби, які дають змогу обмежити цей розмір знизу. Для зберігання впорядкованої множини значень (*масивів*) у *V*-пам'яті та в *EX*-пам'яті відводять упорядковану множину слів однакової довжини — масиви слів. Коли моделюють машину А. на конкретній машині, тобто коли виконують на цій машині програму, написану мовою А., ті частини всіх чотирьох видів пам'яті, що їх використано в цій програмі, відображуються на відповідні *запам'ятовувальні пристрої* машини.

V-пам'ять призначено зберігати осн. масиви значень, опрацьовуваних у кожний момент виконання програми. В кожній програмі точно зазначають, скільки слів і якого розміру (розмір обмежується лише знизу) потрібно відвести в *V*-пам'яті та як ці слова називатимуться в програмі. Ці вказівки даються описуванням у кожному блоці й мають силу всередині цього блоку. (Програма в мові А. має блокову структуру аналогічно до програми в мові *АЛГОЛ-60*). В описах можуть бути й відомості про частоту звертання до описуваних слів, і це дає змогу ефективніше відображати *V*-пам'ять у тих машинах, у яких оперативна пам'ять складається з рівнів різної швидкодії. *M*-пам'ять зберігає значення, використовувані в індексних виразах, щоб вказувати порядковий номер елемента в масиві; ці значення наз. м о д и ф і к а т о р а м и.

R-пам'ять зберігає проміжні результати, що виникають у процесі виконання програми. Значення, що зберігаються в *EX*-пам'яті, недоступні для безпосередньої обробки. Їх можна лише скопіювати у *V*-пам'ять або навпаки. Під час моделювання *EX*-пам'ять відображується на допоміжні види пам'яті (барабани, стрічки тощо) конкретної машини, частину *EX*-пам'яті можна відобразити на оперативну пам'ять конкретної машини, що залишилася вільною після відображення *V*-пам'яті машини А. Масиви слів *EX*-пам'яті (зовн. масиви), потрібні кожному блокові, мають бути описані в цьому блоці. В описах можна подати й відомості про характер звертання програми до зовн. масивів, які дають змогу найефективніше розмістити ці масиви в допоміжній пам'яті конкретної машини. Для цього *EX*-пам'ять машини А. подають як сукупність носіїв, кожен з яких характеризується певними властивостями: частотою звертання, способом копіювання (довільними чи постійними зонами) та іменною специфікацією, що дає змогу індивідуалізувати носій.

У машині А. передбачено обробку таких типів значень: числа послідовності *бітів*, модифікатори і посилання. Числа можна подавати в нормальній формі, з фіксованою комою та цілі. Для переходу від однієї форми подавання до ін. в А. визначено спец. ф-ції перетворення. Спец. покажчики розміру дають змогу обмежити знизу розмір слова, відводжуваного для зберігання значень. При цьому розмір визначається через значення, тобто покажчик розміру потребує, щоб було відведено слово, в якому можна розмістити значення даного типу з даною кількістю знаків. Під час моделювання машини А. слово можна відображувати на комірку (частину комірки або кілька комірок) конкретної машини, таку, з якою зручно було б проводити операції та яка давала б змогу розміщувати значення, задані покажчиком. Коли в *алгоритмі* немає строгого фіксованого обмеження на точність подавання значень, можна користуватися стандартними поняттями: напівслово, *слово* й подвійне слово.

Набір операцій та операторів А. відповідає наборам операцій сучасних обчисл. машин. До нього включено арифм. і логічні операції та оператори передавання керування, організації циклу, обміну між різними видами пам'яті та введення й виведення. Формули записують у вигляді правого польського запису, що цілком задає порядок дій і разом з тим не зумовлює адресності машини. Операнди визначено так, щоб на кожній конкретній машині будь-якому операндові в кінцевому підсумку відповідала якась *адреса*, в якій є, скажімо, ознака модифікації за допомогою одного з регістрів-модифікаторів. За операнд править безпосереднє зображення значення (константа), назва змінної, назва оператора (мітка) й посилання на назву слова чи оператора. Будь-яка зі змінних може мати індекс. Змінні з індексом позначають слова, які є елементами одновимірних масивів слів. Значення індексного виразу повинно мати форму подавання модифікатора. В мові А. передбачено засоби, що дають змогу зазначати, що певні процеси можна виконувати паралельно. Це використовують, моделюючи машину А. на машинах з кількома *процесорами* або з ін. можливостями сумісного виконання. Крім того, є змога задавати вказівки для здійснення автомат. *програм сегментації*. Компілятори з мови А. створено

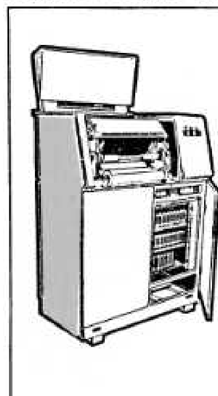
для ряду універсальних і спеціалізованих обчисл. машин. На основі мови А., як *мови проміжної*, розроблено універсальну систему програмування для ЕОМ «БЭСМ-6».

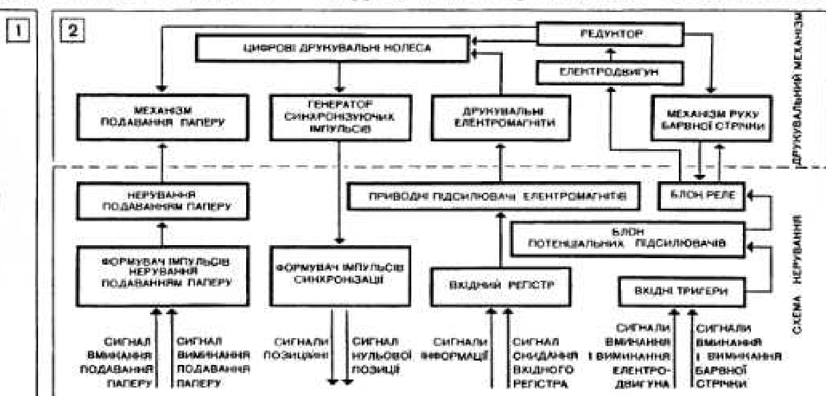
Літ.: Камынин С. С., Любимский Э. З. Алгоритмический машинно-ориентированный язык — АЛМО. «Алгоритмы и алгоритмические языки», 1967, в. 1 [бібліогр. с. 59—61]. *Е. З. Любимський.*

АЛФАВІТНИЙ ОПЕРАТОР — відповідність, що зіставляє слова в якомусь алфавіті зі словами в тому самому чи іншому фіксованому алфавіті; перший алфавіт наз. вхідним, а другий — вихідним алфавітом цього оператора. Сукупність усіх слів, на яких оператор визначено, наз. областю його означення. Коли область означення А. о. скінченна, оператор можна задати таблицею відповідності, що принципово неможливо зробити у випадку нескінченної області означення. До поняття А. о. можна в певному розумінні звести будь-які процеси перетворювання інформації. Окремим і найважливішим різновидом А. о. є *алгоритм*. *С. С. Гороховський.*

АЛФАВІТНО-ЦИФРОВИЙ ДРУКУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ (АЦДП) — пристрій, що здійснює автоматичне друкування на папері інформації у вигляді букв, цифр, розділових знаків, деяких математичних та інших спеціальних символів. АЦДП застосовують гол. чином у складі *зовнішніх пристроїв* цифрових обчислювальних машин (ЦОМ) для виведення результатів розрахунків, програм та інформаційно-довідкових матеріалів у довільній, визначуваній програмній формі (текст, таблиці, графіки, фігури). Раніше за АЦДП використовували наявні портативні друкувальні пристрої (напр., звичайну друкарську машинку) за допомогою оснащення їх електромагнітними приводами. АЦДП, що їх спеціально розробляють для ЦОМ, можна поділити на дві групи: з немех. та мех. способом реєстрації. З першої групи деякого поширення набули АЦДП, основані на електрохімічному, ксерографічному та магнітографічному принципах дії. В електрохімічному АЦДП зображуваний знак формується з точок, які з'являються на спец., просоченому електролітом (т. зв. електрохімічному) папері при проходженні крізь нього струму в місцях контакту з електродами. В магнітографічному АЦДП на поверхні обертового барабана з магнітного матеріалу за допомогою імпульсного магнітного поля, що його створюють спец. магнітні головки, формується приховане зображення знака з обраних для нього точок прямокутного растра. Зображення проявлюється нанесенням магнітного барвного порошку, переноситься з барабана на папір притисканням і закріплюється нагріванням, а після цього відповідна зона барабана розмагнічується й очищається від порошку. Точково-растровий спосіб формування символу без участі інерційних деталей дає змогу досягти в таких АЦДП швидкості друку порядку сотні рядків за секунду. Проте через експлуатаційні незручності вони не набули широкого застосування. Дія ксерографічних АЦДП грунтується на здатності наелектризованих ділянок паперу притягати барвний порошок. Спец. головки надають цим ділянкам (що мають конфігурацію символів) електростатичних зарядів.

В АЦДП, основаних на мех. способі реєстрації, знак друкується відбиттям відповідної літери через барвну стрічку. Конструкції їх розрізняються переважно за способом підведення літери потрібного символу на відповідне місце в рядку. У ротаційних АЦДП літери рельєфно виступають на ободі друкувального колеса. Колеса, яких стільки, скільки знаків у рядку, насаджено на вал, який безперервно обертається. Відбиток знака, потрібного на даному місці рядка, з'являється внаслідок удару пуансона по паперу в момент проходження середини літери цього знака через осьову лінію пуансона. Рядок друкується за один оберт вала. В АЦДП з друкувальною головкою літери розміщено на головці, яка має форму витягненого еліпсоїда обертання,





1. Алфавітно-цифровий друкувальний пристрій типу АЦПУ-128.
2. Блок-схема алфавітно-цифрового друкувального пристрою типу АЦПУ-128.

в кілька рядів по колах. Потрібна літера обирається відповідним нахилом і поворотом головки. Відбиток досягається ударом самої головки по паперу (барвній стрічці). Знаки в рядку тут друкуються послідовно. Широко застосовуються й АЦДП, сконструйовані на базі *телетайпа* або електрифікованої друкарської машинки.

Найбільш поширений в СРСР ротаційний А. ц. д. п. типу АЦПУ-128, основні тех. дані якого такі: швидкість друкування — 420 ± 20 рядків за хвилину, знаків у рядку — 128, знаків на друкувальному колесі — 96. До набору символів входять російський і лат. алфавіти, розділові знаки, цифри, символи арифметичних дій і *логіки математичної*. Пристрій сконструйовано у вигляді високого столу (мал. 1), у верхній частині якого розміщено власне друкувальний механізм, а в нижній—електронну схему керування. З блок-схеми АЦПУ-128 (мал. 2) видно структуру цього пристрою, зв'язки між блоками й між пристроєм та ЕОМ. 128 друкувальних коліс, насаджених на валі впритул, утворюють суцільний друкувальний барабан. З валом цих коліс зв'язаний привод барвної стрічки і привод паперу. Інтервальний механізм забезпечує переривчасто-поступальний рух паперу в проміжки часу між друкуванням рядків. Проти кожного друкувального колеса в напрямних встановлено пуансон з еластичним (капроновим) наконечником, якому надає руху електромагніт. Сприйнявши удар від важеля електромагніта, пуансон рухається за інерцією і б'є по паперу. Повертає пуансон у вихідне положення пластинчаста пружина. Для узгодження роботи друкувального механізму з ЦОМ служить індукційний генератор синхронізуючих імпульсів, який видає 96 позиційних імпульсів (за кількістю літер на колесі) та один нульовий імпульс (відповідний початкові оберту барабана). Схема керування забезпечує зберігання прийнятої від ЦОМ інформації, що має бути надрукована в поточному рядку, і формування керуючих сигналів, які надходять від ЦОМ і спрямовуються в ЦОМ.

Літ.: Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [бібліогр. с. 480]. *І. Т. Пархоменко.*

АЛЬГІБР — модифікація *альфа-системи*, призначена для трансляції програм, записаних *альфа-мовою*, в машинні програми для ЕЦОМ «БЭСМ-6». *Транслятор* системи А. працює на ЕОМ типу «М-20» і видає на перфокартки програму в коді команд «БЭСМ-6», або записує її на *стрічку магнітну* для наступного передавання безпосередньо в машину по спец. каналу. Використання альфа-мови для А. допускає додання до тексту програми машинних *команд* та екстракодів «БЭСМ-6» у символічному вигляді. Є аналогічні альфа-системі засоби наладжування й методика об'єднання в єдиний комплекс програм, які транслюють окремо. Виконання трансльованої А. програми відбувається під керуванням *операційної системи* «БЭСМ-6». *А. П. Єршов.*

АЛЬФА-МОВА — *мова програмування*, що являє собою розширення мови *АЛГОЛ-60* щодо змінних, операцій і виразів, а також описів. Її розроблено в 1960. У розділі про змінні додано новий тип — комплексний. Кожній величині чи змінній з індексами можна приписати якусь кількість вимірювань і порядок щодо кожного вимірювання. Багатовимірна величина в А.-м. позначає множину скалярних компонент, які утворюють прямокутний багатовимірний *масив*, аналогічний масивам АЛГОЛу-60. Приклади відповідних описів: **комплексний** z-**масив; дійсний** A **масив** $n \times n$; **логічний масив** B [1 : 10, 1 : 20] — **масив** P. В останньому прикладі компонентами матриці B є вектори довжини P. Для змінних з індексами в А. -м. допустимим є використання порожніх індексних позицій, яке означає, що одночасно взято всі компоненти, які відповідають повному діапазонові зміни даного індексу.

Щодо операцій і виразів в А.-м. всі звичайні операції поширено на багатовимірні величини як покомпонентні дії; введено й стандартні операції над векторами й матрицями. Запис y [ ] : | a, $v \uparrow 2$, t, $t+1$| є прикладом вживання «геометричної» операції формування з послідовності значень зазначених виразів 5-вимірного вектора, присвоюваного векторній змінній y [ ]. Іншою геом. операцією є компонування, що дає змогу зростити вздовж зазначуваного в дужках вимірювання серію подібних масивів: запис |(1) |(2) A, B|, |(2) C, D|| означає клітинну матрицю вигляду $\left\|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right\|$. Логічні вирази в А.-м. можуть мати вигляд ланцюжків нерівностей виду $a \leqslant x < b$. Скрізь, де вживаються списки виразів (крім перемикальних списків і списків параметрів у процедурах), допускають переліченя виразів за якимось натуральним індексом з використанням крапок: напр.,

$$\| a[1, 1], \ldots, a[1, n] |, \ldots .$$
$$| a[10, 1], \ldots, a[10, n] \|$$

означає формування матриці порядку $10 \times n$. В А.-м. допустимими є конструкції вигляду

для $i := 1, \ldots, P$ **цикл** $a[i, 1] := \ldots :=$
$= a[i, 10) := 1$

або вигляду

якщо $b[k] < \ldots < b[k+n]$, **то на** M. N. P.

В останньому прикладі використано оператор переходу за складовою міткою, яка дає змогу передати керування всередину блока: в блоці з міткою M знаходять блок з міткою N, у якому відбувається передавання керування на оператор з міткою P. До описів додано описи, що вводять явні позначення компонент багатовимірних і комплексних величин, напр., $A = \| A[i, j] \|$ і $Z = a + ib$. Є описи, що задають початкові значення змінних, напр., $pi = 3.141592$. Є й скорочена форма описування ф-цій, що їхній спосіб обчислення задається виразом,

напр., дійсна ф-ція ОБ'ЄМ $(R) = {}^3/_2 \times pi \times \times R \uparrow 3$. Будь-якій змінній спец. описом можна приписати верхній індекс, який дає змогу записувати рекурентні співвідношення між послідовними значеннями такої змінної. А.-м. містить засоби, що дають змогу описувати вид пам'яті (барабан, стрічка, перфокартки), на якому зберігаються масиви чи блоки програми, включати до програми машинні *команди* з символічними адресами, використовувати *бібліотеку стандартних підпрограм* і об'єднувати в один комплекс окремо трансльовані програми. В А.-м. англ. службові слова замінено на російські, а алфавіт *ідентифікаторів* розширено до малих і великих букв рос., лат. і грец. алфавітів. Для перфорації програм, записаних А.-м., використовують спеціально розроблені клавішні пристрої з клавіатурою на 256 знаків і модифіковані рулонні телетайпи, в яких є символ підкреслювання. Див. також *Альфа-система.*

Літ.: Ершов А. П., Кожухин Г. И., Волошин Ю. М. Входной язык системы автоматического программирования. М., 1961 [бібліогр. с. 173—174]; Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В. Руководство к пользованию системой Альфа. Новосибирск, 1968. *А. П. Єршов.*

АЛЬФА-СИСТЕ́МА — система програмування альфа-мовою для ЕОМ типу «М-20». Розроблено її в 60-х роках 20 ст. Складовими частинами А.-с. є *транслятор* — програма, що транслює програми з *альфа-мови* на мову машини, і система наладжування. Характерною особливістю А.-с. є застосування двофазної трансляції з використанням внутр. мови й наявність спец. *алгоритмів* оптимізації трансльованої *програми* на основі мішаної стратегії програмування та формальних перетворень програми. Транслятор складається з 24 блоків, які працюють послідовно, заг. місткість їх 50 тис. команд. Пересічна швидкість трансляції — прибл. 150 команд робочої програми за 1 *хв* роботи транслятора. Перша фаза трансляції полягає в перекладі програм з альфа-мови на внутр. мову, яка являє собою машинно-незалежну мову з простою структурою операторів і з фіксованим форматом змінних. Осн. символами внутр. мови є 15-розрядні двійкові *коди*, що зображують *ідентифікатори*, знаки операцій та операторів і різні роздільники. Частина розрядів коду — ідентифікуюча, а частина — ознакова, що містить класифікацію осн. символів та інформацію про деякі властивості ідентифікаторів. Кожний оператор має обмежену кількість операндів, якими можуть бути лише ідентифікатори. Осн. типи операторів: пересилання, присвоювання результату виконання арифм. чи логічної операції, передавання керування (умовні, безумовні та з поверненням), формування та засилання адрес і звертання до *підпрограм стандартних* і системи динамічного розподілу пам'яті. В індексах змінних залишено тільки лінійні залежності від параметрів операторів циклу; решту обчислень з індексів виносять. Перекладаючи на внутр. мову (див. *Мова ЦОМ внутрішня*), програмують вирази, процедури і дії над комплексними та багатовимірними величинами. Інформацію про змінні з описів переносять у таблиці й ознакові розряди ідентифікаторів. У конструюванні таблиць застосовують *спискову структуру* розміщення інформації. Ідентифікатори переводять у 15-розрядний код за допомогою функції розміщування. Вирази програмують за два перегляди: під час першого перегляду провадять декомпозицію виразів на прості оператори і вводять символи проміжних величин, під час другого визначають тип і порядки за вимірами проміжних величин і масивів. Під час програмування процедур застосовують мішану стратегію: в трансляторі передбачено 8 способів програмування операторів і описувань процедур — від універсального до найпростішого,— що відрізняються один від одного складністю реалізації та ступенем загальності. На основі аналізу характеру входжень формальних параметрів у тіло процедури й ступеня складності фактичних параметрів для кожної процедури вибирають найпростіший спосіб, який забезпечує правильність застосування її. Програмування дій над багатовимірними величинами полягає у введенні в програму циклів виконання покомпонентних дій. При цьому провадять оптимізацію, що полягає в об'єднанні (де це можливо) кількох циклів, що виникають, в один і в зменшенні кількості проміжних *масивів*. Операції над комплексними величинами реалізують здебільшого відкритим вставлянням *підпрограм* виконання окремих дій.

На рівні внутр. мови транслятор виконує оптимізуючі формальні перетворення трансльованої програми: чищення циклів і економію збіжних виразів. Під час чищення циклів на ділянці програми, яка становить цикл, знаходять оператори, що обчислюють при повтореннях цього циклу те саме значення (такі оператори виносять з циклу й розміщують перед ним). Економію виразів провадять у межах квазілінійних ділянок програм, що складаються з операторів, які виконуються строго підряд і допускають розгалуження, спричинені лише умовними виразами в первісній програмі. З кількох збіжних операторів, які обчислюють те саме значення на ділянці економії, залишається лише один і вміщується в таке місце, де результат його доступний для використання. При ототожнюванні операторів також застосовують ф-цію розміщення. В індексах провадять перетворення лінійних форм залежностей від параметрів циклів (зведення подібних, виділяння вільного члена), спрямованих на спрощення їх.

Друга фаза трансляції полягає в перекладі програм з внутр. мови на машинну. Після того, як побудовано машинні *команди*, що реалізують основні обчисл. й логічні оператори внутр. мови, програмують цикли. І тут застосовують мішану стратегію, що полягає у виборі для кожного заголовка циклу найпростішого з доступних способів організації перелічування параметра, конт-

ролю за кількістю повторень циклу, переадресації та відновлення змінних команд. Використання індекс-регістра організовують так, щоб зменшити кількість команд збереження й відновлення індекс-регістра. Наприкінці другої фази провадять глобальну економію пам'яті, що її відводять для зберігання скалярних змінних і масивів наперед відомої довжини. Спочатку за програмою будують її *операторну схему*. За один оператор беруть квазілінійну ділянку програми. Для кожного оператора визначають: номери операторів, змінні, що є аргументами й результатами оператора, та внутр. величини, тобто змінні, що їхні значення виникають і використовуються лише в межах оператора. Для всіх внутр. величин відводять заг. поле, а для кожної пари решти змінних на основі аналізу операторної схеми визначають, чи можна цю пару розмістити на одній ділянці пам'яті. Далі на основі цієї інформації про попарну сумісність провадять економний *пам'яті розподіл*. Алгоритми, застосовувані при цьому, тісно пов'язані з алгоритмами розфарбовування вершин графів (див. ***Граф розфарбований***). На закінчення провадять локальну оптимізацію одержаної програми, яка використовує машинні команди з суміщенням операцій, а саму програму після компонування й присвоєння істинних адрес ставлять у робоче положення для негайного виконання або видають на перфокартках.

Система наладжування має здатність формувати *наладжувальні програми* шляхом модифікації первісних програм альфа-мовою, яка полягає у змінюванні параметрів програми (задавання значення змінних, застосування спрощених процедур тощо) та у внесенні в текст програми наладжувальних команд (друкування проміжних значень, простежування переходів і підрахунок фактичної кількості повторень циклів). Модифікацію здійснює «нульовий» блок транслятора.

На основі А. с. створено ряд систем програмування для різних ЕОМ, зокрема систему *Альгібр* для ЕЦОМ «БЭСМ-6».

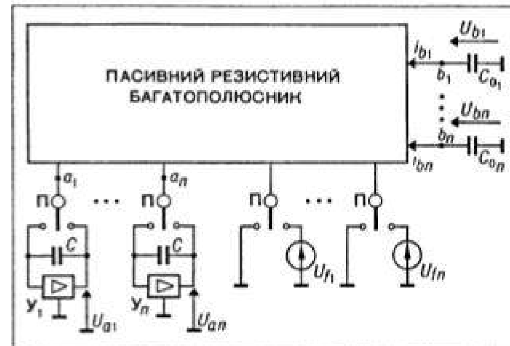
Літ.: Альфа-система автоматизации программирования. Новосибирск, 1967; Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В. Руководство к пользованию системой Альфа. Новосибирск, 1968.

А. П. Єршов.

АМПЛІТУ́ДНО-ІМПУЛЬСНА МОДЕ́ЛЬ — різновид *квазіаналогової моделі* головним чином алгебричних об'єктів; забезпечує неминучу збіжність процесів зрівноважування для лінійних алгебричних об'єктів довільного виду. На структурній схемі А.-і. м. (мал.) у правому положенні перемикачів П, що перемикаються синхронно й циклічно, конденсатори C_0 заряджаються від діяння напруг джерел U_{fi} і вихідних напруг U_{ai} запам'ятовувальних підсилювачів $У_i$. У лівому положенні перемикачів ці конденсатори розряджаються через пасивний резистивний багатополюсник на конденсатори C, змінюючи їхній заряд. У разі достатньо малого відношення електроємностей C_0/C такий процес зміни напруг збігається неминуче при довільній структурі резистивного багатополюсника, причому напруги U_{bi} стають дуже малими й вектор напруг $U_a^{(k)}$ визначається з виразу

$$g_{ba}U_a^{(k)} + i_{bf} = 0,$$

де g_{ba} — матриця взаємних провідностей кола між вузлами b_i та a_i; i_{bf} — складова вектора струмів i_b, що визначається діянням вектора напруг U_f, коли $U_b = U_a = 0$



Структурна схема амплітудно-імпульсної моделі.

і конденсатори закорочені; k — номер циклу перемикання перемикачів П. Поклавши, що $U_a = \gamma_x x$, $g_{ba} = \gamma_a A$, $i_{bf} = \gamma_f f$, де γ_x, γ_a, γ_f — перехідні масштаби, зв'язані співвідношенням $\gamma_a \cdot \gamma_x = \gamma_f$, робимо висновок, що схему можна розглядати як електронну модель с и с т е м и рівнянь $Ax + f = 0$, де матриця А може бути довільною неособливою матрицею. Позитивною якістю А.-і. м. є можливість побудови простих стійких моделей лінійних алгебр. об'єктів. До вад А.-і. м. слід віднести низьку чутливість схеми до відхилень вектора U_b від нульового значення, спричинену загасанням сигналів при двократному проходженні через багатополюсник. На основі описаної структурної схеми можна будувати амплітудно-імпульсні інвертори, суматори, перетворювачі та ін. розв'язувальні елементи й моделі оборотного й необоротного типів.

Літ.. Пухов Г. Е. Методы синтеза амплитудно-импульсных электронных моделей алгебраических объектов. В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи, в. 2. К., 1964; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564].

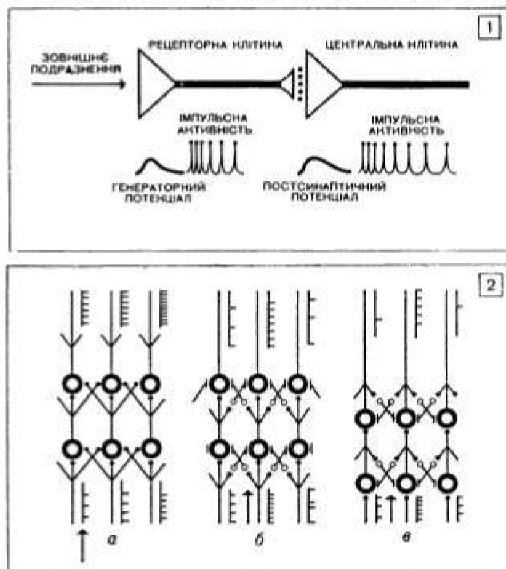
В. В. Васильєв.

АНАЛІЗА́ТОРНІ СИСТЕ́МИ — складні нервові структури, що починаються периферичними сприймаючими утворами (рецепторами) і закінчуються нервовими центрами, які розміщені у вищих відділах мозку й забезпечують аналіз сприйнятих подразнень та вироблення на цій основі сигналів для побудови відповідної діяльності організму.

Рецептори та вищі відділи аналізаторів з'єднані провідними шляхами, які завжди

включають у себе ряд проміжних нервових центрів, що забезпечують передачу та проміжне оброблення інформації, яка надходить від рецепторних структур у вищі відділи аналізатора. Ф-цією рецепторів є трансформація енергії зовн. подразника у процес збудження. Цей процес має здатність самопоширюватися по відростках нервових клітин — нервових волокнах, тому він може бути носієм інформації про зовн. вплив, яка передається у вищі аналізаторні центри. Рецепторні клітини — спеціалізовані, пристосовані до сприйняття певних видів енергії, що надходить від подразника. Спеціалізація рецепторів досягається наявністю в них особливих механізмів, що дають змогу реагувати на дуже малі кількості енергії й перетворюють її на зміни електр. поляризації поверхневої мембрани рецепторних клітин. Такі зміни наз. генераторними, або рецепторними, потенціалами. Ці потенціали, в свою чергу, є безпосередньою причиною появи у з'єднаних з рецепторами нервових волокнах процесів збудження (див. *Збудження клітини теорія*). Нервові імпульси в волокнах істотно не відрізняються один від одного (мал. 1), тому для передавання інформації про подразнення різних рецепторних клітин неодмінною умовою є існування різних волокон, що з'єднують ці клітини з вищими аналізаторними центрами. Отже, інформація про якість подразнення кодується в А. с. просторовим розподілом активності в нервових волокнах. Генераторні потенціали в кожній рецепторній клітині за своєю тривалістю відображують тривалість подразнення, що попадає на рецептор (амплітуда цього потенціалу звичайно перебуває в логарифмічній залежності від сили зовн. подразнення). Поширювані імпульси, що їх створює генераторний потенціал, є дискретними й короткочасними (кілька тисячних часток секунди) процесами. Частота їхнього виникнення пропорційна амплітуді генераторного потенціалу й, отже, несе інформацію про силу подразнення. Проте ця пропорційність зберігається лише до певної межі. Наявність після кожного імпульсу періоду абс. та відносної рефракторності (незбудливості) обмежує верхню межу частоти імпульсації від рецептора кількома сотнями імпульсів на 1 *сек.* За тривалого постійного подразнення рецептора частота імпульсації зменшується, а це є відображенням зменшення чутливості аналізатора до подразнення *(адаптація)*. Ця властивість виявляється в різних А. с. не однаковою мірою. Вона є основою поділу на динамічну й статистичну чутливість.

Імпульсація, що виникла в рецепторах, поширюється по волокнах, не послаблюючись, з великою швидкістю (кілька десятків *м/сек*). Це залежить від діаметра відповідних волокон — чим тонше волокно, тим менша швидкість проведення імпульсів. І проміжні, й вищі нервові центри, через які проходять ці імпульси, побудовані за типом екранних структур. З кожною нервовою клітиною нервового центра зв'язані чутливі волокна певних рецепторних клітин, тому вся чутлива поверхня виявляється ніби проектованою на клітини цього центра; така сама проекція зберігається в наступному центрі аж до найвищого. Описана організація дає змогу передавати через наступні центри інформацію про якість подразників, які діють на різні рецепторні клітини. Проекція імпульсів від клітини до клітини не є надто строгою — імпульсація по розгалуженнях волокон захоплює почасти й сусідні клітини (мал. 2, *а*). Характерною



1. Схема периферичної частини аналізаторної системи, що ілюструє співвідношення між зовнішнім подразненням, генераторним потенціалом та імпульсною активністю.
2. Схема гаданої структури передавальних ланок аналізаторних систем (за Фессаром, 1961): *а* — схема, в якій між передавальними нейронами існують лише збуджуючі зв'язки; *б* — схема, в якій між передавальними нейронами існують гальмівні бокові зв'язки; *в* — схема, в якій між передавальними нейронами існують зворотні гальмівні зв'язки. На вході й виході кожного волокна показано розряди імпульсів умовної частоти.

рисою діяльності всіх проміжних центрів є наявність у них і збуджуючих і гальмівних процесів. Імпульси, що надходять від рецептора по певній групі волокон, збуджуючи відповідні клітини, через особливі вставні нейрони водночас викликають гальмівні процеси у клітинах, які зв'язані з сусідніми волокнами (мал. 2, *б*, *в*). Отже, потік імпульсації від рецепторів, незважаючи на те, що є структурні можливості для втрати специфічності передавання, виявляється функціонально обмеженим. Це функціональне обмеження перебуває під динамічним контролем з боку вищих центрів. Імпульсація, що надходить з них по низхідних волокнах, здатна створювати гальмівні процеси, обмежуючи передавання імпульсації, що надходить від рецепторних структур.

Основними А. с. є світлова, звукова, хімічна (дистантна — нюх та контактна — смак), гравітаційна, температурна та механічна. У деяких тварин є А. с., які сприймають зовн. електр. поле. Крім А. с., що сприймають зовн. подразнення, існує складна система аналізаторів, які сприймають подразнення, що виникають усередині організму (хім., мех. та осмотичні зміни в кровоносному руслі, травному апараті, руховому апараті тощо). Вищі відділи А. с. у вищих тварин містяться в корі великих півкуль головного мозку. Механізм їхньої діяльності вивчено найменше. Для ряду осн. А. с. (світлової, звукової, та механічної) за допомогою електрофізіол. методів та методів прямого подразнення одержано карти локалізацій ділянок аналізу різних якостей подразників. Для інших систем (хім. та температурної) таких даних немає. Див. також *Нейрон*. *П. Г. Костюк.*

АНАЛІТИК — *мова програмування*, яку орієнтовано на описування інженерних та науково-дослідних задач і яка включає засоби для виконання аналітичних перетворень і засоби спілкування з машиною в *діалога режимі*. Розроблено її 1968 в Ін-ті кібернетики АН УРСР. Як підмножину А. містить *мову машини «МИР»*. А. є мовою безпосередньої інтерпретації в машині «МИР-2» (див. *«МИР»*).

Засоби А. дають змогу в зручній і компактній формі описувати як у числовому, так і в аналітичному вигляді *алгоритми* розв'язування задач лінійної алгебри й нелінійних рівнянь, знаходити екстрем. точки з застосуванням диференціювання виразів, знаходити наближені розв'язки дифер. рівнянь і рівнянь матем. фізики методом розвинення в ряди тощо.

Особливістю мови А. є широке використання загальноприйнятої матем. символіки. Крім арифм. операцій, операцій відношень та елементарних функцій, в А. використовують і операції диференціювання, інтегрування, підсумовування та ін. (їх позначають відповідно d, $\int$, Σ), константи e, π тощо; крім цілих і десяткових чисел допускають і раціональні дроби, які записують у вигляді a/b, де a та b — числа, напр., 4/17. Тип числа визначається виглядом його запису. Неоднозначність, що виникає (4/17 з одного боку, являє собою дріб, а з другого — арифм. вираз, для обчислення якого треба 4 поділити на 17 і одержати десятковий результат), усувають, вводячи вказівки ДРОБИ ДЕСЯТКОВІ і ДРОБИ НЕДЕСЯТКОВІ.

Осн. видом перетворюваної інформації в мові А. є вираз. На відміну від інших мов, у т. ч. й від мови машини «МИР-1», де значеннями змінних можуть бути лише числа, в А. областю значень змінних є множина математичних виразів.

Приклад запису мовою А.: $K \times d/dX\ (Y) + \int (Y \uparrow 2)\ dX + \Sigma\ (I = 1,\ N,\ A\ [I] \times \text{COS}\ (X\ [I]))$, що в загальноприйнятому записі означає

$$k\frac{dy}{dx} + \int y^2 dx + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos x_i.$$

Вирази можна зводити до деяких канонічних форм, у яких автоматично відбуваються спрощування типу $P + 0 = P$, $P \times 0 = 0$, зводяться подібні члени, скорочуються дроби тощо. Зведення виразів до тієї чи іншої канонічної форми здійснюється або автоматично під час виконання деяких операторів, або оператором ЗВЕСТИ, в якому зазначається тип форми. Крім виразів, осн. одиницями інформації в А. є рівності. Рівність має вигляд: $P_1 = P_2$, де P_1 та P_2 — вирази. Над рівністю можна виконувати деякі операції, проте осн. роль рівностей полягає в зазначенні правил перетворювання виразів, здійснюваного оператором ЗАСТОСУВАТИ. Застосувати рівність $P_1 = P_2$ до виразу P — це значить знайти у виразі P підвираз P_1 й замінити його на вираз P_2. Напр., якщо рівність $\text{SIN}\ (\pi/2) = 1$ застосувати до виразу $A \times \text{SIN}\ (\pi/2) + B \times (\text{SIN}\ (X)) \uparrow 2$, то в результаті утвориться вираз $A \times 1 + B \times (\text{SIN}\ (X)) \uparrow 2$.

У рівностях деякі змінні можуть відігравати роль параметрів — змінних, замість яких у процесі застосування рівності можна підставляти будь-які вирази. Напр., застосування рівності $(A + B) \times (A - B) = A \uparrow 2 - B \uparrow 2$, де A та B — параметри, до виразу $(e \uparrow X + e \uparrow (-X)) \times (e \uparrow X - e \uparrow (-X))$ дає вираз $(e \uparrow X) \uparrow 2 - (e \uparrow (-X)) \uparrow 2$. При цьому параметри A та B в процесі порівнювання набувають значень $A = e \uparrow X$, $B = e \uparrow (-X)$. Вираз з параметрами, що його наз. ще й образом або зразком, використовують для розпізнавання структури виразів. В А. розпізнавання структури виразів здійснюється за допомогою оператора ПОРІВНЯТИ. Напр., порівнювання образу $A \times X \uparrow 2 + B \times X + C$, де A, B і C — параметри, з якимось виразом E, дасть змогу визначити, чи є E квадратним тричленом; при цьому значеннями A, B, C стануть коеф. цього тричлена (коли E — тричлен). Так, для випадку $E = (P + 5) \times X \uparrow 2 + X$ параметри матимуть значення: $A = P + 5$, $B = 1$, $C = 0$.

Оператори ПОРІВНЯТИ й ЗАСТОСУВАТИ дають змогу здійснювати довільні аналітичні перетворення, проте для найтиповіших дій — диференціювання та інтегрування виразів — є відповідні оператори ДИФЕРЕНЦІЮВАТИ й ІНТЕГРУВАТИ (ІНТЕГРУВАТИ охоплює інтегрування широкого класу функцій, у т. ч. більшості інтегралів, що містяться у відомих довідниках).

Для знаходження значень виразів є оператори, результатом діяння яких може бути не тільки число, а й вираз. Напр., нехай є описи виразів $A = 2 \times X \uparrow 2 + X - 1$ і $B = 3 \times X \uparrow 2 + X + 2$; тоді результатом діяння оператора ОБЧИСЛИТИ A буде вираз $5 \times X \uparrow 2 + X + 1$, що присвоюється як значення змінній A.

Для зручності проведення аналітичних перетворень в А. впроваджується поняття робочої зони (РЗ), яка відповідає робочому аркушеві паперу, де математик виконує аналітичні обчислення, випробовуючи ті чи інші

методи, помиляючись, виправляючи помилки і т. ін. Щоб вмістити вираз у РЗ, є оператор звертання ВЗЯТИ *A*, де *A* — назва виразу. Для називання інформації, що міститься в РЗ, є оператор НАЗВАТИ *A*. РЗ є частиною *пам'яті ЦОМ*, за якою можна постійно спостерігати за допомогою пристрою відображення — екрана. Екран дає змогу здійснювати не лише зворотний зв'язок (виведення виразів та графіків), а й прямий (за допомогою *світлового олівця* на екрані підкреслювати підвирази і надалі обробляти не весь вираз, а лише підкреслену частину його; можна з підкреслених частин компонувати новий вираз, витирати непотрібну інформацію тощо). Екраном зручно користуватися, працюючи в режимі діалога.

Режим діалога між людиною та машиною, реалізований у машинах серії «МИР», має особливо велике значення при проведенні аналітичних обчислень, коли попереднє планування роботи з урахуванням усіх можливих ситуацій утруднене. Діалог здійснюється шляхом почергового обміну порціями інформації. Для людини такою порцією є речення (послідовність описів та операторів). На кожне речення машина може відповідати всіма наявними засобами виведення інформації. Є широкий набір операторів виведення, операторів керування послідовністю дій програми (умовний оператор, оператор переходу, оператори циклу, процедури тощо).

Літ.: Глушков В. М. [та ін.]. АНАЛИТИК (алгоритмический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований). «Кибернетика», 1971, № 3.

Т. О. Грінченко.

АНАЛІТИ́ЧНІ ПЕРЕТВО́РЮВАННЯ НА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНИХ МАШИ́НАХ — див. *Символьні перетворювання на ЕОМ*.

АНА́ЛОГ — об'єкт вивчення (явище, предмет, установка, схема чи пристрій), який має схожість (аналогію) в якомусь відношенні з іншим об'єктом (чи об'єктами). Міркування й висновки, що оперують властивостями А., наз. міркуваннями й висновками за аналогією. Коли розв'язують тех. задачі, аналогія передбачає наявність певних однозначних співвідношень між характеристиками А. Окремим випадком таких співвідношень є різновид подібності — аналогова подібність. У цьому разі А. можна розглядати як *аналогову модель*. Для обгрунтованого аналізу за допомогою А. (висновків за аналогією) потрібно встановити умови подібності й обмежень у виконанні їх, з належним матем. формулюванням (див. *Подібності теорія*). Без цього перехід від виявленої за допомогою А. часткової схожості між об'єктами до глибшої й різносторонньої схожості між ними не забезпечує вірогідності висновків, хоч часто може наводити на здогади, що їхню правильність чи помилковість треба з'ясовувати дальшим дослідженням і перевіркою. Аналогії можуть приводити й до хибних висновків (хибні аналогії), якщо, застосовуючи їх, не враховують якісної своєрідності зіставлюваних явищ і не користуються умовами подібності й обмеженнями у виконанні їх. Так, напр., хибними є застосовувані іноді аналогії між законами біол. еволюції й суспільного життя та багато інших.

В. А. Веников.

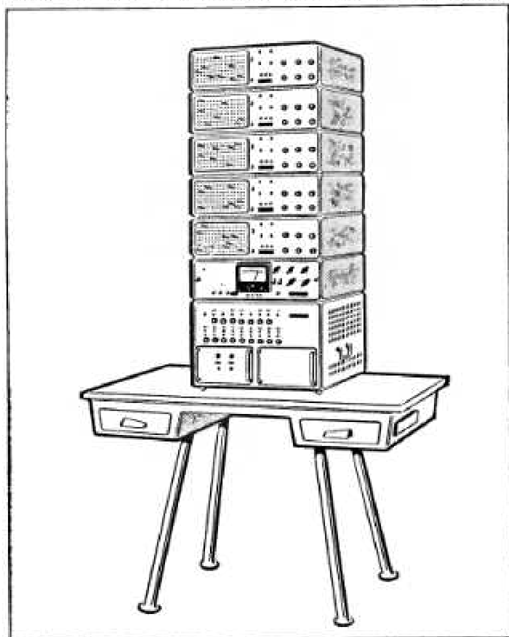
АНА́ЛОГ ЦИФРОВИ́Й, цифрова модель — різновид моделюючого пристрою, в якому органічно поєднуються цифровий спосіб подавання інформації з аналоговим способом побудови структури моделі та переробки інформації. Основу А. ц. створюють обчислювальні елементи для виконання арифм. і логічних операцій (суматори, інвертори, помножувачі, перетворювачі функціональні, інтегратори, індикатори екстремальних сигналів тощо). Ці елементи з'єднуються між собою при розв'язуванні задач так, щоб виконувалися потрібні матем. залежності між змінними модельованого об'єкта. Для подавання інформації в А. ц. здебільшого використовують непозиційні способи кодування, напр., у вигляді потоку імпульсів або систем числення в залишкових класах. Маючи А. ц. осн. елементів електр. кіл — опорів, індуктивностей, ємностей, джерел енергії та ін.,— можна побудувати А. ц. електр. кіл і широкого класу об'єктів, для яких відомі аналогові та квазіаналогові моделі у вигляді електр. кіл. Типовим прикладом А. ц. є цифрові диференціальні аналізатори (див. *Цифрова інтегрувальна машина*) для дослідження систем автоматич. керування. А. ц. застосовують у системах програмного керування верстатами й виробничими процесами та в системах керування рухомими об'єктами. Останнім часом намітився прогрес у створенні А. ц. для розв'язування екстремальних задач *програмування математичного*. А. ц. забезпечує велику точність розв'язку задач, наочність і оперативність цього розв'язування та високий ступінь автоматизації процесів введення й виведення інформації; але його швидкодія менша за швидкодію аналогової обчислювальної машини.

Літ.: Воронов А. А. [та ін.]. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М.—Л., 1960 [бібліогр. с. 191—194]; Каляев А. В. Введение в теорию цифровых интеграторов. К., 1964 [бібліогр. с. 286—288]; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 2. М., 1968.

В. В. Васильєв.

«АНА́ЛОГ-1» — аналогова обчислювальна машина (АОМ) настільного типу, призначена для дослідження різних систем автоматичного регулювання та керування. Належить до класу машин малої потужності, в основу її покладено блоковий принцип побудови, який забезпечує різний якісний і кількісний склад розв'язувальних елементів при відносній похибці розв'язку ± 0,25%. «А.-1» дає змогу розв'язувати лінійні й нелінійні диф. рівняння з постійними коеф. до 10-го порядку включно, причому кожний операційний блок забезпечує розв'язування рівнянь до 2-го порядку (для розв'язування складніших задач допускається об'єднання кількох таких АОМ). При розв'язуванні задач шукані ф-ції виражаються в машині у вигляді напруг постійного струму, які можуть змінюватися в

межах ± 100 *в*. Початкові умови й збурення можуть встановлюватися в діапазоні ± 100 *в* з точністю ± 0,1 *в*. Шукані ф-ції вимірюються компенсаційним вольтметром. Передбачається можливість одночасно вводити до 30 постійних коеф. за допомогою десятиоборотних потенціометрів. До комплекту АОМ «А.-1» входять 5 операційних блоків, один блок керування й вимірювання та один — живлення. Операційний блок має вставку з чотирма розв'язувальними підсилювачами і вставку кіл *зворотних зв'язків* (вона буває



Аналогова обчислювальна машина «Аналог-1».

трьох типів і визначає склад матем. дій, які можна виконувати на цьому операційному блоці). До машини додають 7 вставок зворотних зв'язків: 5 лінійних, одну — множення та ділення і одну — універсального функціонального перетворювача. При експлуатації машини передбачено можливість розносити окремі блоки, щоб забезпечити кілька робочих місць.

Літ.: Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181]. *В. І. Грубов, В. С. Кирдан.*

АНАЛОГІЇ (грец. в одн.— ἀναλογία — відповідність, схожість) — наявність у двох і більше об'єктах спільних умов (напр., властивостей, відношень), які дають змогу переносити інформацію про один об'єкт (модель) на інший (прототип). Логічні структури виводів при цьому можуть бути різними. Коли переношувану інформацію пов'язано з властивостями, а підставою для перенесення є спільність ознак, тип А. наз. п а р а д е й г м о ю. Термін «А.» давньогрец. філософи й математики застосовували до ототожнювання *відношень*. Цей підхід до А. набув дальшого розвитку в сучасній науці, наприклад, у понятті ізоморфізму.

Виводи за А. можна класифікувати насамперед за характером засновків і висновків. Над цією класифікацією в свою чергу надбудовують класифікацію за типами основ. У виводі за А. засновок описує модель, а висновок — прототип. Розрізняють два осн. типи виводів за А.: А. за властивостями й А. за відношеннями.

А. з а в л а с т и в о с т я м и має підрозділи. Перенесення якоїсь цілком певної властивості з моделі на зразок наз. А. за константами, якщо ж переносять взагалі будь-яку властивість,— це А. за змінними. При цьому константи можуть бути й логічного характеру, як, напр., несуперечливість, і не логічного, напр., існування. А. за змінними можна підрозділити на два підкласи: підклас позитивних А., коли на прототип переносять властивість, знайдену в моделі, й підклас негативних А., коли на прототип переносять фактор відсутності якоїсь властивості.

А. з а в і д н о ш е н н я м и охоплює найістотніші в практиці наукового дослідження типи виводів. Форми цих А. багатоманітніші за А. властивостей. У сучасній науці широко застосовують різні види А. Так, у *кібернетиці* досліджують широкий клас А., в яких моделі й прототип беруть із природи, суспільства й мислення. У функціональній А. на основі тотожності функцій порівнюваних систем роблять висновок, що й структури цих систем тотожні. В кібернетиці широко використовують і висновок, обернений функціональній А., і перенесення функції з моделі на зразок на підставі тотожності структур. Цей вид А. можна назвати структурною аналогією. Такі А. допомагають використовувати знання про будову тих чи інших органів тварин, щоб створювати штучні пристрої, які функціонували б аналогічно (див. *Біоніка*).

Велику роль відіграють у кібернетиці А. типу ізоморфізмів. Ототожнюючи логічні й числові співвідношення, використовують ЕОМ для розв'язування логічних задач. Відповідність між станами елементів ЦОМ і станами *нейронів* дає підставу використовувати цю машину як модель нервової системи — і навпаки. А. типу ізоморфізму набули застосування в процесі формулювання поняття про *інформації кількість*.

Коли йдеться, напр., про співвідношення машини й мислення, використовують каузальну А.: причини однакових явищ повинні бути однаковими. Іноді при цьому каузальну А. доповнюють іншими формами А. Так, англ. логік А. Тьюрінг (1912—54) обгрунтовує положення про тотожність функцій людини й машини за допомогою експерименту заміни людини машиною в думці, тобто застосовує А. функціональної замінності — імітацію. Це спричинює критику, сумніви в правомірності такої А. й навіть приводило філософів до заперечування кібернетики.

В загальному випадку вивід за А. є лише ймовірним. Визначати правила виводу за А. в загальному випадку є важкою проблемою в галузі логіки науки. Але стосовно до певних форм і окремих випадків форм виводу за А. можна вважати, що умови правомірності виводу існують. Щодо, наприклад, виводу від спільності одних властивостей до спільності інших, то можна сказати, що такий вивід буде тим правомірнішим, чим більше спільних властивостей встановлено у моделі й прототипу. При цьому важливо, щоб властивості було добирано «без упередженості». Якщо спільність ознак подано у засновках, то ознаки повинні максимально відрізнятися одна від одної. Разом з тим переношувана властивість має бути такого самого типу, як і ті, спільність яких установлено в засновках. Так, якщо спільність між моделлю і прототипом установлено за властивостями мех. характеру, то й переношувана властивість матиме механічний характер.

Велике теор. і практичне значення має А. між нервовою системою та обчисл. машинами, конструювання яких є однією з осн. проблем кібернетики. Таку А. використовують для поліпшення конструкції машин і для кращого розуміння функціонування нервової системи (див. *Нейронні сітки*). Обчисл. машини типу *цифрових диференціальних аналізаторів* працюють за принципом А. В них створюють фіз. систему, описувану тим рівнянням, яке треба розв'язати, а потім вимірюванням одержують потрібний результат. Так, розподіл струму в електр. колах певного виду описують тими самими рівняннями, що й розподіл т-ри в доменній печі, тиск у струменях повітря, які обтікають літак, і т. д. У такому випадку *аналогова обчислювальна машина* дає числовий розв'язок таких рівнянь у вигляді певних значень струму на виході машини. Як правило, АОМ розв'язують обмежений клас однотипних задач з низькою точністю розв'язків. *Цифрові обчислювальні машини*, в яких інформацію представлено цифровими *кодами*, не мають вад АОМ, вони універсальні й працюють з практично необхідним ступенем точності. Проте цифрові машини не можуть повністю відображати реальні процеси мислення, здійснювані в мозку. В діяльності мозку важливу роль відіграють і аналогові процеси, причому інформація, очевидно, багато разів змінює свою форму з дискретної на неперервну й навпаки. Якщо ЦОМ багато операцій виконує послідовно, а це потребує виняткової точності, то величезні здібності мозку, велика точність і надійність його роботи досягаються не за допомогою швидкодії, точності й надійності виконання кожної операції, а через механізм паралельної обробки інформації і якість своєрідні форми представлення її, лише віддалено відображувані в цифрових і аналогових машинах.

Ряд складних задач, наприклад, розв'язування в цифровій формі екстремальних задач, автомат. класифікація й навчання складних форм поведінки приводить до нездійсненних вимог щодо кількості операцій та обсягу пам'яті. Разом з тим подібні задачі нерідко легко розв'язують найпростіші фіз. системи, наприклад, промінь світла «відшукує» найкоротший шлях в оптично неоднорідному середовищі або газ у посудині переходить з нерівноважного стану до рівноваги, «відшукуючи» максимум *ентропії*. В розв'язуванні задачі відшукування максимуму ентропії молекули газу відіграють роль «обчислювальних елементів», які працюють паралельно.

Створити тех. пристрої за А. з мозком, який реально працює,— це одне з найважливіших завдань кібернетики. Розв'язуватимуть це завдання або способом *комплексування машин* чи створення *гібридних обчислювальних машин*, або способом створення моделей на зовсім нових принципах, які б адекватніше відображували суть мислення.

Літ.: Материалистическая диалектика и методы естественных наук. М., 1969; Уемов А. И. Аналогия в практике научного исследования. М., 1970; Ольсон Г. Ф. Динамические аналогии. Пер. с англ. М., 1947 [бібліогр. с. 213—214].

А. І. Уйомов, В. І. Богданович.

АНА́ЛОГОВА МОДЕ́ЛЬ — допоміжна щодо досліджуваної системи (об'єкта), система (квазіоб'єкт), яка має фізичну природу, відмінну від природи досліджуваної системи, і на певних етапах пізнання може заміняти цю систему, даючи дослідникові цінні відомості. А. м. може бути матеріальною штучною (коли її виготовляють як установку, пристрій, схему, призначену для дослідження якоїсь групи явищ) і матеріальною природною, коли характеристиками одного (фіз., соціального, економічного тощо) явища користуються для того, щоб одержати характеристики ін. природи в ін. умовах. А. м. може бути уявною, тобто бути якимсь умовним образом, що дає інформацію про досліджувану систему. Матем. апарат аналогового моделювання грунтується на висновках *подібності теорії*.

Матеріальна штучна А. м. може бути єдиним пристроєм, що дає безпосередньо пряму аналогію й відтворює весь хід досліджуваного процесу з допомогою будь-якого іншого процесу, що має іншу фіз. природу. До таких моделей (їх іноді наз. математичними—аналоговими) належать, напр., мех. маятник, що його розглядають як модель для вивчення електромех. коливань синхронного електр. генератора. Здебільшого А. м. виконують як електр. моделі, дуже зручні для експериментів. У цих моделях струми, напруги, а іноді й потужності є *аналогами* величин ін. фіз. природи. До електр. моделей прямої аналогії належать такі різновиди А. м., як моделі з суцільним середовищем, з провідною пластиною (провідним папером), електролітичні ванни й різні сіткові моделі полів (див. *Моделювання на суцільних середовищах*).

На відміну від А. м., що побудовані за принципом прямої аналогії, існують *квазіаналогові моделі*, що грунтуються на принципі еквівалентності. А. м. може бути структурною моделлю, що відтворює на основі рівнянь окре-

мі етапи процесу за ланками модельованої системи, і коли їх з'єднати,— відтворює весь процес. Напр., структурною А. м. є універсальна *аналогова обчислювальна машина* (див. *«МН»*, *«ЭМУ»*).

Спеціалізовані А. м., що передбачають, на відміну від універсальних, розв'язування лише вузької групи задач, іноді будують лише частково як структурні. Напр., у розрахунковому столі електр. мережі, призначеному досліджувати стійкість і перехідні процеси в електр. системах, реалізуються електромех. аналогії під час дискретного (за інтервалами часу) зображення руху генератора і *моделювання фізичного* розподілу струмів, напруг і потужностей у мережі.

Літ.: Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. М., 1966 [бібліогр. с. 478—482]; Шилейко А. В. Основы аналоговой вычислительной техники. М., 1967; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564].

В. А. Веников.

АНА́ЛОГОВА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНА МАШИ́НА (АОМ) — обчислювальна машина, яка обробляє інформацію, подану в аналоговій (неперервній) формі. В загальному випадку АОМ — якась спеціально сконструйована матеріальна система (модель), призначена для відтворювання (моделювання) певних, характерних для даного класу задач, співвідношень між неперервно змінними фіз. величинами (*машинними змінними*) — *аналогами* відповідних відправних матем. змінних розв'язуваної задачі. Залежно від фіз. процесу, покладеного в основу *моделі математичної*, розрізняють електричні (електронні), електромех., мех., гідравлічні, пневматичні й інші АОМ, перехідні процеси й статичні стани в яких характеризуються співвідношеннями машинних змінних. Як такі змінні використовують електр. напруги й струми, кутові й лінійні переміщення, тиск у рідкому й газовому середовищах тощо. Напр., в електронних АОМ машинними змінними, як правило, є електр. напруги.

Принципи аналогових обчислювань застосовували ще на світанку історії. У 3800 р. до н. е. на землях, на яких згодом виникла Вавілонія, аналогові розрахунки використовували під час землемірних робіт і для складання карт. Близько 80 р. до н. е. греки побудували планетарій, за допомогою якого вони визначали положення Сонця й планет, використовуючи птолемеєву (геоцентричну) модель Сонячної системи. На початку 15 ст. в Самарканді узб. математик ал-Каші збудував механізм для визначення моменту часу, коли дві планети перебувають в одній меридіональній площині. Пізніше побудували ще один обчисл. пристрій, за допомогою якого визначали положення Сонця, Місяця й п'яти відомих тоді найближчих планет у заданий момент часу. В 1620 створено першу лічильну лінійку, в якій використано поняття логарифма. Близько 1814 нім. інженер Герман сконструював перший планіметр, яким вимірювали на плані площу, обмежену довільною кривою. Безпосереднім попередником сучасних АОМ став мех. інтегратор, що його винайшов 1876 англ. фізик Дж.-Дж. Томсон. Англ. фізик У. Томсон (Кельвін) висловив ідею з'єднати кілька таких інтеграторів для розв'язування дифер. рівнянь. Принцип аналогових розрахунків, що його запропонував Кельвін, застосовують дотепер. У 1904—11 вітчизняний вчений О. М. Крилов, мабуть, не обізнаний з роботами Кельвіна, розробив теорію подібних пристроїв і побудував АОМ з чотирма інтеграторами.

На початку 20 ст. було багато зроблено в галузі створення аналогових пристроїв для знаходження коренів многочленів і для обчислювання коеф. Фур'є. В 1931 в США створено *АОМ механічну*. Але через громіздкість, велику вартість і малу швидкодію ці АОМ не набули широкого застосування. В кінці 30-х — на початку 40-х років 20 ст. в СРСР, США й інших країнах з'явилися *АОМ електромеханічні*, а в середині 40-х років — електронні. Так, уже 1945 під керівництвом рад. електротехніка Л. І. Гутенмахера створено електронну аналогову машину з періодизацією розв'язувань. Тоді ж під керівництвом С. О. Лебедєва (нар. 1902) побудовано АОМ для розв'язування систем звичайних дифер. рівнянь. АОМ на *підсилювачах операційних*

Механічна й електричні системи аналогій — Таблиця 1

Механічна система	Аналогічна електрична система	
	1-а система	2-а система
Маса m	L — індуктивність	C — ємність
Переміщення x	q — заряд	ψ — потокозчеплення
Швидкість v	I — струм	U — напруга
Сила $Q = m\frac{dv}{dt}$	$L\frac{di}{dt} = E$ — е. р. с.	$C\frac{dU}{dt} = I$ — струм
Коефіцієнт швидкісного тертя $s = \frac{Q}{v}$	$\frac{E}{I} = R$ — опір	$\frac{I}{U} = \gamma$ — провідність
Коефіцієнт пружності $\frac{Q}{x}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{L}$

створено в нашій країні в 1949. У 40—50-х роках 20 ст. розроблено та вдосконалено багато осн. елементів і вузлів сучасних АОМ. Це дало змогу зменшити розміри машин і підвищити точність їхньої роботи.

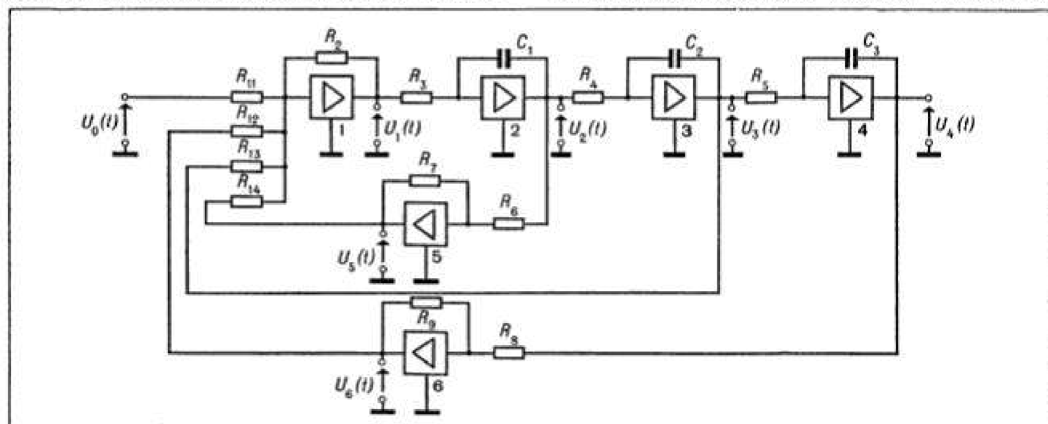
Сучасні АОМ поділяють на дві групи: на машини, побудовані за принципом простої аналогії, і на машини, побудовані за принципом складної аналогії. У машинах, що діють за принципом простої аналогії, зв'язок між машинними змінними та змінними відправних розв'язуваних рівнянь здійснюється за допомогою постійних коефіцієнтів. У машинах, побудованих за принципом складної аналогії, цей зв'язок не виступає в явному вигляді, а є складнішим. До машин цієї групи належать, напр., машини, побудовані за принципом нелінійної подібності, і квазіаналогові машини (див. *Квазіаналогова модель*).

Т. ч., АОМ простої аналогії призначено для вивчення якогось матеріального об'єкта за допомогою об'єкта іншої фіз. природи. Це можливо лише в тому разі, коли обидва об'єкти можна описати аналогічними за формою рівняннями. У табл. 1, напр., показано *аналогію* між мех. системою і двома типами електр. систем.

За інший приклад можна взяти аналогію між електростатичним, постійним магнітним і стаціонарним електр. полями (див. табл. в ст. *Моделювання на суцільних середовищах*). Подібну аналогію можна одержати для гідравлічних, пневматичних, електродинамічних та інших систем.

Одне з провідних місць серед машин простої аналогії займають сіткові АОМ (див. *Електричні моделюючі сітки*), принцип дії яких полягає в наближеній реалізації дифер. рівнянь у частинних похідних, представлених у скінченних різницях за допомогою сіток, що складаються з R, L, C-елементів. При цьому всю ділянку, в якій знаходять розв'язок, розбивають на кілька елементарних об'ємів і для кожного з них будують електр. схему заміщення. Великого поширення в науці й техніці набули структурні АОМ простої аналогії, які являють собою набір розв'язувальних елементів, призначених реалізувати елементарні матем. операції або сукупності їх. Під час розв'язування задач ці елементи поєднуються один з одним відповідно до виду заданих рівнянь.

Загальний порядок розв'язування задач на АОМ полягає ось у чому. 1) На основі заданої системи рівнянь складають *структурну схему моделі*, яка становить блок-схему сполучення *розв'язувальних пристроїв* АОМ, строго відповідну структурі рівнянь. 2) За заданими макс. значеннями змінних відправних рівнянь обчислюють масштабні коефіцієнти, які являють собою відношення змінних відправного рівняння до відповідних машинних змінних (див. *Програмування АОМ*). 3) За коефіцієнтами відправних рівнянь і за обчисленими масштабними коефіцієнтами обчислюють значення параметрів схеми (величини опорів та ємностей, параметри нелінійних розв'язувальних елементів і варіаторів коеф.). 4) Розв'язувану задачу набирають на АОМ за допомогою *набірного поля*. Набирання задачі на АОМ являє собою поєднання розв'язувальних елементів відповідно до обраної структурної схеми і встановлення необхідних параметрів схеми. 5) Настроюють схему і розв'язують задачу. Розв'язок задачі у вигляді ф-цій часу записує самописець, або осцилограф. В окремих випадках досить переглянути розв'язок на електроннопроменевій трубці осцилографа (див. *Пристрої записування аналогової інформації*).



Структурна схема моделі для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь 3-го порядку.

На мал. наведено структурну схему розв'язання лінійного дифер. рівняння 3-го порядку

$$a_0 \frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dx(t)}{dt} + a_3x(t) = y(t),$$

побудовану методом зниження порядку похідної. Тут

$$U_1(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} \cdot \frac{1}{M_1}, \quad U_2(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot \frac{1}{M_2},$$

Короткі технічні характеристики АОМ простої аналогії Таблиця 2

Тип АОМ	Вид рівнянь	Максимальний порядок розв'язуваних диференційних рівнянь	Допустима тривалість інтегрування, *сек*	Габарити, *см* або займана площа, *м²*	Споживана потужність, *ква*	
					26 *в*	220 *в*
«ИПТ-5»	Лінійні	9	150	20×40	0,5	2
«МПТ-9»	»	16	200	700×80×120	1,3	5
«ЛМУ-1»	Нелінійні	9	200—400	622×476×1320	—	2,1
«ЭМУ-3»	Лінійні	6	150	120×41×70	0,06	0,85
«МН-7»	Нелінійні	6	150	0,5	—	0,74
«МН-8»	»	32	1800	60	—	25
«ЭМУ-5»		6	200	68×50×100	0,07	0,76
«ЭМУ-6»	»	6	2000	68×50×54	0,07	0,35
«МН-10»	»	6	200	0,3	—	0,130
«ЭМУ-8»		Набір із стандартних блоків	2000	35×30×30	—	0,06
«ННБ»	Набір нелінійних блоків	—	Не обмежена	43,8×45,8×33,6	—	0,7
«ЭДА»	Нелінійні	19	150	250×50×175	—	—
«МН-14»	»	30	10 000	40	—	15
«ЭМУ-10»	»	24	1000	20	—	2
«МН-11»		9	Частота повторень розв'язання —100 *розв/сек*	15	—	10
«МН-10М»	»	10	100	0,2	—	0,25
«Электрон»	»	55	1000			25
«МН-18»	»	50	1000	171,4×108,6×53	—	0,1
«МН-17М»	»	60	100	7520×1042×2390	—	15

Короткі технічні характеристики деяких вітчизняних спеціалізованих аналогових і квазіаналогових обчислювальних машин Таблиця 3

Тип машини	Призначення машини	Кількісні характеристики розв'язуваних задач	Габарити, *см* або займана площа, *м²*	Споживана потужність, *ква*
«ЭМСС-7М»	Для розрахунків статично невизначених систем типу балок і рам; можна застосовувати й для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь	Кількість схем-аналогів стрижнів — 75	133,4×83,6×138	0,4
«Альфа» («ЭМСС-8»)	Для розрахунків рамних систем будівельної механіки	Кількість схем-аналогів стрижнів — 85	4	3,5
«Итератор»	Разом з АОМ для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами	Максимальний порядок розв'язування системи рівнянь —8 Максимальне число точок в інтервалі інтегрування, які входять у крайові умови, —3	30×128×68	1
«Аркус»	Для розв'язування лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь з лінійними й нелінійними крайовими умовами	Максимальний порядок розв'язуваних рівнянь — 8		1,8
«Оптимум-2»	Для розв'язування транспортної задачі лінійного програмування	Максимальна кількість пунктів виробництва — 20, пунктів споживання — 60	2,5	2,2
«АСОР-1» («Ритм»)	Для автоматизації розрахунків укрупнених задач сіткового планування та керування	Максимальне число робіт у графіку 200, подій у графіку — 140	190×220×200	2
«УСМ-1»	Для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного й параболічного типів	Стека має 1458×2 точок	80	30

$$U_3(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{1}{M_3}, \quad U_4(t) = \frac{x(t)}{M_x},$$

$$U_0(t) = \frac{y(t)}{M_y},$$

де M_1, M_2, M_3, M_x, M_y — масштабні коеф. Обчислюють їх, виходячи з максимально можливої величини напруги (машинної змінної) U_{max} на виході розв'язувального елемента. При цьому обов'язково треба, щоб було задано макс. значення змінних відправного розв'язуваного рівняння. Тоді

$$M_1 = \frac{\left(\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right)_{max}}{U_{max}}, \quad M_2 = \frac{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)_{max}}{U_{max}},$$

$$M_3 = \frac{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{max}}{U_{max}}, \quad M_x = \frac{x_{max}}{U_{max}},$$

$$M_y = \frac{y_{max}}{U_{max}}.$$

Проте макс. значення змінних розв'язуваного рівняння не завжди заздалегідь відомі. В цих випадках масштабні коеф. задають орієнтовно, а в процесі настроювання схеми, коли напруги на виходах розв'язувальних елементів починають перевищувати U_{max}, їх емпірично перераховують до потрібних значень. В тих випадках, коли задано макс. значення всіх змінних, параметри схеми розраховують, використовуючи систему рівнянь, яка зв'язує вхідні й вихідні величини кожного з розв'язувальних елементів.

Тепер АОМ широко застосовують для розв'язування важливих практичних задач науки і техніки. Зокрема, за допомогою АОМ простої аналогії розв'язують дифер. рівняння в частинних похідних, які описують поля різної фіз. природи (теплові, електр., магнітні та ін.), процеси тепло- й масообміну, мех. властивості фіз. систем тощо. Осн. застосування структурних АОМ простої аналогії — розв'язування лінійних і нелінійних звичайних дифер. рівнянь із заданими початковими умовами (задача Коші). Проте безперервне вдосконалювання розв'язувальних елементів і методів розв'язування задач приводить до того, що ці машини почали використовувати й для розв'язування крайових задач звичайних дифер. рівнянь, лінійних і нелінійних алгебр., трансцендентних та інтегр. рівнянь і деяких типів рівнянь у частинних похідних. АОМ простої аналогії використовують і як керуючі пристрої в різних системах керування і як вимірювальні пристрої в системах збирання й обробки інформації. Такі АОМ ефективно застосовують і для дослідження нелінійних систем автомат. регулювання й керування. У зв'язку з цим виникає ціла низка задач: аналіз динаміки систем; визначення оптимальних з погляду деяких критеріїв параметрів, структури й зовнішніх збурень систем при випадкових впливах. Осн. перевагами АОМ у розв'язуванні перелічених задач є значно більша, ніж у ЦОМ швидкодія, порівняно невелика вартість, можливість розв'язувати задачі в *реальному масштабі часу* й простота спілкування оператора з машиною. Вадою АОМ є порівняно велика похибка розв'язку, проте в більшості практичних задач відправна інформація задається з похибкою, сумірною з похибкою АОМ, тому ця вада далеко не завжди відіграє істотну роль.

Дальше вдосконалення АОМ здійснюють у технологічному (переведення елементів на *інтегральні схеми* або гібридні схеми) і в конструктивному відношенні (зменшення похибки елементів, автоматизація процесу підготовки задач до розв'язування і самого розв'язування їх). Дуже перспективними є використання заразом аналогових і цифрових обчисл. машин (див. *Гібридна обчислювальна машина*, *Комплексування машин*), воно дає змогу завдяки поєднанню переваг машин обох типів одержувати новий якісний ефект. У табл. 2 наведено короткі тех. характеристики вітчизняних АОМ простої аналогії, у табл. 3 — технічні характеристики спеціалізованих аналогових і квазіаналогових машин.

Літ.: Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., 1959 [бібліогр. с. 318—319]; Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [бібліогр. с. 494—505]; Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. К., 1964; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564]; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 178—181]; Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Пер. с англ. М., 1962; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. Аналоговые вычислительные устройства. М.— Л., 1964; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 1—2. М., 1967—68 [бібліогр. ч. 1, с. 453—456].

Г. Є. Пухов.

АНА́ЛОГО-ЦИФРОВА́ ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНА МАШИ́НА — див. *Гібридна обчислювальна машина.*

АНА́ЛОГО-ЦИФРОВА́ СИСТЕ́МА — див. *Комплексування машин.*

АНА́ЛОГО-ЦИФРОВИ́Й ПЕРЕТВО́РЮВАЧ, перетворювач аналог — код — пристрій, який здійснює автоматичне перетворювання (вимірювання та кодування) неперервно-змінних у часі аналогових величин на еквівалентні значення числових *кодів*. Кількісний зв'язок між аналоговою величиною $A(t_i)$ і відповідною їй цифровою величиною N_{t_i} для будь-якого моменту часу t_i визначається співвідношенням

$$N_{t_i} = \frac{A(t_i)}{\Delta A} \pm |\delta N_{t_i}|,$$

де ΔA — крок *квантування*, тобто аналоговий еквівалент одиниці молодшого розряду коду; δN_{t_i} — похибка перетворення на цьому кроці. Як вхідні аналогові величини $A(t)$ здебільшого використовують часові інтервали, кути повороту, електр. напруги (струми), частоту коливань та фазові зсуви. Вихідні коди N_i подають найчастіше у двійковій, двійково-десятковій або десятковій системах числення. Розрізняють *перетворювачі з безпосереднім відліком, перетворювачі послідовної лічби, перетворювачі з порозрядним кодуванням* і *перетворювачі комбіновані*. А.-ц. п. мають задовольняти певну сукупність техн., метрологічних та експлуатаційних вимог. Їхні осн. характеристики: швидкодія (визначається макс. кількістю одноразових перетворень за *сек*), точність (характеризується макс. сумарною або середньоквадратичною *похибкою* перетворення, яка в свою чергу складається з статичної та динамічної похибок), чутливість і кількість каналів. Статична похибка складається з похибки дискретності (зумовленої квантуванням сигналу за рівнем) та інструментальних похибок (їхні джерела для різних типів перетворювачів різні); динамічна виникає внаслідок перехідних процесів у колах порівнювання й еталонних джерелах і через несталість аналогової величини в процесі кодування. Внаслідок квантування сигналу за часом при відтворюванні його за дискретними відліками з'являється ще й похибка наближення. Чутливість характеризується мінім. значенням аналогового сигналу, що його перетворювач надійно розрізняє як одиницю коду. Кількість каналів визначає максимальну кількість давачів аналогових величин, які можна одночасно підімкнути до перетворювача.

Літ.: Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. М.— Л., 1961 [бібліогр. с. 366—373]; Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., 1964 [бібліогр. с. 539—541]; Кондалев А. И. Преобразователи формы информации. К., 1965 [бібліогр. с 174—175]; Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи напряжения. Л.,1967 [бібліогр. с. 308—310].

А. І. Кондалев.

АНОТУВА́ННЯ АВТОМАТИ́ЧНЕ — процес складання короткого змісту (анотації) документа за допомогою електронної цифрової обчислювальної машини. Є два підходи до розв'язування проблеми А. а.: 1) логіко-граматичний, що спирається на повний синтаксичний і логічний аналіз тексту оброблюваного документа; 2) статистико-ймовірнісний, який грунтується на використанні кореляції між частотою елементів тексту та їхнім значенням. Необхідною умовою реалізації логіко-граматичного підходу є попередній синтаксичний аналіз тексту, внаслідок якого кожному слову приписуються відомості про його зв'язки з ін. словами. При цьому підході найбільш уживаним є метод А. а., який полягає в зведенні речень до стандартного вигляду: суб'єкт — предикат — групи залежних від них слів. Із стандартних речень виділяються структури типу суб'єкт — група залежних від нього слів. Припускають, що повторення цих структур свідчить про їхню смислову цінність. Порівнюючи структури, що повторюються, їх стандартизують за допомогою списків синонімів. Набір іменних словосполук, повторюваних у тексті, становить каркас анотацій. Статистико-ймовірнісні методи А. а. грунтуються на двох гіпотезах: 1) найчастіше повторювані слова в тексті — найбільш значущі; 2) відрізок тексту, в якому найбільше часто повторюваних слів, найбільш значущий.

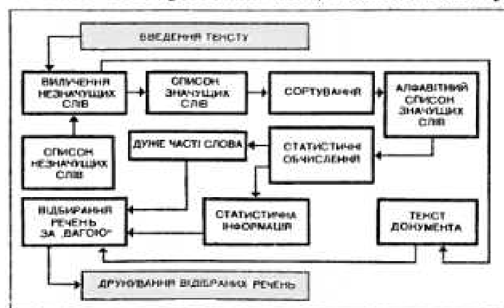


Схема автоматичного анотування за методом Р. Луна.

Логіко-граматичні методи А. а. далекі від практичної реалізації внаслідок труднощів щодо повної автоматизації синтаксичного аналізу. Статистико-ймовірнісні методи А. а. реалізуються легко. Коли їх використовують, в результаті А. а. утворюється не зв'язний текст, а набір розрізнених слів і словосполук (див. *Індексування*). Для об'єднання їх у зв'язні речення розробляють спец. алгоритми. В інформаційній практиці використовують системи А. а., які грунтуються на статистико-ймовірнісних методах. Див. також *Реферування автоматичне*. *В. А. Москович.*

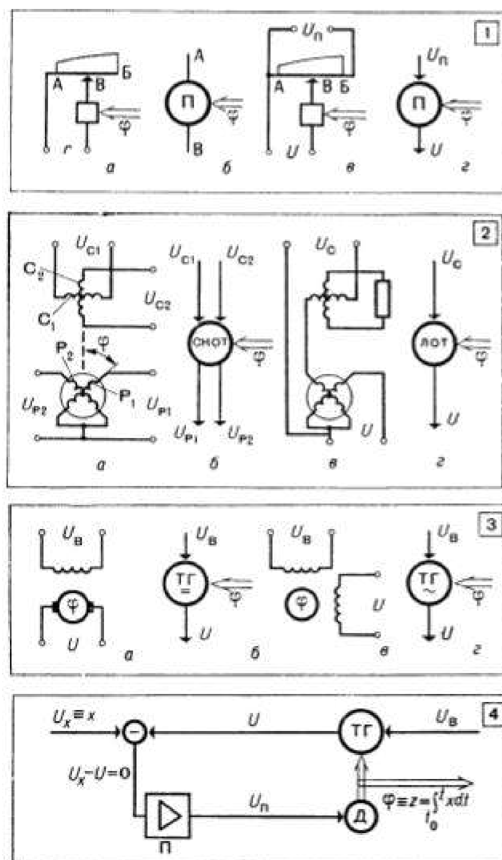
АНСА́МБЛЬ ПОВІДО́МЛЕНЬ — сукупність повідомлень, вироблюваних *джерелом повідомлень* із заданими статистичними властивостями.

АНТИГРАДІЄ́НТ ф у н к ц і ї — вектор, компоненти якого дорівнюють за абсолютною величиною компонентам *градієнта* функції, але мають протилежний знак.

АО́М ЕЛЕКТРОМЕХАНІ́ЧНА — комплекс найпростіших електромеханічних і механічних аналогових обчислювальних пристроїв (АОП), які реалізують математичні операції додавання, віднімання, множення, ділення, відтворювання функцій одного або двох аргументів, інтегрування та диференціювання. Вхідними й вихідними фіз. величинами електромех. АОП можуть бути механічні (здебільшого кут повороту) й електричні (переважно напруга постійного чи змінного струму). АОМ е. не такі надійні в роботі (особливо, якщо вони мають ковзні контакти), вони чутливіші до зміни т-ри й вологості, але, як правило, їх простіше виготовити і вони дешевші. В багатьох АОМ е. є принципові похибки. Точність АОМ е. можна збільшити, зменшую-

чи навантаження, застосовуючи високоякісні матеріали, старанно виготовляючи їх тощо. Для всіх електромех. АОП характерне те, що в них немає природної оборотності. До електромех. АОП належать в основному потенціометри, обертові трансформатори й тахогенератори.

П о т е н ц і о м е т р (мал. 1, *а-г*) становить опір з двома нерухомими (А, Б) і одним рухомим (В) контактами. Наявність рухомого контакту дає змогу використовувати потенціометр як змінний опір (ЗО), що змінюється за законом $r = f(\varphi)$, або як подільник напруги



1. Потенціометр: *а* — як змінний опір (*б* — умовне позначення його); *в* — як подільник напруги (*г* — умовне позначення його).
2. Обертовий трансформатор: *а* — синусно-косинусний (*б* — умовне позначення його); *в* — лінійний (*г* — умовне позначення його).
3. Тахогенератор: *а* — постійного струму (*б* — умовне позначення його); *в* — змінного струму (*г* — умовне позначення його).
4. Інтегрувальний привід (П — підсилювач, Д — двигун).

(ПН), вихідна напруга якого дорівнює $U = \frac{U_п}{r_п} f(\varphi)$, де φ — кут повороту повзунка, $r_п$ — повний опір, $U_п$ — напруга живлення потенціометра. Опором потенціометра є калібрований дріт, намотаний на плоский каркас. Повзунок у вигляді важеля з контактною щіткою, притиснутою до дроту, в місці, де немає ізоляції, закріплюють у спец. стакані. Потенціометр як ПН застосовують для відтворювання залежностей $z = xF(y)$, зокрема як множильний пристрій, що реалізує $z = xy$. Потенціометр як ЗО використовують для відтворювання ф-цій $z = F(x, y)$. Застосування ЗО в мостових схемах дає змогу реалізувати дуже складні залежності, напр., $z = \prod_{k=1}^{m} F_k(x_k) \left[\prod_{s=1}^{n} F_s(y_s)\right]^{-1}$. Спеціалізований синусно-косинусний потенціометр відтворює одночасно дві ф-ції $z_1 = x \sin y$, $z_2 = x \cos y$.

О б е р т о в и й т р а н с ф о р м а т о р (мал. 2, *а-г*), або синусно-косинусний обертовий трансформатор (СКОТ), являє собою індукційну електр. мікромашину з двома статорними (C_1, C_2) та двома роторними (P_1, P_2) обмотками, яка має один мех. вхід φ (кут повороту ротора), два електр. входи U_{C_1}, U_{C_2} (амплітуди напруг, що живлять обмотки C_1, C_2) й два електр. виходи U_{P_1}, U_{P_2} (амплітуди е. р. с., індукованих в обмотках P_1, P_2), при цьому $U_{P_1} = k_T(U_{C_1}\sin\varphi + U_{C_2}\cos\varphi)$, $U_{P_2} = k_T(U_{C_1}\cos\varphi - U_{C_2}\sin\varphi)$, де $k_T = \text{const}$. СКОТ широко використовують для моделювання різних залежностей з тригонометричними ф-ціями, напр., $z_1 = x\sin y$, $z_2 = x\cos y$ та ін. СКОТ з особливим з'єднанням обмоток (мал. 2, *в*, *г*) перетворюється на лінійний обертовий трансформатор (ЛОТ) з вихідною напругою, що дорівнює $U = kU_C\varphi$, $|\varphi| \leqslant 60°$, де $k = \text{const}$.

Т а х о г е н е р а т о р (мал. 3, *а-г*) — електр. мікромашина, що генерує напругу $U = kU_з \frac{d\varphi}{dt}$, де $k = \text{const}$, $U_з$ — напруга збудження, φ — кут повороту ротора чи якоря; призначений для реалізації операції диференціювання. Щоб відтворити операцію інтегрування, тахогенератор вмикають у схему інтегрувального привода (мал. 4). В АОМ е. на постійному струмі застосовують потенціометри й тахогенератори постійного струму; на змінному — обертові трансформатори й тахогенератори змінного струму. Практично застосовують лише спеціалізовані АОМ е. Проте потенціометри як найпростіші електромех. АОП широко використовують і в універсальних електронних АОМ, напр. «МН-7», «ЭМУ-10» та ін.

Літ.: Х о д о р о в Т. Я. Электромеханические индукционные счетно-решающие устройства. Л., 1960 [бібліогр. с. 180—181]; Л е б е д е в А. Н. Счетно-решающие устройства. М., 1968; Б е л е в ц е в А. Т. Потенциометры. М., 1969 [бібліогр. с. 322—326].

А. М. Лебедєв.

АОМ ІТЕРАТИВНА — аналогова обчислювальна машина, що здійснює процес розв'язування задачі протягом якоїсь кількості циклів. Машина має додаткові властивості незалежного керування і виконує потрібний мінімум логічних і програмних операцій, у ній є

пристрої для вибирання й передавання інформації з одного циклу операцій в інший (паралельний чи наступний). Програму розв'язування задають здебільшого на *набірному полі*, а якщо розв'язують вузько спеціалізовані задачі, процес здійснюється відповідно до *алгоритму*, реалізовуваного пристроєм керування. Як правило, в АОМ і. реалізують ітераційні способи розв'язування (див. напр., «*Ітератор*»). Але є й АОМ і., в яких на кожному циклі реалізується принципово точне розв'язування первісної задачі за фіксованих значень деяких параметрів, що змінюються від циклу до циклу. Це буває, напр., при розв'язуванні задач оптимізації систем автомат. регулювання, рівнянь у частинних похідних тощо.

Літ. див. до ст. *Аналогова обчислювальна машина.*
І. М. Вітенберг.

АО́М МЕХАНІ́ЧНА — комплекс найпростіших механічних аналогових обчислювальних пристроїв (АОП), які здійснюють математичні операції додавання, віднімання, множення, ділення, відтворення функцій одного чи двох аргументів, інтегрування та диференціювання. Ці пристрої називають ще лічильно-розв'язувальними механізмами (ЛРМ). Механічні АОП набагато надійніші (а іноді й точніші) за електричні, електромеханічні та ін., в них не протікають електромагн. перехідні процеси, і здебільшого для них не потрібні спец. джерела живлення. Їхні вади — відносно великі габарити й вага, складність виготовлення, велика вартість, менша гнучкість при компонуванні їх в АОМ. Механічні АОП у багатьох випадках витіснені електромех. і електр. АОП, але практичного значення вони не втратили. Застосовують їх, коли треба забезпечити велику надійність роботи або коли функції та їхні аргументи, що їх реалізують, обов'язково треба відтворювати мех. переміщеннями. Особливо широко застосовують такі ЛРМ, як підсумовувальні (конічні диференціали) й функціональні перетворювачі (кулачкові механізми, механізм з некруглими зубчастими колесами, з графіками нелінійних залежностей та з нерівномірними шкалами). У більшості ЛРМ є не більш як по два входи й один вихід, на яких фігурують фіз. величини — кути повороту φ або поступальні переміщення L веденого (вихідного) й ведучих (вхідних) ланок. Аналітичний вираз, який описує поводження найпростішого мех. АОП, є законом руху ведепої ланки й може мати вигляд: $\varphi_3 = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_3 = \psi(\varphi_1, L_2)$, $\varphi_3 = \psi(L_1, L_2)$, або $L_3 = \psi(L_1, L_2)$, $L_3 = \psi(\varphi_1, L_2)$, $L_3 = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$, де φ_1, φ_2 і L_1, L_2 — переміщення ведучих ланок. Багато АОП мають т. з. природну оборотність, тобто допускають змінювання напряму передавання переміщення по одному з входів на зворотний. Ця властивість збільшує можливість застосування їх для реалізації не лише прямих матем. операцій, а й обернених (напр., множення й ділення), але для цього треба вжити спец. заходів, щоб забезпечити передавання руху в потрібному напрямі. Осн. розрахунками, що їх доводиться провадити, проектуючи й застосовуючи ЛРМ, крім звичайного для АОП розрахунку масштабів, є силовий розрахунок (він полягає у визначенні зусиль або моментів, що їх треба прикласти до ведучих ланок, щоб подолати навантаження на ведені ланки) й розрахунок мертвих ходів (який дає змогу встановити точність відтворення відповідної матем. операції). АОМ м. бувають спеціалізовані й універсальні (див. також *Аналогова обчислювальна машина*, *АОМ електромеханічна*).

Літ.: Кобринский Н. Е. Математические машины непрерывного действия. М., 1954 [бібліогр. с. 444—447]; Лебедев А. Н. Счетно-решающие устройства. М., 1968.
А. М. Лебедєв.

АО́М ПНЕВМАТИ́ЧНА — обчислювальна машина неперервної дії, в якій роль *машинних змінних* відіграють величини тиску повітря в різних точках спеціально побудованої мережі. Осн. елементами АОМ п. є дроселі (пневматичні опори), пневматичні ємності й мембрани. Дроселі бувають постійні, регульовані, змінні й нелінійні. Постійний дросель — це ділянка каналу пневматичної мережі, на якій співвідношення між різницею тисків на кінцях ($p_1 - p_2$) і витратою повітря G має вигляд $G = \alpha(p_1 - p_2)$, де α — сталий для цього дроселя коефіцієнт (коефіцієнт витрати). В регульованих дроселях коеф. α можна змінювати. У змінних дроселях коеф. α змінюється в процесі розв'язування задачі залежно від часу чи від іншої змінної. Регульовані й змінні дроселі будують переважно у вигляді сопла і якогось загородження. Відстань від сопла до загородження змінюється, а залежно від цього змінюється й коефіцієнт витрати. Нелінійні дроселі характеризуються нелінійною функціональною залежністю витрати від різниці тисків. Коеф. α в цьому разі є складною функцією геометрії дроселя і параметрів газу. Їх звичайно визначають експериментально й обробляють у критеріях подібності — числах Рейнольдса.

Пневматичні ємності являють собою глухі й проточні камери. Внаслідок стисливості повітря тиск у камері зростає в міру її заповнення. На основі лінійних дроселів і пневматичної ємності в пневматиці будують аперіодичну ланку. Тиск на вході ланки пов'язаний з тиском у камері (його тут вважають за вихідний) рівнянням $\tau \frac{p_{вих}}{dt} + p_{вих} = kp_{вх} + k_0 p_{\alpha}$, в якому коеф. k і k_0 залежать від коеф. витрати дроселів, а τ — ще й від місткості камери. Отже, коли на вході тиск сталий, на виході він змінюється за експоненціальним законом.

Мембрани використовують, щоб перетворювати тиск повітря на мех. переміщення. Переміщення це надто мале, воно становить величину порядку сотих часток міліметра, але й цього достатньо для того, щоб переміщувати загородження в дроселі. Саме такий зв'язок дуже часто використовують, конструюючи різні блоки АОМ п. У пневма-

тиці найчастіше застосовують мембрани з жорстким центром.

АОМ п., як і електронна *аналогова обчислювальна машина*, складається з набору різних функціональних блоків. Входи й виходи цих блоків являють собою штуцери, які для розв'язування даної задачі з'єднують шлангами відповідно до з'єднань електронних АОМ. Іноді схема мережі може бути жорсткою, тоді блоки АОМ п. складають на платах, з'єднувальні канали в яких виливають, штампують чи витравлюють. Осн. функціональними бло-

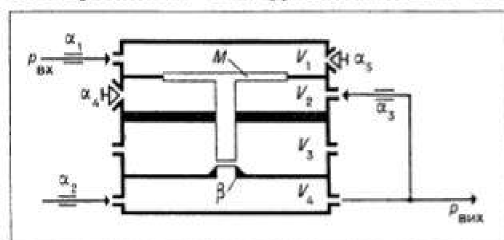


Схема пневматичного підсилювача.

ками АОМ п. є підсилювач, суматор, інтегратор, множильний пристрій та функціональний перетворювач.

П і д с и л ю в а ч (мал.) складається з дроселя β типу сопло-заслінка, яким керує мембранний блок M, трьох постійних дроселів α_1, α_2, α_3, двох регульованих дроселів α_4 і α_5 і чотирьох пневмоємностей V_1—V_4. В ємність V_1 через дросель α_1 подається вхідний тиск $p_{вх}$. Тиск у камері V_1 діє на мембрану, шток якої є заслінкою дроселя β. Внаслідок переміщування заслінки змінюється тиск у камері V_4. Цей тиск створюється джерелом живлення і є вихідним. Пропорційна залежність $p_{вих}$ від $p_{вх}$ забезпечується негативним *зворотним зв'язком*. Цей зв'язок виявляється у вигляді тиску, який надходить з виходу підсилювача через дросель α_3 на зворотний бік мембрани в камері V_2. Змінюючи регульовані дроселі α_4, α_5, коефіцієнт підсилення підсилювача можна змінювати в широких межах. Описаний підсилювач характеризується обмеженою витратою повітря на виході, бо в каналі живлення є постійний дросель. Через це при великих навантаженнях часто застосовують підсилювачі потужності.

Найпростіша схема с у м а т о р а являє собою зібраний у точку пучок лінійних дроселів. Якщо сумарна витрата повітря в точці з'єднання дорівнює нулеві, пристрій описується рівнянням $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (p_i - p_{вих}) = 0$, звідси $p_{вих} = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i$, при цьому $0 < k < 1$ і $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$. Ці співвідношення обмежують сферу застосування такого суматора. Схеми без зазначених обмежень побудовано за принципом компенсації.

І н т е г р а т о р и будують за схемою, що містить аперіодичну ланку (коеф. передавання її дорівнює одиниці), з позитивним зворотним зв'язком. Інтегратором, побудованим за такою схемою, є, напр., інтегратор Фернера, що працює в діапазоні низьких робочих тисків 0—100 *мм вод. ст.*

Множення тисків p_1 та p_2 грунтується на тому, що коефіцієнтом витрати дроселя, до якого підведено тиск p_1, можна керувати за допомогою тиску p_2. Тоді за певних умов реалізується залежність $p_{вих} = kp_1p_2$, в якій k — стале число. За цим принципом побудовано, напр., множильно-ділильний пристрій Ін-ту проблем керування АН СРСР.

Похибка при розв'язуванні задач на АОМ п. значно більша, ніж при розв'язуванні їх на електронних АОМ, а частотний діапазон (обчислюють його в частках герца) вужчий. Через це їх застосовують у тих галузях, де істотну роль відіграють їхні переваги: висока надійність, вибухобезпечність, нечутливість до високих температур, простота обслуговування, невелика вартість. Такими галузями є хім. виробництво, металургія, теплоенергетика, газова пром-сть, нафтодобування, нафтопереробка тощо. Наявність в АОМ п. рухомих мех. вузлів та низька їхня точність істотно звужують сферу застосування їх. Цих вад не мають цифрові пневматичні пристрої струминної техніки (див. *Пневмоніка*), які дедалі ширше застосовуються, витісняючи АОМ п.

АОМ п. є., напр., моделююча установка ПОМ-2 (СРСР), призначена для розв'язування звичайних лінійних дифер. рівнянь до 6-го порядку, та установка Фернера (НДР) для моделювання різних ланцюгів регулювання.

Літ.: Д м и т р и е в В. Н., Ч е р н ы ш е в В. И. Пневматические вычислительные приборы непрерывного действия. М.— Л., 1962 [бібліогр. с. 92—93]; Пневмо- и гидроавтоматика. М., 1964.

Л. А. Казакевич.

APL — *мова програмування* системи APL/360, що працює в *режимі розподілу часу;* призначена для розв'язування інженерних задач. Осн. одиницями інформації в APL є скаляри й масиви. *Масив* трактують як єдину величину, але за допомогою індексів можна звертатися до його елементів. Вектор (одновимірний масив) записують як послідовність чисел, розділених пробілами. Задаючи багатовимірні масиви, використовують спец. символ ρ. Напр., оператор

$$\mu \leftarrow 2\ 3\ \rho\ 4\ 6\ 12\ 4\ 2\ 8$$

присвоює ідентифікаторові μ значення — матрицю

$$\begin{matrix} 4 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \end{matrix}.$$

В APL використовують ряд примітивних одномісних і двомісних ф-цій (операцій), визначених і для скалярів і для масивів. Так, додавання

$$2\ 3\ 4 + 1 - 6\ 2$$

дає в результаті вектор 3 — 3 6. Крім примітивних, є й широкий набір складних ф-цій, напр.,

ф-ція вибирання перших (або останніх) n компонент з масиву, множення матриць тощо. Ф-ції використовують, будуючи вирази. *Програма* мовою APL являє собою послідовність відмічених операторів. Осн. з них є оператори присвоювання, умовного й безумовного переходу. Є засоби редагування програм після введення й безпосередньо під час введення. Багатий набір системних *команд* дає змогу слідкувати за процесом розв'язування задач та одержувати різні відомості про стан ресурсів машини.

Літ.: APL/360 reference manual. Chicago, 1968.

Т. О. Грінченко.

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА — знаходження для заданої функції такої іншої функції з певного класу, для якої середньоквадратичне відхилення від даної функції мінімальне. Середньоквадратичним відхиленням наз. усереднення з деякою вагою по заданій множині точок квадрату різниці заданої й апроксимуючої ф-цій. Середньоквадратичні наближення, або наближення за методом найменших квадратів, зручні з практичного погляду. Дуже часто значення наближуваної ф-ції беруть з експериментів, і, отже, вони мають випадкові *похибки*, а тому не доцільно вимагати точного збігу наближуваної й апроксимуючої функцій у заданих точках.

Нехай задано ф-цію $f(x)$ із деякого класу E. Розглянемо задачу про наближення цієї ф-ції ф-ціями $\varphi(x)$ із якогось вужчого класу E_1. За міру близькості ф-цій $f(x)$ і $\varphi(x)$ можна взяти величину ε, яка виражається ф-лою

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2} \qquad (1)$$

або

$$\varepsilon = \sqrt{\int_a^b p(x)\,[f(x) - \varphi(x)]^2\,dx}. \qquad (2)$$

де $p(x)$ — якась невід'ємна ф-ція, що називається вагою. Якщо ф-цію $\varphi(x) \in E_1$ вибрано так, що величини (1) або (2) набувають найменшого значення, то наближення називають відповідно точковим та інтегральним середньоквадратичним.

Для спрощення дальших викладок доцільно використати поняття абстрактного гільбертового простору H (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі), у якому задано скалярний добуток. Скалярним добутком двох елементів x, $y \in H$ наз. комплексне число (x, y), яке задовольняє умови: а) $(x, y) = \overline{(x, y)}$; б) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (λ, μ — комплексні числа); в) $(x, x) \geqslant 0$, при цьому $(x, x) = 0$ тільки у випадку $x = 0$. Норму $\|x\|$ елемента $x \in H$ визначають рівністю $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Прикладами гільбертового простору є простори l_2 та L_2. Простір l_2 — це простір числових послідовностей, у якому скалярний добуток елементів $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ та $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ визначається за ф-лою

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i, \qquad (3)$$

а простір L_2 — це простір інтегрованих з квадратом ф-цій із скалярним добутком

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,dx. \qquad (4)$$

Загальнішими за l_2 і L_2 є простори l_2 і L_2 з вагою, в яких скалярні добутки визначають відповідно за ф-лами

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \bar{y}_i \qquad (3')$$

та

$$(f, g) = \int_a^b p(x) \cdot f(x) \cdot \bar{g}(x)\,dx. \qquad (4')$$

Елементи x та y називаються ортогональними, якщо $(x, y) = 0$. В задачі наближення елементів гільбертового простору важливим є поняття лінійної залежності й незалежності системи елементів. Елементи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ наз. лінійно незалежними, якщо з рівності

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = 0 \qquad (5)$$

випливає, що $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. В протилежному випадку елементи наз. лінійно залежними. Вираз $s = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ наз. лінійною комбінацією елементів.

Розгляньмо задачу про найкраще наближення елемента $x \in H$ лінійною комбінацією s_n лінійно незалежних елементів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Ця задача полягає у визначенні константи c_i з умови мінімуму величини $\varepsilon = \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\|$. Задача зводиться до того, щоб знайти мінімум ф-ції $\varepsilon = \varepsilon(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ n змінних. Користуючись необхідною умовою існування *екстремуму* ф-ції багатьох змінних, тобто умовою

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial c_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \qquad (6)$$

для визначення c_i одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь (див. *Рівнянь класифікація*) n-го порядку:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\varphi_j, \varphi_i) = (x, \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7)$$

Оскільки визначник системи (7) є визначником Грамма, який, як відомо, для системи лінійно незалежних елементів відмінний від нуля, то система (7) має єдиний розв'язок, тобто найкраще наближення s_n існує і визна-

чається однозначно. У випадку, коли система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ ортонормована, тобто $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$, а $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$, система (7) спрощується і набуває вигляду

$$c_i = (x, \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

В цьому випадку $s_n = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\varphi_i$, тобто найкраще наближення є відрізком ряду Фур'є елемента x за системою $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, а c_i — коеф. Фур'є. Величина ε визначається за ф-лою

$$\varepsilon = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2}. \qquad (9)$$

Якщо ортонормована система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ є повною, тобто такою, що з рівностей $(g, \varphi_i) = 0$ $(g \in H,\ i = 1, 2, \ldots)$ випливає $g = 0$, то $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Прикладом повної ортонормованої системи в просторі l_2 є система

$$\varphi_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad \varphi_2 = \{0, 1, 0, \ldots\},$$
$$\varphi_3 = \{0, 0, 1, \ldots\}, \ldots \qquad (10)$$

У просторі L_2 повними ортонормованими системами є, напр., система тригонометричних ф-цій

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots \qquad (11)$$

на відрізку $[-\pi, \pi]$, система многочленів Лежандра

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (12)$$

на відрізку $[-1, 1]$.

Розгляньмо докладніше задачу про *точкове середньоквадратичне наближення* ф-цій. Нехай ф-цію $f(x)$ задано на якійсь множині точок $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ відрізка $[a, b]$. Припустимо, що ф-ції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, визначені на $[a, b]$, є лінійно незалежними на множині x, тобто з рівностей

$$c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \cdots + c_m\varphi_m(x_i) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

випливає, що $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Задача про найкраще наближення ф-ції $\varphi(x)$ лінійною комбінацією $s_m(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)$ зводиться до знаходження констант c_i, які мінімізують функціонал

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left[f(x_i) - \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i) \right]^2, \qquad (13)$$

де $p_i > 0$ — відомі постійні.

Введемо скалярний добуток елементів $f(x)$ і $g(x)$ за ф-лою

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(x_i) \cdot g(x_i). \qquad (14)$$

Систему (7) в цьому випадку можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi_j(x_k) \cdot \varphi_i(x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot f(x_k) \cdot \varphi_i(x_k). \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (15)$$

Розгляньмо окремі випадки ф-цій $\varphi_i(x)$, які найчастіше трапляються на практиці. Нехай $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тоді маємо $s_m(x) = c_1 + c_2x + \ldots + c_mx^{m-1}$ і система (15) для визначення c_j має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{j-1} x_k^{i-1} = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot f(x_k)\, x_k^{i-1}. \qquad (16)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

За ф-ції $\varphi_i(x)$ часто беруть ортогональні на множині рівновіддалених точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (з кроком h) многочлени Чебишова

$$P_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{j}{i+j} \frac{t^{[j]}}{n^{[j]}}, \qquad (17)$$
$$i = 0, 1, \ldots, m.$$

де $t = \frac{x - x_0}{h}$, $t^{[j]} = t(t-1)\ldots(t-j+1)$, $n^{[j]} = n(n-1)\ldots(n-j+1)$.

У цьому випадку константи c_i визначають за ф-лою

$$c_i = \frac{(2i+1)\,n^{[i]}}{(n+i+1)^{[i+1]}} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot p_{i,n}(j), \qquad (18)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

У багатьох випадках найкраще наближення доцільно шукати у вигляді тригонометричного многочлена

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \qquad (19)$$

Якщо $p_i = 1$ і рівновіддалені точки $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $N \geqslant 2n+1$ беруть на відрізку $[0, 2\pi]$, то коеф. визначають за ф-лами

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \cos kx_i, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad (20)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \sin kx_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

В задачі найкращого інтегрального середньоквадратичного наближення на відрізку $[a, b]$ задано якусь ф-цію $f(x)$ і систему лінійно незалежних ф-цій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Вважатимемо, що ці ф-ції належать гільбертовому просторові L_2 з вагою, для якого скалярний добуток

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx,$$

де $p(x)$ — деяка невід'ємна ф-ція. Якщо найкраще наближення шукати у вигляді $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i(x)$, то для визначення c_i одержимо систему

$$\sum_{j=0}^{n} c_i \int_a^b p(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi}_i(x)\, dx = \int_a^b p(x) f(x) \overline{\varphi}_i(x)\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Як і в випадку точкового наближення, розглянемо деякі найбільше поширені класи ф-цій $\varphi_i(x)$. Одним із таких класів є система $\varphi_i(x) = x_i$. В цьому випадку система (21) має вигляд

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i+j} c_j = b_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{22}$$

де $a_k = \int_a^b p(x) x^k dx$, $b_k = \int_a^b p(x) f(x) x^k dx$.

Оскільки система $\{x^i\}$ є повною, то довільну ф-цію $f(x) \in L_2$ з вагою можна наблизити алгебр. многочленом як завгодно точно.

Широкий клас алгебр. многочленів, якими часто наближають задані ф-ції, становлять многочлени (многочлени Якобі), які для відрізка $[-1, 1]$ з ваговою ф-цією $p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$ утворюють ортогональну систему і мають вигляд

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1 - x)^{-\alpha} (1 + x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\alpha+n} (1 + x)^{\beta+n}]. \tag{23}$$

Якщо $\alpha = \beta = 0$, то маємо многочлени Лежандра. Якщо $\alpha = \beta = -{}^1/_2$, тобто при $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, то маємо многочлени Чебишова 1-го роду

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

а в випадку $\alpha = \beta = {}^1/_2$, тобто при $p(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ — многочлени Чебишова 2-го роду

$$V_n(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \sin[(n + 1) \arccos x], \tag{25}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для періодичних ф-цій найкраще наближення природно шукати у вигляді тригонометричного многочлена (19). При цьому коеф. a_k і b_k визначають за ф-лами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Якщо $f(x)$ парна ф-ція, то $b_k = 0$; якщо ж $f(x)$ непарна, то $a_k = 0$. За допомогою тригонометричних многочленів задану ф-цію $f(x) \in L_2$ також можна наблизити з довільним ступенем точності.

Розгляньмо один *обчислювальний алгоритм* середньоквадратичної апроксимації функції багатьох змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (функція відома своїми наближеними значеннями $y_i = f(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$, $j = 1, 2, \ldots, N$ в N точках у вигляді $y = \sum_{i=1}^{m} c_k \varphi_k(X)$, $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Оцінимо й похибки знайденого розв'язку. Умову

$$y_j = \sum_{h=1}^{m} c_h \cdot \varphi_h(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{27}$$

$$m < N,$$

вважатимемо правильною з абсолютною похибкою, яка не перевищує η. Ця похибка виникає внаслідок неточності зображення умови (27) та неточності визначення величин $\varphi_k(x_j)$. Припустимо, що замість y_j відомі величини $z_j = y_j + \xi_j$, де ξ_j — незалежні й мають нормальний розподіл з нульовим середнім і *дисперсією* σ_j^2, причому $\sigma_j = \sigma/p_j$. Ваги p_j вважаються відомими, а σ — невідомою. На основі спостережень $z(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ оцінимо c_k і σ. Невідомі коеф. c_k шукатимемо за *найменших квадратів методом* (м. н. к.), мінімізуючи по c_k ф-цію

$$I = \sum_{j=0}^{N} p_j \left[z_j - \sum_{h=1}^{m} c_h \cdot \varphi_k(x_j) \right]^2. \tag{28}$$

Виходячи з принципу максимуму правдоподібності, м. н. к. можна дати ймовірнісне тлумачення. Для цього складемо ф-цію правдоподібності вибірки $z_1, z_2, \ldots, z_N$ незалежних вимірів

$$Z(z_1, z_2, \ldots, z_N) = (p_1, p_2, \ldots, p_N)^{1/2} \times$$

$$\times (2\pi)^{-N/2} \cdot (\sigma^2)^{-N/2} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{N} p_j \times \right.$$

$$\left.\times\left[z_j - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x_j)\right]^2\right\}. \qquad (29)$$

Звідси видно, що при довільному σ^2 ф-ція Z набуває найбільшого значення лише тоді, коли величина $\sum_{j=1}^{N} p_j [z_j - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x_j)]^2$ набуває найменшого значення, тобто при виборі c_k з умови (28).

Розв'язування задачі (28) зводиться до розв'язування нормальної системи лінійних алгебр. рівнянь

$$\sum_{k=1}^{m} (\varphi_i(x), \varphi_k(x))\, c_k = (\varphi_i(x), z), \qquad (30)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

або в матричній формі

$$Ac = b, \quad A = \{a_{ik}\}, \quad c = \{c_k\}, \quad b = \{b_i\}, \quad (30)'$$

де

$$a_{ik} = (\varphi_i(x), \quad \varphi_k(x)) = \sum_{j=1}^{N} p_j \varphi_i(x_j)\, \varphi_k(x_j),$$

$$b_i = (\varphi_i(x_j), z) = \sum_{j=1}^{N} p_j \cdot \varphi_i(x_j) \cdot z_j. \qquad (31)$$

При безпосередньому розв'язуванні одержаної системи слід мати на увазі, що застосовувати прямі методи доцільно тоді, коли її порядок порівняно невисокий. Коли ж порушуються допустимі обмеження по обсягу пам'яті ЕОМ або стає значною похибка округлень, доцільно користуватись ітераційними методами. Оскільки системи (30), як правило, погано обумовлені, то замість них розв'язують систему

$$(A + \alpha E)\, c = b, \qquad (32)$$

де E — одинична матриця, а $\alpha > 0$ — якийсь параметр. Внаслідок розв'язування одержуємо наближені значення $\tilde{c}_k$ шуканих коеф. c_k разом з *довірчими інтервалами*

$$[\tilde{c}_k - \gamma\sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}}\sigma, \quad \tilde{c}_k + \gamma\sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}}\sigma], \quad (33)$$

які покривають c_k з заданою *імовірністю* P, $\{A^{-1}\}_{kk}$ — діагональний елемент оберненої матриці системи (30), а σ міститься в інтервалі $[\gamma_1 \cdot I/N - m, \gamma_2 \cdot I/N - m]$ (γ_1, γ_2 і γ при заданих P і $N - m$ відшукуються за спец. таблицями. Мішана статистико-детермінована оцінка неусувної похибки середньоквадратичної апроксимації має вигляд:

$$|c_k - \tilde{c}_k| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\det A} \cdot \frac{\eta}{\min\limits_{j} |\varphi_k(x_j)|} + $$

$$+ \gamma\sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}}\left(\sigma + \frac{\eta}{\sqrt{N-m}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N} p_j}\right), \qquad (34)$$

$$\left|y_i - \sum_{k=1}^{m} \tilde{c}_k \varphi_k(x_j)\right| \leqslant \eta + \gamma_1\sqrt{\frac{m}{p_j}}\left(\sigma + \right.$$

$$+ \frac{\eta}{\sqrt{N-m}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N} p_j} + \frac{m \cdot \eta \cdot \sqrt{e}}{\det A} \times$$

$$\left.\times \frac{\max\limits_{k,\,j} |\varphi_k(x_j)|}{\min\limits_{k,\,j} |\varphi_k(x_j)|}\right).$$

Для обчислювання похибок округлень необхідно фіксувати конкретний метод розв'язування системи (30). Так, наприклад, для відносної похибки округлень розв'язку c_τ, знайденого методом квадратного кореня, досліджено мажорантні

$$\frac{\|c - c_\tau\|}{\|c_\tau\|} \leqslant 2^{-\tau} m \|A^{-1}\|,$$

$$\frac{\|c - c_\tau\|}{\|c_\tau\|} \leqslant 2^{-\tau} \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

та ймовірнісні

$$\left(M\frac{\|c - c_\tau\|^2}{\|c_\tau\|}\right)^{1/2} \leqslant 2^{-\tau} m\, (M\|A^{-1}\|^2)^{1/2},$$

$$\left(M\frac{\|c - c_\tau\|^2}{\|c_\tau\|^2}\right)^{1/2} \leqslant 2^{-\tau} (M\|A^{-1}\|^2 \|A\|^2)^{1/2}$$

оцінки, відповідно для обчислень з фіксованою та плаваючою комами (тут τ — розрядність даної ЕОМ, знак M — матем. сподівання, знак $\|\ \|$ — евклідова норма).

Літ.: Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., 1962 [бібліогр. с. 341—343]; Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Воеводин В. В. Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М., 1969 [бібліогр. с. 148—153]; Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., 1967.

М. С. Курпель, А. Ю. Лучка, В. С. Остапчук.

АПРОКСИМА́ЦІЯ ФУ́НКЦІЙ — заміщення різних функцій «близькими» до них, зручнішими для користування функціями, які належать до певної заданої сім'ї функцій. У найпростішому й основному за своїм значенням одновимірному випадку А. ф. ідеться про наближене представлення заданої ф-ції $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ за допомогою виразу вигляду $\Psi(x; K) \equiv \Psi(x; k_0, \ldots, k_n)$, де компоненти $k_0, \ldots, k_n$ параметричного вектора K визначають з умови якомога найменшого відхилення $\Psi(x; K)$ від $f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ або, інакше кажучи, відстані $\mu(f, \Psi)$ між ф-ціями f і Ψ, які тут вважають неперервними на $[a, b]$. Ця вимога набуває певного змісту

при ототожненні $\mu(f, \Psi)$ з нормою різниці: $\|f - \Psi\| = \|f - \Psi\|_{[a,b]}$ або, в загальнішому вигляді, різниці з вагою: $\|w \cdot (f - \Psi)\|$, де вага $w = w(x)$ додатна при $a \leqslant x \leqslant b$. У вживаних постановках задачі А. ф., а саме: при апроксимації (А.) рівномірній («чебишовській», або «гранично-степеневій») і А. середній степеневій за міру відхилення $\mu(f, \Psi) \equiv \mu[K] \equiv \|f(x) - \Psi(x; K)\|$ при $w(x) \equiv 1$ беруть відповідно (норма рівномірна чи середня степенева):

$$\mu_\infty(f, \Psi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \Psi(x; K)| \equiv L(K), \quad (1)$$

$$\mu_q(f, \Psi) = \left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x) - \Psi(x; K)|^q dx\right\}^{1/q},$$

$$1 \leqslant q < \infty. \quad (2)$$

Взявши в ф-лі (2) $q = 2$ або $q = 1$, одержимо найважливіші випадки середнього квадратичного відхилення та «відхилення в середньому». Визначивши (якщо це можливо) значення $k_i = k_i^*$, $i = 0, \ldots, n$, з умови мінімуму $L(K)$ або величини інтеграла в ф-лі (2), одержимо апроксимуючу ф-цію $\Psi(x; K^*)$, яка дає найщільніше наближення (Н.) за відповідною нормою — μ-наближення (μ-Н.) до $f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ в класі ф-цій вигляду $\Psi(x; K)$, тобто розв'язок відповідної задачі А. Слово «найщільніше» перед μ-Н. досить часто опускають, а під розв'язком задачі А. за даною нормою (задачі μ-Н.) часто розуміють не саме одержуване μ_∞-Н. або μ_q-Н. $\Psi(x; K^*)$, а набір (параметричний вектор) K^*, що його визначає,— точніше K_∞^* або K_q^* відповідно.

Щоб спростити трактування або з причини обмеженості інформації розглядають ще й дискретизовані видозміни зазначених задач μ_∞-А. і μ_q-А., в яких неперервна область $[a, b]$ заміщується якоюсь N-точковою сіткою $B_N \subset [a, b]$, а інтеграл у ф-лі (2) — відповідною сумою.

На практиці найчастіше застосовують задачі А. з параметрами, які входять лінійно:

$$\Psi(x; K) = k_0\varphi_0(x) + k_1\varphi_1(x) + \cdots + k_n\varphi_n(x), \quad (3)$$

де $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — ф-ції, лінійно незалежні на $[a, b]$. У цьому разі (А. поліноміальної при $\varphi_i(x) = x^i$ та квазіполіноміальної при іншому виборі $\varphi_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$) завжди забезпечено існування розв'язків K_∞^*, K_q^*, які реалізують точний мінімум відповідного відхилення. Якщо параметри k_i, $i = 0, \ldots, n$ входять нелінійно — це має місце не завжди. Зауважимо, що при μ_∞-*A*, незалежно від того, існує чи не існує точний розв'язок $\Psi(x; K_\infty^*)$, залишаються принципово застосовними ітеративні методи (див. *Апроксимація функцій рівномірна*) для послідовного зниження, наскільки це практично можливо, величини $\mu_\infty > \inf_K \mu_\infty(f, \Psi(x; K))$. Питання лінійного чи нелінійного входження параметрів k_i в $\Psi(x; K)$ не слід змішувати з питанням про лінійну або нелінійну залежність K^* від заданої ф-ції $f(x)$. Якщо $f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$, то навіть при А. типу (3), взагалі кажучи, $K^*[f] \neq c_1K^*[f_1] + c_2K^*[f_2]$, крім випадку μ_2-Н. З цим пов'язана порівняна простота прямої (без необхідності ітерацій) обчисл. побудови μ_2-Н. типу (3) (див. *Апроксимація функції середньоквадратична*).

Те, що повинен існувати хоча б один розв'язок K^* при $\Psi(x; K)$ вигляду (3), має місце й для багатовимірного варіанту випадку (3), коли замість скалярного аргумента $x \in [a, b] \equiv G_1$, маємо точку $x = (x_1, \ldots, x_m)$, яка пробігає деяку обмежену замкнену область $G = G_m$ в m-вимірному евклідовому просторі R_m. При багатозначності (неєдиності) розв'язку K^* мн-на $\{K^*\}$ є у всякому разі опукла, обмежена і замкнена. У випадку норми μ_q для $q > 1$, $m \geqslant 1$ розв'язок K^* завжди єдиний, що забезпечується «строгою опуклістю» норми μ_q, $1 < q < \infty$. Для $\mu = \mu_\infty$ або μ_1 може мати місце єдиність або множинність μ-Н., що залежить від конкретного випадку, тобто при фіксованому вигляді $\Psi(x; K)$ і фіксованій G_m, $m \geqslant 1$ і, істотно, від взятої $f(x)$. При $m = 1$ єдиність розв'язку K_∞^* або K_1^* виявляється забезпеченою для довільно взятої (неперервної) $f(x)$, коли система $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ є «Т-системою», тобто задовольняє на $[a, b]$ відому з теорії рівномірної А. ф. умову Хаара (зокрема, випадки А. многочленами $\Sigma k_i x^i$, класичними тригонометричними сумами або експоненціальними сумами $\Sigma k_i e^{\gamma_i x}$ з наперед заданими множниками γ_i).

Переходячи до характеризації (тобто критеріїв розпізнавання) μ-Н. вигляду (3), для $\mu = \mu_q$, $q = 2, 4, 6\ldots$ при $m \geqslant 1$ питання розв'язується однаково, в алгебричній відносно k_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ формі, з допомогою умови ортогональності $(f - \Psi^*)^{q-1}$ на G_m до $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Відзначимо, що в термінах ортогональності формулюється ще при $m = 1$ характеризація Н. у середньому $\Psi(x; K^*)$, коли останнє співпадає з $f(x)$ не більш, як у скінченному числі точок $x \in [a, b]$; тільки тут ідеться про ортогональність сигнум-функції sign $(f - \Psi^*)$ до φ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Істотно інакше формулюють теореми характеризації для μ_∞-Н., а саме: у термінах чебишовського альтернансу для випадку T-систем $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ і квазіальтернансу — для випадку нехарівських систем. Слід відзначити, що в трактуванні задач μ_∞-Н. з теоремами характеризації тісно пов'язані критерії оцінки

набл. розв'язків $K = \breve{K}$, що дають строгу верхню межу для $L(\breve{K}) - L(K^*_\infty)$.

До задач А. з параметрами, які входять нелінійно, належать класична задача дробово-раціональної А. вигляду:

$$\Psi = R_{l,n-l}(x) = \frac{k_0 + k_1 x + \cdots + k_l x^l}{k_{l+1} + k_{l+2} x + \cdots + k_{n+1} x^{n-l}}, \quad (4)$$

загальна задача експоненціальної А.: $\Psi(x; K, S) = \Sigma k_i e^{s_i x}$ при s_i, які наперед не фіксуються, та ін. До виду (4) досить близькою є А. за допомогою частки від ділення двох квазіполіномів, регулярно аналітичних на $[a, b]$.

На практиці в кожному конкретному випадку постановки задачі А. для даної ф-ції $f(x)$ доводиться з'ясовувати передусім питання про доцільний вибір самого способу А., тобто норми μ і вигляду $\Psi(x; k)$. Коли необхідно забезпечити достатню малість відхилів $|f - \Psi|$ в усіх $x \in G$ перевагу, природно, віддають нормі μ_∞ (у цьому розумінні μ_∞-Н. наз. також, дещо умовно, найкращими). Якщо потрібна малість $|f - \Psi|$ «в сумарній оцінці», тоді підійде норма μ_1 або μ_2. Норма μ_2 має принципову перевагу над іншими, коли значення самої ф-ції $f(x)$ задано з *похибками*, що мають випадковий характер. Враховують і порівняну простоту побудови лінійних μ_2-Н., яка, зрештою, втрачається, коли параметри нелінійно входять у $\Psi(x; K)$. Вибір норми μ_∞ набуває особливої переваги при А. ф. $f(x)$, $x \in G_m$, заданої неявно як розв'язок *крайової задачі* рівняння у частинних похідних еліптичного або параболічного типу, з урахуванням теореми про максимум модуля, яка має місце.

А що ж до вибору форми $\Psi(x; K)$, то вона повинна бути придатною для якомога точнішого відтворення поведінки даної ф-ції $f(x)$ при $x \in G$ й зручною у використанні для обчислювання при підстановці індивідуальних значень x або для виконання аналітичних операцій. Ці вимоги добре задовольняють многочлени $P_n(x)$. Але для обчисл. застосувань (зокрема, при складанні стандартних підпрограм для введення ф-цій в ЕЦОМ) не менш важливе значення мають раціональні дроби (4), які гнучкіше пристосовуються до $f(x)$ у випадках, напр., аналітичної $f(x)$, яка має полюс поблизу відрізка $[a, b]$, або неперервної $f(x)$ з графіком, що включає при $a \leqslant x \leqslant b$ кутову точку чи точку з вертикальною дотичною, тощо. Збільшувати гнучкість А. іноді можна при збереженні поліноміальної форми А. й замінюючи змінну з введенням, напр., $z = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ замість x.

Літ.: Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.— Л., 1949 [бібліогр. с. 679—686]; Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954 [бібліогр. с. 321—325]; Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.— Л., 1964 [бібліогр. с. 425—434]; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 [бібліогр. с. 397—403]; Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., 1969 [бібліогр. с. 612—623]; Cheney E. W. Introduction to approximation theory. New York, 1966; Meinardus G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin, 1967; Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. М., 1969 [бібліогр. с. 422—431].

Є. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк.

АПРОКСИМА́ЦІЯ ФУ́НКЦІЙ РІВНОМІ́РНА (чебишовська) — *апроксимація функцій* при умові мінімізації рівномірної норми відхилення. На відміну від *апроксимації функції середньоквадратичної*, задача А. ф. р. допускає точне пряме (без ітерацій) розв'язання тільки в небагатьох вартих уваги, але сугубо окремих випадках, відомих з часу праць рос. математика П. Л. Чебишова (1821—94) та його найближчих послідовників. У загальнішій постановці вона потребує застосування ітеративних *чисельних методів* А. ф. р.; розробка таких методів набула виразного значення у зв'язку з розвитком сучас. обчисл. техніки, зокрема ЕЦОМ.

Одна з найважливіших задач А. ф. р. полягає в тому, щоб знайти набір $K = (k_0, \ldots, k_n)$ коеф. многочлена $P_n(x) = P_n(x; K) = k_0 + k_1 x + \ldots + k_n x^n$, який задовольняє вимогу мінімаксу:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L(K) = \min! \quad (1)$$

$$(\min_K L(K) := \rho \equiv E_n[f]),$$

де $f(x)$ — неперервна ф-ція, задана на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$.

Відповідно до теореми Чебишова, переформульованої за Кірхбергером і Валле Пуссеном, єдиний розв'язок $K = K^*$ задачі (1) збігається з розв'язком $K = K^*_X$ формульованої аналогічно (1) якоїсь (дискретної — інтерполяційної в узагальненому розумінні) «елементарної» задачі А. ф. р. виду

$$\max_{x \in X} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L_X(K) = \min! \quad (2)$$

$$(\min L_X(K) := \rho_X),$$

де $X = \{x_0, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$ означає таку $(n+2)$-точкову підмножину $X = \hat{X}$, для якої величина ρ_X (що залежить від вибору X) має найбільше можливе значення, яке точно співпадає з $\rho = \rho_{[a,b]}$. Побудову многочлена $P_n = P_n(x, K^*_X)$ — розв'язку задачі (2) при даному виборі X можна виконати, використовуючи ньютонів звичайний інтерполяційний апарат розділених різниць, за даними:

$$P_n(x_i) = f(x_i) - (-1)^i \upsilon \rho_X, \quad |\upsilon| = 1; \quad (3)$$

$$i = 0, \ldots, n+1;$$

$$\upsilon \rho_X = \frac{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})}{\chi(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})}, \quad \chi(x_i) \equiv (-1)^i. \quad (3')$$

З $n+2$ умов (3) — (3′), завжди сумісних, одна служить для контролю обчислень.

Осн. метод послідовних чебишовських інтерполяцій (ПЧІ) для А. ф. р. в застосуванні до загальної задачі (1) полягає в доцільно організованому процесі послідовної побудови (за схемою (3) — (3′)) розв'язків задач типу (2) з $X = X^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \rho_{X^{(\nu+1)}} > \rho_{X^{(\nu)}}$ («метод підвищувальної дії»), причому має місце рівномірна збіжність процесу ($K^*_{X^{(\nu)}} \to K^* = K^*_{\widehat{X}}$) з досить швидкою реалізацією, при $\nu \to \infty$, двох осн. граничних співвідношень:

$$\rho - \rho_{X^{(\nu)}} \to 0 \text{ і } L(K^*_{X^{(\nu)}}) - \rho \to 0. \quad (4)$$

При цьому набір $X^{(\nu+1)}$ складається з точок знакопереміжних екстремумів відхилення $\Delta_{(\nu)}(x) = f(x) - P_n(x;\ K^*_{X^{(\nu)}})$. Рекомендований склад початкового набору:

$$X^{(0)} = \left\{\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \cos\frac{(n+1-i)\pi}{n+1}\right\} i = 0, \ldots, n+1. \quad (5)$$

Аналогічно формулюють цей метод і при можливій дискретизації самої задачі (1), коли відрізок $[a, b]$ замінюють якоюсь заданою на ньому N-точковою сіткою B_N ($N > n + 2$); при цьому для спрощення *програми* числ. реалізації розв'язку на ЕЦОМ перехід від $X^{(\nu)}$ до $X^{(\nu+1)}$ іноді зумовлюється вимогою заміни лише однієї з $n+2$ точок, з включенням в $X^{(\nu+1)}$ точки абс. максимуму за $x \in [a, b]$ ф-ції $|\Delta_{(\nu)}(x)|$. У будь-якому варіанті методу ПЧІ на кожному кроці водночас одержують і оцінку досягнутого ступеня точності на основі встановлення верхньої межі для $L - \rho$.

Розроблений для тієї самої задачі (1) також збіжний, але менш стандартизований метод (метод знижувальної дії), явно основується на принципі монотонності: $L(K^{(\nu+1)}) < L(K^{(\nu)})$. Схожі методи одного й другого принципів дії застосовні і при заміні алгебричних многочленів $P_n(x)$ тригонометричними або, загальніше, квазіполіномами $F_n(x) = \sum_{s=0}^{n} k_s \varphi_s(x)$ якоїсь «Т-системи» ф-цій $\varphi_s(x)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, тобто системи лінійно незалежних і неперервних ф-цій φ_s, які задовольняють умову Хаара: визначник $(n+1)$-го порядку $|(\varphi_s(x_i)|$, $0 \leqslant i, s \leqslant n$ не повинен перетворюватися на 0 ні для якого набору різних між собою $n+1$ точок $x_0, \ldots, x_n$ на $[a, b]$. А у випадках нехаарівських систем $\{\varphi_s\}$ і, зокрема, багатовимірних $\{\varphi_s(x, y, \ldots, v)\}$ при можливій багатозначності розв'язку задачі А. ф. р. питання звичайно полягає в тому, щоб знайти один із шуканих наборів $K^* \in \{K^*\}$, де відомо напевно, що множина $\{K^*\}$ є опуклою. Неперервну область апроксимації B тут доводиться взагалі замінювати підмножиною точок якоїсь сітки B_N, а застосовні до дискретизованої т. ч. задачі рівномірної А. ф. р. (рівносильній задачі А. ф. р. для системи несумісних лінійних рівнянь) вживані методи підвищувальної й знижувальної дії виявляються звідними до двох взаємно двоїстих варіантів *симплекс-методу* для *програмування лінійного* (ПЛ).

Вище було розглянуто задачі А. ф. р. з лінійно вхідними параметрами (апроксимації многочленами P_n або квазімногочленами F_n). Для цих задач найбільшою мірою розроблено обчисл. методи побудови розв'язків, а також критерії характеризації точних розв'язків та оцінки набл. розв'язків. У разі А. ф. р. многочленами Т-систем для точних розв'язків має місце критерій чебишовського альтернансу: різниця $f(x) - F_n(x; K^*) = f(x) - \sum_{s=0}^{n} k_s^* \varphi_s(x)$ повинна в яких-небудь $n+2$ точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ відрізка $[a, b]$ набувати найбільших за абс. величиною значень $\pm L(K^*)$ з чергуванням знаків. А в разі систем $\varphi_s(\mathfrak{b})$, $s = 0, 1, \ldots, n$, нехаарівських ($\mathfrak{b} \equiv x$ в одновимірних задачах, $\mathfrak{b} \equiv (x, y, \ldots, v)$ в задачах багатовимірних) має місце не настільки безпосередньо наочне, але таке, що зберігає ефективний характер, узагальнення в формі критерію квазіальтернансу. Цей критерій пов'язується з наступним нехаарівським аналогом теореми Чебишова, який суттю свого змісту точно зберігає силу й для багатовимірних задач А. ф. р., але для більшої простоти його можна сформулювати тут для випадку одновимірного ($\mathfrak{b} \equiv x$): всякий розв'язок $K = K^*$ задачі А. ф. р. формального типу (1), але з заміною $P_n(x; K)$ на квазіполіном $F_n(x; K)$ нехаарівської системи $\varphi_s(x)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, є також розв'язком аналогічної «елементарної» задачі А. ф. р., одержуваної при заміні відрізка $[a, b]$ якоюсь його (заздалегідь невідомою) мінімальною за складом r-точковою підмножиною $\widehat{X} = \{\widehat{x}^{(1)}, \ldots, \widehat{x}^{(r)}\}$, де $r \leqslant n + 2$, $r \geqslant 1$. При цьому для $i = 1, \ldots, r$, $|f(\widehat{x}^{(i)}) - F_n(\widehat{x}^{(i)};\ K^*)| = L(K^*)$, а знаки вказаних r відхилень $f - F_n^*$ збігаються зі знаками (необов'язково почережними, інколи навіть однаковими між собою) коеф. «елементарної» лінійної залежності між r виразами $k_0\varphi_0(\widehat{x}^{(i)}) + \ldots + k_n\varphi_n(\widehat{x}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, r$, розглядуваними як лінійні форми від $k_0, k_1, \ldots, k_n$. Застосування цього критерію квазіальтернансу істотно ефективізується при дискретизації задачі А. ф. р. (з використанням сітки $B_N \subset [a, b]$).

З теоремою про чебишовський альтернанс та її узагальненням тісно пов'язується висхідне (в поліноміальному одновимірному випадку) до Валле Пуссена (1910) питання встановлення нижньої межі для мінімаксного відхилення ρ, а, отже, й верхньої межі для $L(\breve{K}) - \rho$, що безпосередньо доставляє критерій строгої оцінки точності набл. реалізації $(\breve{K})$ розв'язку розглядуваних задач А. ф. р.

Для задач А. ф. р. за допомогою виразів $\Psi(x; K)$ з нелінійно вхідними параметрами k_s, $s = 0, 1, \ldots, n$ відзначимо, що у випадку важливої задачі А. ф. р. для $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ за допомогою раціонального дробу $R_{l,\, n-l}(x) = P_l(x;\ K')/P_{n-l}(x;\ K'')$ осн. вживаний підхід полягає в поширюванні методу ПЧІ. Метод зберігає свою ефективність, хоч тут доводиться особливо враховувати випадок скорочуваності шуканого дробу й, окрім того, можливість «осічок» при несприятливому виборі інтерполяційних підмножин $X \subset [a, b]$. До узагальнююче-близької, але делікатнішої за своєю природою задачі А. ф. р. за допомогою частки двох квазіполіномів, при заміщенні області апроксимації B (можливо, й багатовимірної) сіткою B_N, можна застосовувати порівняно трудомісткий, але безвідмовно діючий «метод лінійних нерівностей» — метод проб, для того щоб взяти «ρ»$_{B_N}$ у вузьку вилку (використовуючи апарати ПЛ). У загальніших випадках нелінійних задач А. ф. р., знов-таки при сітковій дискретизації області апроксимації, застосовують різні прийоми послідовної диф. лінеаризації за параметрами $\{k_s\}$.

При А. ф. р. велике значення має вибір виду апроксимуючого виразу $\Psi(x;\ K)$. Конкретизуючи вид $\Psi(x;\ K)$, треба враховувати в належних випадках функціональні співвідношення, які задовольняє $f(x)$ (парність, непарність тощо), а в разі нескінченного інтервалу — асимптотичну поведінку $f(x)$ при $|x| \to \infty$. Напр., апроксимуючи при $x \in [a, b] = [-h, h]$ ф-цію $f(x) = e^x$ в класі дробів $R_{3,3}(x)$ і враховуючи функціональне співвідношення $f(-x) \equiv [f(x)]^{-1}$, природно, замість загального виду вказаного дробу, виходити з

$$\Psi = \frac{1 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3}{1 - k_1x + k_2x^2 - k_3x^3},$$

$$(\Psi(-x) \equiv [\Psi(x)]^{-1}), \tag{6}$$

скорочуючи так більше як удвоє кількість потрібних параметрів.

При А. ф. р. в загальній формі, такій як $P_n(x)$ або $R_{l,n-l}(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, одним з істотних параметрів є саме число n, бажане значення якого $n = n_\eta$ має відповідати якнайекономнішому виконанню вимог виду $\rho^{(n)} :\equiv E_n[f] \leqslant \eta$ або $\rho^{[n]} \equiv E_{l,n-l}[f] \leqslant \eta$ при заданому $\eta > 0$. В разі форми $R_{l,\, n-l}(x)$ попереднє взяття у вилку значення $n = n_\eta$ можна виконувати зондуванням за допомогою проб, використовуючи апарати ПЛ із заміною відрізка $[a, b]$ сіткою $B_N \subset \subset [a, b]$. В разі форми $P_n(x)$, допускаючи для спрощення формулювань $[a, b] = [-1, 1]$, щоб прибл. визначити n_η, можна використати послідовність $\{A_\nu\}$ коеф. розкладу $f(x)$ в ряд за многочленами Чебишова $T_\nu(x)$ (умова $|A_{n_\eta+1}| + |A_{n_\eta+2}| + \ldots < \eta + \varepsilon$) або, що те саме, коеф. розкладу $f(\cos\Theta)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$, в тригонометричний косинус — ряд. За регулярної аналітичності $f(x)$ еквівалентні результати швидше одержують певним способом послідовного «згортання» степеневого розвинення $f(x)$. Зазначимо, що подібні, застосовувані для попереднього визначення n_η, способи зондування самі по собі можуть доставляти наближення (Н.) $\Psi(x;\ K)$ відповідного типу, для яких відхилення $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \Psi(x;\ K)| = L(K)$ виявляється (за критеріями строгої оцінки) часом досить близьким до шуканого чебишовського мінімаксу; такі «близькомінімаксні» Н. $\Psi(x;\ K)$ іноді використовують у спорадичному програмуванні для ЕЦОМ замість трудомісткішої ітеративної побудови чебишовських $\Psi(x;\ K^*)$.

При поліноміальній апроксимації ф-ції $f(x)$ більш або менш регулярної структури, щоб полегшити орієнтовне прикидання близького до n_η значення n, можна використати й апріорні оцінки верхніх меж значень $\rho^{(n)} \equiv E_n[f]$ типу відомих оцінок (1912) Бернштейна й Джексона.

Наведемо приклади такого роду оцінних теорем.

1. Якщо всередині $[a, b]$, де $b - a = 2h$, є обмежена $(n+1)$-а похідна $f^{(n+1)}(x)$, причому $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, тоді

$$E_n[f] \leqslant \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \tag{7}$$

2. Якщо на $[a, b] \equiv [a, a+2h]$ є неперервна $f^{(r)}(x)$ з $\max |f^{(r)}(x)| = M_r$, то для кожного $n \geqslant r$

$$E_n[f] \leqslant \left(\frac{\pi}{2}h\right)^r \frac{M_r}{(n+1)n\ \ldots\ (n-r+2)} < C_r\frac{M_r}{(n+1)^r}, \tag{8}$$

де

$$C_r = \left(\frac{\pi}{2}h\right)^r \frac{r^r}{r!}. \tag{8'}$$

2T. Оцінній ф-лі (8) — (8′) відповідає схожого типу точніша й витонченіша у випадку апроксимації за допомогою $t_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n}(k_\nu \cos\nu x + l_\nu \sin\nu x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 2π — періодичної $f(x)$ з неперервною

$f^r(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \max |f^r(x)| = M_r$:

$$E_n^T[f] \leqslant c_r \frac{M_r}{(n+1)^r}, \quad 1 < c_r < \frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Коеф. c_r, що входить в (9), явний вираз якого (трохи складного вигляду) було знайдено 1937, є для заданого r найкращим з можливих.

3. Якщо аналітична ф-ція $f(z)$, регулярна всередині еліпса комплексної площини з фокусами в точках $z = -1,1$ і з півсумою осей R, є неперервною й на контурі цього еліпса, то для ф-ції дійсного змінного $f(x)$ на відрізку $-1 \leqslant x \leqslant 1$ при будь-якому натуральному n,

$$E_n[f] \leqslant \frac{2M}{R-1}\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad (10)$$

де $M = \max |f(z)|$ на контурі еліпса.

Використовуючи А. ф. р. виду $P_n(x)$ або $R_{l,\,n-l}(x)$, складаючи *бібліотеку стандартних підпрограм* уведення ф-цій $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ в ЕЦОМ, необхідно мати на увазі доцільну в деяких випадках видозміну постановки питання, з підрозділянням $[a, b]$ на кілька часткових інтервалів $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, s$; $\xi_0 = a$, $\xi_{s+1} = b$ і з реалізацією А. ф. р. вказаного типу роздільно для кожного $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. Стики $\xi_1, \ldots, \xi_s$ треба при цьому вибирати з умовою приблизної рівності окремих мінімаксних відхилень на $[\xi_0, \xi_1], \ldots, [\xi_s, \xi_{s+1}]$. Хоч застосування таких кускових Н. потребуватиме зберігання в пам'яті машини трохи більшої кількості коеф., але потрібну точність Н. можна забезпечити при менших значеннях n — з відчутною інколи економією машинного часу, якщо використовувати підпрограми.

Окрім подібних кусково-поліноміальних Н., в останні роки предметом численних досліджень стали (допускаючи різні узагальнення) Н. зрощено-поліноміальні («сплайн»-Н.) виду

$$S_n(x) = P_n(x) + \sum_{i=1}^{s} c_i (x - \xi_i)_+^n$$

де символ z_+^n означає z^n при $z \geqslant 0$ і 0 — при $z < 0$. Ці S_n-Н. (нехаарівські в загальному випадку) як інструмент А. ф. р. за своєю точністю є проміжними між відповідними Н. поліноміальними й кусково-поліноміальними (ближче до перших), але, окрім стислості аналітичного вираження, вони виявляють (при непарності $n = 2p - 1$ і при $p \leqslant s$) ще й добрі інтерполяційні властивості з цінними застосуваннями до апроксимації лінійних функціоналів. Якщо спеціалізувати вищесказане при $n = 1$, вийде кусково-лінійна й відповідно полігональна апроксимація, нерідко застосовувана в інженерно-тех. практиці. При $f''(x) \neq 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ найкраща в названому розумінні кусково-лінійна апроксимація виявляється точно збіжною з найкращою сплайн-апроксимацією S_1.

Літ.: Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 [бібліогр. с.397—403]; Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., 1969 [бібліогр. с. 613—623]; Ремез Е. Я. К вопросу построения чебышевских приближений дробно-рационального и некоторых родственных типов. «Украинский математический журнал», 1963, т. 15, № 4; Ремез Е. Я. Некоторые вопросы численного построения решений задач чебышевского приближения. В кн.: Труды четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 2. Л., 1964; Олександренко В. Л., Порханова А. О. Побудова чебишевського поліноміального наближення функції однієї змінної за методом підвищуючої дії. «Автоматика», 1967, № 4; Cheney E. W. Introduction to approximation theory. New York, 1966; Ralston A. Rational Chebyshev approximation. В кн.: Mathematical methods for digital computers, v. 2. New York, 1967; Werner H., Stoer J., Bommas W. Rational Chebyshew approximation. «Numerische Mathematik», 1967, Bd. 10, № 4; Meinardus G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin, 1967; Hart J. F. [та ін.]. Computer approximation. New York, 1968.

В. Т. Гаврилюк, Е. Я. Ремез.

«АРАГА́Ц» — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення. Швидкодія — 8 тис. операцій за 1 *сек*. Розроблено її 1960 в Єреванському н.-д. інституті матем. машин. У машині триадресна система команд, розрядність коду команди — 42, форма представлення чисел — двійкова з плаваючою комою, числа представлено в машині в нормалізованому вигляді (32 розряди займає мантиса числа, один розряд — знак мантиси, шість розрядів — порядок числа і один розряд — знак порядку, два розряди для числа не використовуються). Оперативний ЗП — на феритових осердях ємністю 1024 42-розрядних слів, проміжний ЗП — на двох магнітних барабанах заг. ємністю 2048 слів і зовн. ЗП на магн. стрічках заг. ємністю 300 тис. слів. Крім того, в машині є блок довгочасного ЗП на 256 слів. Всього в машині використано 3500 електронних ламп.

Введення даних — з перфострічки (швидкість 36 слів за 1 *сек*), виведення — друкувальним пристроєм (зі швидкістю 20 рядків за 1 *сек*).

Літ.: Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181]

В. В. Карапетян.

АРИФМЕТИЗА́ЦІЯ МЕТАМАТЕМА́ТИКИ — метод, що його розробив австрійський математик К. Гедель (н. 1906), вивчаючи дедуктивні можливості формальних систем. За допомогою А. м. можна відтворити в межах елементарної арифметики різні матем. судження про об'єкти довільної формальної системи (тобто про ф-ли, доведення тощо). Всі такі об'єкти можна розглядати як слова певного вигляду в належному скінченному алфавіті, в якому мають бути логічні й матем. символи, позначення для змінних та деякі допоміжні букви. Нехай обрано якусь нумерацію всіх слів в алфавіті даної формальної системи Σ. Тоді метаматематичним відношенням, визначеним для об'єктів системи Σ, відповідають числові *предикати*, задані на номерах цих об'єктів. Отже, вивчення властивостей системи Σ стає частиною арифметики. Наведемо приклади предикатів, що їх

розглядають, описуючи дану формальну систему:

$V(Y)$: «Y є змінна».

$\mathrm{Fm}(X)$: «X є формула».

$\mathrm{Fv}(X, Y)$: «Змінна Y входить вільно до формули X».

$\mathrm{Neg}(Z, X)$: «Ф-ла Z є заперечення ф-ли X».

$\mathrm{Dis}(Z, X_1, X_2)$: «Ф-ла Z є диз'юнкція ф-л X_1, X_2».

$\forall(Z, X, Y)$: «Ф-лу Z одержують із ф-ли X, навішуючи *квантор* загальності на змінну Y».

$Ax_{\Sigma}(X)$: «X є аксіома Σ».

$\mathrm{Mp}(Z, X_1, X_2)$: «Ф-лу Z виводять з ф-л X_1, X_2 за правилом modus ponens».

$Prf_{\Sigma}(X, Y)$: «Y є доведення ф-ли X у системі Σ».

Згадану вище нумерацію об'єктів системи Σ можна вибрати так, щоб перелічені предикати (та інші відношення такого роду, що становлять інтерес для метаматематики) відобразилися внаслідок цієї нумерації в примітивно-рекурсивні числові предикати. Всі такі предикати можна виразити мовою елементарної арифметики (див. *Арифметика формальна*). Через це кожному з перелічених вище метаматем. предикатів можна поставити у відповідність арифм. ф-лу, яка описує цей предикат (термінами обраної нумерації об'єктів системи Σ). Напр., можна побудувати такі формули:

$\mathrm{Fm}(x)$: «x є номер якоїсь ф-ли».

$\mathrm{Neg}(z, x)$: «x є номер ф-ли, а z — номер її заперечення».

$Prf_{\Sigma}(x, y)$: «y є номер доведення ф-ли з номером x у системі Σ» тощо.

Звідси випливає, що мовою елементарної арифметики можна записувати різні твердження про систему Σ. Важливими прикладами таких тверджень є:

$$Pr_{\Sigma}(x) \underset{Df}{\Longleftrightarrow} \exists y Prf_{\Sigma}(x, y);$$

$$\mathrm{con}_{\Sigma} \underset{Df}{\Longleftrightarrow} \forall x \forall z (\mathrm{Fm}(x) \mathbin{\&} \mathrm{Fm}(z) \mathbin{\&} \mathrm{Neg}(z, x)) \to \\ \to \neg (Pr_{\Sigma}(x) \mathbin{\&} Pr_{\Sigma}(z)).$$

Перша з цих ф-л виражає предикат: x є номер ф-ли, довідної в Σ; друга ф-ла твердить, що система Σ несуперечлива. Припустимо тепер, що зафіксовано якусь досить сильну формальну систему A для елементарної арифметики. Тоді деякі ф-ли, що описують метаматематику розглядуваної системи Σ, можна довести в A. Отже, у межах системи A можна доводити теореми про властивості самої системи A та сильніших систем. За A здебільшого беруть систему, що грунтується на аксіоматиці Пеано. Від вибору системи A залежить, наскільки широким буде клас довідних метаматем. тверджень. Отже, А. м. полягає ось у чому: формулювання метаматем. теорем перекладають мовою арифметики; доводять ці теореми засобами заданої формальної системи A.

Враховуючи аналогію між формальними системами та обчисл. машинами, зазначимо, що є певна подібність між А. м. й такими процедурами, як автомат. програмування чи *машинний переклад* з однієї мови на іншу. В обох випадках відбувається кодування вхідної інформації мовою даної формальної системи (чи машини), а потім ці коди переробляють відповідно до правил функціонування розглядуваної системи (чи машини). Використовуючи метод арифметизації, треба мати на увазі, що клас метаматем. теорем, коди яких (відповідні арифм. ф-ли), довідні в системі A, залежать не лише від вибору цієї системи A, але й від способу кодування. Річ у тому, що згадані вище ф-ли, які виражають арифм. мовою осн. метаматем. предикати (ф-ли $\mathrm{Fm}(x)$, $Prf_{\Sigma}(x, y)$ тощо), було визначено неоднозначно. Потрібно було лише, щоб вони й справді описували відповідні предикати (щоб, напр., будь-яку ф-лу $\mathfrak{A}(x)$, що її область істинності збігається з множиною номерів ф-л системи Σ, можна було вибрати як $\mathrm{Fm}(x)$). А втім, дві рівносильні ф-ли можуть і не бути дедуктивно еквівалентними щодо даної системи A. В зв'язку з цим здебільшого висувають додаткову вимогу, щоб арифметизація була, в певному розумінні, природною. Цю вимогу можна уточнити так: треба, щоб примітивно-рекурсивні описи осн. метаматем. предикатів копіювали визначення цих предикатів, дані при змістовному викладенні метаматематики, а ф-ли, що виражають ці предикати, щоб мали ту саму структуру, що й відповідні примітивно-рекурсивні описи. Остання умова неодмінно виконується, якщо для побудови потрібних ф-л використовують т. з. процедуру Геделя.

За допомогою арифметизації було одержано фундаментальні результати з основ математики. Зокрема, було доведено, що в жодній формальній системі не можна вивести всі істинні ф-ли арифм. мови (див. *Геделя теореми про неповноту*). Водночас метод арифметизації показує, що можливості формальних систем досить широкі. Наведемо тут один характерний приклад, який ілюструє ці можливості. Нехай, як і вище, A є досить сильна арифм. система. Тоді для якоїсь ф-ли φ може виявитися, що в A вивідне: $\neg Pr_A(\overline{\varphi}) \mathbin{\&} \forall z (\mathrm{Neg}(z, \overline{\varphi}) \to \neg Pr_A(z))$, де $\overline{\varphi}$ — номер ф-ли φ в заданій нумерації об'єктів системи A. Це означає, що φ не залежить від аксіом A. Приєднавши φ до A як нову аксіому, одержимо сильнішу формальну систему. Істотним моментом при цьому є те, що незалежність φ встановила сама система А. Очевидно, що це веде до розгляду «самовдосконалюваних» формальних систем. Такі розгляди становлять значний інтерес і для основ математики, і для *автоматів теорії*.

Літ.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 195 ; Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting. «Fundamenta mathematicae», 1960, v. 49.

М. В. Бєлякін.

АРИФМЕТИКА З ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ— спосіб виконання арифм. операцій над числами, представленими у вигляді мантиси й по-

рядку. В ЕЦОМ А. з п. к. реалізується або структурно, або програмно. Виконати операцію — це значить обчислити порядок і мантису результату. Порядком суми й різниці є більший з порядків операндів, порядком добутку — алгебр. сума порядків співмножників, порядком частки — різниця порядків діленого та дільника. Щоб обчислити мантису суми (різниці), додають (віднімають) вирівняні мантиси операндів за правилами додавання (віднімання) чисел з фіксованою комою; при цьому мантиси вирівнюють, зсуваючи мантису того операнда, у якого порядок менший, на число розрядів, що дорівнює різниці порядків операндів. Мантиса добутку (частки) є добутком (часткою) мантис операндів, знайденим за правилами, описаними для чисел з фіксованою комою. Якщо результат одержано ненормалізований, то здебільшого при виконанні операцій А. з п. к. він автоматично нормалізується в машині. Див. також *Арифметичні операції, Операції над числами.*

С. М. Берестова.

АРИФМЕ́ТИКА З ФІКСО́ВАНОЮ КО́МОЮ — спосіб виконання арифм. *операцій над числами,* положення коми в яких є строго визначеним і не змінюється в процесі виконання операцій. Таке зображення чисел дає змогу спростити виконання *операцій машинних* і збільшити їхню швидкість, але звужує діапазон припустимих чисел порівняно з формою зображення чисел в *арифметиці з плаваючою комою.* Якщо після обчислень перед комою число цифр більше, ніж припустиме в даній машині, то виробляється сигнал переповнення. В машинах, які не мають плаваючої форми зображення чисел, щоб уникнути переповнення при обчислюванні, необхідно вводити масштабні множники. Напр., якщо в якійсь машині неприпустимі числа, більші за 1, а припускається, що буде одержано суму порядку 10, то кожен з доданків треба помножити на 0,1 і враховувати цей множник при подальших обчисленнях.

С. М. Берестова.

АРИФМЕ́ТИКА ФОРМА́ЛЬНА — загальна назва класу формальних систем, які більш чи менш повно описують т. з. елементарну теорію чисел (на відміну, напр., від аналітичної теорії чисел). З них особливе місце належить системі, пов'язаній з аксіоматикою Дж. Пеано. Ця формальна система (система P) є відправним пунктом для багатьох сучас. логіко-матем. досліджень. Мова системи P містить символи 0 і 1 і знаки арифм. операцій додавання й множення. Вирази вигляду $1 + 1 + \ldots + 1$ застосовують для позначення натуральних чисел; вони наз. цифрами (0 і 1 теж включають до цифр). Крім того, мова системи P має потенціально нескінченну кількість символів для змінних: $a, b, x, y, \ldots$ Вирази, які можна побудувати з символів 0, 1 і змінних за допомогою додавання й множення, наз. т е р м а м и (цифри — це окремий випадок термів). Вирази вигляду $t_1 = t$. де t_1, t_2 — терми, є елементарними формулами. Решту ф-л арифметики будують з елементарних за звичайними правилами логіки предикатів, тобто за допомогою логіч. зв'язок і *кванторів.* Розрізняють вільні й зв'язані змінні. Ф-ла, в якій немає вільних змінних, являє собою якесь висловлювання про натуральні числа (істинне чи хибне). Ф-ла, що залежить від n вільних змінних, задає певний n-місний теоретико-числовий предикат.

Дедуктивний апарат системи P побудовано так. Крім аксіом і правил виведення класичного числення предикатів з рівністю, є ще й арифм. аксіоми, що описують характерні властивості натуральних чисел:

$$\neg (a + 1 = 0),$$

$$(a + 1 = b + 1) \rightarrow (a = b),$$

$$a + 0 = a,$$

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot (b + 1) = (a \cdot b) + a.$$

Крім того, є схема аксіом матем. індукції:

$$[\mathfrak{A}(0) \wedge \forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x + 1))] \rightarrow \forall x \mathfrak{A}(x),$$

де $\mathfrak{A}(x)$ — будь-яка арифм. ф-ла. Використовуючи зазначені аксіоми і правила виведення, визначають поняття довідності. В межах системи P можна побудувати значну частину арифметики. За допомогою схеми індукції доводять осн. закони додавання та множення (переставний, сполучний, розподільний). Відношення $a < b$ виражається ф-лою $\exists c\, (a + (c + 1) = b)$, при цьому довідними виявляються осн. властивості нерівностей. Аналогічно мовою системи P виражають ряд відношень, пов'язаних з подільністю. Напр., твердження про те, що від ділення a на b одержують частку q й остачу r записують так:

$$(a = b \cdot q + r) \wedge (r < b).$$

Так формалізується теорія подільності (включаючи теореми про найбільший спільний дільник, елементарні властивості простих чисел тощо). Зазначені факти показують, що система P досить сильна. Спираючись на ці можливості даної формальної системи, в її межах можна моделювати будь-які обчислення і, отже, провести далекосяжну аналогію між системою P та обчисл. машиною.

Механізм такого моделювання розробив австр. математик К. Гедель 1931. Він довів, що для кожної примітивно-рекурсивної ф-ції $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна побудувати арифм. ф-лу $\mathfrak{A}_f(x_1, \ldots, x_n, y)$, що виражає відношення $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Побудову цієї ф-ли провадять індукцією за довжиною примітивно-рекурсивного описування ф-ції $f(x_1, \ldots, x_n)$. Так, напр., якщо $f(x)$ є суперпозицією примітивно-рекурсивних ф-цій $g(x)$ і $h(x)$ і якщо відповідні ф-ли $\mathfrak{A}_h$ і $\mathfrak{A}_g$ вже побудовано, то ф-лу $\mathfrak{A}_f(x, y)$ визначають так:

$$\exists z (\mathfrak{A}_h(x, z) \wedge \mathfrak{A}_g(z, y)).$$

Аналогічно, якщо ф-цію $f(x, y)$ одержано за схемою примітивної рекурсії з простіших ф-цій $g(x)$ і $h(x, y, z)$, то ф-лу $\mathfrak{A}_f$ будують як якусь стандартну комбінацію відповідних ф-л $\mathfrak{A}_g$ і $\mathfrak{A}_h$. Можна сказати, що процедура побудови ф-л вигляду $\mathfrak{A}_f$ (процедура Геделя) являє собою *транслятор* з мови примітивно рекурсивних програм на мову А. ф. За допомогою геделівської процедури в P можна доводити різні властивості примітивно рекурсивних ф-цій. Напр., виходячи з примітивно рекурсивного опису показникової ф-ції a^x, можна легко довести за індукцією тотожність $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Геделівська процедура дає змогу сформулювати й довести цю тотожність у системі P, незважаючи на те, що в цій системі немає знака для операції піднесення до степеня. Взагалі є таке твердження. Нехай до мови системи P приєднано додаткові символи, що означають які-небудь примітивно рекурсивні ф-ції. Додамо як нові аксіоми визначальні рівності для цих ф-цій. Тоді одержана таким способом розширена система P' виявляється по суті еквівалентною початковій системі P. Кожна ф-ла, що її виводять у P', після певного перекодування переходить у ф-лу, що її виводять у P (перекодування потрібне, щоб усунути залишкові символи, його здійснюють за допомогою геделівської процедури й, отже, воно не міняє змісту ф-ли). Ця властивість забезпечує системі P значну гнучкість, тому її зручно використовувати в різних метаматем. дослідженнях (див. *Арифметизація метаматематики*).

Важливим виявом описаного ефекту, що його досягають процедурою Геделя, є можливість моделювати в системі P довільні обчислення. Відомо, що роботу будь-якого алгоритму за будь-яку задану кількість кроків можна описати за допомогою певної примітивно рекурсивної ф-ції. Але для кожної такої ф-ції $f(x_1, \ldots, x_k)$ існує таке твердження. Нехай $f(n_1, \ldots, n_k) = m$. Тоді в P довідною є ф-ла $\mathfrak{A}_f(n_1, \ldots, n_k, m)$ і для будь-якого $l \neq m$ довідною є ф-ла $\neg\mathfrak{A}_f(n_1, \ldots, n_k, l)$. Звідси випливає, напр., що для будь-якої *Тьюрінга машини* й для будь-якого набору початкових даних можна побудувати висновок, який відтворює крок за кроком процес роботи даної машини. Тому, якщо машину можна застосувати до початкових даних і вона обчислює якийсь результат, то цей факт можна встановити в системі P.

Незважаючи на багатство виражальних і дедуктивних засобів, система P неповна, тобто в ній не можна вивести всі істинні арифм. твердження (див. *Геделя теореми про неповноту*). Можна будувати сильніші формальні системи, приєднуючи до системи P які-небудь істинні, але не вивідні в ній твердження як нові аксіоми. Треба лише, щоб множину аксіом одержаної системи можна було перелічити за допомогою певного алгоритму. Кожна така система також неповна. Проте можна побудувати трансфінітну послідовність формальних систем зростаючої сили, які в сукупності вичерпують усі істинні твердження про натуральні числа, які можна виразити арифм. мовою. В цьому напрямі ведуть інтенсивні дослідження.

Літ.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Гудстейн Р. Л. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1961; Feferman S. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. «The journal of symbolic logic», 1962, v. 27, № 3. *М. В. Бєлякін.*

АРИФМЕТИЧНА Й АНАЛІТИЧНА ІЄРАРХІЇ — два способи класифікації числових множин, в основу яких покладено мови арифметики відповідно 1-го і 2-го ступеня.

Арифметична ієрархія охоплює множини, які можна виразити мовою елементарної арифметики (див. *Арифметика формальна*). Ці множини, як множини істинності, можна одержати, навішуючи квантори на рекурсивні предикати числових змінних. Їх класифікують за числом змін кванторів і за видом першого квантора. Так, рекурсивно перелічні множини можна зобразити у вигляді $\exists y R(x, y)$ із загальнорекурсивним R; вони, за означенням, становлять клас Σ_1 в арифм. ієрархії. Доповнення до рекурсивно перелічних множин, представні у вигляді $\forall y R(x, y)$, об'єднуються у клас Π_1. Взагалі Σ_n складається з множин, одержаних навішенням на рекурсивні предикати n почергових кванторів, перший з яких — квантор існування. Аналогічно визначають клас Π_n. Побудовані так класи Σ_n, Π_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$, при цьому $\Sigma_0 = \Pi_0$ дорівнюють класові всіх рекурсивних множин) характеризують за допомогою певної канонічної форми кванторних приставок. Простими тотожними перетвореннями будь-яку арифм. множину можна звести до канонічного вигляду.

Аналітична ієрархія охоплює ширший клас множин, які представні мовою т. з. арифметики 2-го ступеня. Ця мова відрізняється від мови елементарної арифметики наявністю функціональних змінних, які пробігають множину всіх нескінченних числових послідовностей, і наявністю кванторів, що зв'язують ці змінні. За допомогою тотожних перетворень ф-ли цієї мови можна звести до такого вигляду, що всі функціональні квантори виявляться винесеними на початок формули. Класифікацію провадять за числом чергувань функціональних кванторів. Напр., Π_1^1 є сукупність множин, які представні формулами (у зведеній формі) з одним функціональним квантором загальності. В аналітичній ієрархії є дуже неефективні засоби породжування множин (функціональні квантори). Тому в ній виділяють рекурсивні ієрархії, які використовують конструктивніші принципи. Ці принципи полягають приблизно в тому, що допускаються деякі прості види лічбового перебору, проітерованого за досить доступними для огляду трансфінітними відрізками. Важливим прикладом такого роду є гіперарифметична ієрархія, яка становить досить природне продовження

арифметичної. Ця ієрархія вичерпує клас множин, які потрапляють у Π_1^1 разом зі своїми доповненнями. Ведуться дослідження щодо побудови та вивчення природних класів ще довших ієрархій.

Літ.: Роджерс X. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 587—599]. *М. В. Бєлякін.*

АРИФМЕТИ́ЧНИЙ ПРИ́СТРІЙ (АП) — один з головних блоків електронної цифрової обчислювальної машини (ЕЦОМ), призначений виконувати арифметичні й логічні операції. Класичний А. п. (мал. 1) складається з *суматора* См (осн. вузол А. п.), двох *регістрів* ($Р_1$ і $Р_2$) з відповідними логіч. схемами та пристрою, що керує блоком А. п. (КП АП). Частини регістрів (на мал. виділені тоном) відповідають логіч. схемам, що стосуються певних регістрів. Суматор призначений для підсумовування чисел, регістри $Р_1$ й $Р_2$ — для зберігання доданків чи зменшуваного й від'ємника, співмножників чи діленого й дільника — залежно від виконуваної операції.

КП керує послідовністю дій, що їх виконує А. п., й координує його роботу. Зовнішні зв'язки А. п. з іншими пристроями цифрової машини зображено на мал. 1. З запам'ятовувальним пристроєм (ЗП) цей пристрій зв'язаний кодовими шинами читання (КШЧ) та записування (КШЗ), по яких у нього вводяться початкові дані й виводяться з нього результати обчислень. З пристроєм керування процесора А. п. зв'язаний керуючими шинами, по яких до нього надходять синхронізуючі імпульси з КП, а з нього до КП подаються імпульси, що сигналізують про закінчення обчислень, та ін. керуючі імпульси. А. п. працює за таким принципом: код арифм. чи логіч. операції з КП процесора надходить у КП А. п., де дешифрується й формується сигнал, який відповідає цьому кодові операції, далі по КШЧ вибирають із ЗП перший операнд за адресою, вказаною в команді. Перший операнд проходить через $Р_2$ і См і встановлюється на $Р_1$. Другий операнд, вибраний із ЗП за другою адресою, вказаною в команді, надходить також по КШЧ на $Р_2$. Після прийняття обох операндів починається виконання операції: на См формується результат операції (операції множення й ділення також зводяться в А. п. до операцій додавання й віднімання). З закінченням формування результату виробляється ознака кінця операції, за якою результат операції записують через КШЗ за адресою, вказаною в коді команди. На цьому закінчується виконання логіч. чи арифм. операції; причому крім формування результату, в А. п. можуть вироблятися різні ознаки результату, напр., ω — ознака негативного результату, φ — переповненого і т. д. Ці ознаки надходять до КП обчисл. машини і впливають на дальший хід обчисл. процесу. Основні характеристики й структура А. п. залежать від прийнятої *системи числення,* способу реалізації обчисл. процесу, форми подавання чисел, способу подавання від'ємних чисел, розрядності чисел, типу застосовуваних схем, складу операцій, прийнятої методики обчислювань і необхідної швидкодії.

Залежно від прийнятої системи числення розрізняють двійкові, десяткові та двійково-десяткові А. п. Найчастіше використовують двійкову систему числення, бо її технічно простіше за інші реалізувати (а взагалі можна будувати А. п. з будь-якою основою системи числення). Застосовують і двійково-десяткові А. п. (напр., у машинах сімейства «МИР»).

Відповідно до способу реалізації обчисл. процесу А. п. можуть бути послідовної, паралельної й паралельно-послідовної дії. В *арифметичному пристрої послідовної дії* кожний операнд вводиться послідовно, розряд за розрядом, починаючи від знака операнду, і операції над операндами провадяться також послідовно, порозрядно: числа тут подаються у вигляді часової послідовності сигналів і мають один загальний вихід, причому кожному розрядові відводиться певна часова позиція відносно заданого початку відліку. Такий А. п. перетворює часові послідовності, що зображують обидва доданки, на часову послідовність, що зображує суму, яка видається по спец. колу, починаючи від молодших розрядів і кінчаючи старшими розрядами та знаком. Цю функцію звичайно виконує двійковий *суматор однорозрядний.* Якщо його доповнити схемою зберігання переносів (мал. 2), то він може бути послідовним суматором в А. п. послідовної дії. В такому А. п. менше, як в А. п. паралельної дії, обладнань, але в нього й менша швидкодія. В А. п. паралельної дії (мал. 3) всі розряди кожного операнда надходять водночас по n каналах (n-розрядність числа); дії над числами провадяться також одночасно в усіх розрядах. Логічно такий А. п. можна уявити, якщо сполучити n однорозрядних суматорів так, щоб вихід z_1 попереднього суматора $ОС_1$ був входом наступного однорозрядного суматора $ОС_2$. *Арифметичний пристрій паралельно-послідовної дії* займає проміжне місце між першими двома А. п., тут усі розряди оброблюваного числа розчленовуються на групи; розряди, що стосуються однієї групи, обробляються одночасно (паралельно), а групи обробляються послідовно.

Щодо форми подавання чисел, то розрізняють А. п., які оперують з числами з фіксованою комою (див. *Арифметика з фіксованою комою*), з плаваючою комою (див. *Арифметика з плаваючою комою*) та з цілими числами. Є й А. п., які виконують операції з числами з фіксованою й плаваючою комами та з цілими числами водночас (напр. «Днепр-2»). При обробці чисел з плаваючою комою можливі два способи виконання операцій: а) послідовний, при якому обчислюється порядок результату, а потім його мантиса, послідовно на одному й тому самому обладнанні; б) паралельний, коли порядок і мантису результату обчислюють одночасно на різному обладнанні. Перевага А. п. першого типу — малі апаратурні затрати (практично можна вико-

ристовувати А. п., поданий на мал. 1, з деякими незначними доповненнями). Вада — мала швидкодія. Для збільшення швидкості обробки чисел з плаваючою комою А. п., зображений на мал. 1, доповнюють підсумовувальним пристроєм для обробки порядків і лічильником циклів — для підраховування числа зсувів під час вирівнювання порядків. В А. п. з плаваючою комою є більший діапазон представлення чисел, аніж в А. п. з фіксованою комою за однакової розрядності. В А. п. з фіксованою комою апаратурні затрати менші, ніж в А. п. з плаваючою комою однієї й тієї самої розрядності, але й діапазон представлюваних чисел менший, і програмування (у зв'язку з необхідністю вводити масштабування) утруднене.

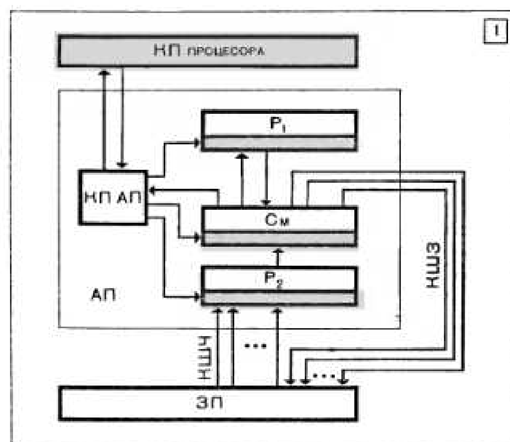
Залежно від способу представляння від'ємних чисел у ЦОМ (зворотним або додатковим кодом) суматори в А. п. будують з циклічним переносом або без нього.

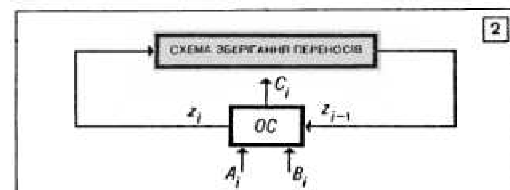
З розрядністю А. п. пов'язана точність і швидкість обчислювань: чим вища розрядність, тим більша точність обчислювань, але тим менша швидкодія. Оптимальна довжина числа дорівнює або кратна стандартній порції інформації, яку обробляє А. п. Вона змінюється залежно від галузі застосування ЦОМ. Так, розрядність слова малих ЦОМ, як правило, становить 8, 12, 16, 18 і 24 двійкові розряди (біти), а великі машини мають розрядність 24, 32, 36, 48 або 64 біти.

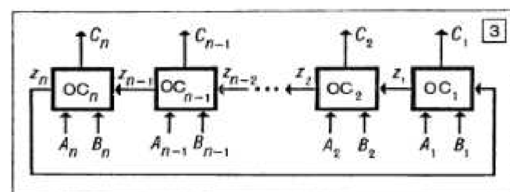
Розрядність А. п. може бути постійною і змінною. А. п. перших обчисл. машин, як правило, мали постійну, фіксовану розрядність. При цьому, якщо використовувалась різнорозрядна інформація, то зменшувалася продуктивність А. п. й нераціонально використовувалася пам'ять. Усе більше вітчизняних (*«Днепр-2»*, *«МИР»* та ін.) і зарубіжних машин («Nova-1200», «Supernova», «Datamate-16» та ін.) використовують змінну розрядність. Дискретність змінного слова може бути різною. Але звичайно для окремої ЕЦОМ установлюють певну дискретність довжини операнду, яка дорівнює якомусь заданому числу розрядів μ. Число завдовжки μ розрядів наз. символом. Максимально можлива довжина числа тоді дорівнює $\frac{n}{\mu} = k$ символам (де n — розрядність числа). Для економного записування алфавітної інформації доцільно вибирати $\mu = 6$, а для економного записування двійково-десяткової інформації — зручно встановити кратним чотирьом ($\mu = 4$, $\mu = 8$). Поширилося представлення інформації 8-розрядними символами $\mu = 8$ (які наз. *байтами*).

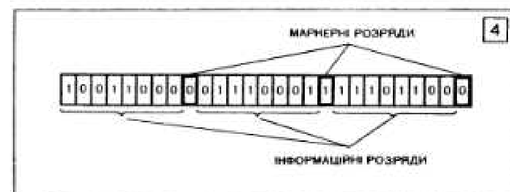
Є два способи зазначати змінну довжину слова: а) довжина поля зазначається в команді й задається як число розрядів у полі й може змінюватися від одного розряду (при $\mu = 1$) до якогось заданого максимуму. Цей спосіб підходить для будь-якої дискретності одиниць інформації; б) в пам'яті відводяться спец. розряди, в які корисна інформація не записується, вони служать лише для того, щоб зазначати довжину поля. Це т. з. «маркерні» розряди. «1» в маркерному розряді вказує, що цей символ є останнім у числі й що наступний символ належить іншому числу (мал. 4).

Під час обробки інформації змінної довжини в А. п. виникають нові функції: працювати з різнодовжинними операндами; визначати довжину результату; заокруглювати результат за довжиною; очищати символи, які опиняться за межею слова; виробляти ознаки за довжиною результату. Для того, щоб здійсню-









1. Блок-схема арифметичного пристрою та його зв'язків з іншими пристроями ЦОМ.
2. Блок-схема арифметичного пристрою послідовної дії.
3. Блок-схема арифметичного пристрою паралельної дії.
4. Спосіб зображування маркерних розрядів.

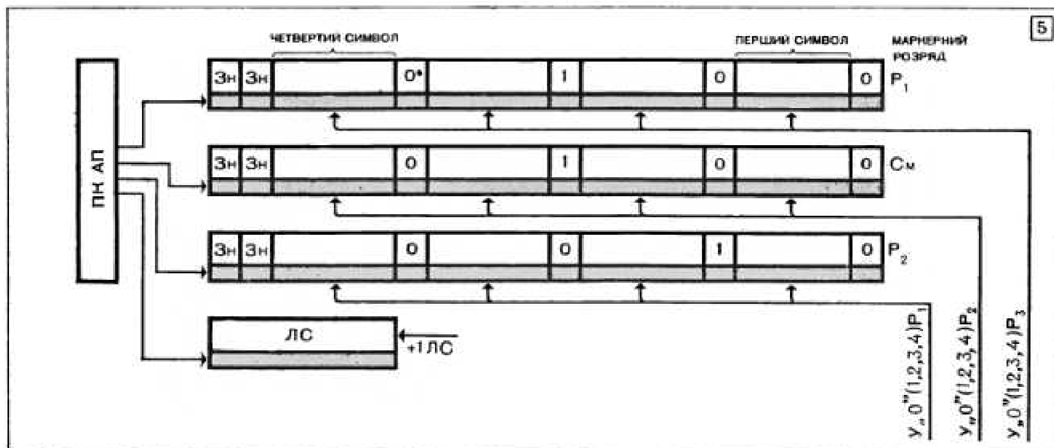
вати ці функції, треба, щоб А. п. мав обладнання для приймання інформації про довжину операндів, для зберігання її під час операції та для формування довжини результату. А. п. за певною довжиною результату здійснює заокруглювання, виробляє ознаки результату й установлює в «0» ті розряди См, які опинилися за межею маркера праворуч.

В загальному випадку для всіх операцій збільшення кількості розрядів у символі веде до зменшення кількості необхідного обладнання й до збільшення швидкодії. Проте при виборі надто великого μ ($\mu > 8$) незначне збільшення точності обчислень призводить до значного збільшення числа розрядів у слові. Зважаючи на нові функції А. п., які виникають під час обробки інформації змінної довжини, можна побудувати А. п., який реалізує ці функції (мал. 5). На мал. 5 зображено найпростіший чотирисимвольний А. п. із введеними в нього необхідними доповненнями: розрядами для запам'ятовування маркерів; лічильником для підраховування числа символів у першому операнді (ЛС); посимвольною установкою в «0» у регістрах P_1, P_2 й См. Маркерні розряди необхідні, щоб зазначати межі слова: в P_1 — кінець 1-го операнду, в P_2 — кінець 2-го операнду, в См — кінець результату.

Довжина результату (в символах) визначається звичайно довжиною 1-го операнду, число символів у якому підраховує ЛС. Посимвольна установка в «0» необхідна для очистки окремих символів, які залишаються за маркером справа, бо за будь-якої кількості символів в операндах (1, 2, 3 або 4 символи) в операції беруть участь усі чотири символи.

й результат, бо в таких А. п. немає нагромаджувальних елементів. Комбінаційні схеми мають звичайно потенціальні зв'язки між елементами. В нагромаджувальних А. п. (див. *Суматор нагромаджувальний*) операнди надходять послідовно один за одним, результат операції залишається на суматорі й після зникнення вхідних сигналів. Схеми нагромаджувальних А. п. звичайно мають імпульсні й імпульсно-потенціальні зв'язки між елементами.

Структура і складність А. п. залежать від складу операцій (набору мікропрограм), що їх виконує машина. Будь-яка арифм. операція розчленовується на кілька елементарних операцій або мікрооперацій, виконуваних у необхідній послідовності. До мікрооперацій належать: установка в нуль регістрів, суматорів або окремих розрядів А. п.; приймання коду якимсь із блоків А. п.; видавання коду; інвертування коду; зсув коду вліво разом зі знаком (у бік старших розрядів); зсув коду вліво без знакового розряду; зсув коду вправо разом зі знаком (у бік молодших розрядів); зсув коду вправо без знакового розряду; обмін кодами між різними блоками А. п.; додавання кодів. Час виконання елементарної операції додавання (віднімання) є осн. показником швидкодії А. п. Операція віднімання (або мікропрограма операції «віднімання») в А. п. нагромаджувального типу 3-адресної машини з фіксованою комою складається з таких мікрооперацій: установлювання в нуль усіх блоків А. п.; приймання 1-го коду на приймальний регістр; передавання 1-го коду на суматор і приймання 2-го коду на приймальний регістр; інвертування



5. Блок-схема найпростішого чотирисимвольного арифметичного пристрою (з зазначенням маркерних розрядів: У — установка, Зн — знак).

Залежно від типу застосовуваних схем А. п. ділять на комбінаційні й нагромаджувальні. В комбінаційних А. п. (див. *Суматор комбінаційний*) результат на виході з'являється лише одночасно зі вхідними сигналами; зі зникненням вхідних сигналів пропадає

2-го коду (операнда); підсумовування, одержування результату на суматорі; видавання результату за 3-ю адресою.

Структура А. п. залежить і від прийнятої методики обчислювань у ЦОМ (див. *Операції машинні*), тобто від вибору алгоритмів опера-

цій. Особливо впливає на повну логічну схему А. п. прийнята методика виконання множення й ділення. В будь-якому випадку для виконання множень треба, щоб А. п. мав щонайменше три регістри: множеного, множника і сум часткових добутків. Множення двійкових чисел в А. п. можна звести до послідовності додавань і зсувань. Найбільший практичний інтерес становить такий *алгоритм* множення: множення починається з молодших розрядів множника, множник зсувається вправо, сума часткових добутків також зсувається вправо, множене залишається нерухомим. Цей алгоритм множення можна розчленувати на такі етапи: 1) на початку операції всі регістри установлюють у нульовий стан (P_1, P_2, і См), після цього множене розміщують на P_1, множник — на P_2, суму часткових добутків — на См; 2) аналізується молодший розряд множника (на P_1); якщо він має значення 1, то до суми часткових добутків додається множене, розміщене на P_2, якщо він має значення 0 — виконується дія 3; 3) множник і сума часткових добутків зсуваються на один розряд управо, молодші розряди часткового добутку потрапляють у вивільнені старші розряди P_1 (регістру множника); 4) дії 2 і 3 повторюються n разів (n — розрядність співмножників); 5) знак співмножника в процесі множення участі не бере, зі співмножниками оперують як з додатніми числами; знак результату формується під час додавання знаків операндів за mod 2.

Цей алгоритм реалізується на А. п., структурну схему якого наведено на мал. 1. Цих самих регістрів досить і для виконання операції ділення, вона також реалізується в А. п. за допомогою n операцій зсування й підсумовування (віднімання), тому на виконання множення й ділення йде значно більше часу, аніж на додавання. Для виконання логічних операцій використовують звичайно ті самі кола, що й для арифм. операцій. Послідовність виконання мікрооперацій, передавання інформації між окремими блоками всередині А. п. і зв'язок його з ін. частинами машини здійснює схема керування А. п. (ПК А. п.).

Зі зростанням застосування ЦОМ спостерігається тенденція до збільшення кількості й ускладнення функцій, що їх виконує А. п., а внаслідок цього А. п. значно розширюється й перетворюється на операційний пристрій (ОП). Є ОП, який складається з кількох (більше як з трьох) операційних регістрів, певним чином з'єднаних між собою (ОП з гніздовою пам'яттю); є ОП з кількох суматорів (багатосуматорні ОП) та ін. типи ОП.

Осн. шляхи вдосконалення ОП — збільшення швидкості за рахунок логіч. і тех. можливостей (до логіч. можливостей відносять розробку нових методів виконання операцій і досконаліших методів прискорювання операцій, суміщування виконування кількох операцій у часі; до технічних — використовування нових, надійніших і швидше діючих елементів, уведення в машину кількох А. п.).

Літ.: Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968 [бібліогр. с. 430—433]; Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [бібліогр. с. 559—575]; Каган Б. М., Каневский М. М. Цифровые вычислительные машины и системы. М., 1970 [бібліогр. с. 615—619].

Т. Ф. Слободянюк.

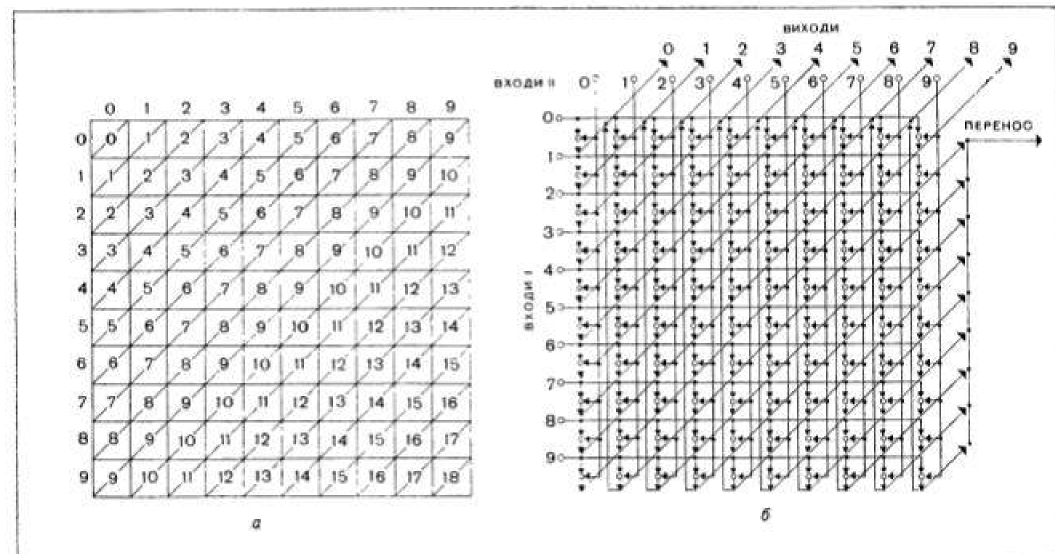
АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПАРАЛЕЛЬНОЇ ДІЇ — *арифметичний пристрій*, у якому всі розряди кожного операнда надходять одночасно по n каналах. *Операції над числами* в ньому провадяться також одночасно по всіх розрядах. Див. також *Суматор паралельний*.

АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПАРАЛЕЛЬНО-ПОСЛІДОВНОЇ ДІЇ — *арифметичний пристрій* (АП), в якому розряди числа поділяються на групи і розряди кожної групи обробляються одночасно (паралельно), а групи розрядів — послідовно. Такий метод обробки інформації використовують, як правило, тоді, коли розряди, що входять до однієї групи, мають самостійне значення, напр., тетради (двійкові еквіваленти десяткових цифр) розрядів при представленні чисел у двійково-десятковій системі числення. Тому А. п. п.-п. д. застосовують у ЦОМ, де як основною *системою числення* користуються двійково-десятковою системою і не потрібна висока швидкодія. Структура АП таких ЦОМ відрізняється від *арифметичного пристрою послідовної дії* тільки тим, що зсуваються й підсумовуються не двійкові цифри, а тетради.

Осн. елементом А. п. п.-п. д. є чотирирозрядний двійковий *суматор* паралельної дії, який забезпечує потетрадне додавання чисел. Після додавання пари тетрад результат переписується на вихідний *регістр* і визначається перенос у старшу тетраду. В наступному такті на очищений суматор надходять наступні тетради та імпульс переносу, одержані в попередньому такті, і т. д. При додаванні двійкових тетрад на звичайному двійковому суматорі треба вводити додаткові схеми для формування одиниці переносу, коли одержана сума перевищує дев'ять (у чотирирозрядному двійковому суматорі перенос формується, якщо сума перевищує п'ятнадцять) і для одержання тетрад суми, що відповідають десятковим цифрам. Щоб спростити схему А. п. п.-п. д., застосовують кодування чисел не в звичайному базисі 8421, а в базисі 8421 з надлишком 3, в базисі 2421 і т. д. Простішу схему А. п. п.-п. д. одержують, коли замість суматора використовують десятковий *лічильник*. Кожна десяткова цифра числа представляється послідовністю імпульсів, кількість яких дорівнює значенню цифри. При додаванні двох чисел у лічильник послідовно заносяться цифри одноіменних розрядів доданків. У деяких ЦОМ, де користуються двійково-десятковою системою числення, для підвищення швидкодії застосовують табличний метод додавання чисел. У цьому разі суматор роблять у вигляді матриці, яка реалізує таблицю додавання десяткових цифр (мал. *а*). Матриця являє собою прямокутну решітку

провідників, у вузлах якої розміщено двовходові схеми збігу (мал. *б*). Діагональне розміщення в таблиці результатів додавання двох десяткових розрядів дає змогу об'єднати спільною *шиною* виходи схем збігу, що лежать на одній діагоналі матриці. Крім того, можна об'єднати всі діагоналі з однаковими сумами за модулем 10. Переноси в наступний розряд одержують, об'єднавши діагоналі, розміщені в таблиці додавання нижче від діагоналі «9». Табличним методом додавання користуються, напр., у ЦОМ «МИР».

операції додавання розряди операндів передаються на входи однорозрядного суматора Σ за допомогою зсуваючих сигналів $\{q_i\}_4$ і $\{q_i\}_5$. Суматор на виході *S* формує значення поточних розрядів суми операндів, які за допомогою серії керуючих сигналів $\{q_i\}_3$ та $\{q_i\}_6$ записуються в регістр P_3. На виході *p* однорозрядного суматора формується сигнал перенесення в старший розряд, який і затримується на період проходження керуючих імпульсів $\{q_i\}$ і підсумовується в наступному



Таблиця додавання десяткових цифр (*а*) і матриця (*б*) арифметичного пристрою паралельно-послідовної дії.

Літ.: Прангишвили И. В. [та ін.]. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. М., 1967 [бібліогр. с. 224—226]; Ричардс Р. К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. Пер. с англ. М., 1957 [бібліогр. с. 412—419].

Ю. А. Бузунов, Є. М. Вавилов.

АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПОСЛІДОВНОЇ ДІЇ — *арифметичний пристрій*, у якому операції над числами виконуються порозрядно. В А. п. п. д. число представляється як часова послідовність імпульсів, у якій кожному розрядові числа відводиться певна часова позиція; усе число передається по одній *шині*. Передача інформації послідовним *кодом* і перетворення її виконується за допомогою спец. синхронізуючих імпульсів, від періоду проходження яких залежить частота передавання розрядів чисел. У ЦОМ, що мають А. п. п. д., числа представляються, як правило, у формі з фіксованою комою.

Осн. вузлами А. п. п. д. є зсуваючі *регістри* з колами рециркуляції та *суматор однорозрядний* (мал.) Приймання операндів на вхідні регістри P_1 та P_2 відбувається за допомогою керуючих сигналів $\{q_i\}_1$, $\{q_i\}_4$ та $\{q_i\}_2$, $\{q_i\}_5$. На вхідні регістри операнди подаються, починаючи з молодших розрядів. При виконанні такті з черговою парою розрядів операндів.

При додаванні чисел у зворотному коді для реалізації циклічного перенесення вміст P_3 пропускається через суматор (на мал. це коло циклічного передавання показано пунктиром). При цьому час додавання двох *n*-розрядних чисел становить

$$T_{\text{доп}} = 2(n+1)\tau,$$

де τ — період проходження керуючих імпульсів $\{q_i\}$. У процесі додавання операндів регістри P_1 та P_2 поступово звільняються. У зв'язку з цим А. п. п. д. можна виконувати на двох регістрах: функції регістра суми (P_3) може виконувати один з регістрів (P_1 або P_2) операндів. Коло рециркуляції регістра забезпечує порозрядне перезаписування вмісту регістра в процесі зсування його. Необхідність відновлювати інформацію в регістрі виникає під час виконування операцій множення та ділення. Ці операції в А. п. п. д. можна виконувати, користуючись схемою, яку наведено на мал., якщо доповнити її деякими допоміжними елементами. Час виконування множення в А. п. п. д. визначається

співвідношенням $T_{мн} = n(n + 1)\,\tau$. Операції в А. п. п. д. виконуються протягом тривалого часу: час додавання та віднімання пропорційний розрядності (n), а множення та ділення — квадратові розрядності (n^2) операндів. Перевагою А. п. п. д. є його простота й економічність.

Літ.: Чугаев Ю. Г., Плиско В. А. Электронные вычислительные машины. М., 1962 [бібліогр. с. 402]; Ричардс Р. К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. Пер. с англ. М., 1957 [бібліогр. с. 412—419].

Ю. А. Бузунов, Є. М. Вавилов.

відних матем. операцій: розв'язування системи рівнянь (1) із заданими початковими умовами; обчислювання значення ф-ції Г в рівнянні (2) за одержаним після виконання попередньої операції вектором $X(t)$; за результатами двох попередніх операцій знаходять параметри системи лінійних алгебр. рівнянь, які дорівнюють елементам матриці першої похідної ф-ції Г за X_0; відшукується приріст вектора початкових умов за формулами методів якнайшвидшого спуску (якн. сп.) або оберненого оператора (об. оп.). Опе-

Функціональна схема арифметичного пристрою послідовної дії.

АРИФМЕТИ́ЧНІ ОПЕРА́ЦІЇ — сукупність операцій типу додавання, множення, добування квадратного кореня тощо, які набули великого поширення як команди цифрової обчислювальної машини під час виконання алгебр. *операцій над числами*. Методи виконання А. о. великою мірою визначають структуру арифм. пристроїв ЦОМ. *С. М. Берестова.*

«А́РКУС» — спеціалізована електронна *гібридна обчислювальна машина* для розв'язування нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} + \Phi(X) = 0, \qquad (1);$$

$$\Gamma(X_0, X_i, X_k) = 0. \qquad (2)$$

Тут $X = X(t)$ — вектор шуканих ф-цій, $X_0 = X(t_0)$, $X_i = X(t_i)$, $X_k = X(t_k)$. Розв'язок відшукується в інтервалі $[t_0, t_k]$, t_i — внутр. точка інтервалу, Φ та Г — задані ф-ції багатьох змінних, порядок дифер. рівнянь $n \leqslant 8$. «А.» розроблено 1968 в Ін-ті кібернетики АН УРСР. Ця машина складається з аналогової та дискретної частин. В аналоговій частині неалгоритм. шляхом обчислюються ф-ції кількох змінних, розв'язується система звичайних дифер. рівнянь із заданими початковими умовами і системи лінійних алгебр. рівнянь. Параметри останньої з операцій наперед не відомі, знаходять їх при розв'язуванні задачі. Дискретна частина виробляє команди виконання відповідних операцій в аналоговій частині реалізуються не одночасно. Це дає змогу виконувати їх за допомогою лише одного перемикального блока *підсилювачів відпрацьовуючих;* решта блоків аналогової частини містить лише набори *зворотних зв'язків*, які використовують для виконання відповідних операцій при підмиканні до них відпрацьовуючих підсилювачів. У блоці зрівноважування, який призначений для відшукування приросту вектора початкових умов, у режимі самонастроювання (с.) автоматично встановлюються знайдені елементи матриці перших похідних. При відшукуванні приросту за *обернених операторів методом* утворюється модель системи лінійних алгебр. рівнянь, при відшукуванні приросту за методом якн. сп. — модель для відшукування просування за антиградієнтом. Дискретна частина самостійно задає таку послідовність режимів роботи блока зрівноважування: с. $\underset{1}{\rightarrow}$ якн. сп. $\underset{2}{\rightarrow}$ с. $\underset{3}{\rightarrow}$ об. оп. $\underset{4}{\rightarrow}$ якщо a, то 4, якщо не a, то 3, де a — зменшення довжини нев'язки в рівнянні (2), оператор має можливість змінювати цю програму на свій розсуд. Крім крайових задач на «А.» можна розв'язувати задачі Коші для звичайних дифер. рівнянь до 8-го порядку і системи до 4 нелінійних алгебр. або трансцендентних рівнянь. «А.» складається з *підсилювачів операційних* (32 шт.), нелінійностей у системі (1) (8 шт.), у системі (2) — (6 шт.), універсальних *перетворювачів функціональ-*

них БН1П-1 (8 шт.), блоків перемножування УБП-1 (8 шт.), споживана потужність 1,3 *ква*. «А.» можна використовувати в проектних орг-ціях, н.-д. ін-тах, обчисл. центрах, вузах.

Літ.: Г р е з д о в Г. И. О структуре электронной модели с расширенным кругом задач. В кн.: Вопросы теории и применения математического моделирования. М., 1965; П у х о в Г. Е. [та ін.]. Электронная самонастраивающаяся математическая машина «АРКУС». «Механизация и автоматизация управления», 1968, № 3. *Г. І. Грездов.*

АСЕ́МБЛЕР — загальноприйнята назва *транслятора з автокоду*. А. перетворює первісну програму, написану автокодом, на переміщувану програму *мовою машинною*. Оскільки А. здійснює трансляцію мовою *завантажувача*, то під час завантажування *програми* потрібне наладжування умовних адрес, тобто адрес, значення яких залежить від розміщення цієї програми в *пам'яті ЦОМ* і від її зв'язків з ін. незалежно перетворюваними програмами.

В найпростішому випадку А. переводить одне речення первісної програми в один об'єкт (команду, константу) модуля завантаження (т. з. трансляція «один в один»). При цьому взаємне розміщення об'єктів у модулі завантаження і, зрештою, у пам'яті машини визначається порядком речень у первісній програмі на автокоді й цілком залежить від програміста. А. виконує й допоміжні функції, такі, як підготування до друку документів потрібної форми, реєстрування зв'язків цієї програми з ін. програмами тощо. Для цього в автокодах передбачено команди А., які не породжують об'єктів у робочій програмі й призначені лише для допоміжних дій А.

Трансляція здебільшого потребує, щоб первісну програму було проглянуто двічі: за першим разом здійснюється *пам'яті розподіл* і присвоєння значень символічним назвам; за другим разом формується робоча програма у вигляді модуля завантаження. В процесі трансляції А. проводить повний синтаксичний контроль первісної програми (див. *Синтаксичний аналіз програм*), забезпечуючи при цьому досить точну діагностику помилок за місцем і за характером.

Розширення можливостей автокодів досягають завдяки використанню *макрокоманд*, побудованих за правилами, близькими до правил написання команд автокоду, але таких, які описують складніші ф-ції, для реалізації яких потрібна група звичайних команд. У цьому разі перед трансляцією макрокоманди замінюють макророзширеннями — послідовностями команд базовою мовою згідно з макровизначеннями. В цих останніх задаються прототип макрокоманди зі структурою списку параметрів і процедура генерування макророзширення. Транслятор, який виконує ф-ції макрогенератора й А., наз. м а к р о а с е м б л е р о м. При трансляції з мов високого рівня А. нерідко використовують, щоб виконати завершальну фазу трансляції. *Ю. М. Бояковський.*

АСИНХРО́ННИХ АВТОМА́ТІВ ТЕО́РІЯ — теорія математичних моделей дискретних пристроїв для переробки інформації, в яких довжини вхідних тактів і величини затримок у внутрішніх елементах не обов'язково однакові. Вхідним тактом в асинхронних автоматах (АА) наз. проміжок часу між двома сусідніми змінюваннями вхідних сигналів (структурну схему АА див. у ст. *Автомат асинхронний*). Першими прикладами АА були релейно-контактні схеми: в них моменти надходження зовн. сигналів на обмотки реле, як правило, надто довільні й через неузгодженість характеристик не можна вважати, що всі реле спрацьовують одночасно. Важливе завдання А. а. т. — з'ясувати принципові можливості АА як перетворювачів послідовностей вхідних сигналів на послідовності вихідних сигналів. Коли за будь-якої комбінації a_i вхідних сигналів, яка триває досить довго, й за будь-якого внутр. стану s_i АА переходить у т. з. стійкий стан s_k, тобто такий, що не змінюється, поки не зміниться вхідний сигнал, то такий АА зводиться до *автомата скінченного;* стан s_k є значенням ф-ції переходів $\delta : s_k = \delta (a_i s_k)$. Поведінка багатьох АА значно складніша. Їх вивчають за допомогою різних моделей, що є в А. а. т.; напр., в одній з моделей виходять з того, що величини затримок невідомі й, можливо, змінні. В таких АА одній вхідній послідовності може відповідати множина можливих послідовностей станів, і в заг. випадку не можна говорити про реалізацію автоматних відображень. Для такої моделі важливими завданнями є вивчення класів автоматів, поведінка яких не залежить у тому чи ін. розумінні (напр., у розумінні переходу в той самий стійкий стан протягом одного вхідного такту) від величин затримок, і таких способів з'єднання АА, за яких ця незалежність зберігається. В іншій моделі елементи мають довільні, але фіксовані затримки. При цьому вихідну послідовність визначають однозначно, але вона може залежати й від довжин тактів вхідної послідовності. Автоматні відображення в таких АА реалізуються тоді, коли при будь-якому досить тривалому вхідному такті встановлюється стійкий вихідний сигнал. Але й у цьому разі відображення може не бути скінченноавтоматним; якщо затримки несумірні, то можливе представлення нерегулярних подій. Це пояснюється тим, що наступний стан у такому автоматі залежить не лише від наявного стану і входу, а й від якоїсь сукупності *лінійних форм* від величин затримок $\tau_1, ..., \tau_n$; при несумірних $\tau_1, ..., \tau_n$ число різних лінійних форм може виявитися нескінченним. В обох моделях затримка пропускає лише сигнали, довжина яких не менша за час спрацювання затримки. Такі затримки іноді наз. ф і л ь т р а м и. Розглядають і моделі, що мають різні види затримок, у т. ч. затримки з випадковим часом спрацювання, що його описано певним імовірнісним розподілом.

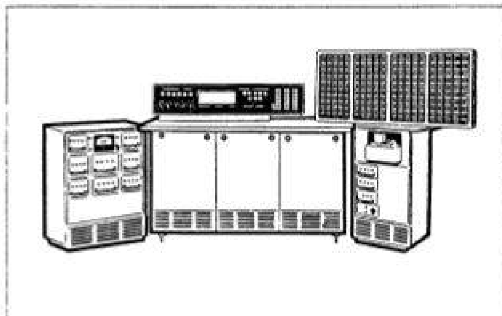
Отже, в А. а. т. розглядають моделі пристроїв, поведінка яких складніша за поведінку скінченних автоматів. Проте цю складність у реальних АА розглядають як небажану за-

ваду, бо виявом її є залежність перехідних процесів від співвідношення часових характеристик елементів, а така залежність через неминучу неузгодженість цих характеристик може виявитися недетермінованою. Такі недетерміновані перехідні процеси (їх наз. змаганнями або гонками) можуть призводити до помилок і збоїв у роботі автомата. Тому важливе практичне завдання А. а. т.— усунути змагання, тобто синтезувати АА, в яких переходи з одного стійкого стану в інший від діяння даного вхідного сигналу відбуваються однозначно й не залежать від величин затримок елементів та від тривалостей вхідних тактів. Такі АА функціонують як звичайні скінченні автомати. Змагання усувають за допомогою «протигонкових» методів кодування станів абстрактних автоматів, введення додаткових затримок у деяких колах зворотного зв'язку й побудови схем з наперед заданими властивостями, які гарантують, що змагань не буде.

Літ.: Кузнецов О. П. Об асинхронных логических сетях. «Проблемы передачи информации», 1961, в. 9; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964; Рогинский В. Н. Динамика работы дискретных автоматов с линейными задержками. «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, в. 1; Якубайтис Э. А. Синтез асинхронных конечных автоматов. Рига, 1970; Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Пер. с англ. М., 1962; Миллер Р. Теория переключательных схем. Пер. с англ., т. 2. М., 1971. *О. П. Кузнецов.*

«АСОР», **автоматизована система організації робіт** — сімейство спеціалізованих обчислювальних машин для розв'язування й моделювання задач сіткового планування й керування. Розробив його Ін-т кібернетики АН УРСР. Призначено «АСОР» для розрахунку та відображення невеликих за обсягом сіток, фрагментів такої сітки чи укрупнених сіткових графіків. Високий ступінь наочності розв'язування та оперативність одержання його дають змогу використовувати «АСОР» як машину-порадник для керівників комплексів робіт під час планування й керування з допомогою сіткових методів. Розроблено дві модифікації «А.». «АСОР-1» («РИТМ») — *квазіаналогова модель*, має набір окремих моделей робіт — нелінійних двополюсників, у яких тривалість виконання робіт моделюється величиною електр. напруги. Моделі робіт при наборі задачі, поєднуючись між собою відповідно до конфігурації сіткового графіка, утворюють модель сітки. За допомогою «АСОР-1» можна одержувати такі характеристики сіткового графіка: а) величину й форму критичного шляху; б) найраніші можливі строки початку й закінчення робіт; в) найпізніші допустимі строки початку й закінчення робіт; г) резерви часу робіт. Індикацію критичного шляху здійснює спец. мнемосхема. Введення інформації — ручне, виведення — візуальне (на світловій мнемосхемі) й за допомогою цифрового вимірювального приладу. Макс. число робіт у графіку — 200. Похибка вимірювання характеристик графіка, зведена на шкалі машини, не вища, як 5%.

«АСОР-2» — комбінована (цифро-аналогова) модель задач сіткового планування й керування (мал.) Моделями робіт сіткового графіка є схеми електр. затримки сигналів цифровими лічильниками. Моделями подій є схеми збігу. Моделі робіт і моделі подій поєднуються між собою відповідно до конфігурації сітки. В початок моделі сітки посилається імпульсний сигнал початку робіт, який затримується в моделях робіт на час, пропорційний їхній тривалості. Затримка сигналу закінчення кінцевої події пропорційна



Спеціалізована обчислювальна машина «АСОР-2».

тривалості критичного шляху. Крім характеристик сітки, зазначених вище, «АСОР-2» дає змогу визначити конфігурацію шляхів критичної зони, що відповідають заданому коеф. напруженості, стан фронту робіт на заданий момент часу, календарні строки початку й закінчення робіт з урахуванням особливостей існуючого календаря та візуальну індикацію дерева макс. шляхів у графіку з коренем у початковій події. Макс. число робіт у графіку — 400 (у т. ч. фіктивних робіт — 160), макс. число подій — 160.

Роздільна здатність щодо рівнокритичних шляхів та їхніх відрізків не нижча за 1% макс. тривалості однієї роботи. Похибка одержання характеристик сітки, зведена до шкали машини, не більша як ± 0,5%. Початкові дані вводяться з перфострічки або пульта керування. Результати виводяться на друкувальну машину, цифрові індикатори та світлову мнемосхему. Завдяки цифровому способові подавання інформації «АСОР-2» перспективна щодо включення в комплекси з ЕЦОМ. Розвиток спеціалізованих машин для моделювання задач сіткового планування та керування (див. *Сіткові методи планування й управління*) йде шляхом створення цифрових моделей, розробки ефективних систем відображення інформації та агрегатування таких моделей з універсальними електронними обчисл. машинами.

Літ.: Васильев В. В., Клепикова А. Н., Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. К., 1966 [бібліогр. с. 161—164]; Васильев В. В. [та ін.]. Специализированная цифро-аналоговая вычислительная машина АСОР-2 для моделирования задач сетевого планирования и управления. «Механизация и автоматизация управления», 1968, № 4.

В. В. Васильєв.

АСОТ, агрегатна система засобів обчислювальної техніки — систематизований набір агрегатних пристроїв з уніфікованими зовнішніми зв'язками для забезпечення збирання, зберігання, переробки й видавання інформації; дає змогу компонувати інформаційні та керуючі обчислювальні системи з заданим поєднанням технічних параметрів (продуктивності, обсягу вхідної й вихідної інформації та надійності).

В АСОТ реалізовано принцип *агрегатно-блокової побудови засобів обчислювальної техніки*. Складається АСОТ з окремих конструктивно й функціонально відокремлених пристроїв. Деякі пристрої компонують з блоків (конструктивно завершена частина пристрою). Варіюючи типи й кількість блоків, можна змінювати тех. характеристики пристрою. Структура АСОТ забезпечує можливість поступово модернізувати й розвивати тех. засоби. Цього досягають шляхом уніфікації конструктивно-технологічної бази на кожному етапі розробки, а також єдності організації внутрішньосистемного зв'язку й побудови матем. забезпечення за принципом модульності.

За функціональним призначенням усі агрегатні пристрої АСОТ ділять на групи: 1) центр. пристрої керування й переробки інформації — процесори (спеціалізовані й універсальні); 2) пристрої зберігання інформації — внутрішні й зовнішні запам'ятовувальні пристрої (ЗП); 3) *пристрої зв'язку з об'єктом*; 4) пристрої зв'язку з оперативним персоналом; 5) пристрої введення інформації з носіїв та виведення на них; 6) пристрої виходу на позасистемні лінії зв'язку і 7) пристрої внутрішньосистемного зв'язку. Спеціалізовані процесори (СПР) призначено для розв'язування окремих задач або набору простих задач, напр., задач первинної переробки інформації. Залежно від цього СПР можуть бути з жорсткою або з гнучкою програмою. Універсальні процесори обробляють інформацію при розв'язуванні складних задач керування, в тому числі задач оптимальної організації виробництва, техніко-економічного й оперативно-виробничого планування тощо. Вони здатні виконувати програми, складені в основній системі команд, незалежно від складу додаткових пристроїв (внутрішніх ЗП, пристроїв переробки інформації в режимі з плаваючою комою й переробки символьно-десяткової інформації).

Номенклатуру АСОТ по групі внутрішніх ЗП розраховано на забезпечення можливості широко варіювати технічні параметри обчисл. комплексів за ємністю й типом використовуваних ЗП; є оперативні ЗП (ОЗП), постійні (ПЗП) й напівпостійні (НПЗП). Пристрої зв'язку з об'єктом (ПЗО) призначено для введення інформації в обчисл. машину від давачів і видавання керуючих сигналів на виконавчі механізми та регулятори. До групи пристроїв зв'язку з об'єктом входять аналого-цифрові й цифро-аналогові перетворювачі, перетворювачі кодів і допоміжне обладнання. Пристрої зв'язку з оперативним персоналом призначено для введення поточної інформації за участю людини й виведення інформації обслуговуючому персоналові в наочній і зручній для сприймання формі або у формі документів. Зв'язок між функціональними пристроями або їхніми групами (процесора з пам'яттю, процесора з пристроями введення-виведення і т. ін.) здійснюється за допомогою пристроїв внутрішньосистемного зв'язку.

Перша черга АСОТ, розроблена з використанням дискретної елементної бази (умовно позначають АСОТ-Д) має набір агрегатних пристроїв, призначених для компонування різних модифікацій універсального процесора, та два види спеціалізованих процесорів. До складу обчислювального комплексу будь-якої *обчислювальної системи*, побудованої із засобів АСОТ-Д, входять: *процесори* універсальні й спеціалізовані, головна пам'ять, пристрої внутрішньосистемного зв'язку. Для всіх модифікацій універсального процесора прийнято єдину уніфіковану систему команд, яка забезпечує обробку двійкових чисел з фіксованою й плаваючою комою, десяткових чисел, логіч. і символьної інформації. Умовна назва мінім. і макс. модифікацій універсального процесора відповідно «М-2000» і «М-3000». Спеціалізовані процесори «М-1000» і «М-1010» орієнтовані на обробку двійкових чисел невисокої точності з фіксованою комою (16 розрядів) і логіч. кодів.

До номенклатури запам'ятовувальних пристроїв АСОТ-Д, з яких компонують головну пам'ять, входять: ОЗП ємністю 8192 36-розрядних слів з циклом звертання 8 *мксек*, ОЗП ємністю 2078 18-розрядних слів з циклом звертання 8 *мксек*, ПЗП ємністю 8192 36-розрядних слів з циклом звертання 32 *мксек*, комбінований ЗП, який містить по 4096 18-розрядних слів оперативної й постійної пам'яті, НПЗП ємністю від 512 до 2048 36-розрядних слів (нарощується агрегатно). Перезаписування інформації здійснюється вручну зміною перфокарт з циклом звертання 3 *мксек*.

Процесор моделі «М-1000» виконує операції над 16-розрядними двійковими числами з фіксованою комою (додавання — 20 тис. опер./*сек*, множення — 5 тис. опер./*сек*). Ємність пам'яті — 4096 ÷ 16 384 32-розрядних слів з довільним поєднанням оперативних і постійних ЗП. Допускають підключення до 256 пристроїв введення-виведення. Процесор «М-1010» відрізняється від процесора «М-1000» меншими логіч. можливостями, але він простіший і має більшу швидкодію.

Процесор моделі «М-2000» виконує операції над двійковими числами з фіксованою комою 16- і 32-розрядного формату (додавання — 40 тис. опер./*сек*, множення — 15—19 тис. опер./*сек*). Пам'ять набирають із ОЗП і ПЗП блоками по 8192 36-розр. слів (до 6 блоків). Ця модель допускає наявність до 3 мультиплексорних каналів (до 256 пристроїв введення-виведення в кожному).

Процесор моделі «М-3000» розраховано на виконання операцій двійкової арифметики над числами з фіксованою (16- і 32-розрядного формату) і плаваючою комою (32- і 64-розрядного формату) та операцій над цілими десятковими числами змінної довжини (до 31 десят. розряду). Швидкодія при виконанні операцій над числами з фіксованою комою: типу додавання — до 100 опер./*сек*, типу множення — до 25 тис. опер./*сек*. Пам'ять має до 12 блоків ОЗП або ПЗП. Кількість мультиплексорних і селекторних каналів — до 7 в будь-якому співвідношенні.

Істотна вада АСОТ 1-ї черги — надлишковість апаратури в кожному функціонально й конструктивно завершеному пристрої як наслідок уніфікації тех. бази. Оскільки в АСОТ-Д використовують тільки дискретні елементи, потрібен великий обсяг конструктивних елементів для реалізації окремих пристроїв. У поєднанні з надлишковим складом функціональних пристроїв, необхідних для створення конкретних автомат. систем керування, це зумовлює їхню високу вартість.

Цю ваду значною мірою усунено в 2-й черзі розробки АСОТ (умовно — АСОТ-М), яку виконано на мікроелектронній елементній базі за удосконаленими структурними та архітектурними принципами. Осн. структурною одиницею тех. засобів АСОТ-М є агрегатний модуль — пристрій, який має уніфіковані зовнішні зв'язки, виконує будь-які функції по обробці та зберіганню інформації, комутації передач, перетворенню фіз. сигналів тощо.

Новий набір засобів АСОТ-М має процесор моделі «М-6000» та групу агрегатних модулів, які служать для побудови систем на базі цього процесора. Цей набір дозволяє компонувати проектним шляхом автономні та низові інформаційні й керуючі обчисл. системи для технологіч. об'єктів і наукового експерименту, що працюють у реальному масштабі часу, а також багатопроцесорних систем різної структури, які забезпечують високу продуктивність і живучість.

За функціональним призначенням набір агрегатних модулів АСОТ об'єднується в такі групи пристроїв: обчислювального комплексу, введення-виведення, зв'язку з об'єктом, пристрої-узгоджувачі.

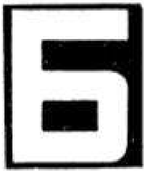
Набір агрегатних модулів АСОТ-М поєднує в собі розвинені систему введення-виведення і систему команд, яка забезпечує зручність у програмуванні; зручну систему пріоритетного переривання, яка дозволяє суміщувати виконання операцій введення —виведення з розрахунком. Набір агрегатних модулів забезпечує високу продуктивність (до 200 тис. адресних та до 1800 тис. безадресних мікрооперацій за 1 *сек*); нарощування пам'яті (від 8192 до 65 736 *байтів*); можливість підключення швидкодіючих каналів прямого доступу до пам'яті, які виконують операції введення — виведення без переривання процесора; високу надійність, простоту і зручність в обслуговуванні; малі габарити, сучасне естетичне оформлення.

Математичне забезпечення має *транслятор* з мов *ФОРТРАН*, *АЛГОЛ-60*, із спеціалізованих мов, комплекс програм керування введенням — виведенням, бібліотеку стандартних програм тощо.

Впровадження АСОТ дасть значний економіч. ефект у порівнянні з системами різних обчисл. машин, побудованих на різних несумісних елементах та конструктивних базах.

Літ.: Агрегатная система средств вычислительной техники. К., 1969; Управляющий вычислительный комплекс АСВТ М-4000. М., 1971; Резанов В. В., Винокуров В. Г., Костелянский В. М. Основные концепции и общее описание устройств первой очереди АСВТ.— Костелянский В. М., Итенберг И. И., Лехнова Г. М. Новый набор агрегатных модулей — дальнейшее развитие АСВТ. «Механизация и автоматизация управления», 1971, № 4.
В. М. Єгипко.

АСТАТИ́ЗМ *n*-ПОРЯ́ДКУ — властивість автоматичної системи цілком усувати усталену похибку при зміні зовнішнього діяння за законом $f(t) = \sum_{i=0}^{i=n-1} f_i t^i$, при $t \to \infty$. Необхідна й достатня умова А. *n*-п. для лінійних стаціонарних систем полягає в тому, щоб *передавальна функція* замкненої системи за похибкою $W_e(p)$ містила в собі нуль *n*-кратності, тобто, щоб $W_e(p) = p^n W_{e0}(p)$, причому $\lim_{p\to 0} W_{e0}(p) \neq 0$. Відповідна умова для дискретних систем має вигляд: $W_e^*(z) = (z - 1)^n W_{e0}^*(z)$; $(\lim_{z\to 0} W_{e0}^*(z) \neq 0)$. Виконання цієї умови можна досягти двома різними способами — залежно від наявності чи відсутності в системі зв'язків за задаванням (збуренням). У разі відсутності зв'язків за задаванням виконання цих умов можливе при наявності в замкненому контурі *n*-інтеграторів. Тоді передавальна ф-ція розімкненої системи матиме вигляд для неперервних систем: $W_{роз}(p) = \frac{1}{p^n} W_1(p)$, причому $\lim_{p\to 0} W_1(p) \neq 0$, і для дискретних систем — $W_{роз}^*(z) = \frac{1}{(z-1)^n} W_1^*(z)$, причому $\lim_{z\to 1} W_1^*(z) \neq 0$. В разі наявності зв'язків за задаванням (точніше при комбінуванні принципів регулювання за задаванням і за відхиленням) А. *n*-п. можна досягти за належного вибору передавальної ф-ції коректуючого зв'язку за задаванням $W_к(p)$. Якщо передавальна ф-ція розімкненої системи $W_{роз}(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, то А. *n*-п. має місце в разі виконання умови: $B(p)(1 + W_к(p)) = G(p) \cdot p^n$ (причому $\lim_{p\to 0} B(p) \neq 0$, $\lim_{p\to 0} G(p) \neq 0$). Відповідна умова для дискретних систем має вигляд: $B^*(z)(1 + W_к^*(z)) = G^*(z)(z - 1)^n$; $(\lim_{z\to 1} B^*(z) = 0$; $\lim_{z\to 1} G^*(z) \neq 0)$. У системах стабілізації розглядають астатизм відносно збурення, в слідкуючих системах — відносно задавання.
А. А. Тунік.



БАГАТОВАРІА́НТНИХ ЗАДА́Ч РОЗВ'ЯЗУВАННЯ — розв'язування задач методом *послідовного аналізу варіантів.*

БАГАТОВИ́МІРНІ СИСТЕ́МИ АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — автоматичні системи, в яких число як керованих координат, так і керуючих діянь дорівнює двом і більше. Специфіка Б. с. а. к. полягає в тому, що поведінка кожної керованої координати $y_i(t)$ визначається не тільки *керуючим діянням* $u_i(t)$, а й (у загальному випадку) всією сукупністю цих діянь $u_1 \ldots u_m(t)$, які утворюють вектор керування U, та вектором збурювальних діянь Λ. Необхідність створювати Б. с. а. к. виникає в тих випадках, коли треба керувати одночасно кількома взаємозв'язаними параметрами якогось фіз. процесу. Як приклад можна навести систему стабілізації частоти й напруги генераторів в енергосистемах, систему керування швидкістю обертання й т-рою газів у турбореактивних двигунах, систему керування товщиною прокату в різних прогонах прокатного стана за допомогою керування швидкістю обертання й мірою підтиску валків тощо. У ряді випадків застосування Б. с. а. к. є єдиним засобом досягнення мети керування.

Типову блок-схему багатовимірної системи подано на мал. У загальному випадку розмірності векторів регулюючих діянь U, керованих координат Y та збурень Λ можуть відрізнятись одна від одної. Як і одновимірні системи, Б. с. а. к. можна класифікувати за принципом керування — на замкнені, розімкнені (зі зв'язками за збуреннями, на мал. ці зв'язки показано пунктиром) і *комбіновані системи автоматичного керування;* за способом передавання сигналів — на неперервні та *дискретні системи керування;* за характером функціональних зв'язків між координатами системи — на лінійні й *нелінійні системи керування;* за призначенням — на *стабілізації системи, слідкуючі системи, системи програмного керування* й самонастроювані системи (зокрема, *системи екстремального регулювання*).

Матем. описування Б. с. а. к. можна виконувати за допомогою характеристик «вхід-вихід» і термінами простору станів. Надалі обмежимось описами лише лінійних Б. с. а. к., у яких вхідних координат стільки, як і вихідних. Неперервні лінійні Б. с. а. к. можна описувати (термінами характеристик «вхід — вихід»):

а) системами диференціальних рівнянь

$$Q(D)\,Y(t) = P(D)\,\Psi(t), \qquad (1)$$

де $Q(D)$, $P(D)$ — $(n \times n)$-матриці з елементами $q_{ij}(D)$ і $p_{ij}(D)$. Елементи являють собою многочлени оператора диференціювання $D \equiv \frac{d}{dt}$; $Y(t)$, $\Psi(t)$ — вихідний і вхідний вектори відповідно;

б) векторно-матричним рівнянням згортки

$$Y(t) = \int_0^t G(t-\tau)\,\Psi(\tau)\,d\tau + \Phi(t), \qquad (2)$$

де $\Phi(t)$ — реакція Б. с. а. к. на ненульові початкові умови, яка визначається початковими значеннями координат і коренями $D_1 \ldots D_n$ характеристичного рівняння, а $G(t)$ — вагова $(n \times n)$ матриця (матриця *імпульсних перехідних функцій*), кожний елемент якої $g_{ij}(t)$ є реакцією i-виходу на *дельта-функцію*, яка діє на j-вхід, при всіх інших входах, які дорівнюють нулеві, й при нульових початкових умовах;

в) передавальними матрицями. Перетворення Лапласа матриці $G(t)$ визначає передавальну матрицю (матрицю *передавальних функцій*) $G(p)$, яку можна також визначити, перетворивши за Лапласом (при нульових початкових умовах) рівняння (1):

$$Y(p) = G(p)\,\Psi(p); \quad G(p) = Q^{-1}(p)\,P(p),$$

де p — параметр перетворення Лапласа.

Поки що тут розглянуто передавальні матриці та інші характеристики «вхід — вихід» у загальному вигляді — і для замкнених, і для розімкнених систем. Між передавальними матрицями замкнених і розімкнених Б. с. а. к. існують співвідношення, аналогічні відповідним співвідношенням для передавальних функцій. Так, якщо $G_1(p)$ — передавальна матриця об'єкта керування, яка зв'язує вектори $U(p)$ та $Y(p)$, а $G_2(p)$ — передавальна матриця керуючого пристрою (див. мал.), то передавальна матриця замкненої системи за задавальним діянням (Ψ — вхід, Y — вихід) має вид

$$G_{зз}(p) = [E + G_1(p)\,G_2(p)]^{-1}\,G_1(p)\,G_2(p), \qquad (3)$$

де E — одинична матриця. Якщо вектор збурень λ, який діє на об'єкт, зв'язаний з вектором у передавальною матрицею $G_\lambda(p)$, то передавальна матриця замкненої системи за збуренням $G_{з\lambda}(p)$ (при відсутності керуючого пристрою за збуренням) має вигляд:

$$G_{з\lambda}(p) = [E + G_1(p)\,G_2(p)]^{-1}\,G_\lambda(p). \qquad (4)$$

Характеристичне рівняння замкненої Б. с. а. к. має вигляд:

$$\det|E + G_1(p)\,G_2(p)| = 0 \qquad (5)$$

де $\det[\cdot]$ — визначник відповідної матриці.

Характеристики «вхід — вихід» описують лише повністю керовану й повністю спостережувану частини системи (див. *Спостережуваності й керованості умови*). Рухи некерованої або неспостережуваної частин Б. с. а. к., серед яких у загальному випадку можуть відбуватися й нестійкі рухи, не можна описувати характеристиками «вхід — вихід». У цьому розумінні найповніший опис Б. с. а. к., який охоплює й рухи її некерованих і неспостережуваних частин (якщо такі є), гарантується описуванням термінами простору станів, тобто за допомогою системи рівнянь 1-го порядку виду:

$$\mathring{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + B\Psi,\quad \mathbf{Y} = C\mathbf{X},\quad \mathbf{X}_{t=0} = \mathbf{X}(0), \quad (6)$$

де Ψ—вхід і $\mathbf{Y}$—вихід усієї замкненої системи (див. мал.) — n-вимірні вектори, а вимірність вектора $\mathbf{X}$ дорівнює N, причому числові матриці A, B і C мають розміри $N \times N$; $N \times n$ та $n \times N$ відповідно. Від опису Б. с. а. к. типу (6) можна легко перейти до характеристик «вхід—вихід». Так, перетворивши, за Лапласом, (6), за нульових початкових умов передавальну матрицю системи $G(p)$, аналогічну в даному випадку $G_{зз}(p)$, в (3), можна визначити як $G(p) = C'(pE - A)^{-1} B$. Характеристичне рівняння в цьому випадку можна записати у вигляді:

$$\det[pE - A] = 0. \quad (7)$$

Якщо виконуються умови спостережності й керованості, то корені рівняння (7) (власні числа матриці A) збігаються з коренями (5). Якщо ж внаслідок скорочення полюсів передавальних функцій, які входять до матриці $G_1(p)$, нулями передавальних функцій матриці $G_2(p)$ керуючого або *коректуючого пристрою* з'являються некеровані й неспостережувані частини, то відповідні корені зникають у (5), але залишаються в (7).

Для лінійних дискретних Б. с. а. к. застосовують відповідні дискретні аналоги, а саме:

а) системи різницевих рівнянь $Q(\zeta)\,\mathbf{Y}_n = P(\zeta)\,\Psi_n$, де ζ — оператор зсуву на один інтервал $\zeta\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+1}$, $Q(\zeta)$ й $P(\zeta)$ — $(n \times n)$-матриці з елементами $q_{ij}(\zeta)$ та $p_{ij}(\zeta)$, які є поліномами відносного оператора ζ;

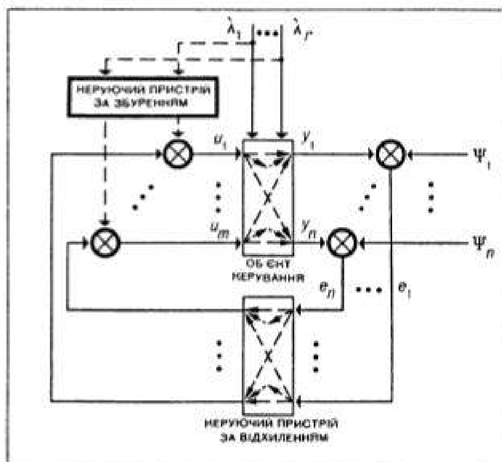
б) дискретні аналоги інтегр. згортки: $\mathbf{Y}_n = \sum_{j=0}^{j=n} G(n-t)\,\Psi_j + \Phi_n$, де $G(n-j)$ — вагова матриця, Φ_n — реакція на ненульові початкові умови;

в) передавальні матриці: $\mathbf{Y}^*(z) = G(z)\Psi^*(z)$, де $z = e^{pT}$ (T — інтервал дискретності) — символ *Лапласа дискретних перетворювань*. Співвідношення, аналогічні до (3 і 4), бувають і в дискретних Б. с. а. к. Рівняння в термінах простору станів має вигляд:

$$\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n + B\Psi_n,\quad \mathbf{Y}_n = C\mathbf{X}_n, \quad (8)$$

де під матрицями A, B і C і векторами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ і Ψ розуміють те саме, що й у (6).

Лінійні Б. с. а. к. бувають стійкими, якщо корені характеристичного рівняння (7) замкненої Б. с. а. к. містяться в лівій півплощині комплексної змінної. Якщо система повністю керована і спостережувана, то перевірку умов стійкості можна здійснювати й за розміщенням коренів характеристичного рівняння (5). Для стійкості дискретних Б. с. а. к. необхідно, щоб корені відповідного характеристичного рівняння розміщувались усередині кола



Блок-схема багатовимірної системи автоматичного керування.

одиничного радіуса. Перевірку цих умов без знаходження коренів характеристичного рівняння можна виконати алгебр. або частотними методами (див. *Гурвіца теорема*, *Стійкості дискретних систем теорія*, *Стійкості критерії*). Оскільки для Б. с. а. к. більшої розмірності розкриття визначника типу (5 і 7) пов'язане з громіздкими обчислюваннями, то перевірку умов стійкості й побудови областей стійкості в просторі параметрів таких Б. с. а. к. здійснюють на ЕЦОМ. Частотні критерії Попова, Якубовича і Ципкіна широко використовують і для аналізу стійкості нелінійних Б. с. а. к. спец. виду (див. *Стійкості неперервних систем теорія*). Загальніші результати з аналізу стійкості нелінійних Б. с. а. к. можна одержувати *Ляпунова методами*. Якщо можна визначити корені характеристичного рівняння Б. с. а. к., то аналіз якості Б. с. а. к. можна здійснити відомими методами за розміщенням цих коренів у комплексній площині (див., напр., *Кореневого годографа метод*). У ряді окремих випадків (двовимірні Б. с. а. к., Б. с. а. к., що складаються з однакових *підсистем*, зв'язаних між собою безінерційними зв'язками тощо) аналіз якості дуже ефективно провадять, використовуючи відомі способи частотних методів аналізу якості одновимірних систем (див. *Систем автоматичного керування аналіз* і *Частотні*

характеристики систем автоматичного керування).

Методи синтезу Б. с. а. к. (див. *Систем автоматичного керування синтез*) обирають залежно від мети, яка стоїть перед конструктором Б. с. а. к. Так, одним з найвідоміших підходів до синтезу Б. с. а. к. є синтез керуючого пристрою за умовами *автономності*. Під автономністю Б. с. а. к. розуміють незалежні між собою зміни керованих координат, а це еквівалентне розпадові системи рівнянь, яка описує динаміку Б. с. а. к., на n незалежних рівнянь окремих контурів. Для лінійних систем ці умови мають вигляд $H = G_1(p)\ G_2(p) = \operatorname{diag}\{h_{11}(p) \dots h_{nn}(p)\}$, де $G_1(p)$ й $G_2(p)$ — те саме, що й у (3). Це означає, що окремі елементи багатовимірного керуючого пристрою слід обирати так, щоб добуток його передавальної матриці $G_2(p)$ і передавальної матриці об'єкта $G_1(p)$ був діагональною матрицею. Однак не в усіх випадках умови автономності забезпечують найкращу якість функціонування Б. с. а. к. Якщо є змога виміряти вектор збурень λ, то синтез високоточних і швидкодіючих Б. с. а. к. можна здійснити, використовуючи теорію *інваріантності систем автоматичного керування*. Істотні результати одержано в розв'язуванні задачі синтезу Б. с. а. к. при стаціонарних випадкових діяннях. Якщо в (2) вхідний сигнал $\Psi(t)$ складається з корисного випадкового сигналу $r(t)$ й завади $n(t)$ з заданими матрицями *кореляційних функцій*, то завдання полягає в тому, щоб визначити вагову матрицю $G(t)$, яка дає мінімум функціоналові $\sum_{i=1}^{n} \overline{e_i^2}(t)$, де $\overline{e_i^2}$ — середньоквадратична похибка між справжнім і бажаним значеннями i-ї вихідної величини. Якщо структуру системи не задано, матрицю $G(t)$ знаходять, поширивши методи розв'язування задачі Вінера (див. *Вінера — Хопфа рівняння* першого роду) на багатовимірний випадок. Якщо елементи $G(t)$ задано, то вказаний функціонал можна мінімізувати, змінюючи варійовні параметри *вагових функцій* $g_{ij}(t)$ (див. *Оптимальних параметрів системи вибір*).

Проблема синтезу оптимальних Б. с. а. к. тісно пов'язана з задачами *варіаційного числення* і *програмування математичного*. Так, у деяких випадках (3) функціонал, що характеризує якість роботи системи, може мати вигляд лінійної форми $I = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ усталених значень координат системи при лінійних обмеженнях $U > 0$, $AU = \mathbf{b}$, де A — $(m \times n)$-числова матриця $(m < n)$, $\mathbf{b}$ — n-вимірний вектор. Тоді значення вектора $\mathbf{U}$, який мінімізує (максимізує) форму I, відшукують методом *програмування лінійного*. Але найчастіше функціонал якості являє собою нелінійну ф-цію координат. Так, напр., якщо рух багатовимірного об'єкта керування описується рівнянням виду (6) (з заміною Ψ на u), то в більшості випадків функціонал якості має вигляд $I_t = \int_0^t V dt$, де V — квадратична форма: $V = X'LX + U'MU$, L, M — матриці ($N \times N$ і $n \times n$ відповідно) вагових коефіцієнтів, а знак $'$ означає транспонування. В цьому випадку відшукування керування u як функції координат простору станів X, який екстремізує функціонал I_t, можна виконати методами *програмування динамічного*, *програмування нелінійного*, використанням *Понтрягіна принципу максимуму* тощо (див. *Оптимальних процесів теорія*). Оскільки ф-ція V, яка входить у функціонал I, аналогічна до ф-ції Ляпунова, існує глибокий зв'язок між синтезом оптимальних Б. с. а. к. і методами Ляпунова. Якщо за показник якості роботи Б. с. а. к. брати нелінійну ф-цію φ усталених значень керуючих координат $\mathbf{U}$ і збурень Λ, $\varphi = \varphi(\mathbf{U}, \Lambda)$, то відшукування екстремуму φ за $\mathbf{U}$ для різних збурень Λ можна виконати багатовимірною системою екстремального регулювання.

Синтезовані алгоритми керування Б. с. а. к. досить складні, тому реалізація сучасних Б. с. а. к. грунтується на широкому використанні новітніх досягнень обчислювальної техніки.

Літ.: Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования. М., 1965 [бібліогр. с. 381—384]; Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., 1966 [бібліогр. с. 410—413]; Чинаев П. И. Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем. К., 1969 [бібліогр. с. 372—375].

К. Д. Жук, А. А. Тунік, П. І. Чинаєв.

БАГАТОЕТА́ПНЕ ОБСЛУГО́ВУВАННЯ — обслуговування системою масового обслуговування, при якому вимога повинна бути виконана почергово кількома приладами. Б. о. буває в потокових лініях на виробн., в обчисл. процесах тощо. Залежно від макс. довжини черги l_k, $k = 1, 2, \dots$, перед k-м приладом розрізняють такі випадки систем масового обслуговування з Б. о.: $l_k = 0$, $l_k < \infty$, $l_k = \infty$.

Аналітично досліджувати *масового обслуговування системи* з Б. о. досить важко. В деяких випадках вдається одержати стаціонарні характеристики таких систем. У випадку, коли $l_k = \infty$, для системи масового обслуговування, в яку надходить найпростіший потік, і час обслуговування має показниковий розподіл, і вихідний потік для кожного приладу є найпростішим. Це дає змогу зводити дослідження системи масового обслуговування з Б. о. до дослідження системи масового обслуговування з очікуванням. У системах, де $0 \leqslant l_k < \infty$, природа вихідних потоків складніша. Якщо вхідний потік найпростіший, а тривалість обслуговування має показниковий розподіл, то є аналітичні ф-ли для стаціонарних характеристик систем з Б. о.

С. М. Броді.

БАГАТОЗНА́ЧНІ СХЕ́МИ — клас схем, вихідні інформаційні сигнали в яких набувають більше як двоє дискретних значень, причому кожне значення інформаційного сигналу визначається станом одного виходу схеми. Інтенсивне дослідження принципів побудови Б. с. та застосування їх почалося в 60-х роках 20 ст.

Проблематика вивчення Б. с. має багато спільного з проблематикою, що постає при вивченні тех. схем дискретної техніки, режим роботи яких характеризується двома стійкими станами (двійкових схем). Є різні аспекти вивчення Б. с.: з погляду природи використовуваного фіз. явища, за методом кодування стійких станів, з погляду особливостей зберігання й переробки інформації, в плані принципів побудови й методів тех. реалізації їх тощо. Разом з тим кількісна зміна характеристик режиму роботи в Б. с. пов'язана з певними якісними змінами в їхній структурі, в принципах побудови й методах тех. реалізації, у способах використовування тих чи інших фіз. явищ. Відповідно до цього Б. с. мають деякі специфічні особливості, що становлять інтерес не лише в теоретичному плані (напр., з погляду схемотехніки), а й мають істотно важливе прикладне значення.

В Б. с. використовують електромагн., акустичні, пневматичні й гідравлічні явища. Найбільше вивчено й розроблено в плані практичних застосувань Б. с. електромагнітні схеми.

Характеристики Б. с. з погляду способу кодування стійких станів незалежно від природи використовуваного фіз. явища наведено в класифікаційній схемі (мал. 1). З погляду особливостей зберігання й переробки інформації розрізняють схеми без властивості запам'ятовувати і схеми, які мають цю властивість. Б. с. з властивістю запам'ятовування ще наз. схемами з багатьма стійкими станами, або багатостійкими схемами.

Принципи побудови Б. с. визначаються, насамперед, особливостями зберігання та переробки інформації на їхній основі, а також вибором того чи іншого способу кодування стійких станів, природою використовуваного фіз. явища тощо. У Б. с. без властивості запам'ятовувати незалежно від того, затримують вони сигнал чи ні, стійкі стани режиму роботи забезпечуються відповідним вибором характеристик (квантуванням значень) інформаційних сигналів таких схем. Відповідно до цього загальний принцип побудови їх полягає у використанні деякого прохідного чотириполюсника з вхідним сигналом, який набуває певної кількості дискретних значень, і монотонною залежністю вихідного сигналу від вхідного. Внаслідок указаної особливості Б. с. без властивості запам'ятовувати самостійного значення не мають і, будуючи пристрої перетворювання дискретної інформації, їх звичайно використовують у поєднанні з Б. с., які мають властивість запам'ятовування. Один з найширше застосовуваних принципів побудови Б. с., які мають властивість запам'ятовувати, оснований на використанні чотириполюсника (φ, мал. 2, *а*) з нелінійною (наприклад, східчастого вигляду, мал. 2, *б*) амплітудною характеристикою $U'_{вих} = \varphi(U'_{вх})$, охопленого колом *зворотного зв'язку* (ЗЗ) β, $U''_{вих} = \beta U''_{вх}$. В усталеному стані

$$U'_{вх} = U''_{вих} = U_1; \quad U'_{вих} = U''_{вх} = U_2. \quad (1)$$

Якщо коло зворотного зв'язку β лінійне і характеризується виразом $U_1 = kU_2 - U_0$, де k — коеф. підсилення кола зворотного зв'язку, U_0 — стала напруга зміщення на його виході, то в цьому разі поведінка схеми (мал. 2, *а*) описується такою системою рівнянь:

$$U_2 = \varphi(U_1); \quad U_1 = kU_2 - U_0. \quad (2)$$

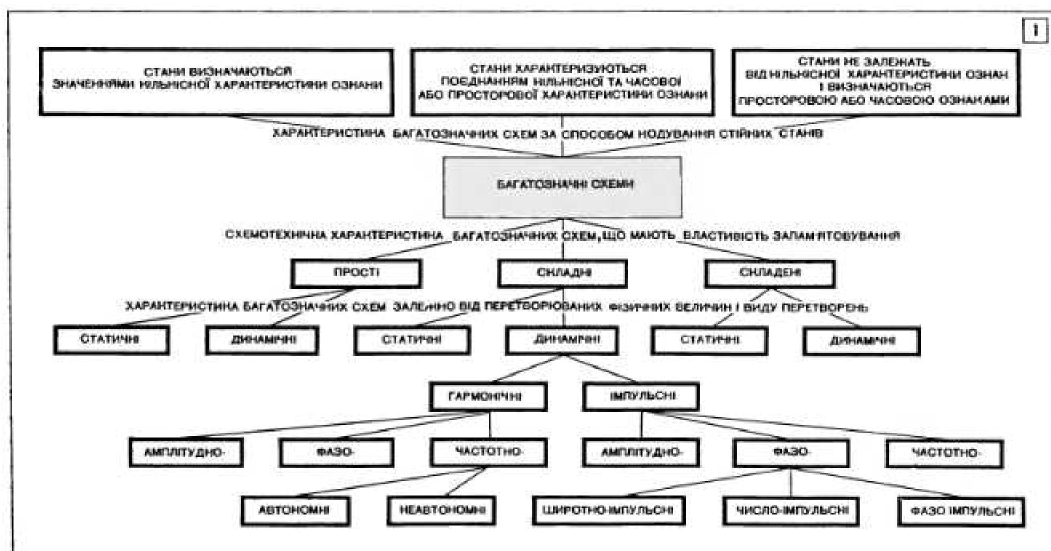
Стійким станам режиму роботи схеми за графічного розв'язування системи (2) відповідають точки перетину характеристики чотириполюсника і прямої зворотного зв'язку, в яких виконується $\frac{\partial \varphi(U_1)}{\partial U_1} < \frac{1}{k}$. Число точок перетину, а, отже, й стійких станів у загальному випадку визначається видом характеристик чотириполюсника й кола зворотного зв'язку, а також їхнім взаємним розташуванням. У найпростішому випадку, коли коло лінійне і положення прямої визначається вибором значень k і U_0, загальна задача побудови Б. с. практично зводиться до побудови чотириполюсника з нелінійною амплітудною характеристикою потрібного виду. Осн. ідея побудови чотириполюсника цього типу полягає в тому, щоб забезпечити можливість перетворення нелінійної залежності між деякими величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які мають, загалом кажучи, різну фіз. природу, на потрібну амплітудну характеристику. В загальному випадку така можливість забезпечується внаслідок виконання кількох послідовних перетворень $U_{вих} = \varphi_1(x_1)$; $x_1 = \varphi_2(x_2)$, … …, $x_n = \varphi_n(U_{вих})$. На практиці, проте, як правило, буває досить виконати лише двоє перетворень, з яких принаймні одне — нелінійне. При цьому характеристика чотириполюсника в цілому набуває вигляду:

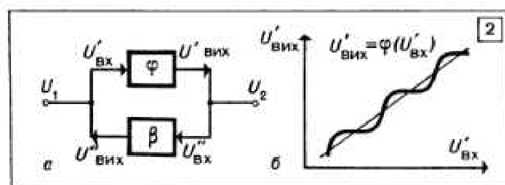
$$U_{вих} = \varphi_1[\varphi_2(U_{вх})]. \quad (3)$$

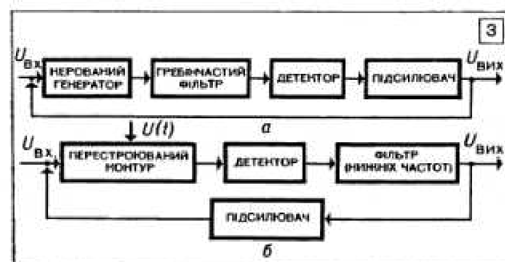
Залежно від характеру фіз. величин і виду перетворювань над ними відповідно до (3) розрізняють Б. с.: с т а т и ч н і, перетворювання в яких виконуються над величинами, не залежними явно від часу, й д и н а м і ч н і, в яких принаймні одна перетворювана величина є явною ф-цією часу або частоти гармонічних коливань. Динамічні Б. с., перетворювана напруга в яких змінюється за гармонічним законом, наз. г а р м о н і ч н и м и. Динамічні схеми, перетворювана напруга в яких є періодичною послідовністю імпульсів, наз. і м п у л ь с н и м и. Якщо ознака стійкого стану виробляється в самій схемі й практично повністю залежить від значень її параметрів, то таку Б. с. наз. а в т о н о м-

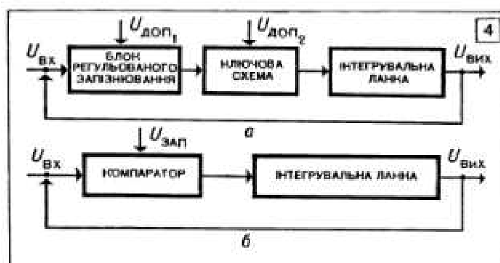
н о ю. Схема, в якій ознака, яка визначає стійкий стан, виробляється зовнішніми відносно неї пристроями (наприклад, у схемах, які використовують перестроювану вибіркову систему, це генератор, сигнали на виході якого містять потрібний спектр частот), наз. н е а в т о н о м н о ю. В неавтономних Б. с. ознаки стійких станів практично не залежать від їхніх параметрів. Це, як правило, веде до підвищення їхньої стабільності й поліпшення багатьох інших важливих тех. і експлуатаційних характеристик.

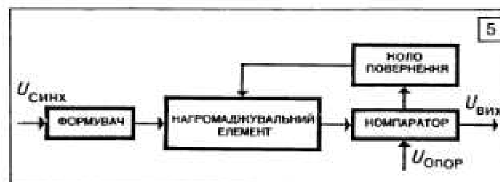
Залежно від схемотехнічних особливостей реалізації елемента, який забезпечує потрібний нелінійний характер принаймні одного з перетворень (3), Б. с. на основі нелінійного чотириполюсника можна поділити на прості, складні та складені. В п р о с т и х Б. с. потрібну нелінійну залежність забезпечує елемент, неподільний у радіотехнічному розумінні, наприклад, багатотунельний діод, вольт-амперна характеристика якого містить кілька ділянок від'ємного опору (в цьому разі нелінійний чотириполюсник











1. Класифікація багатозначних схем.
2. Загальна блок-схема багатозначної схеми на основі нелінійного чотириполюсника із зворотним зв'язком (*а*) та приклад амплітудної характеристики нелінійного чотириполюсника (*б*).
3. Блок-схеми можливих варіантів технічної реалізації автономної (*а*) та неавтономної (*б*) частотно-гармонічних багатозначних схем.
4. Блок-схеми можливих варіантів технічної реалізації широтно-імпульсних автономної (*а*) та неавтономної (*б*) багатозначних схем.
5. Блок-схема можливого варіанта реалізації фазо-імпульсної багатозначної схеми з дискретним приростом значення кількісної характеристики ознаки стійких станів.

вироджується в нелінійний двополюсник). У складних Б. с. потрібну нелінійність забезпечує певна композиція неподільних елементів, кожен з яких, загалом кажучи, може й не бути нелінійним у зазначеному вище розумінні. Істотно важливим для цього класу схем є те, що вид реалізовуваної в них нелінійної залежності (а, отже, і кількість стійких станів), як правило, не пов'язується з кількістю використовуваних елементів і визначається відповідним вибором режиму роботи схеми загалом. Складені схеми реалізуються внаслідок певної композиції елементів за умови, що кожен з них уже реалізує певну нелінійну залежність (Б. с., що містять послідовно увімкнені тунельні діоди, об'єднання Б. с., характеризованих меншою кількістю стійких станів) або кількість їх певною мірою пропорційна потрібній кількості стійких станів (багатофазний релаксатор).

Незалежно від виду виконуваних перетворювань і методів реалізації їх динамічним амплітудно-імпульсним і амплітудно-гармонічним складним Б. с. властиві всі ті вади, що і схемам з амплітудним кодуванням інформації (значна залежність амплітуди від параметрів, слабка завадозахищеність). Такі схеми практично не набули застосування.

Необхідною умовою побудови фазогармонійної (частотно-гармонічної) схеми є виконання перетворювань, за яких однією з проміжних величин, які беруть участь у перетвореннях, є фаза φ гармонічних коливань: $U_{\text{вих}} = f_1(\varphi)$; $\varphi = f_2(U_{\text{вх}})$ (відповідно частота ω гармонічних коливань: $U_{\text{вих}} = \varphi_1(\omega)$; $\omega = \varphi_2(U_{\text{вх}})$) і принаймні одна з ф-цій перетворювання є нелінійною (напр., східчастою). Як приклад, що характеризує можливості тех. реалізації схем цього класу, на мал. 3 подано блок-схеми автономної (*а*) й неавтономної (*б*) частотно-гармонічної Б. с.

Необхідною умовою побудови часово-імпульсних схем є реалізація чотириполюсника, в якому виконується послідовність перетворювань виду $U_{\text{вих}} = \varphi_1(\theta)$; $\theta = \varphi_2(U_{\text{вх}})$, з яких принаймні одне є нелінійним. Тут θ — параметр, який характеризує тривалість імпульсу, використовувану як ознаку стійких станів: власне тривалість τ (широтно-імпульсні Б. с.), пропорційний τ фазовий зсув певної послідовності імпульсів відносно послідовності, вибраної за опорну (фазо-імпульсні Б. с.), пропорційне τ число імпульсів (число-імпульсні Б. с.). На мал. 4 подано блок-схеми можливих варіантів широтно-імпульсних автономної (*а*) й неавтономної (*б*) схем. Як приклад, що характеризує можливості тех. реалізації фазо-імпульсних схем, на мал. 5 наведено блок-схему одного з варіантів таких схем на основі елемента з дискретним приростом значення кількісної характеристики ознаки стійких станів.

Число-імпульсні Б. с. можна побудувати на основі широтно- і фазо-імпульсних Б. с. з використанням додаткового пристрою перетворювання тривалості імпульсів або фази на число їх (напр., на основі статичного *тригера* з двома стійкими станами або на основі схем, які не є багатостійкими).

Необхідною умовою побудови частотно-імпульсних схем є виконання послідовності перетворювань $U_{\text{вих}} = \varphi_1(T)$; $T = \varphi_2(U_{\text{вх}})$, де T — період (частота) проходження імпульсів і принаймні одна з ф-цій перетворення немонотонна. Перше з зазначених перетворень можна виконати, напр., на основі резонансного контура або керованого генератора (автогенератора релаксаційних коливань в автономних схемах і синхронізованого релаксаційного генератора — в неавтономних).

Використовування в побудові чотириполюсника нелінійних (з кількома екстремумами або точками перегину) залежностей, які мають різну природу, веде до розробки Б. с. з комбінованою ознакою стійких станів. Особливістю таких схем є наявність у кожного стану не однієї, а кількох ознак, напр. тривалість імпульсу і його зсуву за фазою. Крім збільшення кількості станів, ці схеми характеризуються й ширшими функціональними властивостями завдяки можливості роздільного керування ознаками.

Складені Б. с. можна реалізувати на основі широкого класу елементів, які є неподільними з погляду конструктивної, схемної або радіотехнічної реалізації. Схеми такого типу, як правило, потребують більших затрат обладнання, ніж прості й складні, а збільшення кількості стійких станів призводить до відповідного збільшення затрат обладнання й ускладнення структури схем. На відміну від простих і складних Б. с., вихідний канал яких завжди складається з одного провода (через що ці схеми завжди багатозначні), вихідний канал складених Б. с. може мати один або кілька проводів.

Незважаючи на виняткову перспективність у плані розвитку структур дискретних пристроїв (особливо 4-го і старших поколінь), розробка простих Б. с. перебуває на стадії експерименту. Найбільше вивчено й розроблено в інженерному плані складні та складені Б. с., серед яких насамперед слід відзначити фазо-імпульсні схеми. Розроблені Б. с. характеризуються кількістю стійких станів від одиниць (*параметрони*) до кількох десятків і навіть сотень (частотно-гармонічні схеми на основі фазового детектора). Одержано перші зразки Б. с. (складні та складені фазо-імпульсні схеми) в мікроелектронному виконанні (на основі МОН-структур).

Б. с. складні та складені застосовують у пристроях автоматики, цифрової вимірювальної (в т. ч. у приладах серійного виробн. — частотомірів і лічильників, вимірювачів часових інтервалів тощо) і цифрової *обчислювальної техніки*. В обчисл. техніці застосовують переважно багатозначні схеми, на основі яких створюють багатозначні *логічні елементи ЦОМ*, тобто елементи, які реалізують

ф-ції багатозначної логіки й багатозначні елементи пам'яті (тригери). У зв'язку з застосуванням елементів названого типу в техніці дискретних пристроїв виникає ряд специфічних теор. та інженерних задач, розв'язуваних у рамках *структурної теорії автоматів* з багатозначним структурним алфавітом. Практичне використання Б. с. спрощує структури відповідних пристроїв, знижує затрати обладнання, споживання енергії, габарити й вартість і підвищує надійність, а також поліпшує деякі інші тех. та експлуатаційні характеристики. В СРСР (з-д «Точелектроприлад», Київ) уперше в світі налагоджено серійний випуск цифрових вимірювальних приладів на багатостійких елементах.

Літ.: Сигорский В. П., Ситников Л. С., Утяков Л. Л. Многоустойчивые элементы дискретной техники. М.— Л., 1966 [бібліогр. с. 351—358]; Ситников Л. С. Многоустойчивые элементы в цифровой измерительной технике. К., 1970 [бібліогр. с. 135—137]; Иваськів Ю. Л. Принципы построения многозначных физических схем. К., 1971 [бібліогр. с. 305—316]. *Ю. Л. Іваськів.*

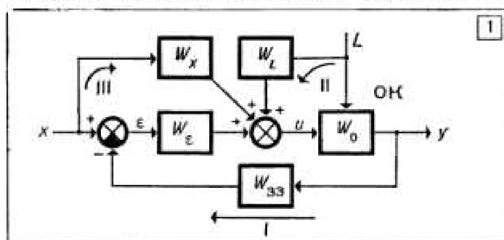
БАГАТОКО́НТУРНА СИСТЕ́МА АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — система автоматичного керування, де є два чи більше контурів, по яких здійснюються зв'язки між різними координатами (а часто й *збурювальними діяннями*) з метою реалізації різних функцій (компенсації збурення, самонастроювання тощо).

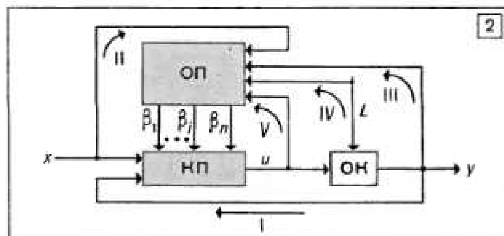
Прикладом Б. с. а. к. може бути *комбінована система автоматичного керування* (мал. 1). У цій системі *керуюче діяння* u визначається трьома змінними: $u = W(x, \varepsilon, L)$, де $\varepsilon = x - W_{33}y$; W_x, W_L, W_ε, W_0, W_{33} — оператори, які виражають зв'язок між відповідними координатами системи, ОК — об'єкт керування. Зв'язки в системі здійснюються по трьох контурах: I — по керованій координаті y (*зворотний зв'язок*), II — по збурювальному діянню L, III — по задавальному діянню x. Схему самонастроюваної Б. с. а. к. наведено на мал. 2. Осн. контур зворотного зв'язку I тут зв'язує вихід об'єкта керування ОК — y з входом керуючого пристрою КП. Крім того, є ще два контури зворотного зв'язку — III та V, а також контури зв'язків по задавальному діянню x — II і збурювальному діянню L — IV. В обчисл. пристрої ОП провадиться *ідентифікація об'єктів керування* й визначаються оптим. (у розумінні прийнятого *критерію якості систем автоматичного керування*) параметри $\beta_1 - \beta_n$ керуючого пристрою з урахуванням характеристик ОК, збурення L та задавального діяння x. Аналогічну систему для багатовимірного випадку наведено на мал. 3.

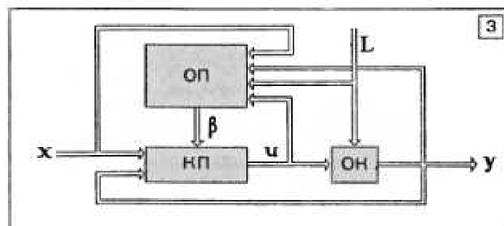
Поняття контура в наведених структурних схемах Б. с. а. к. пов'язується з реалізацією тієї чи іншої функції (компенсації збурень, самонастроювання, ідентифікації тощо). В цьому розумінні Б. с. а. к. відрізняється від багатовимірної системи, де наявність взаємозв'язку ще не означає формування певної функції керування, а часто розглядається як форма представлення процесу взаємного впливу між окремими ланками або координатами системи.

Матем. опис Б. с. а. к. звичайно виконують у вигляді окремих залежностей (рівнянь) усіх розгляданих контурів, а опис багатовимірної системи автомат. керування подають, як правило, у вигляді одного матричного рівняння, в якому не виділяють рівнянь локальних контурів.

Початок систематичним дослідженням Б. с. а. к. покладено при розв'язуванні задачі вибору зв'язків між окремими регуляторами







1. Схема комбінованої багатоконтурної системи автоматичного керування.
2. Схема самонастроюваної багатоконтурної системи.
3. Схема багатовимірної самонастроюваної системи (усі координати — вектори; β — вектор настроюваних параметрів КП).

з умов *автономності*. Дальший розвиток теорії Б. с. а. к. пов'язаний з розробкою теорії *інваріантності систем автоматичного керування*.

Структуру Б. с. а. к., характеристики й параметри окремих ланок визначають, виходячи з комплексу різних завдань, що їх покладають на систему (напр., ідентифікація, компенсація збурень, визначення показників якості керування, оптим. параметрів керуючих пристроїв), і вимог (часто суперечливих) до якості керування (напр., точність, швидкодія, економічність, завадостійкість),— тобто синтез Б. с. а. к. вимагає *системного підходу*. Розв'язати такий комплекс задач у рам-

ках одноконтурних систем неможливо, в зв'язку з цим Б. с. а. к. набувають широкого застосування при *автоматизації керування виробничим процесом*, керуванні енерг. установками, в нафтохімії, в керуванні двигунами рухомих об'єктів тощо.

Літ.: Вознесенский И. Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров. «Автоматика и телемеханика», 1938, № 4—5; Корнилов Ю. Г., Пивень В. Д. Основы теории автоматического регулирования в применении к теплосиловым установкам. М.— Л., 1947 [бібліогр. с. 305—306]; Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. К., 1962 [бібліогр. с. 412—416]; Теория инвариантности в системах автоматического управления. М., 1964.

К. Д. Жук, Ю. В. Крементуло.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОСТІ ПРОБЛЕМА — вибір розв'язку, коли наявна множина функцій мети $f = \{f_i(\alpha)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$, де α — якась альтернатива, під якою розуміють або неперервну векторну змінну, що належить опуклій замкненій області, яку звичайно характеризують системою лінійних чи нелінійних нерівностей, або дискретну змінну, що набуває скінченної множини заданих значень. Б. п. виникає і при дослідженні *складних систем керування*, і в ігрових ситуаціях.

Оскільки оптимуму по кожному критерію не завжди можна досягти при одному й тому ж значенні α^0, то визначають, як саме розуміти розв'язок. Звичайно під таким розв'язком розуміють множину ефективних альтернатив. Альтернативу α^0 наз. ефективною, якщо немає інших альтернатив, кращих за неї хоч би по одному критерію і не гірших щодо решти критеріїв. Критерії множини f мають різний фіз. зміст, одні з них максимізуються, а інші мінімізуються. Перш ніж перейти до формулювання задачі, на основі якої можна знайти множину ефективних альтернатив, зауважимо, що коли α^0 — ефективна альтернатива множини критеріїв $f = \{f_i\}$ $(i = 1, \ldots, M)$, то α^0 — ефективна альтернатива множини ф-цій $W = \{w_i(f_i(\alpha))\}$ $(i = 1, \ldots, M)$, де $w_i(f_i(\alpha))$ — монотонна ф-ція $f_i(\alpha)$ і навпаки.

Для знаходження ефективних точок виберемо такі монотонні ф-ції $w_i(f_i(\alpha))$, щоб вони були безрозмірними і всі мінімізувалися. З цією метою введемо такі монотонні перетворення: для критеріїв, які максимізуються

$$w_i(f_i(\alpha)) = \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i\,(\min)}} \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

і для критеріїв, які мінімізуються

$$w_i(f_i(\alpha)) = \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i\,(\max)} - f_i^0}, \qquad (2)$$

$$(i = m + 1, \ldots, M),$$

де f_i^0 — оптим. значення i-го критерію, $f_{i(\min)}$ — найменше значення максимізовуваного критерію, а $f_{i(\max)}$ — найбільше значення мінімізовуваного критерію. Значення f_i^0, $f_{i(\max)}$, $f_{i(\min)}$ знаходять при $\alpha \in U$ чи $\alpha \in V$, де U — випукла замкнена область, V — дискретна множина $V = \{v_j\}$ $(j = 1, \ldots, N)$. Розв'язок параметричної задачі

$$\min_{\substack{(\alpha \in U \\ \alpha \in V)}} W(\alpha) = \min_{\substack{\alpha \in U \\ (\alpha \in V)}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i\,(\min)}} + \sum_{i=m+1}^{M} \gamma_i \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i\,(\max)} - f_i^0} \right\} \qquad (3)$$

для всіх $\gamma_i \in \Gamma^+ \left\{ \gamma_i > 0, \ \sum_{i=1}^{M} \gamma_i = 1 \right\}$ при достатньо загальних умовах дасть множину ефективних альтернатив. У цьому разі залишається проблема вибору єдиного розв'язку з множини непорівнянних ефективних альтернатив, тобто задача вибору компромісного розв'язку. Відомі різні підходи до визначення компромісу. При одному з підходів під компромісним розв'язком розуміють такий, який дає мінім. відносний відхил від оптим. значень за всіма критеріями відповідно до заданої переваги, яка визначається ваговими коефіцієнтами ρ_i, такими, що $\rho_i \in \rho^+ = \left\{ \rho_i > 0, \ \sum_{i=1}^{M} \rho_i = 1 \right\}$. Якщо критерії рівноцінні, то $\rho_i = \frac{1}{M}$ $(i = 1, \ldots, M)$ і компромісним розв'язком буде такий розв'язок, для якого відносні втрати, виражені співвідношеннями (1) і (2), однакові. А якщо критерії не рівноцінні, то компромісним розв'язком буде такий, для якого однакові «зважені» втрати

$$\tilde{w}_i(\alpha) = \rho_i w_i(f_i(\alpha)) = \rho_i \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i\,(\min)}^0}, \qquad (4)$$

$$(i = 1, \ldots, m),$$

$$\tilde{w}_i(\alpha) = \rho_i w_i(f_i(\alpha)) = \rho_i \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i\,(\max)} - f_i^0}, \qquad (5)$$

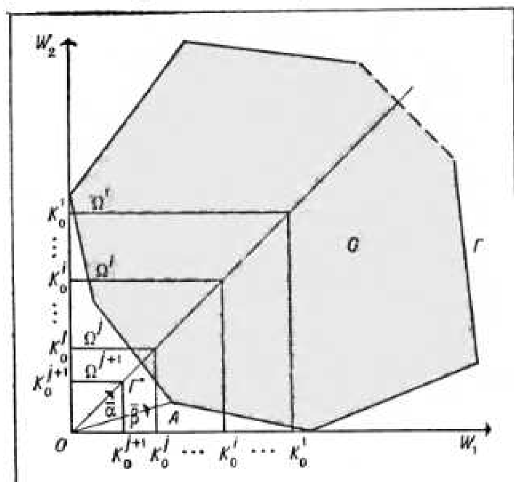
$$(i = m + 1, \ldots, M).$$

Як видно з (1) і (2), w_i задовольняють обмеження $0 < k_0 \leqslant w_i \leqslant 1$ в разі рівноцінних критеріїв або $0 < k_0 \leqslant \tilde{w}_i(f_i(\alpha)) = \rho_1 w_i < 1$ для нерівноцінних. Отже, під компромісним розв'язком розумітимемо таку ефективну альтернативу $\alpha^k \in U$ $(\alpha^k \in V)$, для якої справджуються такі рівності:

$$\rho_1 w_1(f_1(\alpha^k)) = \cdots = \rho_1 w_i(f_i(\alpha^k)) = \cdots = \rho_M w_M(f_M(\alpha^k)) = k_0. \qquad (6)$$

Якщо на основі *експертних оцінок методів* визначено $\rho_i \in P^+$, то компромісною альтернативою α^k буде та, при якій справджуються рівності (6) і мінімізується критерій (3). В силу лінійності критерію (3) мінімуму досягають на нижній межі для $w_i(f_i(\alpha))$, тобто при мінімально можливому $k_0 > 0$. Шукане k_0 у цьому разі можна знайти за методом дихотомії.

Пояснимо викладений вище підхід геометрично на прикладі двох рівноцінних критеріїв f_1 і f_2 для $\alpha \in U$. На мал. G—область значень критеріїв W_1 і W_2 на множині обмежень U, Γ — границя цієї множини, Ω^i — область значень критеріїв w_1 і w_2, в якій ці критерії набувають значення, не більшого за k_0^i. Компромісний розв'язок буде в точці Γ^* перетину бісектриси координатного кута $w_1 0 w_2$ (критерії f_1 і f_2 рівноцінні) з границею області G. Для нерівноцінних критеріїв як координатні ф-ції виберемо $\tilde{w}_1 = \rho_1 w_1$ і $\tilde{w}_2 = \rho_2 w_2$, де w_1 і w_2 визначаються відповідно виразами (4) і (5). Тоді критерії $\tilde{w}_1$ і $\tilde{w}_2$ рівноцінні, і для знаходження компромісного розв'язку можна користуватися зазначеною процедурою.



Геометрична інтерпретація вибору компромісного розв'язку на прикладі двох рівноцінних критеріїв.

Осн. проблемами в задачі багатокритеріальної оптимізації є вибір процедури визначення переваги на множині критеріїв і спосіб введення узагальненого критерію, оптимізація якого дає розв'язок відповідно до вибраної схеми компромісу й певної переваги.

Літ.: Волкович В. Л. Многокритериальные задачи и методы их решения. «Кибернетика и вычислительная техника», 1969, в. 1; Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М., 1971 [бібліогр. с. 382—383]; Льюс Р. Д., Райфа X. Игры и решения. Пер. с англ. М., 1961 [бібліогр. с. 608—625]; Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798—819].

В. Л. Волкович.

БАГАТОКРО́КОВІ ЗАДА́ЧІ — задачі, в яких множину шуканих параметрів, що визначають розв'язок, розбивають на кілька груп так, що значення параметрів, які входять у дану групу, визначають на певному етапі (кроці) багатокрокового процесу розв'язування. Б. з. особливо часто виникають при керуванні тривалими процесами в умовах невизначеності або протидії противника (багатоетапне *програмування стохастичне*, багатокрокові ігри), коли на проміжних етапах прийняття рішень одержують додаткову інформацію про стан керованого процесу. Б. з. вивчають методами *програмування динамічного.* *Н. З. Шор.*

БАГАТОКРО́КОВОГО ПРОЦЕ́СУ ВИРОБНИ́ЦТВА МОДЕ́ЛЬ — *модель математична*, створювана для вивчення міжгалузевих аспектів розвитку економіки, а також для розв'язування *задач про вузькі місця* у виробництві. Ця модель належить до класу моделей *програмування динамічного.*

Задачу оптим. керування багатокроковими процесами виробн. з дискретним часом ставлять так. Нехай $x(t)$, $z(t)$, c, a ($t = 1, \ldots, N$) — n-вимірні вектори, A_1, A_2, B_1, B_2 — $(n \times m)$ — матриці. Треба знайти послідовність $x(t)$, $z(t)$, $t = 1, \ldots, N$, яка максимізує форму $(a, x(N))$ при обмеженнях:

$$\left.\begin{aligned} &x(t+1) = x(t) + A_1 x(t) + A_2 z(t); \\ &t = 0, \ldots N-1; \quad x(0) = c; \\ &z(t) \geqslant 0; \quad t = 0, 1, \ldots, N-1; \\ &B_1 z(t) \leqslant B_2 x(t); \quad x(t) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Задачі виду (1) розв'язують звичайно методами *програмування лінійного*, використовуючи схеми декомпозиції, які враховують блокову структуру обмежень.

Іноді моделі, які описують багатокрокові процеси виробн., розглядають у дифер. формі; тоді задачу оптим. керування записують у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A_1 x(t) + A_2 z(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ &x(0) = c; \\ &z(t) \geqslant 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ &B_1 z(t) \leqslant B_2 x(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Треба вибрати таке керування $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, щоб одержати максимум функціоналу $L = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i(t)$; $(\{x_i(t)\} = x(t))$, при виконанні умов (2). Для розв'язування такого роду задач розроблено спец. методи, основані на теорії динамічного опуклого програмування і на використанні принципу максимуму; вивчено властивості оптим. керування також при $T \to \infty$ (так звані «магістральні теореми»). *Н. З. Шор.*

БАГАТОКРО́КОВОГО ПРОЦЕ́СУ РОЗПОДІ́ЛУ МОДЕ́ЛЬ — *модель математична*, використовувана для описування економічних

процесів, таких, як планування капіталовкладень на тривалий період, розвиток та реконструкція галузей підприємств і в інших важливих економічних застосуваннях.

Задачу багатокрокового розподілу ресурсів формулюють так. Нехай r видів ресурсів розподіляються на N кроках процесу. Позначимо через $x_i(k-1)$ кількість ресурсів перед k-м кроком, $x_{ij}(k)$ — кількість ресурсів i-го виду, використовуваних для одержання додатково якоїсь кількості j-го ресурсу, $g_i(x_{1i}(k), \ldots, x_{ri}(k))$ — ф-цію, яка показує кількість ресурсів i-го виду, одержуваних при використанні вектора ресурсів $\{x_{ji}(k)\}_{j=1}^{r}$ на k-у кроці. Т. ч., є природні обмеження:

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \sum_{j=1}^{r} x_{ij}(k) + g_i(x_{1i}(k), \ldots, x_{ri}(k)); \quad i = 1, 2, \ldots, r;$$

$$x_i(0) = c_i; \quad x_{ij}(k) \geqslant 0; \quad i, j = 1, \ldots, r; \quad k = 1, \ldots, N;$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij}(k) = x_i(k); \quad i = 1, \ldots, r; \; k = 1, \ldots, N.$$

При цих обмеженнях і заданому векторі початкових ресурсів $\{x_j(0)\}$ треба максимізувати певну *цільову функцію* кінцевих ресурсів $F(x_1(N), \ldots, x_r(N))$. При $r \leqslant 3$ задачу багатокрокового розподілу розв'язують методами *програмування динамічного*. При $r > 3$ для розв'язування таких задач краще застосовувати загальні методи нелінійного програмування (див. *Програмування математичне*). Якщо ф-ції g_i та F лінійні, то можна застосовувати методи *програмування лінійного*.

Н. З. Шор.

БАГАТОПО́ЛЮСНИК КОНТА́КТНИЙ — *схема контактна*, в якій є кілька вхідних і вихідних полюсів. Б. к. з n вхідними і m вихідними полюсами наз. (n, m)-полюсником. Б. к., в якому полюсів два (один вхідний і один — вихідний), наз. контактним двополюсником.

БАГАТОПО́ЛЮСНИК КОНТА́КТНИЙ РОЗДІЛО́ВИЙ — *багатополюсник контактний*, між будь-якою парою вихідних полюсів якого реалізується функція, що тотожно дорівнює нулеві, тобто ні при якому стані Б. к. р. між його вихідними полюсами немає замкненого шляху. Прикладом розділового $(1, 2^n)$-полюсника може бути *«дерево» контактне* з n реле.

БАГАТОПО́ЛЮСНИК КОНТА́КТНИЙ УНІВЕРСА́ЛЬНИЙ для множини функцій алгебри логіки P — *багатополюсник контактний* з k вхідними й одним вихідним полюсами, тобто $(k, 1)$-полюсник, такий, що якою б не була функція $f(x_1, \ldots, x_n) \in P$, то знайдеться такий вхідний полюс, що між ним і вихідним полюсом реалізується ця сама функція $f(x_1, \ldots, x_n)$.

БАГАТОПРОГРА́МНА ОБРО́БКА ІНФОРМА́ЦІЇ, мультипрограмна обробка інформації — обробка інформації на цифрових обчислювальних машинах, що забезпечує практично одночасне виконання кількох програм. При Б. о. і. використовують реальне суміщення в машині розв'язування кількох задач (або суміщення певних фаз розв'язування) та позірне суміщення, основане на почережному, напр. на циклічному, обслуговуванні яким-небудь пристроєм усіх розв'язуваних задач. Прикладом реального суміщення є одночасне обчислювання якоїсь задачі центр. *процесором* і введення (або виведення) інформації для ін. задачі, здійснюване автономним пристроєм введення (чи виведення). До реального суміщення належить і одночасне розв'язування кількох задач на багатопроцесорних ЦОМ. Позірного суміщення розв'язування кількох задач на одному процесорі можна досягти, напр., періодичним перемиканням його з розв'язування однієї задачі на розв'язування іншої.

Однією з осн. переваг Б. о. і. при реальному суміщенні є краще узгодження роботи порівняно повільних пристроїв введення—виведення зі швидкодіючим центр. процесором. Це пояснюється тим, що в разі однопрограмної роботи ЦОМ протягом проміжків часу, потрібних для введення чи виведення інформації, центр. процесор, як правило, не діє. Такі самі простої процесора виникають і в разі організації однопрограмної роботи ЦОМ у *діалога режимі*. При Б. о. і. ймовірність простою центр. процесора значно зменшується, бо під час введення чи виведення однієї з задач центр. процесор може бути завантажений розв'язуванням ін. задачі. При цьому важливо, щоб *обчислювальна система* була добре збалансована за продуктивністю й кількістю зовн. пристроїв, які обслуговують процесор. Б. о. і. на ЦОМ організує керуюча програма *операційної системи*. Ще однією з осн. переваг Б. о. і. при реальному й позірному суміщенні є незалежна одночасна робота на машині кількох користувачів. До методів організації Б. о. і. належать ще пакетна обробка інформації, *обробка інформації в режимі розподілу часу* та *обробка інформації в реальному масштабі часу*.

Б. о. і. можлива, якщо є спец. апаратні засоби. Осн. з них: 1) пристрій пам'яті на базі *дисків магнітних* або *барабанів магнітних*, які за обсягом значно перевищують обсяг головної *пам'яті ЦОМ*. Призначення цієї (проміжної) пам'яті — зберігати всю або частину інформації протягом проміжку часу, коли ці задачі не розв'язує центр. процесор. У момент часу, коли процесор повертається до розв'язування котроїсь із цих задач, інформацію про неї викликають у гол. пам'ять ЦОМ. За допомогою такого розподілу інформації досягають оперативності роботи центр. процесора; 2) засоби, що дають змогу переміщувати (релоціювати) *програми* й дані в межах гол. пам'яті ЦОМ. Релоційовність (перемістимість) програм і даних потрібна для того,

щоб чергову порцію інформації, викликану з проміжної пам'яті, можна було перемістити на будь-яке вільне місце в гол. пам'яті. Релоційовності (перемістимості) програм досягають за допомогою апаратних засобів, які в момент виконання команди забезпечують перетворення *адрес математичних*, які є в програмі, на істинні (фізичні) *адреси;* 3) *система переривання*, що реагує на сигнали, які надходять від зовн. пристроїв і нагромаджувачів, і в разі потреби перериває (а потім відновлює) задачу, яку в цю мить розв'язує центр. процесор, для забезпечення оперативного обслуговування пристроїв і нагромаджувачів; 4) засоби, що забезпечують *пам'яті захист*. Захист зовн. чи проміжної пам'яті забезпечує керуюча програма (див. *Керування даними*); 5) автономні канали обміну зовн. пристроями й зовн. нагромаджувачами; вони забезпечують реальне суміщування роботи центр. процесора з процесами введення — виведення інформації; 6) електронний годинник (таймер), що контролює за допомогою керуючої програми часовий перебіг обчисл. процесу та здійснює планування його.

Переваги Б. о. і. перед однопрограмною обробкою привели до того, що більшість сучасних ЦОМ використовують у багатопрограмному режимі. *А. І. Нікітін.*

БАГАТОТО́ЧКОВА́ КРАЙОВА́ ЗАДА́ЧА — *крайова задача* для одновимірного диференціального або інтегро-диференціального рівняння, в якого встановлено обмеження на розв'язки більше як у двох точках.

БА́ЙЄСА ФО́РМУЛА, формула ймовірностей гіпотез — формула елементарної *імовірностей теорії*, яка дає змогу обчислювати апостеріорні (післядослідні) *імовірності* гіпотез про настання якоїсь події, якщо відомо, що ця подія здійснилась. Нехай подія A може настати тільки сумісно з однією з послідовності подій $B_1, B_2, \ldots$, які взаємно виключають одна одну, причому відомі ймовірності $p(B_k)$ всіх цих подій та умовні ймовірності $p(A/B_k)$ події A при умові, що B_k здійснилась; тоді умовні ймовірності

$$p(B_k/A) = \frac{p(B_k)\, p(A/B_k)}{\sum\limits_i p(B_i)\, p(A/B_i)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

М. П. Слободенюк.

БА́ЙЄСІВСЬКЕ ВИРІ́ШУВАЛЬНЕ ПРА́ВИЛО — статистичне вирішувальне правило, що забезпечує мінімум середнього риску рішення. Під середнім риском розуміють от що. Є об'єкти або ситуації, певні параметри яких цікавлять нас (напр., назви класів, до яких ці об'єкти належать). Інформацію про об'єкти задають у формі наборів ознак $x = (x_1, \ldots, x_n)$, одержуваних шляхом прямих вимірювань. Припускається, що при кожному можливому значенні шуканого параметра γ набори ознак x являють собою реалізації випадкової величини з відомим умовним розподілом імовірностей $p(x|\gamma)$. Припускається також, що апріорний розподіл імовірностей $\xi(\gamma)$ шуканих параметрів відомий. Щоб визначити ці параметри, можна зазначити вирішувальне правило δ, яке відображує простір ознак $\mathfrak{X}$ на множину рішень Λ, тобто зазначає для кожного об'єкта, описуваного набором ознак $x \in \mathfrak{X}$, рішення $\lambda = \delta(x) \in \Lambda$. Це рішення оцінює дійсне значення шуканого параметра $\gamma \in \Gamma$ для даного об'єкта. Множина рішень Λ у загальному випадку може не бути тотожна (точніше, ізоморфна) множині Γ значень шуканих параметрів. Задається функція втрат $L(\gamma, \lambda)$, яка встановлює, якого кількісного збитку завдає рішення λ у разі, коли дійсне значення параметра дорівнює γ. Середній риск $r(\delta, \xi)$ рішення визначають як математичне сподівання втрат при використанні цього вирішувального правила δ: $r(\delta, \xi) = \sum\limits_{\mathfrak{X}}\sum\limits_{\Gamma} L(\gamma, \delta(x))\, p(x|\gamma)\, \xi(\gamma)$, через Σ тут позначено підсумовування дискретних або інтегрування за ймовірнісною мірою неперервних величин. Б. в. п. δ^* визначено умовою: $r(\delta^*, \xi) \leqslant r(\delta, \xi)$ при всіх можливих правилах δ. Для кожного набору ознак x Б. в. п. зазначає таке рішення $\lambda = \delta^*(x)$, при якому середня умовна втрата $\sum\limits_{\gamma} L(\gamma, \lambda)\, p(\gamma|x)$ є мінімальною. Приклад Б. в. п. — байєсів алгоритм розпізнавання з відмовами. Нехай $\mathfrak{X}$ — будь-який простір ознак, для якого задано розподіли $p(x|\gamma)$ та $\xi(\gamma)$. Шуканий параметр γ — це номер класу розпізнаваного об'єкта; $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$. Множина рішень (тобто номерів класів, зазначених алгоритмом) відрізняється від Γ і має вигляд: $\Lambda = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$, де γ_0 — додатковий клас нерозбірливих об'єктів *(відмов від розпізнавання)*. Функцію втрат задають у такому вигляді: $L(\gamma, \lambda) = 0$ при $\lambda = \gamma$; $L(\gamma, \lambda) = \varepsilon$ при $\lambda = \gamma_0$ і $L(\gamma, \lambda) = 1$ при $\lambda \neq \gamma$, $\lambda \neq \gamma_0$ (втрата при відмові приймається меншою, ніж при помилці: $0 < \varepsilon < 1$). При зазначених умовах байєсів алгоритм зводиться ось до чого: $\delta^*(x) = \gamma_k$, якщо $p(\gamma_k|x) = \max\limits_{t = 1, \ldots, N} p(\gamma_t|x) > 1 - \varepsilon$ і $\delta^*(x) = \gamma_0$ в противному разі.

Б. в. п. використовують у теорії статистичних рішень, у *розпізнаванні образів*, в *ігор теорії* (байєсова стратегія), в *оптимального керування теорії* і т. ін.

Важливим окремим випадком використання Б. в. п. у розпізнаванні образів є байєсівське навчання. При навчанні, крім шуканого параметра — номера класу γ, невідомими є ще й кілька інших параметрів β, що характеризують розглядувані об'єкти (іноді такі додаткові невідомі параметри наз. заважаючими). Припускається, що значення заважаючих параметрів є сталими для сукупності всіх розглядуваних об'єктів у кожній конкретній задачі навчання і відомо апріорний розподіл імовірностей цих значень $\eta(\beta)$ для ансамблю однотипних задач навчання. Задачу байєсівського навчання можна форму-

лювати по-різному. Напр., її можна поставити як задачу побудови Б. в. п., що вказує значення параметрів β або значення певних функцій від цих параметрів за заданою *навчальною вибіркою.* До навчальної вибірки $u = \{(x_{(1)}, \gamma_{(1)}), \ldots, (x_{(m)}, \gamma_{(m)})\}$ входять набори ознак $x_{(q)} \in \mathfrak{X}$ об'єктів, для яких вказано їхні класи $\gamma_{(q)} \in \Gamma$ (при навчанні з ідеальним учителем указуються дійсні значення $\gamma_{(q)}$, з реальним — відповіді $\lambda_{(q)}$ деякого допоміжного вирішувального правила, які є оцінками дійсних значень $\gamma_{(q)}$ і в принципі можуть і не збігатися з ними). Одержані при навчанні оцінки значень заважаючих параметрів або функцій від цих параметрів підставляють потім як значення самих параметрів або їхніх функцій при побудові байєсівського алгоритму розпізнавання (Б. в. п., що зазначає шукані класи об'єктів). Природно вимагати, щоб оцінки параметрів, одержані при навчанні, давали змогу здійснювати розпізнавання якнайкращим способом. Тому в найзагальнішому випадку байєсівське навчання зразу формулюють як задачу побудови байєсівського алгоритму розпізнавання в присутності заважаючих параметрів і полягає воно в мінімізації середнього умовного *риску розпізнавання* об'єктів при заданій навчальній вибірці. Припускається, що відомі такі статистичні характеристики: умовний спільний розподіл імовірностей елементів навчальної вибірки $p(u|\beta) = p(x_{(1)}, \gamma_{(1)}, x_{(2)}, \gamma_{(2)}, \ldots, x_{(m)}, \gamma_{(m)}|\beta)$ і наборів ознак розпізнаваних об'єктів $p(x|u, \beta, \gamma)$. Середній риск рішень $\lambda = \delta(x, u)$, прийнятих алгоритмом розпізнавання для наборів ознак x, коли задано навчальну вибірку u, задають як $r(\delta, \xi) = \sum_{\mathfrak{X}\times U} \sum_{\Gamma} L(\gamma, \delta(x, u))\, p(x, u|\gamma)\, \xi(\gamma)$, де U — множина навчальних виборок, а умовний спільний розподіл імовірностей $p(x, u|\gamma)$ елементів навчальної вибірки й набору ознак розпізнаваного об'єкта одержуємо за відомими статистичними характеристиками: $p(x, u|\gamma) = \sum_{\mathrm{B}} p(x|u, \beta, \gamma)\, p(u|\beta)\, \eta(\beta)$; тут B — множина значень заважаючих параметрів. Звичайно запроваджують такі спрощувальні припущення: 1) елементи навчальної вибірки статистично незалежні $p(u|\beta) = \prod_{q=1}^{m} p(x_{(q)}, \gamma_{(q)}|\beta)$ і 2) при відомих значеннях заважаючих параметрів набори ознак розпізнаваних об'єктів статистично не залежать від навчальної вибірки: $p(x|u, \beta, \gamma) = p(x|\beta, \gamma)$. При цьому $p(x, u|\gamma) = \sum_{\mathrm{B}} p(x|\beta, \gamma)\, p(u|\beta)\, \eta(\beta)$, і для наведеного вище прикладу подібне байєсівське навчання зводиться до заміни умовних імовірностей класів $p(\gamma|x)$ оцінками $\hat{p}(\gamma|x) = \sum_{\mathrm{B}} p(\gamma|x, \beta)\, p(\beta|u)$, які являють собою умовні математичні сподівання імовірностей $p(\gamma|x, \beta)$, що є функціями від заважаючих параметрів. *Г. Л. Гімельфарб*

БАЙЄСІВСЬКЕ НАВЧА́ННЯ — процес зміни *правила вирішувального*, що реалізується *розпізнавальною системою*, в результаті якого мінімізується середній умовний *риск розпізнавання* при даній навчальній вибірці. Осн. відміна Б. н. від інших видів навчання полягає в тому, що при Б. н. не провадять оцінки параметрів розподілів, а знаходять апостеріорний розподіл їх за даної *навчальної вибірки.* Див. також *Навчання розпізнавати образи.*

БАЙЄСІВСЬКИЙ МЕ́ТОД — метод прийняття рішення про неспостережувані характеристики, який грунтується на тому, що відомо апріорний розподіл *імовірностей* цих характеристик і умовний розподіл результатів експерименту при заданих значеннях неспостережуваних характеристик. Б. м. названо за ім'ям англ. математика 18 ст. Т. Байєса, який запропонував формулу, що пов'язує апостеріорні й апріорні ймовірності:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B|A_j)},$$

де A_i — попарно несумісні події, об'єднання яких включає подію B.

Б. м. широко використовують у теорії статистичних рішень, в *ігор теорії* та в теорії *розпізнавання образів.* Б. м. полягає здебільшого у вибиранні найімовірніших значень характеристик. У розпізнаванні образів цьому відповідає вибирання найвірогіднішої відповіді розпізнавання (див. *Відповідь розпізнавальної системи*), що забезпечує мінім. імовірність помилкових рішень. У заг. випадку Б. м. полягає в вибиранні рішення, що відповідає мінімумові середнього риску рішень (див. *Байєсівське вирішувальне правило*). Нехай $\{x\}$ — спостережувані реалізації розглядуваної випадкової події або величини; d_i, $i = 1, \ldots, n$ — можливі рішення щодо значень шуканих характеристик цієї події (здебільшого рішення наз. статистичною гіпотезою). При використанні Б. м. треба, щоб було задано т. з. апріорні відомості: безумовні ймовірності гіпотез $p(d_i)$ й умовні ймовірності (щільності ймовірностей) реалізацій $p(x/d_i)$ при кожній з гіпотез d_i. Від цих апріорних відомостей можна легко перейти до умовних імовірностей гіпотез при спостережуваній реалізації $p(d_i|x)$, які наз. апостеріорними ймовірностями. Найвірогідніше рішення у Б. м. визначають за макс. апостеріорною ймовірністю. Якщо апріорні ймовірності гіпотез $p(d_i)$ невідомі, можна використати т. з. е м п і р и ч н и й Б. м., у якому ці ймовірності статистично оцінюються за заданою вибіркою реалізацій $\{x_t, t = 1, \ldots, N\}$. *Г. Л. Гімельфарб.*

БАЙТ (англ. byte) — одиниця кількості інформації, яка являє собою групу з сусідніх двійкових розрядів (з восьми, іноді з шести

розрядів), якою *цифрова обчислювальна машина* може оперувати як одним цілим під час передавання, зберігання й обробки *даних* (інформації). Більші одиниці інформації — слова; вони звичайно кратні за довжиною Б. Це значно спрощує узгодження процесів і обладнання в ЦОМ. Б. використовують для представлення букв і спец. символів (вони займають здебільшого увесь Б.) або десяткових цифр (розміщують їх звичайно по дві цифри в Б.). 1Б. = 8 *біт*. Див. *Інформації кількість*.

БАЛА́НС МІЖГАЛУЗЕ́ВИЙ — система показників, які характеризують виробництво та розподіл суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу. Б. м. є *моделлю математичною* нар. г-ва, яку описують системою матеріальних рівнянь, що характеризують виробн. і розподіл продукції:

$$X = AX + Y, \qquad (1)$$

де X — вектор валового випуску; Y — вектор кінцевого випуску; A — матриця коеф. прямих витрат. Кожна компонента векторів X та Y означає відповідно валовий і кінцевий випуск по галузі, а кожний коеф. a_{ij} матриці A показує ту кількість продукції галузі i, яка потрібна для виробн. одиниці валової продукції в j-й галузі. Модель балансу (1) при заданих значеннях компонентів вектора Y і коеф. матриці A дає змогу знаходити збалансовані обсяги виробн. по всіх галузях нар. господарства.

Основу Б. м. становить сукупність усіх галузей матеріального виробництва. Кожна галузь відображується в балансі двічі: як виробник і як споживач. Галузі як виробникові продукції відповідає певний рядок, а галузі як споживачеві продукції — певний стовпчик. У рядках Б. м. відображується розподіл обсягу продукції кожної галузі матеріального вироб., а в стовпчиках — структура матеріальних затрат і чистої продукції кожної галузі.

На основі моделі Б. м. можна розрахувати коеф. повних затрат. Ці затрати виражають затрати одного продукту на виробн. одиниці кінцевого випуску іншого продукту не тільки безпосередньо, у вигляді прямих затрат, а й опосередковано, через інші продукти, які беруть участь у виробн. Останнім часом у нар.-госп. плануванні використовують динамічні міжгалузеві моделі, що їх описують системою рівнянь вигляду:

$$X_t = A_tX_t + B_t\Delta X_t + Y^*_t, \qquad (2)$$

де Y^*_t — вектор кінцевої продукції, що її використовують для споживання; B_t — матриця коеф. капіталоємності у t-му році; ΔX_t — приріст валової продукції. Повна система Б. м. в рамках єдиної економіко-матем. моделі об'єднує матеріальні баланси, баланс трудових ресурсів, баланс національного доходу, баланс всього суспільного продукту, фінансовий баланс грошових доходів та витрат населення.

Літ.: Гребцов Г. И. [та ін.]. Основы разработки межотраслевого баланса. М., 1962; Дудкин Л. М. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. М., 1966 [бібліогр. с. 167—182]; Коссов В. В. Межотраслевой баланс. М., 1966 [бібліогр. с. 218—221]; Экономико-математические модели. М., 1969.

Ю. С. Архангельський, І. І. Коваленко, Л. І. Сабірова.

БАЛА́НСОВІ МОДЕ́ЛІ — економіко-математичні моделі, що характеризують рівність (баланс) між надходженням та розподілом якогось ресурсу (продукція, трудові ресурси, потужності). Принципова схема Б. м. має вигляд (на прикладі матеріальних балансів):

$$S^r_i(t) + \sum_k x^{kr}_i(t) + x^r_i(t) = \sum_j a^r_{ij}(t)\, x_j(t) + $$
$$+ y^r_i(t) + P^r_i(t) + \sum_k x^{rk}_i(t) + S^r_i(t+1),$$

де i, j — індекси продукції; t — індекс періоду (року, кварталу тощо); k, r — індекс району (республіки, економ. району, області, міста, підприємства); $S^r_i(t)$, $S^r_i(t+1)$ — залишки продукції на початок (кінець) періоду t; $x^{rk}_i(t)$ — обсяг перевезення з району r до k; $x^r_i(t)$ — обсяг виробництва; $a^r_{ij}(t)$ — норма витрати продукції виду i на виробництво одиниці продукції j; $y^r_i(t)$ — потреби населення в предметах ужитку; $P^r_i(t)$ — інші потреби (на капітальне будівництво, ремонтно-експлуатаційні потреби, приріст резервів продукції тощо). Аналогічно будують баланси потужностей, трудових ресурсів, розвіданих корисних копалин. Б. м. призначені для вивчення темпів, що склалися, та пропорцій розвитку нар. г-ва і розробки взаємоузгоджених планів на різних рівнях керування. Комплекс Б. м. планування суспільного виробн. включає взаємопов'язані і взаємодіючі моделі підприємств і галузей нар. г-ва. Результати розрахунків за Б. м. підприємств застосовують для складання моделей галузей, а результати розрахунків галузевих моделей — для складання Б. м. на рівні нар. г-ва.

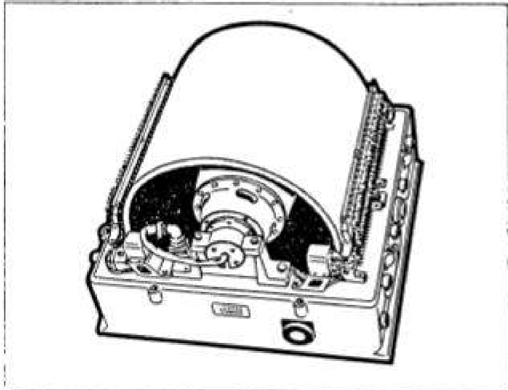
Літ.: Коссов В. В. Межотраслевой баланс. М., 1966 [бібліогр. с. 218—221]; Моисеев Н. Н. Математика — управление — экономика. М., 1970.

Ю. С. Архангельський, Л. І. Сабірова
Т. І. Приходько.

БАРАБА́Н МАГНІ́ТНИЙ — циліндр, вкритий шаром магнітотвердої речовини, на якому можна записувати дискретну інформацію шляхом вибіркового намагнічування ділянок його поверхні. Поблизу поверхні Б. м. (мал.) прикріплено магн. головки записування — зчитування, що спричинюють під час записування або виявляють під час зчитування зміну магн. індукції найближчої ділянки поверхні. Записування (намагнічування) здійснюється потоком розсіювання головки. Зчитування забезпечується наведенням ерс у головці під час проходження ділянки з залишковою намагніченістю, тобто виявляється зміна індукції. Тут зчитуваний сигнал залежить від швид-

кості зміни індукції, яка пропорційна швидкості руху Б. м. Можна зчитувати з нерухомої поверхні, напр., при кроковому русі, використовуючи принцип магн. підсилювача, явища Холла чи Керра.

Як правило, головки нерухомі відносно осі Б. м., і кожна працює з доріжкою — кільцеподібною ділянкою поверхні, що проходить під головкою. Одна головка може обслуговувати групу доріжок Б. м. за допомогою електро-, гідро- або пневмомеханічних засо-



Барабан магнітний.

бів переміщування головки паралельно осі обертання. При такій конструкції пристрої з Б. м. коштують менше, але при цьому збільшується час доступу до інформації. Одну доріжку можуть обслуговувати кілька головок, розподілених по колу; це зменшує час доступу до кількох *мсек*. Загальна кількість доріжок на Б. м.— від кількох одиниць до кількох сотень.

Ширина доріжки фактично менша за розмір головки в напрямі, паралельному осі обертання, і залежить від геом. розмірів і магн. характеристик покриття й головки. Ця ширина визначає т. з. поперечну щільність запису (до 10 доріжок на *мм*). Для збільшення поперечної щільності запису головки збирають у кілька обойм, паралельних осі обертання, з відповідним зсувом. Характеристикою використання поверхні є також щільність (т. з. поздовжня) запису інформації в напрямі обертання. Вона досягає 70 *біт/мм* і залежить (крім геом. розмірів і магн. характеристик головки та покриття) від способу формування в обмотці головки послідовності імпульсів струму, і обмежується робочою частотою головки (1—2 *Мгц*). Зі зменшенням зазору між головкою і Б. м. поздовжня щільність запису збільшується. Якщо головки нерухомі відносно осі обертання, зазор становить здебільшого не менше як 20 *мкм* (при суворих мех. вимогах до Б. м.). Застосовують головки, що «плавають» на аеростатичному (надувному) або аеродинамічному (захоплюваному) повітряному шарі завтовшки бл. 3 *мкм*. Використовують і Б. м., що «плаває» в нерухомій обоймі з головками.

Б. м. застосовують у ЦОМ у складі *запам'ятовувальних пристроїв зовнішніх* і як проміжний ЗП, і як дешевий циклічний *оперативний запам'ятовувальний пристрій*.

Серійні вітчизняні ЗП на Б. м. НБ—11 мають ємність 6,6 *Мгбіт* із середнім часом звертання 30 *мсек*, а найбільший з Б. м. UNIVAC Fastrand — 450 ÷ 900 *Мгбіт* з часом звертання 92 *мсек*.

Літ.: Каган Б. М., Адасько В. И., Пурэ Р. Р. Запоминающие устройства большой емкости. М., 1968 [бібліогр. с. 314—317]; Макурочкин В. Г. Магнитная запись в вычислительной технике. М., 1968 [бібліогр. с. 166—167].

О. О. Барабанов.

БЕ́КУСА НОРМА́ЛЬНА ФО́РМА — окремий вид формальних граматик породжувального типу, які описують клас контекстно вільних мов. Б. н. ф. запровадив амер. математик Бекус для описування мови *АЛГОЛ-60*. Згодом ці граматики набули широкого визнання й великого поширення. Б. н. ф. задається словником термінальних (або основних) символів (напр., у мові АЛГОЛ-60 — це букви, цифри, логіч. значення, знаки операцій, роздільники, дужки, допоміжні слова: **real**, **integer**, **Boolean**, **procedure** тощо), словником нетермінальних символів (що їх наз. метазмінними), один з яких наз. аксіомою, і сукупністю металінгвістичних формул (МЛФ), кожна з яких призначена знаходити одну метазмінну (в *мовах програмування* аксіомі відповідає поняття *програми*). Кожну МЛФ побудовано з термінальних і нетермінальних символів за допомогою металінгвістичних зв'язок : : = (означає «рівне за визначенням») та верт. риски | (означає «або»); кожна з них задає правило породжування допустимих значень відповідних метазмінних, якими є осн. символи або *ланцюжки* їх, розташовані між роздільниками | або одержувані послідовною заміною метазмінних, що містяться в цих ланцюжках, їхніми допустимими (породжуваними) значеннями. Прикладом Б. н. ф. є задання синтаксису цілого числа в описі мови АЛГОЛ-60:

$$\langle\text{ціле}\rangle ::= \langle\text{цифра}\rangle \mid \langle\text{ціле}\rangle \langle\text{цифра}\rangle$$

$$\langle\text{цифра}\rangle ::= 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9.$$

Тут ⟨ціле⟩ й ⟨цифра⟩ є метазмінні, а цифри від 0 до 9 — осн. символи мови. Це визначення цілого числа є рекурсивним, згідно з яким будь-яка цифра є цілим числом, або будь-яке ціле, до якого справа приписано цифру, також є цілим числом і дає змогу одержати число у вигляді довільної послідовності цифр, напр. 28 379, 8, 032 та ін. Див. також *Граматика формальна*. *К. Л. Ющенко.*

БЕ́ЛЛМАНА ПРИ́НЦИП ОПТИМА́ЛЬНОСТІ — основний принцип методів динамічного програмування, який твердить, що оптимальна поведінка системи характеризується тією властивістю, що який би не був первісний стан і розв'язки до деякого моменту часу, наступні розв'язки мають становити оптимальну поведінку щодо стану, який одержують у результаті прийнятих розв'язків. У випадку N — етапної задачі *програмування динамічного* Б. п. о. подають у вигляді рекурентного співвідношен-

ня $f_{k+1}(s) = \max_{u \in M} f_k(us)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $f_0(s) = \varphi(s)$, де $f_k(s)$ — ф-ція, що виражає макс. доход за k кроків залежно від первісного стану s; u — керуючий оператор переходу за один крок, який вибирають з множини M допустимих керуючих операторів; $\varphi(s)$ — задана ф-ція доходу. На базі цього співвідношення будують численні методи динамічного програмування. У задачах оптим. керування Б. п. о. виражається у вигляді нелінійного рівняння в частинних похідних (див. *Беллмана рівняння*). Див. також *Оптимального керування теорія*. *Н. З. Шор.*

БЕЛЛМАНА РІВНЯННЯ — рівняння в частинних похідних 1-го порядку, одержане в результаті застосування методу *програмування динамічного* для функції, що виражає в задачах оптимального керування оптимальне значення функціоналу залежно від початкового стану. Нехай рух керованого об'єкта описується векторним диференціальним рівнянням: $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$, $u \in U$, де x — вектор фазових координат, U — множина керувань. Задано функціонал $I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt$. Завдання полягає в тому, щоб з усіх допустимих керувань $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, що переводять початкову фазову точку x_0 у точку x_1, обрати таке, яке надає функціоналові I найменшого можливого значення. Щоб розв'язати цю задачу, вводять ф-цію $T(x)$, яка виражає залежність оптим. значення функціоналу I від початкового стану x і яку визначено на множині G тих точок фазового простору, для яких є здійсненним перехід у точку x_1 за скінченний час.

Нехай $\omega(x) = -T(x)$. Ф-ція $\omega(x)$ в ділянці G (за винятком окремої підмножини меншої розмірності, ніж розмірність фазового простору), задовольняє рівняння $\max_{u \in U} (\widehat{q_\omega}(x), f(x, u)) = f^0(x, u)$, де $\widehat{q_\omega}(x)$ — градієнт ф-ції $\omega(x)$ у точці x. Це рівняння і є Б. р. Рівняння, що є модифікацією Б. р., використовують і для дослідження *ігор диференціальних*. Див. також *Оптимального керування теорія*. *Н. З. Шор.*

БЕРЖА ГРАФ — *граф* без ланок (орієнтований), без кратних петель і кратних дуг одного напряму.

БЕРНУЛЛІ РОЗПОДІЛ — розподіл імовірностей *випадкової величини* ξ, яка набуває значень $0, 1, \ldots, n$ з *імовірностями* $P_n(k) = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Числа n та p — параметри Б. р. Цей розподіл виникає в такій ситуації, що часто зустрічається і має назву с х е м и Б е р н у л л і: проводять однакові й незалежні випробування, в кожному з яких з однією й тією самою ймовірністю p виявляється подія $У$ — успіх, і з імовірністю $1-p$ протилежна подія $\overline{У}$ — невдача. Нехай ξ — число успіхів при n випробуваннях у схемі Бернуллі. Тоді ξ має Б. р. з параметрами n і p. Напр., кількість попадань при n пострілах має Б. р., якщо ймовірність попадання в ціль за один постріл дорівнює p. Б. р. наз. ще й б і н о м і а л ь н и м р о з п о д і л о м. *М. Й. Ядренко.*

«БЕРРАУЗ КОРПОРЕЙШЕН» (Burroughs Corporation) — американська фірма, що розробляє й випускає конторське обладнання, засоби оргатехніки та обчислювальні машини для комерційних розрахунків. Засновано її 1886. Першу ЦОМ «В205» випустила 1954. У сімействі «500», особливо в його останніх моделях, розвинуто концепцію ЦОМ із структурою, системою адресації, форматом даних і списком інструкцій, орієнтованих на ефективну трансляцію програм, написаних мовами типу АЛГОЛ, *ФОРТРАН* та ін. Розвиток цієї концепції триває в машинах сімейства «700», що його випускають з 1970. Сімейство складається з трьох моделей, які є багатопроцесорними *обчислювальними системами* з віртуальною пам'яттю. Найбільша модель сімейства може мати до 8 процесорів (центральних і периферійних) і до 5120 каналів введення — виведення. У сімействі є набір пам'ятей з циклом 1,5; 1,2 і 0,5 *мксек*; призначено ЦОМ для розв'язування статистичних задач, задач лінійної оптимізації та задач керування.

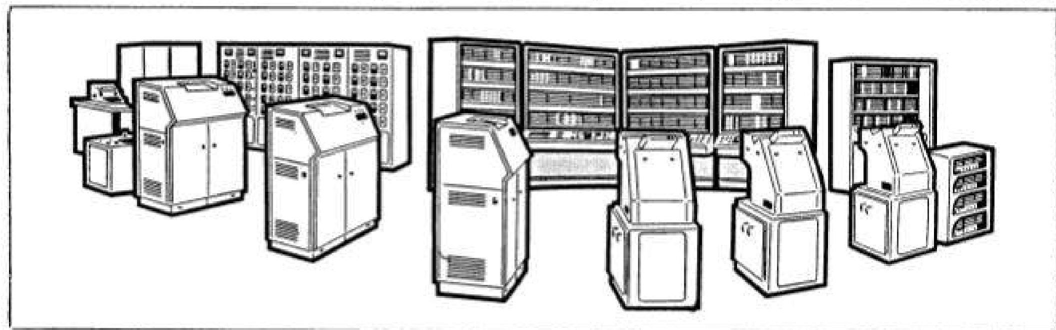
Літ.: З е й д е н б е р г В. К., М а т в е е н к о Н. А., Т а р о в а т о в а Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970; S i p p l C. J. Computer dictionary and handbook. Indianapolis — New York, 1968.
Ю. П. Селіванов.

«БЭСМ» — сімейство цифрових обчислювальних машин загального призначення, орієнтованих на розв'язування складних задач науки й техніки. Розроблено в Ін-ті точної механіки й обчислювальної техніки АН СРСР.

Роботу над першою машиною закінчено 1952. В цій трьохадресній машині паралельної дії на електронних лампах (4000 ламп) використано двійкову систему числення з плаваючою комою. За структурою, конструкцією й характеристиками вона була на рівні кращих закордонних машин. «БЭСМ» оперувала 39-розрядними словами з середньою швидкістю 10 тис. операцій за 1 *сек*. Спочатку в ній використовували оперативний ЗП на електронно-акустичних лініях затримки, який згодом було замінено пристроєм на електронно-променевих трубках, а потім — пристроєм на феритових осердях ємністю 1024 слова з довільним вибиранням. Зовнішній ЗП був на двох магн. барабанах по 5120 слів (швидкість зчитування з барабана — 800 чисел за 1 *сек*) і магн. стрічці (120 тис. чисел). Як пристрій введення використовували перфострічку, для виведення — магн. стрічку з подальшим друкуванням на спеціально розробленому швидкодіючому фотодрукувальному пристрої, застосовуваному для видавання великих масивів *даних*. Крім того, машина мала електромеханічний друкувальний пристрій для друкування контрольних значень і результатів, якщо їх було мало порівняно з обсягом обчислень (швидкість роботи — 20 чисел за 1 *сек*).

Цікавими особливостями структури машини були: місцеве керування операціями, які за тривалістю перевищували рамки стандартного циклу, та автономне керування під час переходу на *підпрограми*. Машина мала довгочасний запам'ятовувальний пристрій для підпрограм, частина якого була змінною. Для контролю застосовували серію *тестів* і спеціально розроблені методи логічного контролю.

За період 1959—66 створено 4 моделі машин цього сімейства: «БЭСМ-2», «БЭСМ-3», «БЭСМ-3М» і «БЭСМ-4». Удосконалення йшло шляхом збільшення і модернізації зовнішніх пристроїв, переходу на напівпровідникову елементну базу, збільшення ємності ОЗП на магн. осердях і ємності зовнішніх ЗП.



Цифрова обчислювальна машина «БЭСМ-6».

У 1967 створено найпотужнішу обчислювальну машину цього сімейства — «БЭСМ-6» (швидкодія її бл. 1 млн. операцій за *сек*, див. мал.). Застосування в машині одноадресної системи команд підтверджує загальну тенденцію збільшення гнучкості командного керування. Характерними особливостями внутрішньої організації центральної частини машини є, зокрема, такі: високий ступінь локального паралелізму, наявність *запам'ятовувального пристрою буферного* надшвидкої дії, розширена система операцій, можливість організації магазинної пам'яті та поділ оперативної пам'яті на незалежні блоки. У машині широко застосовано суміщування виконання операцій звертання до оперативного ЗП з роботою арифм. пристрою та пристрою керування; в машині є п'ять рівнів попереднього перегляду команд. Структуру машини розраховано на застосування її в *режимі розподілу часу* і *мультипрограмування*. Це забезпечується: апаратною системою переривання, схемою захисту пам'яті, індексацією й розвиненою системою перетворювання віртуальних матем. адрес на фіз. адреси оперативної пам'яті в динаміці лічби. Передбачено й можливість використати будь-яку частину пам'яті як *запам'ятовувальний пристрій магазинний*, непряму адресацію й широкі засоби переадресацій.

Центр. *процесор* машини має 16 швидкодіючих регістрів, що працюють зі швидкістю 300 *нсек*. Його тех. характеристики: довжина слова — 50 розрядів (2 — для перевірки на парність); система числення — двійкова; форма представлення чисел — з плаваючою комою; час виконання операцій: додавання — 1,2 *мксек*; множення — 2,1 *мксек*; система команд — одноадресна; довжина команди — 24 двійкові розряди (2 на слово); кількість основних команд — 50 плюс екстракоди; ємність ОЗП на осердях — 32 тис. слів (8 блоків), її можна розширити до 120 тис. слів; час звертання до ОЗП — 2 *мксек*; кількість ліній переривання — 40; час вибирання з пам'яті — 0,8 *мксек*, тактова частота — 10 *Мгц*. Електронна частина машини містить 120 тис. діодів і 40 тис. транзисторів. Зовнішні ЗП: 16 барабанів ємністю по 32 тис. слів і 32 стрічкопротяжні механізми з ємністю бобіни на кожному механізмі — в 1 млн. слів.

До комплекту пристроїв системи введення — виведення входять: пристрій зчитування з перфокарт з пропускною здатністю 700 карт за *хв*; пристрій зчитування з перфострічок — 1000 знаків за *сек*; швидкодіючий алфавітно-цифровий друкувальний пристрій на 96 знаків — по 400 рядків за 1 *хв* (128 знаків на рядок); вихідні карткові перфоратори — по 100 карт за 1 *хв*; стрічкові перфоратори — по 20 знаків за *сек*; 4 клавішні перфоратори; 1 контрольник для перфокарт і 2 стрічкові перфоратори.

«БЭСМ-6» має розвинене матем. забезпечення, до складу якого входять: *операційна система* керування поточною обробкою задач і система програмування символічними машинно-орієнтованими мовами і мовами високого рівня: ФОРТРАН, АЛГОЛ і *ЛІСП*. До складу матем. забезпечення входять і пакети стандартних програм для ФОРТРАНу й АЛГОЛу, які охоплюють широке коло інженерних і науково-тех. задач. Загальний обсяг матем. забезпечення досягає кількох сотень тисяч команд.

Операційна система (ОС) організовує мультипрограмну обробку кількох задач, кожна з яких має повний обсяг віртуальної пам'яті, передбаченої в машині. ОС розподіляє фіз. ресурси пам'яті між задачами, використовуючи

її посторінкову організацію, забезпечує одночасну, суміщену з роботою центрального процесора, роботу зовнішніх ЗП і пристроїв введення — виведення та організовує виклик у роботу необхідних *трансляторів* і компіляторів, звернення до стандартних програм і стежить за правильністю виконання робочих програм, фіксуючи помилки, які виникають при цьому.

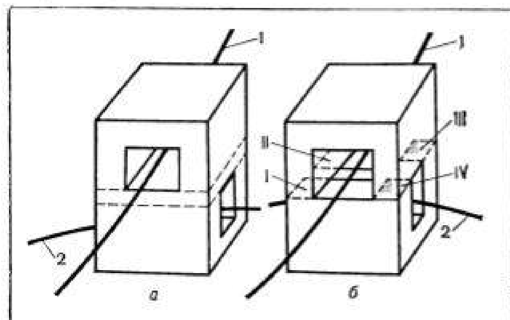
Система програмування на *автокоді* дає змогу записувати в символічному вигляді програми, які враховують усі структурні особливості машин, і є, отже, засобом одержування найефективніших програм. Завдяки системам програмування, які основані на мовах високого рівня (АЛГОЛі й ФОРТРАНі), завдання формулюються в зручній і звичній матем. формі. Мова ЛІСП відкриває широкі можливості для створення складних логіч. програм.

Літ.: Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. М., 1959; Машина вычислительная цифровая БЭСМ-6. В кн.: Изделия радиопромышленности. Каталог, т. 4. Вычислительная техника. Выпуск: Электронные цифровые вычислительные машины общего назначения. М., 1968; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181].

П. В. Походзіло.

БІА́КС — феритовий елемент з розгалуженим магнітопроводом, у якому магнітні потоки замикаються навколо двох отворів зі взаємно перпендикулярними неперехресними осями. Перші зразки Б. мали форму прямокутного паралелепіпеда розміром $1,25 \times 1,25 \times 2,1$ *мм* із симетрично розміщеними отворами квадратного перерізу $0,5 \times 0,5$ *мм*. Поширені й інші конструкції Б. Так, для поліпшення магн. характеристик, для зручності перевірки й монтажу вітчизняні Б. виготовляють несиметричної форми. з отворами круглого перерізу різного діаметра.

Дія Б. базується на взаємодії ортогональних магн. потоків у заг. ділянках магнітопроводу. Феритова зона навколо одного з отворів, напр. верхнього (мал., *а*), використовується для запам'ятовування інформації. Через отвір проходить провідник *1*, по якому подаються двополярні струми записування. Величина струму записування має бути достатньою для цілковитого перемагнічування зони навколо отвору. Магн. потоки при записуванні одиниці й нуля мають протилежні напрями. Провідник *1* використовують і як вихідну обмотку. Під діянням однополярних струмів опитування, що проходять по провіднику *2*, змінюється розподіл магн. потоків у перемичці між отворами. При цьому потік опитування збільшується, а потік записування зменшується, внаслідок чого в провіднику *1* індукується ерс зчитування. Амплітуда сигналу зчитування звичайно становить одиниці *мв*. Коли перестає надходити струм опитування, первісний розподіл потоків відновлюється, тобто записана інформація при опитуванні не руйнується.



Біакс: *а* — запам'ятовувальний; *б* — логічний.

Б. застосовують у *довгочасних запам'ятовувальних пристроях* зі швидкою зміною інформації та в буферних ЗП з неруйнівним зчитуванням інформації, де допускається порівняно повільне записування й потрібна велика швидкодія під час зчитування. Частота звертання під час записування в ЗП на Б. становить 200÷300 *кгц*, а під час зчитування — 2÷5 *Мгц*. Б. використовують і для виконування логіч. функцій. У логічних Б. (мал., *б*) немає перемички між отворами. Спільною ділянкою магнітопроводу для взаємодіючих ортогональних магн. потоків є площинки I, II, III, IV. Швидкодія Б.-транзисторних логіч. елементів у 2—3 рази більша за швидкодію аналогічних феритно-транзисторних схем.

Літ.: Бардиж В. В. Магнитные элементы цифровых вычислительных машин. М., 1967 [бібліогр. с. 438—451].

В. М. Корсунський.

БІБЛІОГРАФІ́ЧНИЙ ПО́ШУК — процес складання і пошуку *документів наукових*, що відповідають на поставлений запит. Див. *Пошук інформації автоматичний*.

БІБЛІОТЕ́КА СТАНДА́РТНИХ ПІДПРОГРА́М — сукупність стандартних підпрограм і система використання їх. Є складовою частиною *математичного забезпечення ЦОМ*. **Стандартними підпрограмами** (СП) наз. переважно самостійні *програми* або частини програм, які складені однією з *мов програмування* (МП) і задовольняють деякі критерії ефективності (точність обчислювань, час виконання, простота у використанні та ін.) і певні вимоги до їхньої структури, організації входів і виходів, до переміщуваності в пам'яті машини й довжини, використання комірок і регістрів ЦОМ та ін. Деякі з цих вимог до СП характерні для програм *мовами машинно-орієнтованими*. Поняття «підпрограми» існує в ряді МП (*ФОРТРАН, ПЛ-1, автокоди* на ЦОМ «Днепр-2» і «Минск-2» та ін.).

Б. с. п. та СП мають різну структуру залежно від МП. СП може включати звернення до інших СП. За призначенням СП поділяють на класи. Типовими класами СП є: діагностика ЦОМ; введення — виведення й внутр. обмін; наладжувальні й сервісні СП; обчисл. математика, статистичний аналіз і обробка даних; логіка й символьні викладки; дослідження операцій і моделювання;

матем. програмування й методи керування, спец. СП користувачів ЦОМ. Б. с. п. на ЦОМ має таку типову структуру: каталог Б. с. п.; банк стандартних програм (підпрограми, стандартні масиви, осн. й типові програми тощо); система організації роботи Б. с. п.; система обслуговування й контролю Б. с. п.; інструктивно-методичні матеріали. За характером використовування й зберігання розрізняють Б. с. п.: загальні, особисті, постійні й тимчасові. Для сучасних ЦОМ розроблено великі Б. с. п., що містять сотні СП різними мовами програмування.

Літ. див. до ст. *Бібліотечних підпрограм метод.*
О. С. Стукало.

БІБЛІОТЕ́ЧНИХ ПІДПРОГРА́М МЕ́ТОД — метод автоматизації програмування за допомогою *бібліотек стандартних підпрограм* (БСП) і спец. систем використання й обслуговування їх. Є ефективним методом програмування, який дає змогу скорочувати час і обсяг робіт під час підготовки даних, складання та наладжування програм. Елементарним способом використовування стандартних підпрограм (СП) є вписування їх у програми. Універсальними методами використання СП є методи компіляції, інтерпретації й комбінації їх. Вони реалізуються на ЦОМ за допомогою компілюючих і інтерпретуючих систем. Основою таких систем є компілююча програма (КП) або інтерпретуюча програма (ІП). Ці програми автоматично виконують такі функції: розшифровують (інтерпретують) звернення до СП; зчитують СП з зовн. нагромаджувача, розподіляють пам'ять і розміщують (завантажують) СП в ОЗП; настроюють СП (коректують адреси, формують команди) за їхнім місцем в ОЗП; організовують зв'язки між СП і програмами (формують входи — виходи і звернення до СП). ІП виконує ці функції в процесі виконання програми, а КП — до початку виконання її. Сучасні системи програмування на ЦОМ дають змогу автоматично використовувати БСП одними *мовами програмування* (МП) у програмах іншими МП. Системні підпрограми обслуговування БСП призначені для автомат. виконання таких функцій: відкривають БСП на ЦОМ; контролюють, включають, вилучають СП в БСП; виводять СП та їхні каталоги на друк чи перфорацію; виконують інформаційно-довідкові функції тощо. На сучасних ЦОМ системи використання БСП входять до складу *операційних систем.* Зазначені методи й системи організації БСП реалізовано на всіх сучасних вітчизняних і зарубіжних ЦОМ.

Літ.. Библиотека стандартных программ. М., 1961; Глушков В. М. Об одном методе автоматизации программирования. «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2; Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д. Программирование. М., 1966 [бібліогр. с. 596—599].
О. С. Стукало.

БІ́ЛИЙ ШУМ — узагальнений *випадковий процес* вигляду $\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\xi(t)\,dt$, де $u(t)$ — фінітна функція, а $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, випадковий процес з нульовим *математичним сподіванням* та *кореляційною функцією* $R(t, s) = \delta(t - s)$, $\delta(t)$ — узагальнена ф-ція від t; визначають її так. Для будь-яких фінітних ф-цій $u_k(t)$, $k = 1, 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)\,u_1(t)\,u_2(s)\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,u_2(t)\,dt.$$

У практиці розроблення матем. моделей широко використовують *гауссівський випадковий процес* типу Б. ш. Такий процес можна одержати внаслідок диференціювання (в узагальненому розумінні) процесу броунівського руху. Цей процес є стаціонарним (у широкому розумінні) випадковим процесом зі спектральною щільністю $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$, $-\infty < \lambda < \infty$, й абсолютно неперервною *спектральною функцією.* Б. ш., що є матем. абстракцією, не можна реалізувати в реальних умовах, його застосовують як зручну *модель математичну* в теор. дослідженнях. Так, напр., шуми електронних ламп, атмосферні шуми, шуми моря, що мають рівномірний спектр у скінченній смузі частот, можна досить добре апроксимувати процесом типу Б. ш.
О. М. Деменін.

БІЛІНІ́ЙНІ ТА КВАДРАТИ́ЧНІ ФО́РМИ. 1. Білінійною формою (б. ф.) $A(x, y)$ в n-вимірному векторному просторі V_n над полем скалярів K наз. ф-цію від двох векторних аргументів x і y із значеннями в полі скалярів K, лінійною відносно x при кожному фіксованому значенні y і лінійною відносно y при кожному фіксованому значенні x.

$$A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y);\quad A(\gamma x, y) = \gamma A(x, y);$$
$$A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2);$$
$$A(x, \gamma y) = \gamma A(x, y),$$

де $\gamma \in K$. Якщо в базисі $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ простору

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,\; y = \sum_{i=1}^{n} \eta_j e_j \text{ і } \alpha_{ij} = A(e_i, e_j),$$

то
$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j.$$

Прикладом б. ф. є скалярний добуток векторів x, y, який у декартовому прямокутному базисі має вигляд: $xy = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$. При переході до нового базису матриця $A = (\alpha_{ij})$ б. ф. $A(x, y)$ перетворюється на матрицю $A_1 = SAS^{\mathrm{T}}$, де S — матриця переходу, а S^{T} — транспонована до S матриця. Б. ф. наз. симетричною, якщо $A(x, y) = A(y, x)$, і кососиметричною, якщо $A(x, y) = -A(y, x)$ для будь-яких $x, y \in V_n$. Кожну б. ф. можна зобразити у вигляді суми симетричної та кососиметричної

б. ф. Це зображення однозначне. Якщо в б. ф. $y^* = A(x, y)$ фіксувати y, то вона стає лінійним функціоналом від x на V_n (див. *Лінійна форма*). Якщо при цьому y^* розглядати як елемент спряженого простору V_n^*, то за допомогою б. ф. $y^* = A(x, y)$ здійснюється лінійне відображення простору V_n в простір V_n^*. При цьому ранг відображення збігається з вимірністю образу, що визначається рангом матриці A, тобто рангом б. ф. Якщо цей ранг дорівнює n, то б. ф. $A(x, y)$ невироджена. Невиродженій б. ф. відповідає взаємно однозначне відображення V_n на V_n^*. Б. ф., що її задано в нескінченновимірному просторі, наз. білінійним функціоналом.

2. Квадратичною формою (к. ф.) $A(x, x)$ наз. ф-цію від одного векторного аргументу x, яку можна одержати з б. ф. $A(x, y)$, замінивши y на x. Так, напр., квадрат модуля вектора x можна розглядати як скалярний добуток вектора x на самого себе: $x^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, в результаті одержують к. ф. від вектора x, віднесеного до декартового прямокутного базису. В заг. випадку к. ф. — довільний однорідний многочлен 2-го ступеня від n змінних: $A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j$.

В матричному запису

$$A(x, x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

або скорочено:

$$A(x, x) = x^{\tau}Ax,$$

де x — вектор-стовпець, а «т» — знак транспонування. К. ф. зображують і за допомогою скалярного добутку вектора x і Ax: $A(x, x) = (x, Ax)$; Ax одержано з вектора x застосуванням до нього *оператора лінійного* з матрицею $A(\alpha_{ij})$. Різні б. ф. можуть породити ту саму к. ф., зокрема всі кососиметричні б. ф. породжують нульову к. ф. Тому, щоб перейти від б. ф. $A(x, y)$ до к. ф. $A(x, x)$, розглядають лише симетричну частину б. ф. Цю симетричну частину наз. полярною формою відносно к. ф. Симетричну матрицю полярної форми наз. матрицею к. ф. Якщо вона дійсна (комплексна), то й форму $A(x, x)$ називають дійсною (комплексною). Рангом к. ф. наз. ранг її матриці A. Якщо $\det A = |A| \neq 0$, то к. ф. наз. невиродженою. В противному разі вона вироджена (або сингулярна). Коли змінюється координатний базис, матриця к. ф. змінюється так само, як і матриця полярної б. ф., а визначник перетвореної матриці $\det A_1 = \det A \times (\det S)^2$, де $\det S$ визначає матриці переходу S. При будь-якому невиродженому лінійному перетворенні $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\eta_j$ або в матричній формі $x = ty$, $t = (t_{ij})$, $\det t \neq 0$, к. ф. $A(x, x)$ переходить у нову к. ф. $B(y, y) = y^{\tau}By$, де $B = t^{\tau}At$. К. ф. $A(x, x)$ і $B(y, y)$ наз. еквівалентними (або конгруентними), вони мають однакові ранги.

Вибирання базису, що в ньому б. ф. і к. ф. мають найпростіший вигляд, наз. зведенням до канонічного вигляду. В просторі V_n завжди існує базис $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ (канонічний), у якому к. ф. $A(x, x) = \lambda_1\eta_1^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2$ для кожного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i$. Це й є канонічний вигляд к. ф. Канонічний базис і канонічний вигляд не визначають однозначно. Осн. методами зведення к. ф. до канонічного вигляду є метод вилучення повних квадратів Лагранжа й метод невизначених коеф. Якобі. Щоб звести симетричну б. ф. до канонічного вигляду, треба спочатку звести до канонічного вигляду к. ф., що відповідає їй, а потім знову перейти до білінійної (полярної) форми. Отже, і матрицю симетричної б. ф. завжди можна звести до діагонального вигляду. Якщо простір V_n дійсний, то для к. ф. виконується т. з. закон інерції: кількість додатних і кількість від'ємних коеф. у канонічному вигляді форми $A(x, x)$ є її інваріантом (не залежить від вибору канонічного базису). Заг. число членів у канонічному вигляді форми $A(x, x)$ дорівнює її рангові й наз. його індексом інерції.

Число додатних членів наз. додатним індексом, а число від'ємних членів — від'ємним індексом. Різниця між числами додатних і від'ємних членів наз. сигнатурою форми. Дві к. ф. еквівалентні над полем дійсних чисел тоді й лише тоді, якщо їхні ранги й сигнатури однакові. К. ф. наз. додатно визначеною, якщо її додатний індекс інерції дорівнює вимірності простору. Така к. ф. набуває в усіх точках простору (крім початку координат) додатних значень. Теорема інерції к. ф. переноситься на б. ф., що їх породили. В евклідовому просторі метод зведення к. ф. $A(x, x)$ до канонічного вигляду шляхом ортогональних перетворень наз. віднесенням її до головних осей. Напрямам головних осей відповідають екстремальні значення форми, які для одиничних векторів збігаються з її канонічними коефіцієнтами і є власними значеннями симетричного оператора A з матрицею $A = (\alpha_{ij})$. Тому їх можна знайти з характеристичного (вікового) рівняння, що має вигляд: $\det|\lambda E - A| = 0$, де E — одинична матриця. Корені цього рівняння завжди дійсні. Б. ф. і к. ф. використовують у теорії *програмування лінійного*.

Літ.: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970; Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1966; Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., 1969.

В. П. Белоусова.

БІНОМІА́ЛЬНИЙ РОЗПО́ДІЛ — те саме, що й *Бернуллі розподіл*.

БІОЕЛЕКТРИ́ЧНЕ КЕРУВА́ННЯ — керування, при якому як команди або сигнали *зворотного зв'язку* використовуються сигнали біоелектричної активності. Жива тканина, реагуючи на електр. подразнення, може проводити й генерувати струм. Коли збудження з нерва переходить на м'яз, у м'язі відбувається процес збудження і виникають біоелектр. потенціали, а потім уже розвивається й повільніший процес — скорочення м'яза. Осцилограми потенціалів м'язів, які перебувають у стані збудження, наз. е л е к т р о м і о г р а м а м и (ЕМГ). Осн. параметрами ЕМГ при зніманні їх поверхневими електродами є амплітуда й частота зміни потенціалів. Найбільшого поширення набули методи Б. к., в основі яких лежить використання біоелектр. активності м'язів. Дослідження показали, що для більшості скелетних м'язів існують залежності між потужністю біосигналів, напругою та швидкістю скорочення чи подовження м'язів. Ці залежності використовують, проектуючи біотех. системи керування, призначені для моделювання рухових реакцій.

Б.к. руховими функціями розвивається в двох напрямах: керування тех. пристроями (напр., протезами) з використанням зовн. джерел енергії (біопротезування) і програмне багатоканальне Б. к. м'язовою діяльністю за допомогою командних сигналів, в основі яких лежить використання енерг. властивостей біопотенціалів м'язів.

Біокеровані протези руки, які вперше створено в СРСР, набули визнання й поширення. Здійснюється розробка багатофункціональних біокерованих протезів кінцівок. В електричній схемі створеного біокерованого протеза руки біопотенціали, що знімаються з м'яза поверхневими електродами, підсилюються в підсилювачі біопотенціалів, детектуються й згладжуються в інтеграторі. Напруга на виході цього блока пропорційна миттєвому значенню потужності біострумів. З інтегратора напруга надходить до перетворювача, в якому безперервні сигнали перетворюються на частотно-імпульсні. Через підсилювач потужності імпульси надходять на вхід мех. пристрою. Щоб керувати рухом, використовують біоструми, які відводяться з двох м'язів-антагоністів, і, відповідно, два канали підсилювання й перетворювання інформації. На основі фізіол. досліджень у лабораторії космічних досліджень (США) реалізовано керування шляхом виділення т. з. «міографічного образу». Керуюча функція при цьому визначається миттєвим станом біоелектр. активності групи керуючих м'язів, що беруть участь у природному русі, за допомогою логічного пристрою. Участь відповідних м'язів при русі руки «вгору — вниз», «до себе — від себе» кодується двійковим кодом.

Велику роль у створенні біокерованих протезів відіграють системи зі зворотним зв'язком. Для розробки їх використовують давачі різних типів: вібраційні, тензометричні, електромех. тощо. Для Б. к. м'язовою діяльністю за допомогою перетворювального тех. пристрою за принципом «м'яз — пристрій — м'яз» або «людина — машина — людина» використовують енерг. властивості біопотенціалів м'язів.

Вивчення характеру біоелектр. активності м'язів методом ЕМГ дає змогу порівнювати фізіол. можливості виконання активних рухових актів у різних ситуаціях. Результати досліджень дають змогу приступити до створення складних систем Б. к. активними рухами кінцівок і тіла людини. До систем такого типу можна віднести пристрій, який реалізує метод програмного багатоканального Б. к. — «Міотон», створений в Ін-ті кібернетики АН УРСР. У «Міотоні» є кілька каналів, і це дає змогу реєструвати й керувати активністю груп м'язів, які беруть участь у складному русі. При керуванні використовуються закономірності зміни ступеня біоелектр. нервово-м'язової активності в процесі виконання деяких рухів. В основу покладено дані *математичної статистики;* вони показують, що середнє значення ЕМГ відповідає сумі частот елементарних електр. імпульсів, які виникають у нервово-м'язовій системі, а отже,— ступеневі збудження (блок-схему одного з каналів пристрою «Міотон» див. на іл. між. с. 440—441). Принцип роботи цього пристрою полягає в тому, що сигнал, знятий з м'язів, які беруть участь у певному руховому акті (алгоритм руху), підсилюється й використовується для вироблення сигналу, поданого на м'язи реципієнта. Реципієнт при відповідному доборі амплітуд збуджувальних сигналів повторює рух донора. Алгоритм руху, заздалегідь записаний у блоці «магнітної пам'яті», може багато разів повторюватися для відтворювання певних рухів. Кожний канал пристрою може працювати незалежно. Елемент зворотного зв'язку, введений у пристрій за принципом «біоелектролокації», дає змогу автоматично коригувати керуючий сигнал за допомогою зворотної імпульсації реципієнта. Нав'язування хворим рухів, близьких до природних, сприяє розвиткові структурно-інформаційних перебудов у нервовій системі й дає змогу ширше використати її компенсаторні механізми під час лікування деяких рухових розладів. «Міотон» з успіхом застосовують, лікуючи хворих з порушеннями рухових ф-цій. Подібні дослідження проводять і за кордоном: у Югославії, Канаді, США та Польщі. В США, напр., створено апарат кисті, в якому для розкриття використовується стимулювання паретичного м'яза. Керуючим є трапецієвидний м'яз. Розширюються дослідження щодо створення засобів Б. к. серцевим ритмом, диханням та роботою штучних органів і систем на основі підтримання гомеостатичної сталості рівнів неперервних показників внутр. середовища організму. Вдосконалення методів Б. к. дасть змогу найближ-

чим часом розширити застосування їх не лише в галузі медицини, а й у галузі техніки.

Літ.: Кобринский А. Е. [та ін.]. Биоэлектрическая система управления. «Доклады АН СССР», 1957, т. 117, № 1; Алеев Л. С., Бунимович С. Г. Многоканальный метод воздействия при управлении некоторыми двигательными функциями. В кн.: Моделирование в биологии и медицине, в. 1. К., 1965; Алеев Л. С. Біоелектрична система «Міотон» і рухові функції людини. «Вісник АН УРСР», 1969, № 4; Bottomley A. H. Myoelectric control of powered prostheses. «The Journal of bone and joint surgery», 1965, v. 47В, № 3.

Л. С. Алеєв.

БІОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ — математичний апарат, застосовуваний для вивчення біологічних об'єктів. Внаслідок різноманітності *біологічних систем,* різнорідності властивостей, зумовлених фіз. та хім. процесами в живому й складності взаємодії з середовищем, у біологічних дослідженнях набувають застосування багато методів класичної та сучас. математики. Матем. методи використовують, насамперед, обробляючи результати експериментального вивчення біосистем. Методи *математичної статистики* спрямовано на виділення в досліджуваному процесі детермінованої та ймовірнісної складових, на вивчення вірогідності результатів спостерігання. Обчислювання *математичного сподівання* дає змогу виявляти середнє значення реакції біосистеми. За цими значеннями, в т. ч. змінними в часі, за допомогою побудови адекватного матем. описування вивчають детерміновану складову реакції.

Обчислення *дисперсії* та визначення довірчих інтервалів дають змогу оцінити можливі відхилення досліджуваного процесу від середнього значення й опосередковано судити про ступінь стабільності системи. Чим більшу кількість даних однотипного досліду піддають обробці, тим точніші результати дає статистичний аналіз. Визначаючи взаємозв'язок у часі між попередніми й наступними значеннями одного показника роботи біосистеми, використовують обчислення коеф. автокореляції або автокореляційної ф-ції, а коли вивчають взаємозв'язок двох чи більшого числа показників — використовують обчислення коеф. взаємної кореляції, або кроскореляційної функції (див. *Кореляційна теорія випадкових процесів*). Досить поширеним методом аналізу даних біологічних експериментів є побудова *гістограм* розподілу експериментальних величин. Гістограми можна використовувати для апроксимації експериментальних даних придатним законом розподілу (див. *Імовірностей теорія*) й розрахунку рівня організації біосистеми (див. *Біологічних систем організація*). Параметри закону розподілу часто можуть правити за показники стану чи роботи біосистеми. Розрахунок рівня організації біосистеми може бути основою для вибору адекватної матем. моделі (див. *Біологічних систем математичне моделювання*).

Обробка експериментальних даних є основою дальшого вивчення біосистем. Аналіз закономірного взаємозв'язку різних показників у динаміці й матем. дослідження можна проводити на основі застосування методів теорії дифер. рівнянь *автоматичного керування теорії* й варіаційних принципів механіки. При великій кількості показників роботи біосистеми й при вивченні в основному логіч. співвідношень можна застосувати теорію абстрактних автоматів та *логіку математичну.* Аналіз структурних та функціональних особливостей біосистем можна здійснити за допомогою *графів теорії* й методів *інформації теорії.*

Дослідження ймовірнісних властивостей біосистем являє собою дуже складну задачу *кібернетики біологічної.* Пізнання складних актів навчання, пристосування та розвитку біосистем гальмують труднощі експериментального вивчення їх. Тепер розробляють матем. методи спеціально для цієї мети (див. *Систем загальна теорія*). Крім того, щоб описати ймовірнісні властивості біосистем, використовують *випадкових процесів теорію, автоматів теорію,* теорію стохастичних дифер. рівнянь, теорію *розпізнавання образів* та теорію інформації.

Ю. Г. Антомонов.

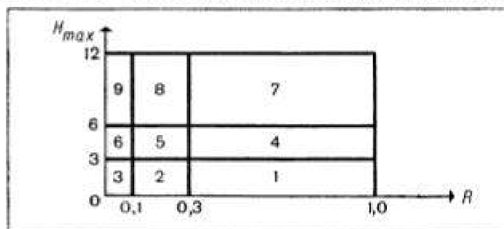
БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ — основний метод відображання роботи біологічних систем за допомогою адекватного математичного апарату. Визначення матем. апарату, що адекватно відображує роботу *біологічних систем,* є складним завданням, яке пов'язане з їхньою класифікацією. Біосистеми можна класифікувати за складністю (логарифмом числа станів), користуючись, напр., шкалою, за якою до простих систем належать системи, що мають до тисячі станів, до складних — від тисячі до мільйона і до дуже складних — понад мільйон станів. Іншою важливою характеристикою біосистеми є закономірність, яка виражається законом розподілу ймовірностей станів. За цим законом можна визначити невизначеність її роботи за К. Шенноном і оцінку відносної організації. Отже, біосистеми можна класифікувати за складністю (за макс. різноманітністю, або максимально можливою невизначеністю) і відносною організацією, тобто за мірою організованості (див. *Біологічних систем організація*). На мал. наведено класифікаційну діаграму, на одній з осей якої відкладено максимально можливу невизначеність — H_{max}, що характеризує число станів системи й визначається логарифмом числа станів, на 2-й осі — рівень відносної організації — R, що характеризує детермінізм системи. На діаграмі подано назви відповідних смуг так, що, наприклад, ділянка під цифрою 8 означає «дуже складні ймовірнісно-детерміновані біосистеми». Досвід вивчення біосистем показує, що коли R, обчислене за *гістограмою* розподілу відхилень показника (або системи показників) залежно від його *математичного сподівання,* лежить у межах від 1,0 до 0,3, то це детермінована біосистема. До таких систем належать системи керування внутрішніми органами, в основному системи гормонального (гуморального) керування. Еле-

мент нервової системи — *нейрон*, органи внутрішньої сфери та системи обміну речовин також можна віднести до детермінованих біосистем. Матем. моделі таких систем будують на основі фіз.-хім. співвідношень між елементами або органами системи. Моделюють у цьому випадку динаміку зміни вхідних, проміжних і вихідних показників. Саме такими, наприклад, є біофіз. *моделі нервової клітини*, серцево-судинної системи, системи керування вмістом цукру в крові й ін. Матем. апаратом, що адекватно описує поведінку таких детермінованих біосистем, є теорія дифер. та інтегр. рівнянь. На основі матем. моделей біосистем можна, використовуючи методи теорії автомат. керування (див. *Автоматичного керування теорія*), успішно розв'язувати завдання дифер. діагностики й оптимізації лікування. Найповніше розвинутою є галузь моделювання детермінованих біосистем.

Якщо організованість біосистеми щодо показника, що вивчається (або системи показників), лежить у межах $0{,}3 \div 0{,}1$, то такі біосистеми є й м о в і р н і с н о - д е т е р м і н о в а н и м и. До них належать системи керування внутрішніми органами з явно вираженою компонентою нервової регуляції (наприклад, система керування частотою пульсу) та системи гормональної регуляції у випадку розладу нормальної роботи. Адекватним матем. апаратом може бути подання динаміки зміни показників у вигляді диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що підлягають певним законам розподілу. Моделювання таких біосистем розвинуто порівняно слабо, хоч і становить значний інтерес для *кібернетики медичної*.

Й м о в і р н і с н і біосистеми характеризуються значенням організованості R, що лежить у межах від 0,1 до 0. До них належать системи, що визначають взаємодію аналізаторів і поведінкові реакції, в тому числі й процеси навчання при простих умовнорефлекторних актах і складних взаємозв'язках між сигналами навколишнього середовища й реакціями організму. Адекватним матем. апаратом для моделювання таких біосистем є теорія детермінованих і випадкових автоматів з детермінованими й випадковими середовищами, *випадкових процесів теорія* та *програмування евристичне*. Моделі простих імовірнісних систем успішно розробляються.

Моделювання біосистем охоплює попередню статистичну обробку експериментальних результатів (див. *Біологічних досліджень математичні методи*), вивчення складності й організованості біосистем, вибирання адекватної матем. моделі й визначення числових значень параметрів матем. моделі за експериментальними даними (див. *Кібернетика біологічна*). Останнє завдання в загальному випадку є дуже складним. Для детермінованих біосистем, моделі яких можна описати лінійними диференціальними рівняннями, найкращі параметри моделі (коеф. дифер. рівняння) можна визначити методом спуску (див. *Градієнтний метод*) у просторі параметрів моделі за інтегралом від квадрата похибки. У цьому випадку слід застосовувати процедуру спуску за параметрами, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, щоб мінімізувати функціонал $I = \frac{1}{T} \times \int_0^T [y^* (a_1, \ldots, a_n) - y]^2\, dt$, де T — період, характерний час для показника y, y — експериментальна крива зміни показника біосистеми, а y^* — розв'язок матем. моделі. Якщо необхідно одержати найкраще (в розумінні інтеграла від квадрата похибки) наближення



Класифікаційна діаграма біосистем:
1, 2, 3 — $0 < H_{max} < 3$ — прості системи,
4, 5, 6 — $3 < H_{max} < 6$ — складні системи,
7, 8, 9 — $6 < H_{max} < 9$ — дуже складні системи,
3, 6, 9 — $0 < R < 0{,}1$ — ймовірнісні системи,
2, 5, 8 — $0{,}1 < R < 0{,}3$ — ймовірнісно-детерміновані системи,
1, 4, 7 — $0{,}3 < R < 1$ — детерміновані системи.

матем. моделі до роботи біосистеми за кількома показниками $y_1, y_2, \ldots, y_m$ за різними внутрішніми станами біосистеми або для різних характерних зовнішніх впливів, то можна, застосовуючи методи спуску в просторі параметрів моделі, мінімізувати суму частинних функціоналів $I = \sum_{i=1}^{i=m} I_i (a_1, \ldots, a_n)$. При використанні такої процедури вибору параметрів матем. моделі можна збільшити ймовірність одержання єдиного набору коефіцієнтів моделі, що відповідають прийнятій структурі. Метод матем. моделювання дає змогу одержувати не лише кількісні характеристики роботи біосистем, їхніх елементів і взаємозв'язку цих елементів, а й виявляти критерії роботи біосистем, встановлювати певні загальні принципи їхнього функціонування.

Літ.: Моделирование в биологии и медицине, в. 1—3. К., 1965—68; Г л у ш к о в В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]; Б у ш Р., М о с т е л л е р Ф. Стохастические модели обучаемости. Пер. с англ. М., 1962. *Ю. Г. Антомонов.*

БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ОРГАНІЗА́ЦІЯ — специфічна для живих систем структурно-функціональна упорядкованість. Рівень Б. с. о. дещо складніший за рівень природних систем неорганічної природи й штучних систем, які створює людина. Це зумовлене тривалою еволюцією біосистем. Формальне визначення Б. с. о. пов'язане з працями К.-Е. Шеннона, У.-Р. Ешбі, В. М. Глушкова, Г. Ферстера. У.-Р. Ешбі використав як міру складності системи її

різноманітність, або число її станів — n. Для оцінки складності системи користуються логарифмічною мірою, визначаючи $H_{max} = \log n$, де H_{max} — міра складності, або макс. невизначеність, системи.

Істотну сторону організації системи виявляють, обчислюючи міру невизначеності її станів. Нехай система може набувати будь-якого i-го стану з множини n станів з імовірністю p_i. Тоді міру невизначеності станів системи H визначають за формулою Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Оцінка рівня організації системи пов'язана з максимальною й поточною невизначеністю системи відповідно H_{max} і H. Нехай у результаті еволюції, філо- чи онтогенезу в системі, яка працювала раніше з макс. невизначеністю H_{max} (цілком дезорганізована система), почали переважати певні стани, і вона набула поточної невизначеності H. Тоді організація системи для цього рівня розвитку визначається реалізованою в системі невизначеністю

$$O = H_{max} - H, \quad (1)$$

де O — абс. організація системи. Значення абс. організації системи обмежене знизу нулем, а згори—величиною максимально можливої для даної системи невизначеності. Отже, організація детермінованої системи ($H = 0$) також характеризується макс. невизначеністю, тобто будується на максимально можливому числі станів. Тільки тоді, коли система детермінована, зміна станів буде закономірною. Для організаційно замкненої системи рівність (1) визначає закон збереження організації: організація і невизначеність на будь-якому етапі еволюції (життя, навчання та ін.) дорівнюють максимально можливій невизначеності системи. Від співвідношення (1) легко перейти до формули обчислення відносної організації системи — R, поділивши обидві частини рівності на H_{max}. Отже,

$$R = 1 - \frac{H}{H_{max}}. \quad (2)$$

Поточне значення невизначеності пов'язане з *ентропією живих систем*. Будь-яка біосистема характеризується структурною і функціональною організацією. Основою структурної організації біосистеми є розміри елементів системи, число елементів і число зв'язків між ними. Так, наприклад, розміри клітин нервового вузла є параметрами структурної організації, і користуючись *гістограмою* розподілу клітин цього вузла, можна за діаметром клітин визначити ступінь організації за формулами (1) і (2). Параметрами функціональної організації відділів нервової системи можуть бути міжспайкові інтервали спонтанної й спричиненої активності. За гістограмами міжспайкових інтервалів можна розрахувати величину абсолютної (1) й відносної (2) організації нервової клітини як елемента нервової системи. Осн. функція — генерація спайку (нервового імпульсу) забезпечується структурою самої клітини. Аксонами, дендритами й синапсами (див. *Нейрон*) клітини об'єднуються в сітку. Осн. функція сітки — переробляти інформацію, вона виявляється в зміні ритмічної активності вихідних нейронів і грунтується на структурній організації сітки — числі елементів сітки, їхніх розмірах і числі зв'язків між елементами.

Складній біосистемі, напр. організмові, властива така структурно-функціональна побудова: елемент i-го рівня з ф-цією φ_i, система елементів i-го рівня зі зв'язками, що утворює структуру $(i + 1)$-го рівня s_{i+1}, на якій будується функція φ_{i+1}. У свою чергу, структура s_{i+1} є елементом складнішої системи $(i + 2)$-го рівня і т. д. Так, мікроструктурні елементи клітини — молекули та іони забезпечують генерацію спайку нервовою клітиною; здатність клітини генерувати імпульси використовується елементарною сіткою, напр., для виділення найхарактерніших ознак предмета, що потрапив у поле зору; здатність елементарних сіток виділяти ознаки використовується в складнішій сітці для розв'язування задач класифікації, пізнавання тощо. Структурно-функціональне ускладнення біосистем на різних рівнях ієрархії організму дає можливість розв'язувати дедалі складніші задачі. За формулами (1) і (2) можна обчислювати Б. с. о. й порівнювати їх.

Для структурованих біосистем, тобто для тих біосистем, які за числом елементів і зв'язків між ними є детермінованими, рівень організації можна розраховувати за видозміненими ентропійними оцінками.

На кожну біосистему впливає навколишнє середовище, формуючи її структуру й ф-ції. Біосистема, в свою чергу, активно впливає на зовн. середовище. Така взаємодія біосистем і дедалі складнішого середовища й забезпечує безперервну еволюцію біосистем. «Тільки різноманітність може знищити різноманітність» говорив У.-Р. Ешбі, підкреслюючи одну із сторін цієї взаємодії. Тільки організація може протистояти організації — можна додати з повним правом. Основним принципом функціонування біосистеми в середовищі є динамічний принцип адекватності: макс. різноманітність і організація біосистеми на кожному рівні ієрархії й на кожному ступені еволюції адекватні макс. різноманітності й організації свого середовища. При цьому $H_{max\,s}(t) \to H_{max\,e}(t)$ і $R_s(t) \to R_e(t)$, де s — індекс системи, e — індекс середовища, t — час. Розрізняють три ступені адекватності: а) слабкий імовірнісний, коли важливою є рівність макс. невизначеності й організованості системи та середовища незалежно від виду розподілу ймовірностей прийняття станів середовищем і системою; б) жорсткий імовірнісний, коли рівність різноманіт-

ності та організованості досягається внаслідок рівності законів розподілу, тобто $P_{is}(t) \to P_{ie}(t)$; в) детерміновану взаємодію, коли кожному станові середовища з якоїсь множини відповідає стан системи. Вивчення ступеня Б. с. о. є осн. завданням *кібернетики біологічної*, це необхідно для визначення підходящого матем. апарату при матем. моделюванні *біологічних систем* (див. *Біологічних систем математичне моделювання*).

Літ.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]; Антомонов Ю. Г. Системы. Сложность. Динамика. К., 1969 [бібліогр. с. 125—126]; Эшби У. Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959 [бібліогр. с. 396—399]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820]; Ферстер Г. О самоорганизующихся системах и их окружении. В кн.: Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964.

Ю. Г. Антомонов.

БІОЛОГІ́ЧНІ СИСТЕ́МИ — клас складних систем, яким властивий ряд специфічних особливостей, що характеризують життя: здатність рости і розмножуватися, реагувати на зовнішні діяння й змінюватися. Життя в Б. с. забезпечується обміном речовин, комплексом фіз.-хім. процесів і хім. реакціями синтезу й розкладу, які мають складний циклічний характер і ферментативну природу. Б. с. є відкритими системами, які одержують ззовні речовини та енергію і створюють з них складні структури, *ентропія* яких нижча за ентропію навколишнього світу. Б. с. можуть існувати лише завдяки розвиткові спец. *підсистем* керування, які регулюють ферментативні реакції обміну речовин і всю життєдіяльність організмів. Вони мають здатність сприймати і переробляти інформацію та виробляти керуючі (ефекторного характеру) сигнали.

Для описування Б. с. потрібні такі поняття. Елемент системи — найменша структурна одиниця, якій ще властиві риси, які виражають гол. якість системи. Напр., для складного організму таким елементом є клітина, бо їй притаманні найважливіші якості життя. Для популяції таким елементом є особина з її якостями, які характеризують її поведінку. Елемент Б. с. має складну структуру й функції.

Складність структури системи визначається кількістю й різноманітністю елементів і підсистем, які умовно можна поділити на робочі та керуючі. Ступінь складності систем визначається здебільшого розвитком окремих елементів і підсистем, а також самої системи, сформованої в ієрархічні «поверхи».

Зв'язки — це енерг. і речовинні взаємодії систем та елементів. Фіз. зв'язки характеризуються безпосереднім видом і значимістю переданої енергії й речовини в балансі енергії елемента чи системи-адресата. В інформаційних зв'язках енергія використовується лише як носій сигналу, який керує діяльністю елемента чи системи. Для фіз. зв'язку важливими є вид і напруга переданої енергії, а для інформаційної — *код*, тобто тип сигналів, напр., молекула РНК, нервовий імпульс, слово чи річ. Зв'язки поділяють на зовнішні та внутрішні.

Складність діяльності Б. с. визначається числом умовно виділених її функцій (програм) і складністю цих функцій, яка виражається кількістю функціональних актів чи циклів, кількістю елементів і підсистем, які беруть у них участь, і їхньою тривалістю в часі. Складність функцій характеризується кількістю перероблюваної всередині системи інформації, тобто кількістю сигналів і складністю моделей.

Складні взаємовідношення, в яких перебувають Б. с., мають ієрархічний характер. Ступінь незалежності однієї системи від іншої, більшої системи приблизно визначається її життєздатністю, коли від неї відключити енерг. та інформаційні діяння з боку інших, подібних систем. З поняттям складних відношень пов'язаний ступінь упорядкованості системи чи ступінь несуперечності діяльності її підсистем і елементів, тобто те, якою мірою окремі ф-ції не заважають, не протидіють одна одній. Збільшення ступеня впорядкованості підвищує стійкість системи, але знижує її здатність еволюціонувати.

Загальнішим і ширшим поняттям є рівень організації, під яким розуміють тип структурних і функціональних відношень, які визначають, зрештою, життєздатність системи та її здатність до організації зовн. середовища. Організація і впорядкованість системи не є протилежними поняттями, бо за високого рівня організації система може значно змінюватися, а відносна гармонія між її частинами при цьому зберігається. Це можливе завдяки розвиткові моделювальної здатності в сфері керування («рівень свідомості»), які дають змогу передбачити в моделях динаміку зміни середовища й самої системи, щоб відшукати найкращі варіанти її поведінки.

Еволюція, тобто ускладнювання системи й найкраще пристосовування до середовища, відбувається по-різному: на рівні мінливості елементів (напр., мутації) чи шляхом цілеспрямованої зміни організації в сфері керування (напр., виховання людини чи вдосконалювання суспільства).

Класифікація Б. с. має умовний характер, бо немає єдиного критерію для поділу і завжди існують проміжні форми. Прийнята в зоології й ботаніці система класифікації не придатна для розгляду Б. с. в інформаційному плані. Набагато доцільніше поділяти Б. с. на п'ять ієрархічних рівнів складності: одноклітинні організми, багатоклітинні організми, популяції, біогеоценоз і біосфера.

Одноклітинні організми — це величезна кількість видів мікроорганізмів (мікроплазми, віруси, бактерії, найпростіші). Розмір їх — від 0,1 до 100 *мкм*. Підсистеми — органоїди клітини — можна поділити на робочі й керуючі. Клітина має складну будову, в якій напівтвердий кістяк (оболонка, перетинки й канали) поєднується зі вмонтованими в нього органоїдами. Функції

клітини — обмін речовин, ріст і розмноження, реакції на зовн. подразники у вигляді зміни обміну й форми руху — в заг. вигляді характерні для всього живого. Усі робочі й керуючі ф-ції клітини підтримуються внаслідок хім. процесів ферментативної природи, починаючи від одержання енергії й аж до синтезу нових структур чи розщеплення існуючих.

Механізм керування клітиною — це поєднання дискретних процесів синтезу молекул білків — ферментів, необхідних для здійснення тієї чи іншої функції, й неперервних процесів зміни їхньої активності під час виконання регульованих реакцій. ДНК становить модель клітини — її структури й функцій. У ній, як і в пам'яті машини, записано первісні дані задачі й програму її розв'язування. В ДНК спец. триплетним кодом записано структуру всіх необхідних білків. Це займає, очевидно, прибл. третину її «пам'яті». Решта «пам'яті» зайнята «програмою зчитування», представленою «генами-регуляторами», які відповідають за синтез спец. речовин-репресорів. Речовини-репресори включають синтез потрібного ферменту лише тоді, коли від робочих підсистем надійде сигнал про готовність. Цей сигнал надходить у вигляді іншої активної речовини-регулятора. Так здійснюється виконання етапів циклічних ф-цій (напр., ріст і поділ) під контролем *зворотних зв'язків*. Синтез білків-ферментів відбувається за поверховою програмою з регульованими ланками: ДНК (ядро) — РНК (рибосоми) — білки — переміщування їх до місця дії.

Підсилювання чи гальмування активності вже синтезованих ферментів здійснюють початкові й кінцеві продукти відповідних хім. реакцій. У цьому полягає другий механізм регулювання. Отже, й у цьому разі діють зворотні зв'язки. Тобто регулювання клітини можна уявити собі як складну сітку, яка складається з робочих і регулюючих дискретних і неперервних хім. реакцій. Перебіг їх характеризують просторові координати (фіксування на «кістяку» клітини) й концентраційно-часові характеристики, які забезпечують циклічні ф-ції (виділення) і неперервні процеси обміну.

Рівень організації одноклітинних порівняно з рештою Б. с. невисокий, хоч за кількістю перероблюваної керуючої інформації його не можна порівняти з жодною тех. системою. Нові пристосовні (адаптивні) програми тут не виробляються протягом життєвого циклу, а створюються лише внаслідок мутацій. Ступінь упорядкованості, очевидно, високий, бо «периферія» — органоїди — має обмежену самостійність у межах регулювання діяння ферментів, а структуру жорстко задано моделлю в ДНК. А втім, зміни в окремих генах ДНК — мутації, які спричинюють невеликі відхилення у функціонуванні одного органоїда,— переносяться іншими генами завдяки місцевому пристосуванню, тобто є можливість для еволюції виду. Цьому сприяє швидкість розмножування шляхом поділу, яка дає змогу нагромаджувати окремі незначні зміни в структурі й функції. Внаслідок цього виникають нові функції.

Багатоклітинні організми пробили великий шлях еволюції від губки до людини. Вони досить різноманітні за величиною й складністю. Особливостями структури є диференціація клітин (м'язових, епітеліальних, сполучнотканинних і статевих), яка виявляється в посиленні й ускладненні якоїсь однієї функції клітини внаслідок ослаблення чи навіть зникнення інших функцій. Напр., скоротлива ф-ція в м'язовій клітині посилюється внаслідок зникнення ф-ції травлення. Диференційовані клітини, об'єднані в органи й системи (робочі й керуючі), забезпечують відповідні ф-ції всього організму. До робочих систем належать: травна, видільна, дихальна, серцево-судинна, рухова й ретикуло-ендотеліальна. Керуючими системами є ендокринна й нервова. Отже, в багатоклітинному організмі можна виділити три ієрархічні рівні структурної складності: клітинний, органний і системний. У межах кожного рівня є свої підсистеми, які теж становлять ієрархію.

Інформаційні зв'язки в організмі відбуваються через центр. нервову систему — кодом нервових імпульсів і через кров — кодом гормонів. Енергія й речовина передаються кров'ю й за допомогою скорочення м'язів внутр. органів.

Функції багатоклітинного організму описують поняттями рефлексу та інстинкту. Інстинкт об'єднує ієрархію й поєднування рефлексів у часі, спрямованих на збереження виду. Це своєрідна програма, яка складається з багатьох підпрограм. Можна виділити два інстинкти — продовження роду (складається він із статевого та батьківського) і самозбереження — з харчового й захисного. У програмі інстинкту можна виділити дві сторони: зовнішню діяльність — поведінку, що виявляється у тварин і людини в складному коді рухових актів, якими керує анімальна нервова система, а здійснюють їх м'язи, і внутрішню діяльність, що виявляється в керованому *гомеостазисі*, в поєднанні функцій внутр. органів, якими керують ендокринна й вегетативна нервова системи і які призначені забезпечувати виконання рухових актів (див. *Регулюючі системи організму*).

Програми керування й регулювання в заг. вигляді «записано» в ДНК, а докладно — в структурі нервової та ендокринної систем, які формуються в процесі росту, як взаємодію спадкової інформації (ДНК) з зовн. впливами. Взаємовідношення між внутр. і зовн. частинами програми (між поведінкою й гомеостазисом) таке: провідною є, очевидно, програма життєвого циклу (ріст, дозрівання й розмноження), закладена в ендокринній системі. Стимули від неї йдуть в анімальну нервову систему, настроюючи й активізуючи відповідні складні умовні й без-

умовні рефлекси поведінки — добування їжі, пошуки самки, вирощування малят. Самі рефлекси здійснюються залежно від подразників, одержуваних ззовні. Регулювання гомеостазису «підстроюється» під рухові акти поведінки й водночас є для них зворотним зв'язком, бо енергетично обмежує їх. Отже, існує схема з чотирма взаємопов'язаними ланками й зворотними зв'язками.

В інформаційному плані індивідуальний розвиток організму можна уявити собі так: у ДНК закладено моделі всіх спеціалізованих клітин з їхньою тонкою структурою і функцією. ДНК містить і програми зчитування специфічної інформації для клітин, тобто, власне, програму росту й дозрівання всього організму і всіх його частин. Ця програма складається з етапів, представлених окремими частинами ДНК, в яких періоди дозрівання і прогресуючої спеціалізації клітин чергуються з розмноженням. У ДНК закладено й регулятори етапів, які включаються з периферії факторами — ініціаторами, що виникають із сукупності клітин, які розмножуються. Індивідуальний розвиток організму на ранній стадії прибл. повторює історію еволюції видів, але з пропусками й зі зміщенням в часі. Ріст і дозрівання організму відбувається внаслідок генетичної програми, закладеної в ДНК, із впливом зовнішнього середовища й відповідями на нього ростучого організму. Т. ч., середовище впливає на формування ростучого організму, хоч і обмежено. Рівень організації багатоклітинних організмів неоднаковий у різних видів. Чим складніший організм, тим вища організація і впорядкованість.

Старіння й умирання також необхідні для еволюції. Поки що немає єдиної думки про механізм старіння. Припускають, що планомірне послаблення деяких функцій запрограмоване в генах так само, як і ріст, і розвиток. Але справжній процес старіння, очевидно, є поєднанням програми старіння й нагромадження завад у вигляді помилок у генетичному апараті клітин та баластних хім. речовин всередині клітин і між ними. Завади порушують процеси регулювання, зменшують здатність протистояти хворобам.

Біологічний вид не слід розглядати як систему, бо він не має чітких меж у часі й просторі й виявляється в інших системах — популяціях. А втім, можна говорити про закони формування й зміни видів, що їх вивчають у генетиці. Основою генетики є вчення про мутації й рекомбінації як джерела нової генетичної інформації. При цьому треба враховувати, що в процесі реалізації мутантної моделі ДНК в організмі всі значні зміни в генах роблять організм нежиттєздатним, бо вони порушують координацію між його частинами. Проте помірні зміни в моделі можливі внаслідок значної гнучкості генетичної програми формування, яка допускає розвиток організму за рахунок напруження пристосувальних механізмів. Так виникає генотип з рядом нових ознак — мутант. Щоправда, такі індивіди найчастіше неплідні або зі зниженою плодючістю, а це приводить до швидкого витіснення їх з популяції плодючішими «нормальними» конкурентами. Тому нові види можуть виникати лише тоді, коли сприятливі мутації й рекомбінації поєднуються зі зміною зовн. умов. Відбувається природний добір.

Якщо популяція з новими цінними спадковими даними вже сформувалася, то й надалі вона поширюється й «доробляється» шляхом наступних мутацій і рекомбінацій, які підсилюють нову цінну ознаку і зменшують те внутр. напруження пристосування, за рахунок якого відбувалося формування організму за зміненою генетичною моделлю ДНК.

Популяцією наз. сукупність особин одного виду, об'єднаних місцем і часом проживання, завдяки чому вони можуть спілкуватися. Основу популяцій становлять число й частота генотипів, тобто варіантів наборів генів (рецесивних чи домінантних), закладених у ДНК всієї сукупності особин. Це визначає можливості популяції в боротьбі за існування й перспективи її еволюції.

Елементом популяції є особина (фенотип) — тварина чи рослина з її ознаками — структурними й функціональними особливостями. Підсистемами популяції є сім'ї та зграї. Структура популяції може мати неоднакову рухомість і обмежену складність, що визначаються різноманітністю й характером зв'язків, які великою мірою залежать від розвитку кори головного мозку. Зв'язки всередині системи бувають фізичні (безпосереднє фіз. діяння особин однієї на одну за допомогою рухів) та інформаційні (обмін сигналами — звуками, позами й мімікою), які відображають пряме діяння. Ступінь складності й багатство сигналів залежать від розвитку кори головного мозку. Важко виділити програми, що стосуються власне популяції. Вона живе інстинктами особин як елементів системи. Тільки у вищих тварин з добре організованою зграєю з'являються свої закони угруповання, які істотно впливають на життя індивідуумів.

Біогеоценоз — це система, що складається з популяцій окремих біол. видів, об'єднаних спільністю географ. і клімат. умов. Елементами системи є особини, а підсистемами — сім'ї, зграї та популяції. Зв'язки бувають прямі — фізичні й інформаційні (сигнали) й непрямі — через неживу природу й нижчі біол. види. Ступінь організації системи низький, підвищується він тільки внаслідок діяння на неї людини. Низькою є й упорядкованість цієї системи. Система існує при постійній міжвидовій і частково внутрішньовидовій боротьбі. Біосфера — це сукупність усього живого на планеті.

Про Б. с. відомо поки що дуже небагато. Щоб збільшити ефективність управління Б. с., треба поглиблювати дослідження їх не лише традиційними методами, а й вивчаючи кількісні моделі, що їх створює *кібернетика біологічна*.

М. М. Амосов.

БІОМЕДИ́ЧНА ЕЛЕКТРО́НІКА — див. *Медична електроніка.*

БІО́НІКА (від грец. βίος — життя) — науковий напрям, який вивчає принцип побудови й функціонування *біологічних систем* з метою створення нових машин, приладів, механізмів, будівельних конструкцій і технологічних процесів, характеристики яких наближаються до характеристик живих систем. Використовуючи живу природу як джерело для нових тех. ідей, Б. досліджує *аналогії* між живими й штучними системами, зіставляє їхні найважливіші параметри, встановлює, в чому природа досконаліша й економніша за сучас. техніку, і, спираючись на добуті знання, шукає принципово нові шляхи оптим. розв'язування багатьох складних інженерних проблем.

У Б. звичайно виділяють три напрями: експериментальну Б. (виявляння ідей і принципів живої природи, які можна покласти в основу розв'язування тих або інших інженерних проблем); теоретичну Б. (розробка матем. моделей біосистем); технічну Б. (реалізація *моделей математичних*, створення нових тех. засобів і систем — приладів, апаратів і пристроїв, дія яких основана на аналогії з біол. принципами і які перевершують за своїми характеристиками ті, які вже створено раніше).

За науковим змістом окремих напрямів Б. можна поділити на такі розділи: *нейробіоніку*, сприйняття й перетворення інформації в *аналізаторних системах*, біомеханіку, орієнтацію й навігацію та біоенергетику.

Нейробіоніка вивчає й реалізує в тех. пристроях принципи переробки інформації, виявлені в нервовій системі людини і тварин. Дослідження способів перетворення інформації в біол. системах почалося з вивчення *нейронів* і розробки їхніх різних матем. і тех. аналогів (див. *Модель нервової клітини*). Від побудови аналогів окремих нейронів перейшли до створення їхніх комплексів і вивчення їх моделюванням пучків нервів і сіток (див. *Нейронні сітки*). За допомогою штучних нейронів сіток досліджують різні сторони роботи головного мозку — пам'ять, виділення сигналів на фоні завад, логіч. операції, процес навчання тощо. Крім створення фіз. сіток з нейроподібних елементів, нервові сітки моделюють на ЕОМ. Моделювання нейронів і нервових сіток привело до побудови ряду пристроїв, які дають змогу розв'язувати деякі задачі, пов'язані з переданням і обробкою інформації. Прикладом таких пристроїв є *персептрони*. Роблять спроби за аналогією з живою природою вирощувати штучні нейрони й цілі нейроподібні системи. Освоєння технології виробн. штучних нейронів у вигляді мікрокомпонент колоїдних розмірів (10^{-5}—10^{-7} *см*) і молекулярних розмірів (10^{-7}—10^{-8} *см*) дало б змогу різко збільшити надійність і швидкодію та зменшити вагу, габарити і споживану потужність електронних систем.

Вивчення сприйняття й перетворення інформації в аналізаторних системах окремих видів тварин дало змогу виявити багато раніше невідомих властивостей деяких органів чуттів і розробити на їхній зразок кілька оригінальних пристроїв. Так, на основі вивчення ока мечохвоста створено електронну модель, яка має здатність посилювати контрастність між краями спостережуваного об'єкта й навколишнім фоном. Такий аналог ока дасть змогу поліпшити роботу телевізійних трактів деяких систем, таких, як системи одержування й аналізу знімків Місяця й інших планет, аерофотознімків земної поверхні з супутників тощо. Амер. фірма «Дженерал електрік» розробила біонічний пристрій «візілог», здатний виконувати деякі функції людського ока: сприймати зображення, проводити вимірювання й передавати інформацію. Гадають, що такі пристрої встановлюватимуть на непілотованих космічних кораблях. Вдалося побудувати досить вдалу електронну модель жаб'ячого ока. Вона здатна бачити контур зображення, враховуючи контрастність, відкидати інформацію про нерухомі предмети й вести спостереження тільки за рухомими об'єктами. Створення моделей ока й частини зорового аналізатора (див. *Модель зорового аналізатора*) по суті є першим кроком у виготовленні нового типу обладнання, призначеного для розв'язування складних задач виявлення, стеження й наводжування.

Дослідження органів слуху проводять у трохи менших масштабах, але теж інтенсивно. Вивчають конструктивні особливості звукових аналізаторів, механізми обробки акустичних сигналів і акустичні сервомеханізми. Розроблено електронну модель (у вигляді системи фільтрів), яка відтворює частотні характеристики людського вуха, й електронну модель слухового органа і забезпечує розрізнення слабких сигналів на фоні шумів завдяки кореляційному процесові (див. *Модель слухового аналізатора*). Співробітники Ленінградського ін-ту зв'язку ім. М. О. Бонч-Бруєвича побудували «електронне вухо» для оцінювання якості звучання музичних інструментів. Встановлено, напр., що слуховий аналізатор медузи здатний уловлювати інфразвукові коливання (частотою 8—13 *гц*), які виникають у западинах штормових хвиль і поширюються зі швидкістю, більшою за швидкість наближення шторму. На основі принципу дії інфравуха медузи створено автомат. вісник штормів (мал. 1). Він визначає напрям і силу шторму приблизно за 15 *год*. Побудовано кілька електронних пристроїв, здатних аналізувати запахи й визначати за ними сорти квітів, вин, тютюну, кави, бензинів, медикаментів, харчових продуктів і парфюмерних товарів. Деякі прилади сприймають запахи при концентрації 0,00001% (мал. 2). Такі пристрої можна застосовувати як дегустатори різних продуктів, встановлювати в операційних, шахтах, на складах, у бензосховищах і на території фабрик і заводів.

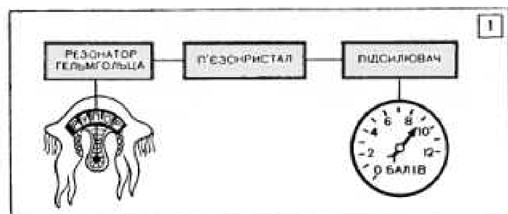
Біомеханіка вивчає структурні й функціональні особливості рук і ніг людини, механіку бігу, стрибків і повзання деяких тварин, форму тіла й локомоторний апарат риб, молюсків і ссавців та політ птахів і комах. Проведені дослідження дали багато цікавого. Так, аналіз способу пересування пінгвінів привів до створення оригінальної снігохідної машини «Пінгвін», яка розвиває швидкість близько 30 *км/год*. Біг кенгуру підказав ідею створення «стрибаючої» машини (мал. 3). Розроблено багато *маніпуляторів*, які тією або іншою мірою повторюють елементи конструкції людської руки. Значних успіхів досягла й гідробіоніка. Виготовлено дослідні зразки штучної «швидкохідної» дельфінячої шкіри — «ламінфло» (мал. 4). Обшиті нею моделі торпеди й катера при тих самих потужностях силових установок рухаються на 15—20% швидше. Перспективними для майбутнього авіабудування є проводжувані біонічні досліди польоту птахів і комах. Б. прагне розгадати феноменальну підйомну силу живого крила, намагається осягнути закономірності махального польоту, пізнати таємницю його великої економічності. Моделювання й вивчання ідеально відпрацьованого природою махального польоту може дати ключ до створення принципово нових, високодосконалих літальних апаратів. Можливо, безшумний політ сови підкаже авіаконструкторам ефективні способи зменшення лобового опору, літальні механізми лелеки, бджоли, сарани, бабки та джмеля — засоби збільшення економічності, маневреності й відносної швидкості польоту сучас. повітряних лайнерів, а «стоячий» політ мухи-дзюрчалки або зависання маленьких колібрі в повітрі над квіткою — нові, відмінні від вертолітних, способи вертикального зльоту й посадки.

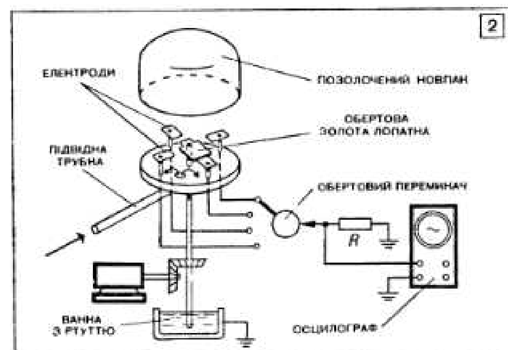
В останні роки склався ще один новий науковий напрям, у якому Б. співпрацює з архітектурою й буд. технікою — біоархітектура. Використовуючи як зразки моделі живої природи — стебла рослин, нерватуру живого листка й шкаралупу яйця, інженери створюють міцні й гарні архітектурні споруди: житлові будинки, мости, кінотеатри тощо.

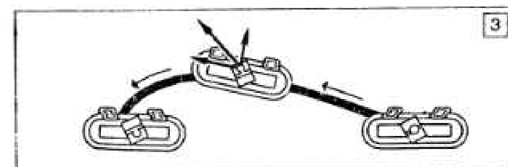
Велику увагу приділяють біонічним дослідженням органів стабілізації, локації, орієнтації й навігації у тварин. Дослідження в цій галузі привели до створення деяких оригінальних тех., напр. гіротрона — прилада, який пробують застосувати замість гіроскопа в швидкісних літаках і ракетах. Він працює за принципом дзижчалець комахи; площина, в якій вони коливаються, займає незмінне положення в просторі. Побудовано малогабаритний покажчик швидкості літака відносно землі, в конструкції якого використано деякі принципи будови й функціонування ока жука. Ретельно вивчають локаційні апарати кажанів, дельфінів та інших тварин і на основі цього створюють досконаліші радари, сонари, ультразвукові пристрої — «поводирі» для сліпих.

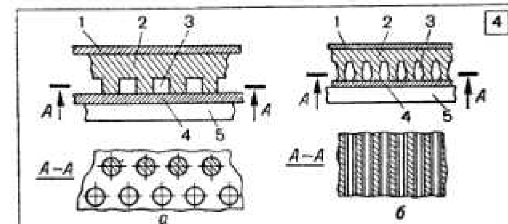
Б. розв'язує широке коло завдань, пов'язаних з біоенергетикою живих організмів. Зокрема, великий інтерес становить вивчення й моделювання роботи м'яза, основаної на безпосередньому перетворенні хім. енергії на механічну (див. *Штучний м'яз*).

Другою важливою проблемою є розробка принципово нових економічних і дешевих біохім. джерел енергії. Розв'язуючи це завдання Б. йде в двох напрямах. Перший — одержання за допомогою бактерій горючих газів з органічних відходів. На цьому прин-









1. Блок-схема приладу для передбачення штормів (штучне «вухо медузи»).
2. Схема «електронного носа».
3. Схема переміщення стрибаючого автомобіля.
4. Схема випробуваних зразків штучної «швидкохідної» дельфінячої шкіри «ламінфло»: *а* — товста шкіра з окремими стовпчиковими опорами; *б* — тонка шкіра з суцільними ребристими опорами; *1* і *4* — гладенькі безшовні гумові оболонки; *2* — гумова діафрагма; *3* — в'язка демпфуюча рідина; *5* — стінка жорсткої моделі.

ципі побудовано кілька невеликих експериментальних енерг. установок. Другий напрям пов'язаний із створенням електр. елементів, електроди яких містяться в посудині, яка має бактерії й запас кормів. Паралельно зі створенням біохім. джерел енергії провадять роботи в справі вивчення біоелектрогенезу — генерування електрики живими організмами. Відомо, напр., близько 500 різних видів риб, які генерують електроенергію. Найпотужніша «електростанція» — у морського вугра; вона здатна виробляти електр. розряд, напруга якого досягає 650 *в*. Біоніки сподіваються, що за принципом електростанції вугра буде створено батарею, яка зможе швидко відновлювати витрачену енергію.

Б.— наука молода, але вона дедалі більше проникає в різні галузі виробн. й у сферу наукових досліджень.

Літ.: Бионика. М., 1965; Вопросы бионики. М., 1967; Літинецький І. Б. Біоніка. К., 1967 [бібліогр. с. 245—246]; Литинецкий И. Б. На пути к бионике. М., 1972 [бібліогр. с. 221]; Жерарден Л. Бионика. Пер. с франц. М., 1971; Бертон Р. Чувства животных. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 194—197]; Анисимова Т. Н. Бионика. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы. 1958—1968. М., 1971.

І. Б. Літинецький.

БІТ (від англ. binary digit — двійкова цифра) — двійкова одиниця вимірювання *ентропії* й кількості інформації. Джерело з двома рівноймовірними повідомленнями має ентропію в одну двійкову одиницю. Походження терміна «Б.» пояснюється тим, що кількість двійкових одиниць вказує (з точністю до одиниці) на середнє число знаків, яке необхідне, щоб записати це повідомлення в двійковому *коді*. Застосовують також натуральні й десяткові одиниці. Перехід від одних одиниць до інших відповідає зміні основи логарифмів у визначенні ентропії та *інформації кількості* (10 замість 2). Формула переходу: 1 десяткових одиниць $= 1/\log 2$ *біт* $\approx 3{,}32$ *біт*, 1 натуральних одиниць $= 1/\ln 2$ *біт* $\approx 1{,}44$ *біт*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

БЛЕЙКА АЛГОРИТМ — алгоритм одержання скороченої *диз'юнктивної нормальної форми* (ДНФ) булевої функції з довільної ДНФ. Грунтується він на теоремі Блейка: якщо в довільній ДНФ булевої ф-ції здійснити всі можливі узагальнені склеювання, а потім усунути всі елементарні поглинання, то в результаті одержують скорочену ДНФ функції. Операція узагальненого склеювання полягає в застосуванні тотожного співвідношення $AC \vee B\overline{C} = AC \vee B\overline{C} \vee AB$, що не змінює значення булевої ф-ції. В ряді випадків Б. а. визначає мінім. форму булевої ф-ції: якщо скорочена ДНФ булевої функції не містить заперечення змінних, то вона водночас є мінім. формою, до того ж єдиною; якщо в простих імплікантах скороченої ДНФ всі змінні містяться лише з запереченням, то вона буде й мінімальною. Лише монотонні булеві ф-ції мають скорочені ДНФ, що не містять заперечень змінних. Б. а. застосовують при мінімізації булевих ф-цій для одержання їхніх простих імплікант.

А. М. Богомолов.

БЛОК у програмуванні — замкнена складова частина *програми*, що являє собою сукупність описів та операторів, які становлять сферу діяння деяких *ідентифікаторів* (імен). Поняття «блок» відповідає поняттю «підзадача» або «підалгоритм». Використовуючи блоки, задачу можна поділити на частини, які допускають автономне програмування їх. Кожний Б. вводить новий рівень позначень за допомогою описування ідентифікаторів і міток. У Б. може міститись, як оператор, інший Б. Блокова структура (див. *АЛГОЛ-60, СИМУЛА, ПЛ-1*) програми дає змогу при *пам'яті розподілі* відводити одні й ті самі поля пам'яті машини для зберігання величин, описаних у неперетинних Б., і тим самим сприяє економному використанню її. Див. також *Блок-схема програми*.

А. І. Халілов.

БЛОК ЗБЕРІГАННЯ ІНФОРМАЦІЇ — див. *Нагромаджувач*.

БЛОК ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ — пристрій для введення в розв'язувальні кола *аналогових обчислювальних машин* параметрів, які змінюються в часі за заданим законом і відповідають змінним коефіцієнтам модельованих значень. Застосовують електромех. та електронні Б. з. к. Електромеханічні Б. з. к. будують, застосовуючи лінійні потенціометри з відводами й без відводів. У першому випадку змінювання за заданим законом напруги, що її знімають з повзунка потенціометра, досягають, шунтуючи окремі ділянки потенціометрів і підмикаючи до відводів різні живильні напруги. У другому випадку задане змінювання вихідної напруги потенціометра здійснюється внаслідок переміщення повзунка програмним механізмом. За такі механізми правлять профільовані кулачкові механізми, фотоелектр. *слідкуючі системи*, фігурні струмознімачі тощо. В спеціалізованих АОМ застосовують потенціометри з профільованими за відповідним законом каркасами. Електромех. Б. з. к. будують і за аналого-цифровими схемами. В цьому разі використовують, як правило, перфострічку, рівномірне протягування якої здійснює механізм типу мальтійського хреста. Числові значення ординат вводжуваного змінного параметра попередньо кодують за якоюсь системою числення (здебільшого двійковою або двійково-десятковою) й пробивають на перфострічці. Кожну щітку струмознімального механізму з'єднують з відповідним розрядним входом *цифро-аналогового перетворювача*, на виході якого утворюються напруги, пропорційні ординатам модельованого змінного коефіцієнта. При подаванні на заг. електрод щіткового механізму змінної за величиною напруги, що утворюється в розв'язувальних колах АОМ, здійснюється операція множення. Найпростіші Б. з. к. будують, застосовуючи подільники напруги й кроковий привод. Значення відтворювальної ф-ції

задають у цьому разі, з'єднуючи на *набірному полі* платівки крокового шукача з відповідними клемами *подільника напруги*. Задана залежність відтворюється у вигляді східчасто апроксимованої кривої. Залежно від вимог до точності східчасто змінювану напругу можна подавати на вхід *інтерполятора*. Досить ефективним є лінійний інтерполятор, що має в своїй основі *підсилювач операційний*, який вмикають за схемою інтегратора. В електромех. Б. з. к. можна легко виконувати множення аналогових змінних, утворених у розв'язувальних колах АОМ, на змінні коеф., якщо підімкнути відповідні точки схеми електр. моделювання до входів потенціометричних подільників Б. з. к.

Електронних Б. з. к. є електронні нелінійні *перетворювачі функціональні*, наладжувані за законом змінювання вводжуваного параметра, і блоки множення. Щоб одержати на виході перетворювача задані ф-ції часу, на його вхід подають напругу, що лінійно зростає (аргумент). Електромех. Б. з. к. забезпечують більші точність і стабільність відтворення заданих залежностей, ніж електронні, але поступаються перед ними в швидкодії.

Літ.: Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [бібліогр. с. 494—505]; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.— Л., 1964.

Є. І. Ламін.

БЛО́КИ ЦОМ ТИПОВІ — пристрої, призначені для виконання *елементарних операцій над словами*. До Б. ЦОМ т. належать *регістри, дешифратори, лічильники* й *суматори*.

Регістри призначено для зберігання інформації та перетворювання її під час реалізації елементарних операцій передавання та зсування слів. Регістр являє собою набір запам'ятовувальних елементів, пронумерованих відповідно до розрядів слів, які зберігаються в ньому (молодшому розрядові слова відповідає молодший розряд регістра й т. д.). Під перетворенням інформації в регістрі розуміють будь-яку однозначну зміну стану його розрядів (повну або часткову) під дiянням вхідних сигналів. До операцій перетворювання інформації в регістрі належать елементарні операції зсування й передавання коду на регістр та установчі перетворювання. Під час операцій зсування в регістрі кожний розряд повинен одночасно й видавати інформацію в наступний розряд і приймати нову інформацію з попереднього розряду. Здійснюється це проміжним запам'ятовуванням зсовуваної інформації або на лініях затримки, або на реактивних елементах, чи в допоміжному регістрі — залежно від типу застосовуваної елементної структури ЦОМ. Розрізняють лінійні та циклічні регістри відповідно до виконання лінійної й циклічної модифікацій елементарної операції зсування. Елементарна операція передавання *коду* на регістр полягає в змінюванні стану кожного розряду регістра залежно від значення відповідного розряду вводжуваного слова. Передавати слово на регістр можна паралельним і послідовним способами. За паралельного способу всі розряди слова надходять на регістр одночасно, за послідовного — провадиться порозрядне введення слова з боку молодших або старших розрядів регістра з наступним зсуванням вводжуваної інформації на один розряд ліворуч або праворуч відповідно. Установчі перетворення інформації в регістрі полягають у переведенні регістра з будь-якого стану в заданий (напр., у початковий нульовий чи одиницевий).

Дешифратором для n змінних x_1, x_2, ..., x_n наз. пристрій, що його вихідними ф-ціями є різні конституенти одиниці: $\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$, $\bar{x}_1\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_{n-1}x_n$, ..., $x_1x_2\ldots x_n$. Дешифратори встановлюють взаємоднозначну відповідність між дешифровуваним словом і сигналом на відповідному виході дешифратора (сигнал набуває одиницевого значення, лише коли на вході дешифратора з'являється відповідне слово або група слів, для решти множини слів він дорівнює нулеві). Розрізняють дешифратори 1-го й 2-го родів. Перші реалізують систему ф-цій, кожна з яких набуває одиницевого значення за відповідного єдиного значення слова на вході дешифратора. Другі реалізують систему ф-цій, що набувають одиницевого значення на певному відповідному діапазоні значень дешифровуваних слів. За способом побудови розрізняють лінійні, пірамідальні та прямокутні дешифратори. Лінійні дешифратори n змінних являють собою сукупність не зв'язаних між собою 2^n схем збігу на n входів, кожна з яких реалізує відповідну конституенту одиниці. Пірамідальний дешифратор будують за методом каскадів: 1-й каскад реалізує конституенти одиниці для двох змінних x_1 і x_2: $\bar{x}_1\bar{x}_2$; $x_1\bar{x}_2$; $\bar{x}_1x_2$; $x_1\ x_2$; 2-й каскад — конституенти одиниці для трьох змінних, причому його вхідними сигналами є вихідні сигнали 1-го каскаду й значення змінної x_3 й $\bar{x}_3$. На наступному каскаді реалізуються всі конституенти чотирьох змінних, вхідними сигналами для нього є вихідні сигнали 2-го каскаду й значення змінних x_4 і $\bar{x}_4$ і т. д. На виході (n — 1)-го каскаду реалізуються всі конституенти одиниці для n змінних. Прямокутний спосіб побудови дешифраторів зводиться до того, що вхідне слово поділяють на групи розрядів, дешифровувані за допомогою частинних лінійних дешифраторів, що являють собою 1-й каскад дешифратора. В наступному каскаді реалізують усі можливі кон'юнкції виходів частинних лінійних дешифраторів. На відміну від дешифратора 1-го роду, на виходах дешифратора 2-го роду утворюються диз'юнкції ряду послідовно занумерованих конституент одиниці.

Лічильниками наз. пристрої, що лічать вхідні сигнали. Лічильник являє собою тригерний регістр, здебільшого він реалізує елементарну операцію лічби. Якщо позначити через S_i якийсь i-й стан лічиль-

ника, що визначається станами його розрядів, то від діяння сигналу, напр. «+1», лічильник переходить у сусідній S_{i+1} стан, а від діяння сигналу «—1» — у сусідній S_{i-1} стан — відповідно до задаваного модуля лічби (+1 — позначають додавання й віднімання за модулем). Досягаючи стану з граничним значенням i, лічильник установлюється у початковий стан. За напрямом переходів з одного стану в інший лічильники поділяють на прості і реверсивні. Прості лічильники здійснюють лічбу сигналів одного знака й переходи в них відбуваються в одному напрямі. Реверсивні лічильники лічать додатні й від'ємні сигнали, а переходи в них відбуваються в прямому й зворотному напрямах. Структура лічильника істотно залежить від способу кодування його стану. Розрізняють лічильники: з позиційним двійковим або десятковим, з позиційним одиницевим або комбінованим і з непозиційним сусіднім кодуванням. У лічильнику з позиційним двійковим кодуванням стани кодуються звичайними двійковими кодами послідовних цілих невід'ємних чисел, починаючи з нуля (аналогічно для десяткового кодування). Додавання до коду й віднімання одиниці від коду такого лічильника здійснюється за допомогою операцій переносів і позик (див. *Ланцюг переносу*) між розрядами лічильника. За одиницевого кодування стан лічильника ототожнюється з місцеположенням певного коду в його розрядах (як такий код використовують код виду (00...01) або (00...011), цей останній наз. ще парно-одиницевим). Під діянням вхідного сигналу відбувається перехід лічильника в новий стан внаслідок зсуву коду ліворуч або праворуч — залежно від знака ліченого сигналу. Лічильник з одиницевим кодуванням за структурою являє собою кільцевий зсувовий регістр. Кількість станів такого лічильника дорівнює кількості розрядів зсувового регістру. За комбінованого способу кодування лічильник ділять на частинні лічильники, всередині яких застосовують одиницеве кодування, а між ними зв'язок організують так само, як і для лічильників з позиційним кодуванням. За сусіднього кодування станів перехід із будь-якого S_i-го стану в сусідній S_{i+1}-й (або S_{i-1}-й) здійснюється перемиканням лише одного розряду лічильника. Для сусіднього кодування можна використати, напр., непозиційну систему кодів Грея. Для визначення станів лічильника використовують дешифратори.

Суматором наз. пристрій, що виконує елементарну операцію підсумовування. Розрізняють паралельні та послідовні суматори — залежно від того, як надходять усі розряди доданків у суматор: одночасно чи послідовно, починаючи з молодших. Паралельні суматори складаються з n однорозрядних підсумовувальних схем (n — кількість розрядів доданків), послідовні — з однієї. Однорозрядна підсумовувальна схема (ОПС) здійснює додавання за модулем 2 відповідних розрядів доданків x_i і y_i і переносу p_i з попереднього розряду, внаслідок утворюється сума Σ_i в цьому розряді й перенос p_{i+1} в наступний розряд. Систему *перемикальних функцій*, яка описує ОПС, можна зобразити так:

$$\begin{cases} \Sigma_i = x_i + y_i + p_i, \\ p_{i+1} = x_i y_i \vee (x_i + y_i)\, p_i. \end{cases} \quad (1)$$

За способом побудови ОПС розрізняють комбінаційні, нагромаджувальні й амплітудні суматори. Комбінаційні — будують з логіч. елементів, які реалізують функціонально повний набір елементарних операторів (див. *Елементна структура ЦОМ*). Система ф-цій (1) має бути зображена у вигляді, що відповідає операторним виразам застосовуваних логіч. елементів. Обидва доданки надходять на вхід комбінаційного суматора одночасно. Основою нагромаджувального однорозрядного суматора є *тригер* з лічильним входом, на який по черзі надходять підсумовувані цифри й перенос. Амплітудні суматори провадять підсумовування амплітуд струмів або напруг так само, як і комбінаційні. Способи організації паралельних суматорів з ОПС визначаються способом організації поширення сигналу переносу від молодших розрядів до старших. Розрізняють суматори з послідовним поширенням переносів (ППП), з наскрізним, одночасним і груповим. У суматорах з ППП перенесення в даний розряд можна зробити лише після того, як відбудеться додавання в попередньому розряді. В суматорах із наскрізним переносом організується спец. ланцюг поширення переносів з дужче швидкодіючих елементів так, що перенос, який виникає в попередніх розрядах, обходить ті розряди, в яких сума доданків за модулем 2 дорівнює 1. В суматорах з одночасним переносом значення переносу з даного розряду є ф-цією входів усіх попередніх розрядів і виникає одночасно в усіх розрядах. У суматорах з груповим переносом кілька розрядів об'єднуються в групи, причому всередині групи перенос у кожному розряді виникає одночасно, а між групами можна організувати або послідовне, або наскрізне, або одночасне перенесення. За способом фіксації закінчення процесу підсумовування всі суматори ділять на синхронні й асинхронні. В синхронних суматорах на виконання додавання відводять час, не менший за макс. час поширення переносу по ланцюжку переносів. Асинхронний принцип керування закінченням підсумовування грунтується на визначенні фактичного закінчення поширення переносів. Такі суматори мають схеми визначення завершення переносу. Для підсумовування чисел, поданих зворотним кодом, суматори мають ланцюг циклічного переносу, який зв'язує перенос, що виникає в знаковому розряді, зі входом молодшого розряду суматора.

Якщо від'ємні числа кодуються додатковим кодом, цього ланцюга в суматорі немає.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [бібліогр. с. 559—575]. *З. М. Кириченко.*

БЛО́КОВИЙ СИ́НТЕЗ ЦОМ — представлення структури проектованої машини у вигляді композиції блоків і їхніх зв'язків з описом функціонування кожного блока композиції та часової діаграми всієї сукупності блоків. На етапі Б. с. ЦОМ розв'язують такі завдання: визначають за формальним описом функціонування пристроїв, набір типових блоків, за допомогою яких можна реалізувати це функціонування, описують функціонування кожного блока в знайденій композиції та характер зв'язку між ними й аналізують часові співвідношення між сигналами, що надходять на входи виділених блоків, і сигналами, що виходять з блоків (як інформаційними, так і керуючими). Завдання подати пристрій, функціонування якого описано у вигляді композиції блоків з заданого набору, дуже складне. Складність його визначається неоднозначністю допустимої декомпозиції первісного пристрою на типові блоки й суперечністю критеріїв, якими керується проектувальник під час пошуку цієї декомпозиції. Критеріями, що їх використовують, розв'язуючи завдання декомпозиції, можуть бути: типізація (знаходження такої декомпозиції, при якій кількість різних використовуваних типових блоків мінімальна, а в ідеальному випадку використовують лише один стандартний типовий блок), конструктивна однорідність (знаходження такої декомпозиції, при якій типові блоки об'єднано в однакові конструктивні одиниці та зв'язки між цими конструктивними одиницями однотипні), мінім. устаткування (пошук декомпозиції, що дає найменшу сумарну кількість елементів у сукупності типових блоків) тощо.

Заг. методу розв'язування завдання пошуку композиції типових блоків, яке забезпечило б необхідне функціонування синтезованого пристрою, не існує, і розв'язування цього завдання має, як правило, евристичний характер. Більш-менш точні методи є лише на рівні *елементного синтезу ЦОМ*, коли з окремих *логічних елементів ЦОМ* синтезують самі типові блоки *цифрової обчислювальної машини (суматори, регістри, дешифратори, лічильники* тощо). В цьому разі вдається використати розвинений апарат теорії *перемикальних функцій.* Якщо в Б. с. ЦОМ використовують типові блоки, то опис функціонування цих блоків і реалізація їх на рівні обраної системи елементів, як правило, відомі. А якщо виділяють нестандартні блоки, то їхнє функціонування описують формально й синтезують їх або з типових subблоків (тобто розв'язують знову завдання Б. с. ЦОМ, але вже щодо блока), або безпосередньо з елементів, які входять до обраної елементної бази (якщо при цьому елементи розглядають як типові субблоки, то формально знову розв'язують завдання Б. с. ЦОМ). Після того, як знайдуть композицію блоків, що відповідає синтезованому пристроєві, потрібно описати зв'язки між блоками. Ці зв'язки бувають двох типів: інформаційні (функціональні), що визначають напрям передавання інформації з одного блока в другий, і керуючі, які визначають передавання сигналів керування між блоками композиції та між пристроями (для блоків, що їхні зовн. канали частково або цілком збігаються з каналами між пристроями, виділеними й описаними на попередніх етапах синтезу). Сукупність виділених блоків, зв'язків між блоками однієї композиції та блоками, що належать до різних пристроїв, визначають б л о к о в у с т р у к т у р у ЦОМ.

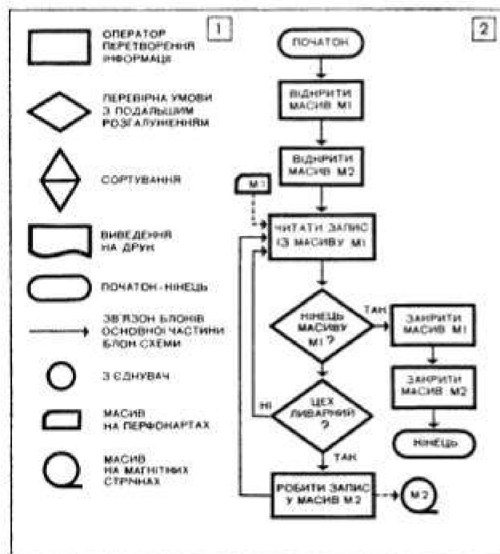
Як і на етапі виділення *алгоритмічної структури ЦОМ,* блокову структуру ЦОМ можна формально описати *алгоритмічною мовою* (напр., мовою типу *СИМУЛА, СИМСКРИПТ, СЛЕНГ* та ін.) і провести моделювання на ЦОМ, що реально існує. Моделювання відбувається на прикладі потоку реальних програм. Моделюванням можна встановити необхідні часові співвідношення в роботі блоків, об'єми буферних нагромаджувачів, потрібних для узгодження роботи блоків, перевірити правильність роботи блоків тощо. Див. також *Алгоритмічний синтез ЦОМ, Автоматизація проектування ЦОМ, Блоки, ЦОМ типові.*

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Геллер С. И., Журавлев Ю. П. Основы логического проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1969 [бібліогр. с. 266—267]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]. *Д. О. Поспелов.*

БЛОК-СХЕ́МА ПРОГРА́МИ — графічне зображення обчислювального процесу, що його повинна реалізувати відповідна програма цифрової обчислювальної машини. Розрізняють принципову й робочу Б.-с. п. Принципова Б.-с. п. зображує обчисл. процес на рівні типових процесів обробки інформації. Ці процеси значною мірою залежать від класу розв'язуваних задач. Так, для задач обробки економіч. інформації типовими процесами є введення інформації, компонування, редагування, сортування, керування масивами даних, виведення інформації, перетворення масивів даних тощо. В розвинених системах *математичного забезпечення ЦОМ* ці процеси реалізуються стандартними підпрограмами (див. *Бібліотека стандартних підпрограм*). Призначення принципової Б.-с. п.— давати наочне уявлення про *алгоритм* розв'язування задачі, в ній відображується технологічний процес обробки інформації на ЦОМ, з її допомогою можна глибше вивчити задачу, виявити вади постановки задачі й усунути їх на ранній стадії, виявити закономірності алгоритму обробки інформації, знайти типові частини, ефективно використати *запам'ятовувальні пристрої зовнішні*

ЦОМ та оцінити витрати часу на програмування й орієнтовний час обробки даних на ЦОМ.

Робочі Б.-с. п. починають складати після того, як складуть і ретельно проаналізують принципову Б.-с. п. Треба щоб робоча Б.-с. п. відображала всі розгалуження обчисл. процесу, всі звертання до стандартних підпрограм із зазначенням *параметрів фактичних*, розрахункових формул і структур інформаційних масивів. У структурі Б.-с. п. здебільшого є основна й допоміжна частини. До основної частини належать усі функціональні блоки алгоритму розв'язування задачі й зв'язки між ними, до допоміжної належать усі пояснювальні блоки і зв'язки їх з основними функціональними блоками.



1. Позначення блоків у блок-схемі програми.
2. Приклад блок-схеми програми.

Існують міжнародний і галузеві стандарти, що визначають форму блоків (символів) і ліній на Б.-с. п. (мал. 1). У Б.-с. п. використовують і різні графічні символи, щоб позначати зовн. і внутр. *носії запису інформації* (перфокарти, перфострічки, папір, *стрічки магнітні*, *барабани магнітні*, *диски магнітні*, оперативна пам'ять), наводять коментарі, зазначають фізичну заміну машинних носіїв інформації тощо. Залежно від класу розв'язуваних задач набір блоків може дещо змінюватися.

П р и к л а д. Нехай є масив відомостей щодо заводу М1, який зберігається на перфокартах; потрібно вибрати з нього *записи*, що стосуються ливарного цеху, й записати їх до масиву М2. Б.-с. п. для даного випадку наведено на мал. 2. Перші два блоки забезпечують можливість звертання до масивів М1 і М2. У блоці «читати запис із масиву М1» здійснюється введення чергової перфокарти з масиву М1. Два наступні блоки перевіряють, чи скінчився масив М1, і, якщо ні, то чи стосується запис ливарного цеху. Якщо стосується, то такий запис пересилається в масив М2. Потім керування передається на блок читання чергового запису з масиву М1. Якщо масив М1 вичерпано, то закриваються масиви М1 і М2, і робота програми завершується.

Е. Н. Хотяшов.

БЛОКУВА́ННЯ ОБСЛУГО́ВУВАННЯ — явище тимчасового переривання процесу обслуговування або сповільнення його в системах масового обслуговування. В реальних системах Б. о. відповідають дії різних факторів, що утруднюють нормальне функціонування системи або окремих її частин. Такими факторами бувають несправності устаткування, відсутність матеріалів, робочої сили чи коштів, несприятливі метеорологічні умови, діяння гальмування в біологічних системах тощо. Див. також *Масового обслуговування система.*

БО́ЛЬЦА ЗАДА́ЧА — одна з найзагальніших варіаційних задач з добре розвинутою теорією необхідних і достатніх умов екстремуму. Формулюється так: серед усіх гладких кривих $y(x)$, що задовольняють диференціальні рівняння зв'язку

$$\Phi_i(x, y, y') = 0, \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \qquad (1)$$

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, m}, \; m < n$$

та граничні умови

$$\varphi_j(x_1, y(x_1)) = 0, \quad j = \overline{1, p} \quad p \leqslant n + 1$$

$$x_2 = a, \; y(x_2) = b, \quad b = (b_1, \ldots, b_n), \qquad (2)$$

знайти таку, яка надає мінімуму функціоналові

$$Y(y(x)) = g(x_1, y(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx. \qquad (3)$$

Щоб така задача мала смисл, потрібно, щоб функції Φ_i, φ_j, g, f задовольняли певні вимоги, зокрема, щоб система (1) допускала представлення у вигляді $y_i' = F_i(x, y)$, де F_i — диференційовні ф-ції своїх аргументів, ф-ції φ_j, (x, y), $j = \overline{1, p}$, щоб були незалежні тощо. Гладкі або кусково-гладкі ф-ції $y(x)$, що задовольняють рівняння (1) і (2), наз. д о п у с т и м и м и.

У наведеній формі Б. з. є задачею з рухомим лівим і фіксованим правим кінцями. Можна розглянути Б. з. з обома рухомими кінцями. Окремими випадками Б. з. є *Майєра задача* (коли у функціоналі Y $f \equiv 0$) і *Лагранжа задача* (коли $g \equiv 0$).

Б. з., рівняння (1) — (3), можна звести до якоїсь із двох останніх задач. Напр., якщо розглядати криві $(y_1(x), \ldots, y_n(x), y_{n+1}(x))$, які підлягають, крім умов рівнянь (1) і (2), додатковим умовам $y'_{n+1} = f(x, y, y')$,

$y_{n+1}(x_1) = 0$ і записати Y у вигляді $Y = g(x_1, y(x_1)) + y_{n+1}(x_2)$, то в такому вигляді Б. з. еквівалентна задачі Майєра. Важливу роль у теорії Б. з. відіграє правило множників: для кожної допустимої кривої C, яка надає мінімуму Y, існують ф-ції $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, обмежені й неперервні на (x_1, x_2) (крім значень x, які відповідають кутовим точкам C) і константа μ_0, такі, що ф-ція $F(x, y, y', \lambda) = \mu_0 f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\ \Phi_i$ вздовж C задовольняє майже всюди рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i}\, dx + C_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

де C_i — сталі, а для рухомого (лівого) кінця кривої C виконується *умова трансверсальності*:

$$\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i'}\, dy_i + + \mu_0 dg \Big|_{x=x_1} = 0. \qquad (5)$$

Висновки, що випливають з правила множників:

1. У кожній точці допустимої кривої C, яка задовольняє рівняння (4), крім кутових точок, справджуються рівності (в припущенні, що відповідні похідні існують)

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = \overline{1, n} - \qquad (6)$$

рівняння Ейлера.

2. У кожній кутовій точці кривої C, яка задовольняє рівняння (4), ліва й права границі кожної з ф-цій $\frac{\partial F}{\partial y_i'}$, $i = \overline{1, n}$ збігаються — умови Вейєрштрасса — Ердмана. Допустима крива, для якої справджуються рівняння Ейлера, наз. **екстремальною**. Крім рівнянь Ейлера, що необхідно виконуються для будь-якої кривої, яка дає мінімум I, для Б. з. відомі необхідні умови Вейєрштрасса, Клебша і т. з. 4-а необхідна умова мінімуму. Відомі також умови, достатні для того, щоб допустима крива $y(x)$ давала мінімум Y. Кожну з цих умов можна одержати, якщо на ф-ції f, Φ_i, φ_j і т. д. накладати додаткові вимоги.

Теорію Б. з. використовують при розв'язуванні різних задач оптимізації, зокрема тих, що пов'язані з вивченням рухомих об'єктів.

Літ. див. до ст. *Варіаційне числення.*

Ю. М. Данилін.

БУБНО́ВА — ГАЛЬО́РКІНА МЕ́ТОД — один з *чисельних методів* розв'язування операторних рівнянь. Див. *Операторних рівнянь способи розв'язування.*

БУ́ЛЕВА А́ЛГЕБРА — *алгебрична структура* з двома бінарними операціями $x \cup y$, $x \cap y$, однією унарною операцією x' і двома виділеними елементами «0» та «1», для якої справджуються рівності (аксіоми Б. а.):

$$x \cup y = y \cup x;$$
$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z;$$
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$$
$$x \cup 0 = x;$$
$$x \cup x' = 1;$$
$$x \cap y = y \cap x;$$
$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z;$$
$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z);$$
$$x \cap 1 = x;$$
$$x \cap x' = 0.$$

Названо її за прізвищем англ. математика Дж. Буля (1815—64), який ввів її, вивчаючи закони логіки (числення класів, *числення висловлювань* і числення відношень). Використовують Б. а. в *алгебрі множин, алгебрі логіки, імовірностей теорії, релейно-контактних схем теорії* тощо.

Літ.: Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М., 1969 [бібліогр. с. 308—313]; Сикорский Р. Булевы алгебры. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 340—369].

Б. Г. Парахін.

БУ́ЛЕВІ ФУ́НКЦІЇ — функції, що так само, як і їхні аргументи, набувають значень в області з двох елементів. За ці елементи в *логіці математичній* беруть значення «істинно» і «хибно», а в *автоматів теорії* — «0» і «1». Б. ф. названо за прізвищем англ. математика Дж. Буля (1815—64), праці якого започаткували розвиток *алгебри логіки*. Б. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ повністю визначається заданням її значень на всіх наборах значень її аргументів, число яких дорівнює 2^n. Ці значення можна задавати, напр., у вигляді таблиці або вектора, у якого на i-му місці ($i = 1, 2, \ldots, 2^n$) стоїть значення $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, де $x_1^0 \ldots, x_n^0$ — запис числа $i - 1$ двійковою *системою числення*. Б. ф. можна задавати й аналітично, як вирази, що являють собою суперпозиції певних Б. ф. (прийнятих за первісні) і змінних (зокрема, у вигляді формул алгебри логіки, в т. ч. диз'юнктивних і кон'юнктивних нормальних форм). Амер. математик Е. Пост (1897—1954) знайшов необхідні й достатні умови повноти будь-якої системи S Б. ф., тобто умови виразності будь-якої Б. ф. за допомогою суперпозиції Б. ф. із S та змінних. Е. Пост побудував і всі замкнені (відносно суперпозиції) класи Б. ф. і знайшов їхні базиси, тобто в певному розумінні мінім. підкласи таких Б. ф., через які виражаються всі Б. ф. цього класу.

Б. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ задають і графічно — на n-вимірному одиничному гіперкубі, кожна вершина якого з координатами $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ відмічається значенням $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Множина Б. ф. n змінних з визначеними на ній операціями *заперечення, кон'юнкції* й *диз'юнкції* (див. *Логічні операції*) становить вільну *булеву алгебру* з n твірними. Інша булева алгебра з n твірними є гомоморфним образом алгебри Б. ф. з n твірними й тому є ізоморфною алгебрі класів еквівалентності, що їх задають в алгебрі Б. ф. якимось відношенням конгруентності.

Б. ф. застосовують при побудові контактних і релейно-контактних схем, схем з пороговим елементів, схем з т. з. функціональних елементів у якомусь базисі (напр., схем з елементів, що реалізують функції $\&, \vee, \neg$) тощо. Б. ф. реалізують схемно, виходячи з того, що їх можна зобразити як суперпозицію Б. ф. з якоїсь фіксованої функціонально повної системи Б. ф. Від складності зображення залежить складність схеми. Це приводить до важливої проблеми — мінімізації булевих функцій, тобто знаходження найпростіших зображень їх. Дві Б. ф. n змінних наз. функціями одного типу, якщо одну з них можна одержати з другої, переставивши певним чином аргументи й замінивши деякі аргументи їхніми запереченнями. Б. ф. одного типу реалізуються фізично однаковими схемами. Число Б. ф. n змінних дорівнює 2^{2^n}; воно дуже швидко зростає з зростанням n (напр., $2^{2^3} = 256$; $2^{2^4} = 65536$). Правда, з погляду схемної реалізації можна обмежитися розглядом тільки типових Б. ф. Є всього 402 різні типи Б. ф. чотирьох змінних. Але вже при $n = 6$ число типів вимірюється квадрильйонами. Майже всі Б. ф. допускають лише дуже складну схемну реалізацію: кожна Б. ф. n змінних потребує для своєї схемної реалізації асимптотично не менше як $\frac{2^n}{n}$ контактів (див. *Шеннона функція*). Тому досліджують і класи Б. ф., істотно вужчі, ніж множина всіх Б. ф.: класи Б. ф. лінійних, монотонних, самодвоїстих, симетричних, інваріантних відносно деяких інверсій аргументів Б.ф., які мають значення «1» на невеликій множині наборів тощо. В теорії автоматів і тех. застосуваннях розглядають ще й часткові Б. ф., тобто ф-ції, не визначені для деяких значень їхніх аргументів.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [бібліогр. с. 113—115]. *В. Ф. Костирко.*

БУХГА́ЛТЕРСЬКОГО О́БЛІКУ АВТОМАТИЗА́ЦІЯ — використання в сфері бухгалтерського обліку технічних засобів збирання, передавання та обробки інформації для максимального підвищення оперативності обліку й вірогідності одержуваних даних та для зниження трудомісткості виконуваних операцій, щоб можна було якнайефективніше використовувати облікову інформацію в плануванні й управлінні господарством. Бухгалтерський облік тепер удосконалюють в основному в таких напрямах: підвищують його аналітичність, забезпечують правильне економічне групування затрат для визначення ефективності їх і здійснюють широку механізацію обліково-обчисл. робіт, щоб підвищити продуктивність праці рахівників. Якість обліку, його чіткість і своєчасність багато в чому залежать від застосовуваних форм рахівництва, від того, наскільки ці форми сприяють раціоналізації робіт і автоматизації процесів обробки даних. Внаслідок прискорення темпів розвитку г-в і ускладнення внутр. і зовн. зв'язків підприємств почав відставати облік, особливо техніка обробки інформації.

В обліковому процесі розрізняють дві стадії. На 1-й стадії (первинний облік) вимірюють і реєструють облікові дані; на 2-й (оперативний і бухгалтерський облік) — ці дані систематизують і узагальнюють в облікових реєстрах. Для первинного обліку застосовують офіцировану і мірну тару, звичайні й лічильні ваги, кількісні давачі, лічильники й різні вимірювальні прилади, які фіксують задані режими або відхилення від них. Для прискорення процесу реєстрації облікових даних і механізації процесів підготовки первинних документів використовують бланки постійних реквізитів і шифрів, виготовлені друкарським способом. Документи заповнюють за допомогою розмножувальних апаратів і номенклатурно-адресувальних машин. Для механізації записування даних застосовують друкарські машини, телеграфні апарати, лічильно-клавішні машини (фактурні, бухгалтерські), реєстратори інформації та лічильно-перфораційні машини. Застосування ЕОМ для Б. о. а. дає змогу розв'язувати двоє осн. питань: по-перше, аналізувати осн. характеристики роботи підприємств пром-сті, транспорту, с. г. й культурно-побутового обслуговування і вибирати найраціональніші форми й способи обліку, планування та організації робіт; по-друге, автоматизувати процеси одержання й обробляння інформації, і в результаті цього підвищити оперативність і точність керування. Розв'язання цих питань дає змогу підвищувати заг. ефективність суспільної праці й раціональніше використовувати госп. ресурси. За допомогою обчисл. техніки можна краще організувати маш. обробку облікової інформації та вводити рахунки як реєстр для ведення бухгалтерського обліку на ЕЦОМ. Обробляючи первинну бухгалтерську документацію на ЕЦОМ, керуються ось чим: метод обробки документів повинен сприяти функціонуванню системи автомат. ведення обліку (незалежно від форми представлення даних у документах); крім того, треба, щоб документ обробляли тільки раз, щоб синтез його змісту був повним, а формальний запис у реквізитах — придатним для безпосереднього введення в машину без додаткових перетворень. Наявність у пам'яті ЕЦОМ *масивів*, що містять повну інформацію про стан госп. діяльності підприємств та її динаміку, дає змогу одержувати потрібні дані бухгалтерського обліку і звітності за встановленою формою.

Досвід застосування засобів обчисл. техніки в економіці показує, що найбільшого ефекту досягають тоді, коли задачі обліку, планування й керування розв'язують у єдиному комплексі, починаючи від первинних даних і закінчуючи побудовою синтетичних показників, необхідних для звітності й керування г-вом. Розв'язуючи задачі обліку за допомогою *автоматизованих систем управління підприємством*, можна не тільки комплексно використовувати інформацію, а й набагато спростити підготовку початкових даних (а вона буває трудомісткішою, ніж коли ті самі задачі розв'язують старими способами). При централізованому збиранні й обробці інформації, які характерні для автоматизованої системи управління, певну частину облікової інформації можна зібрати і ввести в ЕЦОМ для обробки без безпосередньої участі людини, тобто виникає можливість автоматично збирати частину облікової інформації, автоматично класифікувати її й контирувати (заносити до певних статей). Автомат. контирування значно зменшує кількість ручних операцій щодо обробки документації бухгалтерського обліку, зменшує кількість помилок, які неминуче трапляються, коли облік провадять ручним способом.

У зв'язку з централізацією обліку й застосуванням обчисл. техніки змінюється організація обробки даних. Машинолічильні бюро й машинолічильні станції поступаються місцем перед інформаційно-обчисл. центрами, оснащеними ЕЦОМ, тех. можливості яких дають змогу організувати обслуговування кількох підприємств. У процесі вдосконалювання тех. засобів, що забезпечують механізоване й автоматизоване збирання й передавання облікових даних та обробку їх в *обчислювальних системах*, нар.-госп. облік перетворюється на єдину, централізовану інформаційну систему, яка забезпечує органи планування та управління оперативною й вірогідною інформацією.

Останнім часом інтенсивно розвивається виробн. лічильно-обчисл. техніки, застосування якої істотно впливає на організацію обліку. Багато різноманітних лічильно-обчисл. машин — від найпростіших клавішних до ЕОМ — застосовують майже на всіх пром. підприємствах і держ. установах. Характерним є те, що лічильно-обчисл. техніка починає перетворюватися з допоміжного засобу обліку на фактор, що визначає організацію бухгалтерського обліку. Домінуючого значення набуває оперативність видавання даних бухгалтерського обліку, що їх керівники підприємств використовують для прийняття певних рішень.

Літ.: Королев М. А. Вопросы применения электронных вычислительных машин в планировании и учете. М., 1960; Исаков В. К вопросу о формах организации механизированного учета и вычислительных работ. В кн.: Механизация учета, отчетности и вычислительных работ. М., 1961; Додонов А. А. Проблемы бухгалтерского учета в промышленности СССР. М., 1964.

В. Б. Єфетов.

В

ВАГОВА́ ФУ́НКЦІЯ — невід'ємна функція, яку використовують, визначаючи метрику у функціональному просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі). Багато задач приводять до вивчення простору дійсних ф-цій, заданих на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$ зі скалярним добутком $(f, g)_p = \int_a^b f(x) g(x) \times$ $\times p(x)\, dx$. Ф-ції $f(x)$ і $g(x)$ наз. **ортогональними з вагою** $p(x)$, якщо $(f, g)_p = 0$. Розв'язування методом Фур'є *крайових задач* рівнянь матем. фізики приводить до знаходження тих значень параметра λ, яким відповідають ненульові розв'язки рівняння $A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x) y = $ $= \lambda y$, які задовольняють умови $y(a) =$ $= y(b) = 0$. Встановлено, що власні ф-ції цієї задачі, які відповідають різним власним значенням, ортогональні з вагою $p(x) =$ $= e^{\int_a^x \frac{B(t) - A'(t)}{A(t)} dt}$. Прикладами ортогональних з вагою ф-цій є різні класи спец. ф-цій (див. *Імпульсна перехідна функція*).

І. В. Скрипник.

ВАРІАЦІ́ЙНЕ ЧИ́СЛЕННЯ — розділ математики, в якому вивчають методи відшукування екстремальних значень функціоналу. Поняття функціоналу, широко застосовуване у В. ч., є узагальненням поняття ф-ції: функціонал — це ф-ція, аргумент якої також є функція. Задавання функціоналу $I(y(x))$ рівносильне задаванню закону, за яким кожній ф-ції $y(x)$ з деякого класу відповідає певне число. Фіз. сутність функціоналів може бути найрізноманітніша — довжина, час тощо. Оскільки ф-цію $y(x)$ можна визначити, задавши її значення в нескінченному числі точок, то функціонал можна розглядати як ф-цію нескінченного числа змінних, а В. ч.— як відповідне узагальнення розділу дифер. числення, що займається відшукуванням екстремальних значень ф-цій n змінних. Важливе місце у В. ч. посідає поняття варіації (диференціала) δI функціоналу — гол. лінійної частини приросту функціоналу при переході від ф-ції $y(x)$ до близької ф-ції $y(x) + \delta y(x)$. Значення $\delta I = \frac{d}{dt} I(y + t\delta y)\Big|_{t=0}$, де t — числовий параметр. Щоб з-поміж усіх розглядуваних ф-цій виділити ті, на яких функціонал набуває екстрем. значення, треба знати умови (співвідношення), що характеризують шукані функції. Визначення необхідних умов *екстремуму* — одна з осн. задач В. ч. Необхідну умову екстремуму формулюють так: щоб функціонал $I(y)$ досягав екстремуму при $y = y_0$, треба, щоб варіація $\delta I = 0$ при $y = y_0$.

Розгляньмо конкретні задачі В. ч. Найпростіша задача В. ч.: серед диференційовних ф-цій $y(x)$, що задовольняють граничні умови $y(x_1) = a$, $y(x_2) = b$, треба знайти функцію, на якій функціонал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \qquad (1)$$

набуває екстрем. значення. Як у цій, так і в інших задачах В. ч., для того, щоб розв'язок існував, треба, щоб ф-ція $f(x, y, y')$ задовольняла певні вимоги гладкості. Умова $\delta I = 0$ для функціоналу (1) приводить до рівняння (Ейлера)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \qquad (2)$$

Шуканими функціями можуть бути лише розв'язки цього рівняння. Значення сталих, що входять до загального інтеграла цього рівняння, визначають за допомогою граничних умов. Крім граничних умов, на функції y часто накладаються додаткові обмеження, напр., екстремум функціоналу (1) відшукується лише на функціях, на яких функціонал $L(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$ набуває заданого значення C. Це задача на умовний екстремум. У таких задачах обмеження можуть мати й характер рівнянь (у т. ч. й диференціальних), а функціонал, що його екстремум відшукують, може мати складнішу структуру (див. *Лагранжа задача*, *Майєра задача*, *Больца задача*). Для побудови необхідних умов екстремуму ці задачі за допомогою *Лагранжа правила множників* зводять до задач без обмежень. В. ч. розглядає і *задачі з рухомими кінцями*, коли екстремум функціоналу (1) треба відшукати з-поміж функцій, кінці яких не закріплені й можуть переміщатися по заданих кривих. Оскільки ця задача відрізняється від найпростішої лише умовами на кінцях, то необхідна умова екстремуму — рівняння (2) — для неї зберігається, але на заданих кривих треба додатково визначити положення кінців ф-ції, на якій досягається екстремум функціоналу. Для цього користуються *умовами трансверсальності*. Крім необхідних умов екстремуму, побудованих із залученням першої варіації функціоналу, можна побудувати необхідні умови, що використовують другу варіацію функціоналу (див. *Лежандра — Клебша умова*).

Безпосереднє використання необхідних умов зводить задачу В. ч. до розв'язування дифер. рівнянь, а це пов'язане зі значними труднощами. Тому для одержання ф-цій, на яких досягається екстремум функціоналу, у В. ч. використовують і прямі методи. Суть цих методів полягає в побудові яким-небудь способом такої послідовності ф-цій y_k, що $\lim_{k\to\infty} I(y_k)=\mu$, де μ — екстрем. значення функціоналу. Прямі методи дають змогу одержати й наближений розв'язок задачі.

Перші задачі В. ч. вивчали І. Ньютон і брати Я. та І. Бернуллі наприкінці 17 ст. Як самостійна матем. дисципліна В. ч. оформилось у 18 ст. в працях Л. Ейлера та Ж.-Л. Лагранжа. В середині 20 ст. методи В. ч. почали плідно використовувати у багатьох розділах математики й механіки. Останнім часом створено нові розділи В. ч.— теорію оптимальних процесів (див. *Понтрягіна принцип максимуму*) й динамічне програмування (див. *Беллмана принцип оптимальності*), створюється й заг. теорія екстрем. задач, яка дає змогу встановити зв'язок між цими розділами.

Літ.: Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., 1950; Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., 1961; Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. Пер. с англ. М., 1950 [бібліогр. с. 334—343]. *Ю. М. Данилін.*

ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД — упорядкована в неспадному порядку сукупність $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ членів вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності з функцією розподілу $F(x)$, тобто x_1^* є найменша з величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_2^* є найменша з величин послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n$, без x_1^* і т. д. *Випадкові величини* $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ називають порядковими статистиками, або членами, В. р., а величину $x_n^* - x_1^*$ — вибірковим розмахом. Відомі розподіли порядкових статистик і граничні розподіли при $n \to \infty$. В. р.— одно з гол. понять математичної статистики, оскільки в ньому міститься вся інформація, що є у вибірці $x_1, x_2, \ldots, x_n$, про значення невідомих параметрів. *А. Я. Дороговцев.*

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ — методи наближеного розв'язування задач прикладної математики, які будуються на зведенні початкової задачі до певної варіаційної задачі, тобто до задачі визначення мінімуму певного функціоналу. Напр., розв'язування *крайової задачі* для звичайного диф. рівняння (див. *Рівнянь класифікація*)

$$Ly = f \tag{1}$$

можна замінити задачею відшукування ф-ції $y(x)$, яка мінімізує такий функціонал, для якого (1) є рівнянням Ейлера (див. *Варіаційне числення*). Це не єдиний засіб одержувати функціонали, які набувають мінім. значення в разі підстановки в них розв'язків крайових задач. Можна, напр., розв'язуючи крайову задачу для рівняння (1), розглядати функціонал

$$I(y) = \int_a^b [Ly - f]^2\,dx \tag{2}$$

у класі всіх ф-цій, які задовольняють граничні умови й мають достатню кількість неперервних похідних ($[a, b]$ — відрізок, на якому шукають розв'язок). Можна замінити (2) й загальнішим функціоналом

$$I(y) = \int_a^b p(x)[Ly - f]^2\,dx, \tag{3}$$

де $p(x)$ — деяка додатна *вагова функція*. Функціонали (2) і (3) набувають найменшого значення, що дорівнює 0, в разі підстановки в них розв'язку крайової задачі. Такий спосіб одержання функціоналів наз. *найменших квадратів методом*. Є й інші види функціоналів, мінімуму яких досягають на розв'язку крайової задачі.

У заг. випадку, якщо операторне рівняння

$$Ay = f, \tag{4}$$

(тут A — адитивний симетричний *оператор*, який визначено на множині H_A, скрізь щільній у гільбертовому просторі H (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі) і $(Ay, y) \geqslant 0$ має розв'язок, то на цьому розв'язку функціонал

$$I(y) = (Ay, y) - (y, f) - (f, y) \tag{5}$$

набуває найменшого значення в H_A. Навпаки, якщо в H_A існує елемент y_0, що мінімізує функціонал (5), то y_0 є розв'язком рівняння (4). Функціонали (2) і (3) можна розглядати як окремі випадки функціоналу

$$I(y) = \| Ay - f \|^2.$$

Для відшукування найменшого значення функціоналу застосовують багато обчисл. методів (див. *Операторних рівнянь способи розв'язування*). *А. І. Березовський.*

ВВЕДЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРИСТРІЙ — див. *Пристрої введення та виведення інформації.*

ВЕЙЧА ДІАГРАМА — те саме, що й *Карнау карта.*

ВЕКТОР УЗАГАЛЬНЕНОГО ГРАДІЄНТА опуклої функції n змінних $f(x)$ у точці x^* — вектор f_{x^*}, для якого при будь-якому $x \in E^n$ справджується нерівність

$$f(x) - f(x^*) \geqslant (f_{x^*}, x - x^*),$$

де E^n — n-вимірний евклідів простір. Якщо в точці x^* ф-ція $f(x)$ неперервно диференційовна, то вектор f_{x^*} визначено однозначно, і він збігається з *градієнтом* ф-ції $f(x)$. Якщо ж у точці x^* $f(x)$ недифе-

ренційовна, вектор f_{x*} визначається неоднозначно. За допомогою вектора f_{x*} можна побудувати ітераційний процес, який дає змогу відшукати мінім. значення опуклої недиференційовної ф-ції. Аналогічно визначається узагальнений градієнт і в нескінченновимірних просторах.

Б. М. Пшеничний.

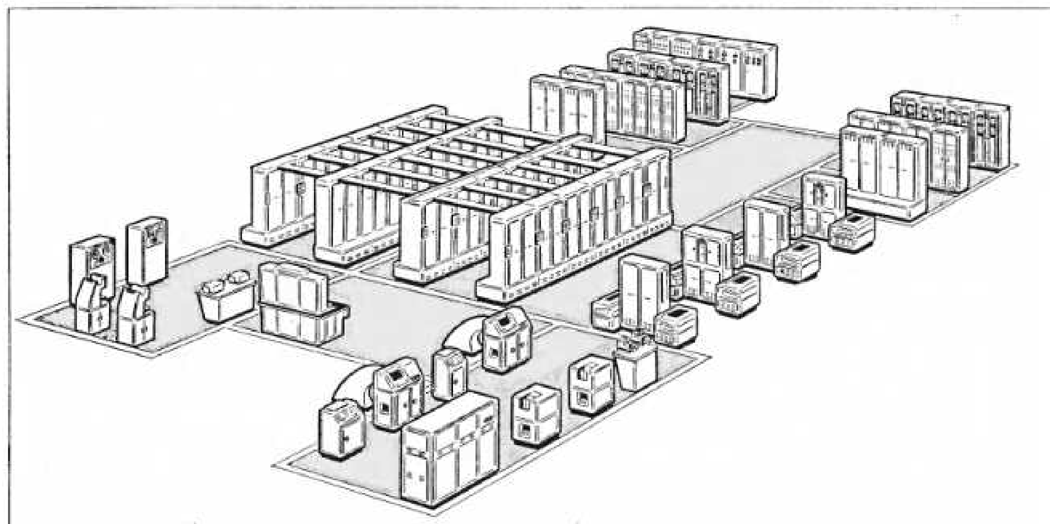
ВЕЛИ́КА ІНТЕГРА́ЛЬНА СХЕ́МА (ВІС) — *інтегральна схема*, що містить тисячі компонентів і виконує функції цілого вузла електронної апаратури. На ВІСах будують обчисл. машини 4-го покоління (див. *Електронна обчислювальна машина*).

ВЕЛИ́КИХ ЧИ́СЕЛ ЗАКО́Н — загальний принцип, за яким спільне діяння багатьох випадкових факторів приводить, за деяких досить загальних умов, до результату, що майже не залежить від випадку. Нехай ξ_1, ξ_2, ...— послідовність *випадкових величин*, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ — сума n перших з них, $A_n = MS_n = M\xi_1 + ... + M\xi_n$ — *математичне сподівання* S_n. Кажуть, що наведена послідовність підпорядковується В. ч. з., якщо при будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ знайдеться таке N, що для всіх $n \geqslant N$ з *імовірністю*, не меншою як $1 - \delta$, середнє арифметичне S_n/n відхиляється від MS_n/n не більше як на ε. Якщо величини ξ_1, ξ_2, ... взаємно незалежні й мають одну й ту саму ф-цію розподілу, то для застосовності В. ч. з. досить, щоб ξ_k мали скінченне матем. сподівання (очевидно, одне й те саме для всіх $\xi_k : M\xi_k = a$). У цьому випадку $MS_n/n = a$, і В. ч. з. стверджує, що при великих n середнє арифметичне S_n/n практично збігається з $a = M\xi_k$. У заг. випадку для застосовності В. ч. з. досить, щоб $B_n^2/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$ (тут $B_n^2 = DS_n$ — *дисперсія* S_n). Див. також *Імовірностей теорія*.

М. П. Слободенюк.

ВЕЛИ́КІ СИСТЕ́МИ КЕРУВА́ННЯ — див. *Складні системи керування*.

«ВЕСНА́» — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення. Електронні схеми машини побудовано на напівпровідникових діодах і тріодах і конструктивно оформлено у вигляді стояків, у кожному з яких є до 600 замінних комірок (див. мал.). Центральний обчислювальний пристрій — процесор (ЦОП) «В.» працює зі швидкістю близько 250 тис. команд за 1 *сек*. Оброблювана інформація кодується 48-розрядними двійковими кодами. ЦОП має широкий набір операцій: над числами з плаваючою комою; операцій, що забезпечують прискорене виконання розрахунків з підвищеною точністю (з мантисою подвійної довжини); над числами з фіксованою комою; логічних перетворень кодів і різних варіантів операцій керування. *Оперативний запам'ятовувальний пристрій* (ОЗП) машини поділяється на малий ОЗП, побудований на 32 швидкодіючих тригерних регістрах, основний ОЗП — на феритових осердях — складається з 2-х блоків ємністю по 1024 числа з циклом близько 1 *мксек*, і великий ОЗП з 4-х блоків, що працюють одночасно, ємністю 16 тисяч чисел кожний і з циклом звернення 10 *мксек*. Послідовні адреси великого ОЗП чергуються по різних блоках, завдяки чому досягається скорочення середнього циклу звернення до великого ОЗП. Код команди ЦОП містить дві 6-розрядні адреси малого ОЗП (А1, А2), одну 16-розрядну «довгу» адресу ОЗП (А3), за якою можна звернутися до будь-якої частини



Електронна цифрова обчислювальна машина «Весна».

ОЗП, і 6-розрядну адресу модифікатора «довгої» адреси (В), причому для зберігання модифікаторів використовується малий ОЗП. У коді команди є покажчик, який дає змогу використовувати «довгу» адресу як адресу вихідного числа і як адресу результату операції, що виконується за цією командою. Коли дані, що найчастіше використовуються в обробці, зосереджуються в малому й основному ОЗП, досягається найвища швидкість обчислень. Для підвищення швидкості роботи в ЦОП, як правило, суміщується обробка до 4-х команд оброблюваної програми, що йдуть підряд: одночасно з вибиранням з ОЗП та модифікацією адреси якоїсь k-ї команди провадиться й вибирання чисел за $(k-1)$-ю командою, дія над числами за $(k-2)$-ю командою і відсилання результату за $(k-3)$-ю командою. ЦОП має систему переривань, яка дає змогу здійснювати багатопрограмну роботу.

В комплекті *запам'ятовувальних пристроїв зовнішніх* машини передбачено до 8 магнітних барабанів ємністю по 65 тис. чисел кожний і до 32-х нагромаджувачів на магнітних стрічках ємністю 0,5—1 млн. чисел кожний. Передбачено введення та виведення даних за допомогою перфокарт і перфострічок, виведення на *алфавітно-цифровий друкувальний пристрій* і телетайп. Обмін даними між ЦОП і зовнішніми пристроями провадиться через великий ОЗП. Для керування цим обміном є програмно керований координаційний обчислювальний пристрій (КОП) з простим набором операцій та своєю системою переривання. КОП, працюючи в багатопрограмному режимі, виконує програми керування обміном даними між великими ОЗП і конкретними зовнішніми пристроями. КОП працює звичайно в режимі частих взаємних переривань програм з урахуванням деякого заданого пріоритету в обробці програм різних пристроїв. У машині є апаратура захисту ділянок пам'яті, що забезпечує при багатопрограмній роботі автоматичне усунення взаємних перешкод під час звертання різних програм до оперативної пам'яті. Організується весь процес обробки даних стандартною програмою, яка завантажує машину потоком інформації з кількох задач, керує суміщеним у часі процесом обчислювань у ЦОП та обміном даними кількох *зовнішніх пристроїв* з великим ОЗП (за участю КОП) і забезпечує функції контролю ходу обчислювань і оперативного керування. Наявність у машині апаратури для багатопрограмної роботи й суміщеного введення — виведення даних дає змогу вести в процесі обчислювань автоматич. обмін інформацією з кількома абонентами по лініях телеграфно-телефонного зв'язку. «В.» широко застосовують для розв'язування науково-тех. та інформаційно-логічних задач (напр., у Гідрометеорологічному центрі СРСР).

В. К. Левін.

ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ — функція, що характеризує ступінь зв'язку між значеннями двох випадкових процесів $x(t)$ і $y(t)$ в моменти часу t_1 і t_2. Якщо $x(t)$ й $y(t)$ — випадкові процеси з комплексними значеннями, їхня В. к. ф. визначається формулою

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\mathring{x}(t_1)\overline{\mathring{y}(t_2)}]$$

(тут риска вгорі означає операцію комплексного спряження), де $\mathring{x}(t_1) = x(t_1) - m_x(t_1)$, $\mathring{y}(t_2) = y(t_2) - m_y(t_2)$, M — символ операцій обчислювання матем. сподівання, $m_x(t)$ і $m_y(t)$ — матем. сподівання процесів $x(t)$ і $y(t)$. В. к. ф. дійсних випадкових процесів описується виразом:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\mathring{x}(t_1)\,\mathring{y}(t_2)].$$

Якщо відома сумісна щільність імовірності $p[\mathring{x}(t_1), \mathring{y}(t_2)]$, випадкових величин $\mathring{x}(t_1)$ та $\mathring{y}(t_2)$, які відповідають значенням випадкових процесів $\mathring{x}(t)$ й $\mathring{y}(t)$ в моменти часу t_1 і t_2, то В. к. ф. цих процесів можна обчислити як:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathring{x}(t_1)\,\mathring{y}(t_2) \times$$
$$\times\, p[\mathring{x}(t_1), \mathring{y}(t_2)]\, dx(t_1)\, dy(t_2).$$

Якщо В. к. ф. випадкових процесів $x(t)$ й $y(t)$ не дорівнює тотожно нулеві, то ці процеси наз. к о р е л ь о в а н и м и, в противному разі — н е к о р е л ь о в а н и м и.

В. к. ф. двох стаціонарних і стаціонарно пов'язаних випадкових процесів є ф-цією різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$. Якщо при цьому двовимірний процес $[x(t), y(t)]$ ергодичний (див. *Ергодична теорія*), В. к. ф. можна обчислити усередненням за часом однієї реалізації цих двох процесів, тобто

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \mathring{x}(t)\,\mathring{y}(t+\tau)\,dt.$$

Для практичних обчислень використовують оцінку В. к. ф. за реалізацією скінченної тривалості T

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \mathring{x}(t)\,\mathring{y}(t+\tau)\,dt.$$

Часто буває зручно використати т. з. нормовану В. к. ф., тобто віднесену до середнього геометричного дисперсій розглядуваних процесів

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x D_y}},$$

де D_x і D_y — дисперсії випадкових процесів $x(t)$ й $y(t)$, які дорівнюють значенням їхніх *автокореляційних функцій* при $\tau = 0$.

В. к. ф. широко використовують у теорії автомат. керування: в статистичному аналізі систем автомат. керування, для визначення динамічних характеристик керованих об'єктів, автомат. розпізнавання образів, вимірювання параметрів руху, в тех. діагностиці тощо. В. к. ф. обчислюють за допомогою аналогових або цифрових спеціалізованих обчисл. пристроїв — *корелляторів* або за допомогою ЕЦОМ. Див. також *Кореляційна теорія випадкових процесів*, *Кореляція* в теорії ймовірностей.

Літ.: Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 [бібліогр. с. 873—878]; Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. М., 1968. *С. Ф. Козубовський.*

ВЗАЄМОДІЯ ЛЮДИНИ З ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЮ МАШИНОЮ — процес обміну повідомленнями між людиною й обчислювальною машиною, зумовлений необхідністю послідовного й (або) паралельного виконування людиною й машиною дій над сумісним розв'язуванням якоїсь задачі. Досі значну частину процесу розв'язування задачі — найчастіше розробку методу, або *алгоритму* розв'язування,— людина виконувала, не обмінюючись реєстрованими повідомленнями з обчислювальною машиною (ОМ). Проте навіть у цьому разі умовно можна говорити про «неявну» форму взаємодії: людина виконує уявний обмін повідомленнями з моделлю ОМ, відображеною в її свідомості. За явної взаємодії процес розв'язування задачі включає в себе цикли обміну реєстрованими повідомленнями між людиною й реальною ОМ.

Виділяють такі категорії людей, які вступають у взаємодію з ЕОМ: замовники, або постановники задачі, які формулюють її умову, беруть участь в уточненні її та визначенні форми представлення первісних даних і потрібних результатів; програмісти різної спеціалізації, які розробляють план і алгоритм розв'язування задачі, та алгоритмісти, які описують план розв'язування задачі вхідною *мовою програмування*; оператори, які працюють на пристроях введення — виведення й на центр або індивідуальних пультах та ін. За відношенням до замовника (постановника задачі) розрізняють прямий зв'язок людини з ЕОМ, коли між ними немає посередників (операторів, програмістів), і непрямий зв'язок, коли такі посередники є.

Виділяють такі осн. види систем «людина — ЕОМ» з визначеними особливостями матем. експлуатації їх: «замовник—програміст — оператор — машина», «замовник — оператор — машина — консультант», «замовник — машина» та ін. Режим прямого зв'язку для постановника задачі реалізується завдяки тому, що з'явились розвинені системи *автоматизації програмування* та *операційні системи*, спростився зв'язок з машиною внаслідок введення індивідуальних зручних пультів (типу друкарських машинок, пультів на базі електроннопроменевої трубки; див. *Екранний пульт*) і, крім того, внаслідок передачі замовникові деяких поки що не автоматизованих ф-цій програміста й оператора. Такий режим реалізовано або на однопрограмних ОМ (типу «*МИР*» і «*Наїрі*»), як правило, з невисокою швидкодією, або на мультипрограмних швидкодіючих машинах у режимі пакетної обробки даних і в *режимі розподілу часу*.

На різних етапах розв'язування задачі В. л. з о. м. має різне функціональне навантаження. На початковому етапі розв'язування взаємодія забезпечує реєстрацію користувача, наведення ним довідок про можливості даної машини (системи) й замовлення ресурсів, потрібних для того, щоб розв'язати цю задачу. Далі, коли людині відомо алгоритм розв'язування задачі, внаслідок взаємодії здійснюється введення повідомлення, встановлюється граматична правильність його й виконується перевірка (й вироблення) алгоритмічної правильності повідомлення, тобто наладжується програма (див. *Наладжувальні програми*). І, нарешті, треба, щоб В. л. з о. м. забезпечила побудову невідомого раніше алгоритму, тобто методу розв'язування задачі. При цьому можна використовувати й творчі можливості людини, й відповідні евристичні алгоритми, закладені в машину. В першому випадку припускають, що основну творчу роботу по складанню алгоритму виконує людина, а машина, в кращому разі, інформує її про свої можливості (про склад *бібліотеки стандартних підпрограм* і про вхідні мови програмування). В другому випадку людина виконує тільки ті дії, які потрібні для роботи евристичних алгоритмів, закладених у машину. За приклади таких дій можуть правити: описування (вхідною мовою програмування) проблемних ситуацій, до яких машина не має доступу, встановлювання кращих оцінок для запропонованих машиною альтернатив тощо.

Прямий зв'язок людини з ОМ на всіх етапах роз'язування задачі в багатьох випадках потребує оперативної взаємодії, тобто такої взаємодії, коли обмін повідомленнями між ними проходить дуже швидко. При цьому самі повідомлення, як правило, невеликі й легкі для огляду. Для неоперативної взаємодії, навпаки, характерні досить великі інтервали часу між повідомленнями, причому ці повідомлення можуть становити собою досить місткі й складні тексти, графіки й зображення. Оперативна взаємодія під час прямого зв'язку людини з машиною характерна для *діалога режиму*, коли людина одержує можливість втручатися в хід розв'язування задачі на машині та звертатися до машини за довідками й одержує повідомлення-відповідь машини через такі інтервали часу, щоб це не заважало їй думати й не обтяжувало її. Режимом діалога при розв'язуванні задачі може керувати не тільки людина, як це є в переважній більшості систем наладжування, систем програмування природною мовою й систем розв'язування задач у режимі запитань і відповідей, а й обчислювальна машина. Прообразом діалога, керованого машиною, може бути навчання за допомогою ОМ (див. *Автоматизованого навчання клас*) і розробка методу розв'язуван-

ня задач за допомогою евристичних, реалізованих на машині приписів, які узагальнюють способи розв'язування задач якогось визначеного класу.

Як і тоді, коли задачу спільно розв'язують двоє людей, ефективність різних форм В. л. з о. м. в основному залежить від якості, часу й вартості розв'язування задач (останні два показники визначаються не тільки вартістю й кількістю машинного часу, а й часом, що його затрачує людина на розв'язування всієї задачі, й вартістю її праці). Вона залежить і від взаєморозуміння людини й ОМ, психологічної готовності людини розв'язувати свої задачі за допомогою ОМ, від доступності ОМ для людини, зручності зв'язку з ОМ і швидкості реакції ОМ на повідомлення, введене людиною. Реалізацію сукупності цих чинників забезпечують, створюючи високорозвинені алгоритмічні структури й системи *математичного забезпечення ЦОМ* (це створює передумови для реалізації чинників взаєморозуміння, швидкості реакції, доступності тощо) та розробляючи навчальні системи підготовки до В. л. з о. м. (чим вищий рівень підготовки, тим простіше досягнути взаєморозуміння людини й ОМ, тим упевненіше почуває себе людина; тобто, реалізується чинник психологічної готовності до взаємодії; цей чинник значною мірою залежить від рівня розвитку систем матем. забезпечення: чим воно багатше, тим упевненіше людина звертається до ОМ).

Процес досягання взаєморозуміння розглядають як процес вивчення людиною можливостей машини під час розв'язування за її допомогою якоїсь задачі. В результаті цього вивчення людина повинна так формулювати свої повідомлення, щоб машина могла виконувати саме ті дії, яких від неї чекають. Якщо реакція машини відповідає тому, на що сподівалась людина, то можна вважати, що машина успішно виконала приписи, які є в повідомленні людини, і що в розглядуваному циклі взаємодії досягнуто взаєморозуміння. Доступність ОМ для людини передбачає створення можливості звертатися до машини в будь-який зручний для неї час, а зручність спілкування людини з ОМ — виконання деяких звичайних вимог *психології інженерної* щодо зручності розміщення й доступності для огляду вводжуваних і одержуваних повідомлень, щодо конструкції пристроїв введення, виведення тощо. Швидкість реакції машини визначається затримкою між моментом закінчення повідомлення людини й моментом початку виведення чергового повідомлення машини. Ефективність різних форм взаємодії залежить не тільки від комплексної реалізації зазначених вище чинників у кожному з партнерів, а й від повноти, від рівня реалізації кожного з чинників. Найбільшою мірою ця залежність проявляється для діалогових форм взаємодії. Щоб увійти у взаємодію з машиною, людина повинна вміти принаймні чітко сформулювати свою задачу і мати хоча б загальні відомості про можливості ОМ. Цього може виявитися досить, якщо встановлено непрямий зв'язок з машиною. Коли зв'язок з машиною прямий, людина повинна вже знати хоч би одну з вхідних мов програмування, реалізованих на цій машині, вміти записати цією мовою алгоритм розв'язування своєї задачі, зіставити одержаний результат з гаданим і, коли необхідно, внести корективи в алгоритм.

Що ж до вимог до машини, то для недіалогової взаємодії, здійснюваної переважно в режимі пакетної обробки, їх можна задовольнити вже при наявності *транслятора* й бібліотеки стандартних підпрограм (кількість трансляторів і повнота бібліотеки передусім визначає різноманітність класів розв'язуваних на цій машині задач). При діалоговій взаємодії, яка здійснюється або на однопрограмних ОМ, або на мультипрограмних — у режимі розподілу часу, вимоги до машини різко зростають: треба, щоб машина мала велику кількість стандартних програм розв'язування задач і засобів інтерпретації вхідних мов програмування, які зберігаються структурно, тобто так, що звернення до відповідних засобів можна виконувати автоматично, за командою з індивідуального пристрою зв'язку з машиною. В разі діалога, керованого ОМ, треба, щоб у цій машині було реалізовано й спец. операційну систему, яка «знає» про всі можливості машини щодо розв'язування певного класу задач і «вміє» (після опитування користувача) віднести його задачу до певного класу й реалізувати евристичний припис за узагальненим способом розв'язування задач цього класу. При діалоговій взаємодії різко зростають вимоги не тільки до рівня реалізації чинника взаєморозуміння, а й до чинника швидкості реакції машини — треба, щоб час затримки відповіді було мінімізовано (як у результаті розробки ефективного режиму розподілу часу, так і завдяки спец. пристроям відображення, напр., відображення на електроннопроменеву трубку). Важливим засобом організації ефективного діалогового режиму В. л. з о. м. є й створення спец. навчальних систем, які переводять ОМ у режим *навчальної машини*, яка забезпечує підготовку користувачів ОМ до розв'язування задач за допомогою цієї самої ОМ. Для непрямого зв'язку користувача з ОМ таку навчальну систему в багатьох випадках можна реалізувати за допомогою комплекту *програмованих підручників* і посібників.

Організація ефективної В. л. з о. м. на базі перелічених чинників є комплексною проблемою, яка стоїть і перед розроблювачами, і перед користувачами ОМ. Ключ до розв'язання її лежить у дослідженні задач і способів розв'язування їх людиною, машиною й системою «людина — машина». В цьому дослідженні, крім кібернетиків, повинні взяти участь системотехніки, математики й психологи. Див. також *Системотехніка*.

Літ.: Якубинский Л. П. О диалогической речи. В кн.: Русская речь. Петроград, 1923; Глушков В. М. [та ін.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [бібліогр.

с. 254—257]; Глушков В. М. [та ін.]. Человек и вычислительная техника. К., 1971 [бібліогр. с. 284—291]; On-line computing. New York, 1967; Schwarcz R. M., Burger J. F., Simmons R. F. A deductive question-answerer for natural language inference. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1970, v. 13, № 3; Alpert D., Bitzer D. L. Advances in computer-based education. «Science», 1970, v. 167, № 3925.

В. І. Брановицький, О. М. Довгялло.

ВИБИРА́ННЯ ТРЕНУВА́ЛЬНЕ — те саме, що й *навчальна вибірка*.

ВВЕДЕ́ННЯ ІНФОРМА́ЦІЇ ПРИ́СТРІЙ — див. *Пристрої введення та виведення інформації*.

ВИ́ГРАШІВ МА́ТРИЦЯ — матриця, рядками якої є стратегії першого гравця у скінченній грі двох осіб (див. *Ігри матричні* і *Гра біматрична*), стовпцями — стратегії другого гравця, а елемент на перетині рядка і стовпця — виграш гравця в ситуації, утвореній відповідними стратегіями. При описуванні матричної гри вказується лише В. м. першого гравця. *М. М. Воробйов.*

ВИ́ГРАШУ ФУ́НКЦІЯ — функція, що приписується у *грі безкоаліційній* кожному гравцеві. Задається на множині усіх ситуацій і набуває дійсних значень, що чисельно виражають виграш гравця в різних ситуаціях. У *грі антагоністичній* В. ф. 1-го гравця часто називають В. ф. самої гри. Див. також *Ігор теорія*. *М. М. Воробйов.*

ВИДІЛЯ́ННЯ СИГНА́ЛІВ НА ФО́НІ ЗАВА́Д — операція подавлення заважаючих дій завад і підвищення правильності передавання корисного (такого, що несе інформацію) сигналу внаслідок відновлення миттєвих значень цього сигналу з заданою імовірністю помилки. При цьому ефективність виділення корисного сигналу можна оцінювати функцією імовірності того, що відхилення ε виділеного сигналу від його справжнього значення не перевищує якогось заздалегідь заданого порога ε_0

$$p = p\{\varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}.$$

В загальному випадку В. с. на ф. з. основано на апріорних відомостях про параметри (відмітні ознаки) сигналу і *завад*. Відмінність спектральних характеристик, інтенсивностей, часових властивостей і фазових співвідношень сигналу й завад дає змогу здійснювати функціональну (частотну, амплітудну, часову, фазову та ін.) вибірність у системі виділяння сигналу й ослабляти певною мірою вплив завад. Найбільшого поширення набула частотна вибірність.

Рад. вчений-радіотехнік В. О. Котельников (н. 1908) та амер. вчений Ф. Вудворд незалежно один від другого обгрунтували принципову можливість оптимального виділяння (приймання) сигналів, яка забезпечує максимальну ймовірність правильного відтворення корисного сигналу. Виділення сигналу в цьому випадку розглядається як завдання визначення на основі аналізу реалізації прийнятого сигналу умовної ймовірності $p_y(x)$ того, що прийнятому сигналові y відповідає певний корисний сигнал x. Корисний сигнал при цьому розглядають, як випадковий об'єкт з відомим законом розподілу $p(x)$ у відповідному просторі. Визначення умовної ймовірності $p_y(x)$ дає змогу якнайкраще зменшити апріорну невизначеність щодо прийманого сигналу. При відомому законі *розподілу ймовірностей* корисного сигналу $p(x)$ знаходження $p_y(x)$ можна звести до визначення умовної ймовірності $p_x(y)$ того, що відомому сигналові x відповідає прийнятий сигнал y, бо $p_y(x) = kp(x)\,p_x(y)$, де k — стала. $p_x(y)$ звичайно наз. функцією правдоподібності й позначають $L(x)$. Рішення про виділення (прийняття) певного сигналу x приймають за максимумом функції правдоподібності.

Оптимальне виділяння (приймання) корисного сигналу можна здійснювати й не визначаючи умовних імовірностей $p_y(x)$ або $p_x(y)$, достатньо, щоб результат обробки суміші корисного сигналу та завади однозначно визначався цими розподілами. Так, для оптим. виділення сигналу $x(t)$, який діє на фоні білого шуму з нормальним законом розподілу амплітуд $n(t)$ протягом часу T, досить визначити кореляційний інтеграл

$$r_{yx}(\tau) = \int_0^T y(t)\,x(t-\tau)\,dt,$$

де $y(t) = x(t) + n(t)$ — суміш корисного сигналу і завади. Така операція дає змогу видобути найбільше інформації про сигнал, оскільки за значеннями r_{yx} однозначно визначається функція правдоподібності $L(x)$. Це доводить оптимальність приймача взаємно-кореляційного типу.

Пристрій виділяння сигналу можна розглядати як лінійний *фільтр*, який обробляє суміш $y(t)$ так, що вихідний сигнал $y_{вих}(t)$ найкраще (в рамках прийнятого критерію) відтворює корисний сигнал $x(t)$. Такий пристрій наз. оптим. фільтром, а сам процес виділяння корисних сигналів — оптим. фільтрацією. Основи теорії оптим. фільтрації закладено в працях рад. математика А. М. Колмогорова (н. 1903) та амер. математика Н. Вінера (1894—1964).

Взаємно-кореляційний приймач можна розглядати як оптимальний за критерієм максимуму інформації фільтр, а його вихідний сигнал у момент τ — як реакцію фільтра з імпульсною характеристикою, тотожно рівною дзеркальному зображенню сигналу

$$r_{yx}(\tau) = y_{вих}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,x(t+t_0-\tau)\,dt.$$

Частотна характеристика такого фільтра $K(\omega)$ з точністю до постійного множника збігається з комплексно спряженим спектром корисного сигналу $X(\omega)$

$$K(\omega) = X^*(\omega)\exp[-j\omega t_0].$$

Будучи оптимальним в інформаційному розумінні, взаємно-кореляційний приймач максимізує відношення пікового значення сигналу до ефективного значення завади. Це відношення дорівнює відношенню повної енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму $q = \frac{E}{G_n}$ і не залежить від форми корисного сигналу. Фільтри виділяння корисного сигналу можна оптимізувати за критерієм мінімуму середньоквадратичного відхилу

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[y_{\text{вих}}(t) - x(t)]^2}.$$

Частотна характеристика такого оптим. фільтра для статистично незалежних сигналу й завад однозначно визначається формою енергетичного спектра корисного сигналу $G_x(\omega)$ і завад $G_n(\omega)$:

$$K(\omega) = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_n(\omega)}.$$

У практиці для виділяння сигналів широко застосовують квазіоптимальні фільтри, форма частотної характеристики яких певною мірою довільна і не залежить від спектрів сигналу й завад, а смугу пропускання узгоджено з ними. Відношення сигналу до завади на виході таких фільтрів гірше, ніж в оптим. фільтрів.

Літ.: Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1941, т. 5, № 1; Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.—Л., 1956; Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.—Л., 1961 [бібліогр. с. 479—484]; Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1950; Woodward P. M. Probability and information theory, with applications to radar. London, 1955.

В. І. Чайковський.

ВИКЛЮЧЕНОГО ТРЕТЬОГО ЗАКОН — положення, за яким з двох висловлювань, одно з яких є запереченням другого, істинним є одно і тільки одно. Тобто правильним є або те положення, що стверджує висловлювання p, або те, що стверджує $\neg p$. Третього немає. У класичному *численні висловлювань* цей закон приймається, тобто можна вивести теорему $p \vee \neg p$. В. т. з. не раз зазнавав критики, яка мала в осн. філос. характер. Це привело до формулювання й вивчення логіч. систем, у яких В. т. з. не справджується (див. *Логіки некласичні*). *М. І. Кратко.*

ВИКОНАВЧИЙ МЕХАНІЗМ — пристрій, що здійснює механічне переміщування регулюючого органа, який змінює режим об'єкта регулювання. За видом вихідної величини В. м. бувають неперервної і дискретної дії. Вони здійснюють при обертальному русі повертання на кілька обертів, на один, на частину оберта, а при поступальному русі — переміщення на крок або кілька кроків. В. м. бувають із сталою і змінною швидкостями переміщування вихідного елемента механізму. За видом використовуваної енергії В. м. поділяють на гідравлічні, пневматичні, електричні й комбіновані (електрогідравлічні та ін.). З електричних В. м. неперервної дії найпоширеніші електромех. В. м. Часто використовують В. м. з місцевими зворотними зв'язками (т. з. «позиціонери»).

Осн. вимоги до В. м.— швидкодія, точність, потужність на виході В. м., макс. момент або зусилля, момент інерції, часто вага і габарити. У більшості електр. В. м. потужність електродвигунів становить від кількох *вт* до 1 *квт*. У В. м. електр. крокові двигуни мають обертальний момент від кількох *Гсм* до кількох *кГм* і можуть робити відповідно від кількох тисяч до кількох сотень кроків за 1 *сек*. Пневматичні В. м. працюють здебільшого при тиску живлення кілька *am*, гідравлічні — від кількох десятків до кількох сотень *am*.

Літ.: Шегал Г. Л., Коротков Г. С. Электрические исполнительные механизмы в системах управления. М., 1968 [бібліогр. с. 155—156]; Исмаилов Ш. Ю. Автоматические системы и приборы с шаговыми двигателями. М., 1968 [бібліогр. с. 132—135]. *Б. О. Сигов.*

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА — величина, що залежно від випадку набуває того чи іншого значення за певним законом розподілу. Приклади В. в.: тривалість безвідмовної роботи приладу, число замовників, які чекають на обслуговування на якомусь обслуговуючому приладі, координата рухомого об'єкта в даний момент часу. Якщо В. в. ξ дискретна, тобто набуває скінченної кількості значень або всі її значення можна розмістити у вигляді нескінченної послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то закон розподілу ξ описують задаванням усіх *імовірностей* $P\{\xi = x_i\}$. У заг. випадку закон розподілу В. в. виражається ф-цією $F(x) = P\{\xi < x\}$, яку наз. функцією розподілу В. в. ξ. Ф-ція розподілу визначає ймовірність попадання В. в. в будь-який інтервал $[a, b)$ за ф-лою $P\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a)$. Якщо існує невід'ємна ф-ція $p(x)$, така, що при всіх x $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$, то $p(x)$ наз. **щільністю ймовірності** В. в. ξ. При цьому $P\{a \leqslant \xi < b\} = \int_a^b p(u)du$. Ряд заг. властивостей В. в. досить повно описують невеликим числом числових характеристик; найуживанішими з них є *математичне сподівання* та *дисперсія*. *М. Й. Ядренко.*

ВИПАДКОВА ПОДІЯ — подія, яка за даних умов може як відбутися, так і не відбутися, причому є певна *імовірність* p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, що за даних умов вона відбудеться. Те, що В. п. має певну ймовірність, виявляється в поведінці її частоти: якщо зазначені умови повторити N разів, а подія A настає при цьому $N(A)$ разів, то частота $N(A) : N$ настання події A при великих N виявляється близькою до p. Див. також *Імовірностей теорія*. *М. П. Слободенюк.*

ВИПАДКО́ВА ФУ́НКЦІЯ — функція $\{F(t, \omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$ двох аргументів, визначена на добутку $\Omega \times T$ множини Ω можливих елементарних подій з множиною T значень невипадкового аргументу t. Для кожного значення аргументу t ф-ція $F(t, \omega)$ є ф-цією тільки наслідків випробування ω, і, отже, являє собою *випадкову величину*. Для будь-якого фіксованого значення ω ф-ція $F(t, \omega)$ залежить лише від t і є ф-цією одного дійсного змінного. Кожну таку ф-цію наз. «можливою реалізацією» або «вибірковою функцією» В. ф. $\{F(t, \omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$, відповідною даному ω. Т. ч., залежно від фіксованого аргументу, В. ф. можна представити або як сімейство випадкових величин, або як сукупність реалізацій, одержуваних при різних ω - наслідках. Найчастіше В. ф. позначають ф-цією одного аргументу t [напр., $\xi(t)$, $x(t)$], опускаючи символ ω.

Якщо множина T є послідовністю (скінченною або нескінченною) і В. ф. має вигляд $F(t_1, \omega)$, $F(t_2, \omega), \ldots$, кажуть про В. ф. з дискретним аргументом або про випадкову послідовність. Якщо T — інтервал, В. ф. є сімейством випадкових величин, залежних від неперервного аргументу. В. ф. наз. *випадковим процесом*, якщо T — дійсна пряма або відрізок прямої, а аргумент $t \in T$ інтерпретується як час.

В. ф. можна визначити задаванням імовірнісної міри P у функціональному просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі) її реалізацій. Проте труднощі застосування цього методу задавання В. ф., які полягають у складності конкретного описування у функціональному просторі, зумовлюють використовування на практиці інших методів. В. ф. можна задавати й описуючи сімейства її частинних скінченновимірних розподілів. Так, якщо значеннями В. ф. є дійсні числа, задають

$$F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{F(t_1, \omega) < x_1, \ldots, F(t_n, \omega) < x_n\}.$$

Збільшуючи n, можна одержувати дедалі вичерпнішу характеристику В. ф. Цей метод задавання В. ф. є найпоширенішим, бо для розв'язання багатьох важливих питань досить знати лише окремі розподіли, задавати які в багатьох випадках простіше, ніж відповідні міри P на всьому функціональному просторі. В. ф. можна також задавати за допомогою деяких коротких характеристик. За аналогією з характеристикою випадкових величин, які є певними сталими числами, вводять характеристики В. ф. —невипадкові ф-ції аргументу x. До них належать *математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція*, які характеризують відповідно якусь середню реалізацію В. ф. за множиною спостережень, середнє відхилення від неї, а також залежність між випадковими величинами (значеннями В. ф.) для різних значень аргументу x (див. *Експериментальних даних способи статистичної обробки*).

На практиці інколи застосовують непрямі методи досліджування В. ф., а саме: методи знаходження коротких характеристик В. ф. за характеристиками інших В. ф., пов'язаних з ними. Задача непрямого дослідження В. ф. звичайно виникає в такій формі: на вхід динамічної системи A надходить В. ф. $\{F(x, \omega)\}$. Система піддає її певному перетворенню, в результаті на виході системи з'являється В. ф. $\{G(x, \omega)\}$. Відомі характеристики В. ф. $\{F(x, \omega)\}$. Треба знайти аналогічні характеристики В. ф. $\{G(x, \omega)\}$. Див. також *Випадкових процесів теорія*.

І. С. Сакунова.

ВИПАДКО́ВЕ ПО́ЛЕ — випадкова функція кількох змінних. Кажуть, що на множині T задано скалярне В. п. $\xi(t)$, якщо кожному t з T поставлено у відповідність *випадкову величину* $\xi(t)$. Якщо $\xi(t)$ набуває векторних значень, то $\xi(t)$ наз. векторним В. п. на T. Поняття В. п. узагальнює поняття *випадкового процесу:* в тому випадку, коли T — підмножина числової осі, $\xi(t)$ наз. випадковим процесом. Т-ра в якійсь точці простору, інтенсивність космічного проміння в якійсь точці земної кулі — приклади В. п. відповідно в просторі й на сфері. В. п. описують випадкові флюктуації в різних задачах радіофізики, теорії *розпізнавання образів, автоматичного керування теорії* й теорії турбулентності. Скалярне В. п. $\xi(t)$ задається сукупністю всіх скінченновимірних розподілів, тобто набором усіх імовірностей виду $P\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}$. Важливими характеристиками В. п. є *математичне сподівання* $m(t) = M\xi(t)$ й *кореляційна функція* $R(t,s) = M[\xi(t) - m(t)] \times [\xi(s) - m(s)]$. В практично важливому окремому випадку гауссівського В. п. (див. *Гауссівський випадковий процес*) ці дві характеристики повністю визначають і весь набір скінченновимірних розподілів.

Випадкові поля, що описують різні фізичні процеси, часто мають деякі властивості однорідності (інваріантності імовірнісних характеристик при перетвореннях простору T). Припустимо, що на T задано якусь групу перетворень G. Нехай gt — точка, в яку переходить t під дією перетворення g з G. Випадкове поле $\xi(t)$ наз. однорідним у вузькому розумінні відносно групи перетворень G, якщо розподіл значень поля в будь-яких n точках $t_1, \ldots, t_n$ з T співпадає з розподілом значень поля в точках $gt_1, \ldots, gt_n$ при будь-якому g з G та будь-якому n. Часто припускають менш обмежувальну вимогу інваріантності відносно G тільки ф-цій $m(t)$ та $R(t,s)$, а саме: В. п. $\xi(t)$ наз. однорідним у широкому розумінні відносно G, якщо для всякого g з G $m(gt) = m(t)$ (це означає, що $m(t)$ не залежить від t) і $R(gt, gs) = R(t, s)$. Для гауссівських випадкових полів поняття однорідності в вузькому й широкому розуміннях співпадають. Припущення про однорідність спричинює до певних представлень для коре-

ляційної функції В. п. та вибіркових функцій самого поля. Нехай, наприклад T — евклідів простір R^m m вимірювань, а G — група всіх паралельних переносів в R^m. В. п. на R^m, однорідне відносно G, наз. однорідним В. п. Кореляційна функція неперервного в середньому квадратичному однорідного В. п. залежить від різниці аргументів і має вигляд:

$$R(t, s) = \int_{R^m} l^{i(t-s, \lambda)} F(d, \lambda),$$

$$\text{де } (t-s, \lambda) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - s_k)\ \lambda_k,$$

$F(\cdot)$ — скінченна міра на R^m (так звана спектральна міра В. п.). Саме поле $\xi(t)$ припускає представлення у вигляді стохастичного інтегралу $\xi(t) = \int_{R^m} l^{i(t, \lambda)} Z(d\lambda)$, де $Z(\cdot)$ — випадкова адаптивна функція множини на R^m така, що $MZ(S_1) \cdot Z(S_2) = F(S_1 \cap S_2)$ (зокрема, випадкові величини $Z(S_1)$ та $Z(S_2)$ некорельовані, якщо множини S_1 та S_2 не перетинаються).

Стаціонарний процес — окремий випадок однорідного В. п. Якщо $T = R^m$, а G — група всіх рухів в R^m, то В. п. $\xi(t)$, однорідне відносно G, наз. однорідним та ізотропним. Кореляційна ф-ція $R(t, s)$ такого поля залежить лише від відстані r між точками t та s, причому $R(t, s) =$

$$= R(r) = \int_0^\infty \frac{J_{\frac{m-2}{2}}(ur)}{(ur)^{\frac{m-2}{2}}}\, d\Phi(u), \text{ де } \Phi(u) \text{ —}$$

обмежена неспадна функція на $[0, \infty]$ $J_{\frac{m-2}{2}}(ur)$ — бессельова ф-ція. Якщо $T = S_3$ — сфера одиничного радіуса в R^3, а G — група всіх обертань сфери, то В. п. $\xi(t)$, однорідне відносно G, наз. ізотропним випадковим полем на сфері. Кореляційна ф-ція $R(t, s)$ такого поля залежить від кутової відстані $\cos\psi$ між точками $t = (\theta_1, \varphi_1)$, та $S = (\theta_2, \varphi_2)$, причому

$$R(t, s) = R(\cos\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(\cos\psi), \quad \text{де}$$

$b_k \geqslant 0$, $\Sigma b_k < +\infty$, $P_k(x)$ — многочлен Лежандра степеня k. В. п. $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi(\theta - \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} \xi_l^k y_l^k(\theta, \varphi), \text{ де } y_l^k(\theta, \varphi) \text{ — сфе-}$$

ричні функції ξ_l^k. Випадкові величини такі, що $M\xi_l^k \xi_{l'}^{k'} = \delta_l^{l'} \delta_k^{k'} \frac{2}{2l+1} b_l$. В теорії векторних В. п. роль, аналогічну до ролі кореляційної функції, відіграє кореляційна матриця. Для кореляційних матриць однорідних полів відомі й спектральні представлення.

М. Й. Ядренко

ВИПАДКО́ВИЙ ПРОЦЕ́С, імовірнісний процес, стохастичний процес — однопараметричне сімейство випадкових величин $\xi(t)$; одне з основних понять теорії випадкових процесів. Якщо на якійсь множині T визначено В. п., то для всіх $t \in T$ визначено *випадкову величину* $\xi(t)$, яку наз. значенням В. п. в точці t. Звичайно T є числовою множиною і $t \in T$ інтерпретується як час. Отже, В. п. — це ф-ція, яка набуває випадкових значень. В. п. виникає у випадкових експериментах, результати яких можна описати значенням якоїсь випадкової величини в кожний момент деякої множини моментів часу T. Якщо припустити, що значення цієї величини неперервно записується протягом експерименту, то одержану функцію часу наз. вибірковою функцією В. п. А якщо експеримент повторювати, вибіркова функція щоразу змінюється. Множина всіх вибіркових функцій становить ансамбль. Як правило, ансамблі вибіркових ф-цій В. п. містять нескінченну (навіть незліченну) множину вибіркових ф-цій.

Важливою характеристикою В. п. є його частинні розподіли — сукупність k-вимірних розподілів процесу $\xi(t)$, які дають сумісний розподіл значень процесу для k різних моментів часу. Зокрема, одновимірний розподіл $F_t(x) = P\{\xi(t) < x\}$, що дає розподіл величини $\xi(t)$, є найуживанішою характеристикою В. п. Класифікують В. п. залежно від властивостей частинних розподілів (див. *Випадкових процесів теорія*).

А. В. Скороход.

ВИПАДКО́ВИХ ПРОЦЕ́СІВ ТЕО́РІЯ — розділ *імовірностей теорії*, який вивчає випадкові процеси. Кажуть, що на множині T дійсної осі задано *випадковий процес*, якщо кожному $t \in T$ поставлено у відповідність випадкову величину $\xi(t)$. Ця величина набуває дійсних, комплексних чи векторних значень, і залежно від цього процес наз. дійсним, комплексним чи векторним. Змінну t звичайно інтерпретують як час. Область визначення процесу T є або послідовністю $\{t_k\}$ $(t_k < t_{k+1})$ (можливо, нескінченною в обидва боки), і тоді випадковий процес наз. процесом з дискретним часом, або T є скінченним чи нескінченним інтервалом, тоді випадковий процес наз. процесом з неперервним часом. Прикладом найпростішого випадкового процесу з дискретним часом є випадкове блукання, яке описує положення частинки, що здійснює за одиницю часу випадкові переходи (величина кожного кроку при цьому не залежить від положення частинки). Прикладом випадкового процесу з неперервним часом є процес Пуассона, який описує кількість якихось однорідних подій, що відбулися за час t (напр., кількість викликів, які надійшли на телефонну станцію). Важливу характеристику випадкового процесу становлять його частинні розподіли — сукупність k-вимірних розподілів процесу $\xi(t)$, які дають сумісний розподіл величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)$ для якнайрізноманітніших наборів

$t_1, \ldots, t_k$ з множини T. Для дійсного процесу k-вимірний розподіл визначається функцією $2k$ аргументів:

$$F_{t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k) = P\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_k) < x_k\},$$
$$t_i \in T, \quad x_i \in (-\infty, \infty)$$

(праворуч зазначено ймовірність того, що одночасно виконано нерівності $\xi(t_i) < x_i$, $i = 1, \ldots, k$). Для практичних застосувань важливо знати одновимірні розподіли процесу

$$F_t(x) = P\{\xi(t) < x\}.$$

У разі, коли $\xi(t)$ має абсолютно неперервні розподіли, k-вимірні розподіли можна задавати щільностями $P_{t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k)$. Цей спосіб можна застосовувати й для векторних випадкових процесів, але в цьому разі x_i будуть векторами. Іншими важливими характеристиками процесу є його моментні ф-ції: $m_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) = M\xi(t_1) \ldots \xi(t_k)$, $t_i \in T$, де M — матем. сподівання (припускаємо, що випадковий процес дійсний), або центровані моментні ф-ції $m_k^0(t_1, \ldots, t_k) = M \prod_{j=1}^{k} [\xi(t_j) - M\xi(t_j)]$, $t_i \in T$ (останні можуть бути виражені через нецентровані ф-ції). Найчастіше використовують перші дві моментні ф-ції: $m(t) = m_1(t)$ — середнє значення процесу, а $R(t, s) = m_2^0(t, s) = m_2(t, s) - m_1(t)\, m_1(s)$ — кореляційна ф-ція процесу. Вивчення випадкових процесів, коли задано лише середнє значення й кореляційну ф-цію випадкового процесу, становить зміст *кореляційної теорії випадкових процесів*.

Залежно від властивостей частинних розподілів розрізняють випадкові процеси з незалежними значеннями; випадкові *процеси з незалежними приростами* (окремими прикладами їх є: випадкове блукання, броунівський рух, процес Пуассона); *марковські процеси* (цей клас включає, зокрема, випадкові процеси з незалежними приростами); *стаціонарні випадкові процеси; гауссівські випадкові процеси*. До заг. питань В. п. т. належить побудова матем. моделей випадкових процесів і вивчення властивостей їхніх вибіркових ф-цій. У багатьох випадках експерименти, в яких записуються вибіркові ф-ції випадкових процесів, повторити неможливо. Тоді виникає задача про визначення властивостей вибіркових ф-цій за частинними розподілами випадкових процесів. За теоремою Колмогорова, якщо для випадкового процесу $\xi(t)$, визначеного на $[a, b]$, існують постійні $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і $K > 0$ такі, що $M|\xi(t) - \xi(s)|^{\alpha} \leqslant K(t - s)^{1+\beta}$, то вибіркові ф-ції випадкового процесу $\xi(t)$ з імовірністю 1 є неперервними.

Для випадкових процесів з незалежними приростами й марковських процесів важливою задачею є знаходження всіх можливих частинних розподілів, тобто ймовірностей переходу, які відповідають цим розподілам. Осн. задачі в теорії стаціонарних випадкових процесів у вузькому розумінні пов'язані з доведенням ергодичної теореми, яка встановлює існування границі $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\xi(k)$ або $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt$ при $n \to \infty$ або $T \to \infty$ (залежно від того, дискретним чи неперервним є час). Стаціонарні випадкові процеси в широкому розумінні вивчають у кореляційній теорії випадкових процесів. Важливий розділ цієї теорії становить спектральна теорія стаціонарних випадкових процесів, до якої вдаються, розв'язуючи задачі екстраполяції та фільтрації випадкових процесів.

Для всіх класів випадкових процесів важливою задачею є вивчення різних перетворень їх. Тут осн. роль відіграє знаходження *алгоритмів*, які дають змогу за характеристиками первісного процесу (за його частинними розподілами чи моментними ф-ціями) знайти характеристики перетвореного процесу. Як окремий випадок розглядають задачу про визначення характеристик випадкових процесів, що є розв'язками дифер. рівнянь, у правій частині яких відображено й певний випадковий процес. В. п. т. вивчає й способи визначення розподілів різних функціоналів випадкових процесів, напр., інтегральних функціоналів виду $\int_0^t f(\xi(s), s)\,ds$, визначення ймовірності того, що процес лежатиме в смузі $a(s) < \xi(s) < b(s)$, $s \in T$, та визначення розподілів числа перетинів цієї смуги або числа викидів за цю смугу. Розв'язуючи такі задачі в кожному класі випадкових процесів, використовують відповідний апарат. Найкраще розроблено апарат для марковських процесів — це апарат дифер. рівнянь у частинних похідних та інтегро-диференціальних рівнянь.

Літ.: Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [бібліогр. с. 648—654]; Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ. М., 1956 [бібліогр. с. 589—598]; Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. Пер. с англ. М., 1958 [бібліогр. с. 365—376].
А. В. Скороход.

ВИПАДКО́ВИХ ПРОЦЕ́СІВ ТЕО́РІЯ ПЕРЕДБА́ЧЕННЯ — див. *Завбачення випадкових процесів теорія.*

ВИПАДКО́ВІ ЧИ́СЛА — штучно одержана послідовність реалізацій випадкової величини з заданим законом розподілу. В. ч. застосовують при дослідженні й оптимізації складних імовірнісних систем методом статистичного моделювання (див. *Монте-Карло метод*) за допомогою електронних обчисл. машин. Є три осн. способи одержування В. ч.: за допомогою таблиць В. ч.; за допомогою спец. електронної приставки до обчисл. машини — генератора В. ч. (див. *Давач випадкових чисел*); заміною В. ч. послідовністю т. з. *псевдови-*

падкових чисел, що їх одержують у результаті обчислень за спец. *підпрограмами*. В. ч., що застосовуються при моделюванні ймовірнісної системи, мають задовольняти дві осн. вимоги: з достатньою точністю відтворювати поведінку модельованої *випадкової величини* з заданим розподілом і потребувати мінім. числа машинних операцій, що йдуть на формування одного В. ч. Кожна послідовність В. ч. лише наближено відтворює поведінку випадкової величини, що моделюється. Про точність такого наближення судять звичайно за результатами статистичної оцінки послідовності В. ч. досить великого об'єму, використовуючи відомі статистичні критерії, напр., критерій χ^2. *Н. І. Костіна.*

ВИПАДКО́ВОГО ПО́ШУКУ МЕ́ТОДИ — методи пошуку якоїсь характеристики *випадкової величини*. Див. *Програмування стохастичне, Стохастичної апроксимації метод, Стохастичних квазіградієнтів метод.*

ВИРІ́ШУВАЛЬНЕ ПРА́ВИЛО в розпізнаванні образів — див. *Правило вирішувальне* в розпізнаванні образів.

ВИРОБНИ́ЧА ФУ́НКЦІЯ — залежність кінцевого виходу продукції чи її вартості від використання різних факторів виробництва, конкретних видів ресурсів і затрат, подана в математичній формі. Як правило, застосовують досить прості функції з однією або кількома змінними: лінійну, квадратичну, степеневу, показникову, гіперболічну, логістичну та ін. Первісну інформацію для В. ф. одержують внаслідок збирання статистичних даних або експериментальним шляхом, коли дослідник контролює хід досліду й визначає, які величини мають бути змінними. Прийнятний алгебр. вираз повинен відображувати суть розглядуваного явища й давати змогу досить просто визначати статистичні коефіцієнти, що входять до нього. Для цього використовують методи матем. статистики (аналіз кореляцій і регресій). В. ф. застосовують переважно в с.-г. виробництві при аналізі впливу доз і складу добрив, обробітку грунту і кліматичних умов на врожайність різних культур.

Літ.: Хеди З., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. Пер. с англ. М., 1965. *Е. А. Фін.*

ВИСЛО́ВЛЮВАННЯ ЕКЗИСТЕНЦІА́ЛЬНІ — висловлювання, що відображають існування предметів з тими чи іншими властивостями. Напр.: «Існують числа x і y такі, що $x > y + 1$».

ВИСЛО́ВЛЮВАННЯ ТОТО́ЖНО ІСТИННІ — див. *Тотожно істинна формула.*

ВИСЛО́ВЛЮВАНЬ ЧИ́СЛЕННЯ — див. *Числення висловлювань.*

ВИХІДНИ́Й ПРИ́СТРІЙ — див. *Пристрої введення та виведення інформації.*

ВІДМО́ВА ВІД РОЗПІЗНАВА́ННЯ — віднесення розпізнаваного сигналу до класу нерозбірливих сигналів. В. від р. здебільшого буває тоді, коли з якоїсь причини не можна з великою мірою достовірності віднести сигнал до одного певного класу. При В. від р. відповідний сигнал може розпізнати людина; це дає змогу одержати шукане рішення, але може призвести до зменшення середньої швидкості розпізнавання. Умови, за яких доцільна В. від р., часто визначають із статистичних міркувань, які грунтуються на тому, що «втрати» від В. від р. значно менші, ніж «втрати», пов'язані з помилками. Приклад побудови статистичного *алгоритму розпізнавання*, в якому передбачено В. від р., див. у ст. *Байєсівське вирішувальне правило.* *Г. Л. Гімельфарб.*

ВІДНО́ВЛЕННЯ ТЕО́РІЯ — розділ *імовірностей теорії*, присвячений дослідженню деяких загальних характеристик випадкових процесів, пов'язаних із сумами незалежних випадкових величин. Осн. положення В. т. широко використовують у теорії надійності, *масового обслуговування теорії, запасів теорії* та ін. Перші результати В. т. здобуто з розгляду окремих імовірнісних задач, пов'язаних із тривалістю безвідмовної роботи деяких фіз. елементів.

Осн. моделлю В. т. є простий процес відновлення. Такий процес описується послідовністю $\{X_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots)$ взаємно незалежних невід'ємних, однаково розподілених *випадкових величин*, які слід розуміти як тривалості існування замінюваних елементів, відновлення яких відбувається вмить. Вважають, що перший елемент включається в роботу в початковий момент часу $t = 0$ і замінюється в момент $t = X_1$. Наступна заміна виконується в момент $t = X_1 + X_2$ і т. д. Іноді процес відновлення $\{X_i\}$ починається з другої випадкової величини X_0, що є незалежною від $\{X_i\}$ і, можливо, має ін. закон розподілу. Розширена послідовність $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ наз. загальним процесом відновлення. Цей процес розглядають, коли перше установлення елемента відбувається в якийсь момент $t \neq 0$, вибраний на додатній напівосі часу відповідно до заданого розподілу ймовірностей. Напр., X_0 може бути «залишковим часом життя» елемента, використовуваного в початковий момент $t = 0$. Процес відновлення наз. дискретним, якщо $\{X_i\}$ — гратчасті випадкові величини, такі, що з імовірністю одиниці найбільший спільний дільник усіх X_i збігається з якимсь $\omega > 0$; в противному разі процес відновлення наз. неперервним.

Важливими характеристиками процесів відновлення є випадкові величини: $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ — момент n-го відновлення; N_t — найбільше значення n, для якого $S_n \leqslant t$, тобто кількість відновлень, що відбулися до моменту t.

Ф-цією відновлення $H(t)$ наз. *математичне сподівання* випадкової величини N_t, тобто $H(t) = MN_t = \sum_{t=0}^{\infty} rP\{N_t = r\}$.

Теореми відновлення: а) $\frac{Ht}{t} \to \frac{1}{\mu_1}$

при $t \to \infty$, де $\mu_1 = MX_i$; б) теорема Блекуелла для неперервного процесу відновлення $H(t+\alpha) - H(t) \to \frac{\alpha}{\mu_1}$ при $t \to \infty$ і будь-якому фіксованому $\alpha > 0$; в) за умови $\mu_2 = MX_1^2 < \infty$ характер поведінки ф-ції відновлення $H(t)$ описують співвідношенням: $H(t) - \frac{t}{\mu_1} \to \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1$ при $t \to \infty$.

Ф-ція відновлення задовольняє таке інтегр. рівняння: $H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s)\,dF(s)$, де $F(t)$ — ф-ція розподілу випадкових величин X_i. Якщо існують густина відновлення $h(t) = H'(t)$ і $f(x) = F'(x)$, то інтегр. рівняння для густини відновлення буде записано у вигляді: $h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-s) f(s)\,ds$. Див. також *Випадкових процесів теорія*.

Т. І. Фурсова.

ВІДНОШЕННЯ — одне з основних понять сучасної математики. Роль В. особливо зросла у зв'язку з теоретико-множинною реконструкцією всієї математики, яку було проведено в 20 ст. Нехай E — множина. Будь-яка властивість, яку може мати елемент $x \in E$, задає в E підмножину A всіх елементів, які мають цю властивість, і навпаки, задання підмножини $A \subset E$ визначає властивість елемента «x належить A». Отже, властивість елементів E повністю задає вказівка деякої підмножини A. В свою чергу, A може бути задана характеристичною функцією $P(x)$, яка приймає на A значення 1 і на $E \setminus A$ — значення 0 (оскільки властивість «$X \in A$» справджується при $P(x) = 1$ і є хибною при $P(x) = 0$, числа 1, 0 часто замінюють символами «істинне» і «хибне», бо область значень $P(x)$ складається з цих двох «нечислових» символів). Таким чином, логіка властивостей збігається з *алгеброю множин*. Логіка відношень зв'язує різні елементи, встановлюючи відношення між ними. Теоретико-множинне поняття В. відповідає поняттю *предиката* в *логіці математичній*. Цю відповідність вивчають у *моделей теорії*.

Нехай задано якесь В. P, в якому можуть бути (або не бути) елементи x і y множини E, записані в зазначеному порядку. Пари (x, y) вважаються упорядкованими, так що (x, y) і (y, x) при $x \neq y$ — це різні пари. Множини всіх таких упорядкованих пар наз. добутком E на E ($E \times E$) (див. *Множин теорія*). Розглянемо підмножину $A \subset (E \times E)$ таких пар (x, y), для яких x і y зв'язані В. P. Тоді задання В. P рівнозначне заданню A або характеристичної функції $P(x, y)$, яка дорівнює 1, якщо x і y зв'язані В. P або 0 — в противному разі. В. P наз. рефлексивним, якщо $P(x, x) = 1$ і антирефлексивним, якщо $P(x, x) = 0$; симетричним, коли $P(x, y) = P(y, x)$ і антисиметричним, коли $P(x, y) \neq P(y, x)$ при $x \neq y$; транзитивним, коли з $P(x, y) = 1$, $P(y, z) = 1$ випливає $P(x, z) = 1$. Існує кілька найважливіших типів В.

В і д н о ш е н н я р і в н о с т і. У цьому разі $P(x, x) = 1$ і $P(x, y) = 0$ при $x \neq y$; отже, x і y перебувають у В. P тоді й тільки тоді, коли вони збігаються. На кожній множині існує єдине В. рівності, яке зображують звичайно у вигляді $x = y$ (рідше $x \equiv y$).

Еквівалентності відношення. Так наз. рефлексивні, симетричні й транзитивні В. (загальне позначення: $x \sim y$, $x \equiv y \pmod P$)). На даній множині E таких В. може бути багато. Суть В. еквівалентності звичайно полягає в установленні деякої схожості, спорідненості між елементами за певною ознакою. Приклади В. еквівалентності: (1) $E = Z$ — множина цілих чисел, $x \sim y$ означає, що $x - y$ ділиться на $d \in E$ (x, y «зрівнянні за модулем d»). Це В. записують у вигляді $x \equiv y \pmod d$. (2) $E = R^2$ — площина з координатами (ξ, η); для точок $x\ (\xi', \eta')$, $y\ (\xi'', \eta'')$ еквівалентність $x \sim y$ означає, що $\xi' - \xi''$, $\eta' - \eta''$ — цілі числа. (3) $E = R^3$ — тривимірний простір, $|x|$ — відстань точки x від фіксованої точки 0; $x \sim y$ означає $|x| = |y|$. (4) Нехай $\mathfrak{A}$ — скінченна множина, яка називається «алфавітом», з елементами $a, b, \ldots$, E — множина слів з цього алфавіту, тобто скінченних послідовностей його «букв» ($a, ab, abca, \ldots$) разом з «пустим словом», у якому немає жодної букви. Виділимо в E скінченне число слів x_k ($k = 1, \ldots, m$) і вважатимемо слова $x, y \in E$ еквівалентними, якщо y одержують із x скінченним числом «елементарних операцій», які полягають у вилученні з слова або введенні в слово суцільного куска, який збігається з одним із x_k. В. еквівалентності задає розбиття множини E на класи еквівалентності, які визначаються так. Клас K_x ($x \in E$) складається з усіх $z \in E$, для яких $x \sim z$. Якщо $K_x \neq K_y$, то $K_x \cap K_y = \varnothing$, так що різні класи не перетинаються й утворюють розбиття E. Всілякі множини K_x і є класами еквівалентності для даного В. Множина всіх таких класів наз. ф а к т о р - м н о ж и н о ю множини E по В. P (записують так: E/P). Відображення $\varkappa_P : E \to E/P$, яке ставить у відповідність елементові $x \in E$ клас $K_x \in E/P$, називають к а н о н і ч н и м в і д о б р а ж е н н я м для В. P. Фактор-множину часто можна подавати зручною «моделлю» — множиною, яка перебуває в бієктивній відповідності з E/P.

У прикладі (1) такою моделлю є множина вершин правильного d-кутника; в (2) — тор, одержуваний з квадрата $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$ склеюванням протилежних сторін; у (3) — півпряма $0 \leqslant r < \infty$, де $r = (x)$, $x \in R^3$. Смисл переходу до фактор-множини полягає в «огрубленні» досліджуваного об'єкта, коли цікавляться лише деякими властивостями елементів множини, ототожнюючи ті елементи, які цими властивостями не різняться. Так, у прикладі (1) нехтують цілими кратними d; в (2) — ототожнюють усі точки, що

переходять одна в одну при цілочислових зміщеннях уздовж осей координат; у (3) — цікавляться лише відстанню точки від 0; в (4) — нехтують частинами слів, які входять у список $\{x_k\}$. В. еквівалентності особливо важливі в алгебрі.

В і д н о ш е н н я п о р я д к у. Так наз. антирефлексивні, транзитивні В. (загальне позначення: $x < y$, $x \prec y$). Якщо для будь-якої пари (x, y), $(x \neq y)$ або $x < y$, або $y < x$. В. порядку наз. л і н і й н и м. Приклади упорядкованих множин: (5) $E = R$, $x < y$ має звичайний смисл «x менше за y»; (6) E — множина всіх неперервних дійсних ф-цій на $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x < y$ означає $\int_0^1 [y(t) - x(t)] \times dt > 0$; (7) $E = R^m$ — множина всіх кортежів (упорядкованих послідовностей з m дійсних чисел), $x < y$ означає, що $x = (x_1, \ldots, x_m)$ передує $y = (y_1, \ldots, y_m)$ у лексикографічному розміщенні, тобто для деякого $k < m$ $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$, але $x_{k+1} < y_{k+1}$; (8) $E = R$, $\varphi(x)$ — дійсна ф-ція на R; $x < y$ означає, що $\varphi(x) < \varphi(y)$. У прикладах (5) і (7) В. порядку лінійне, а в (6) і (8) — ні (іноді нелінійно упорядковані множини називають частково впорядкованими. Див. *Частково впорядкована множина*.

Нехай E упорядкована множина $x \subset E$. Елемент $y \in E$ наз. м а ж о р а н т о ю (або мінорантою) X, якщо для всіх $x \in E$ $x \leqslant y$, тобто $x < y$ або $x = y$ (відповідно $y \leqslant x$). Якщо X має мажоранту (міноранту), його наз. обмеженим згори (знизу); якщо X обмежено і згори і знизу, його наз. обмеженим. Якщо у множині мажорант (мінорант) є найменший (найбільший) елемент z, то він наз. верхньою (нижньою) гранню X (позначення: $\sup_E X$ для верхньої і $\inf_E X$ — для нижньої грані). Всі ці поняття стають наочними для $X \subset R$.

З а г а л ь н е п о н я т т я в і д н о ш е н н я. Нехай $E^n = E \times \ldots \times E$ є добутком n множин E, тобто множини всіх кортежів $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$. Відображення $P : E^n \to \{0, 1\}$ наз. n-місним відношенням (предикатом, логічною функцією) над E. Множина $A \subset E^n$ всіх кортежів, для яких $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$, визначає «властивість» кортежів: $x_1, \ldots, x_n$ перебувають у відношенні P тоді й тільки тоді, коли $(x_1, \ldots, x_n) \in A$. При $n = 1$ приходять до «властивостей елементів» $P(x)$, при $k = 2$ — до двомісних В. $P(x, y)$. Якщо $n = 2$, В. наз. б і н а р н и м и. Теорію бінарних В. тепер застосовують дуже широко. Досить сказати, що вся *графів теорія* є по суті теорією бінарних В.

Розглянемо тримісне В. P, яке задовольняє таку вимогу: для будь-яких $x, y \in E$ існує один і тільки один $z \in E$ такий, що $P(x, y, z) = 1$. Тоді кожній парі (x, y) ставлять у відповідність однозначно визначений елемент $z \in E$, тобто на E задають бінарну операцію. Таким чином, звичайні алгебр. операції — окремий випадок тримісних В., які задовольняють, крім попередньої умови, ще й інші («аксіоми»). Поняття відображення також можна розглядати, як В.: якщо $\varphi : A \to B$, то φ задається своїм графіком K_φ — множиною пар $(x, \varphi(x))$ $x \in A$. Графік є підмножина добутку $A \times B$ — множини всіх пар (x, y), $x \in A$ і $y \in B$. А тому задавання φ рівнозначне вказівці «властивості» елементів $A \times B$, тобто задаванню одномісного В. на $A \times B$.

Літ.: Б у р б а к и Н. Начала математики, ч. 1. Основные структуры анализа, кн. 2. Теория множеств. Пер. с франц. М., 1965; С т о л л Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Пер. с англ. М., 1968.

О. В. Гладкий.

ВІДНО́ШЕННЯ АНАЛІТИ́ЧНЕ — відношення між поняттями, що існує завдяки наявності постійного зв'язку між відповідними класами предметів (на протилежність *відношенню синтетичному*). Наявність В. а. випливає з визначень порівнюваних понять (пор. «монотип — набірна букvoвідливна машина», «лінотип — набірна рядковідливна машина»). Термін «В. а.» часто застосовують в *інформатиці* замість терміну *«відношення парадигматичне»*.

Е. Ф. Скороходько.

ВІДНО́ШЕННЯ БА́ЗИСНЕ — те саме, що й *відношення парадигматичне* в інформатиці.

ВІДНО́ШЕННЯ ПАРАДИГМАТИ́ЧНЕ в і н ф о р м а т и ц і — семантичне відношення, що існує між словами природної або інформаційної мови незалежно від контексту (на протилежність *відношенню синтагматичному*). В. п. зв'язує слова, що позначають предмети, між якими існує постійний зв'язок. Цим відношенням зв'язані, напр., слова «вода» і «рідина» (вода є різновидом рідини), «рідина» і «текучість» (будь-яка рідина є текучою). В. п. ділять на два види: відношення підпорядкування, що відповідає приблизно відношенню підкласу до класу, і асоціативне відношення, що відповідає решті відношень між предметами. Іноді асоціативне відношення розчленовується на кілька різновидів: суб'єктне, об'єктне, причинно-наслідкове, просторове і т. д. В. п. застосовують для зменшення *втрат інформації* під час інформаційного пошуку. Для цього треба, щоб В. п. в *мові інформаційній* було задано явно. Існують чотири осн. способи задавання В. п.: лексикографічний, табличний, графічний і аналітичний. Перший полягає в тому, що слова інформаційної мови подають у словнику з позначками, які вказують на В. п. між ними. Напр., при *дескрипторі* «рідина» можуть бути позначки: в и д о в і т е р м і н и (відношення підпорядкування) — «вода», «нафта»; з в' я з а н и й т е р м і н (асоціативне відношення) — «текучість». За т а б л и ч н и м способом слова інформаційної мови, зв'язані В. п. з цим дескриптором, також включаються до словникової статті останнього, але замість вказівних позначок вид відношення визначається наперед обумовленим взаємним розміщенням дескрипторів.

Графічний спосіб полягає в побудові схем, у яких В. п. між дескрипторами позначено за допомогою відповідних стрілок. Як приклад можна навести відображення ієрархічної класифікації у вигляді дерева. За **аналітичним** способом В. п. виражається структурою слова інформаційної мови, яке в цьому випадку являє собою похідне, складне утворення — *код семантичний*.

Е. Ф. Скороходько.

ВІДНО́ШЕННЯ ПРАВДОПОДІБНОСТІ — див. *Статистична перевірка гіпотез.*

ВІДНО́ШЕННЯ СИГНА́Л/ЗАВА́ДА — відношення деякої основної характеристики (звичайно середньої потужності) корисного сигналу до відповідної характеристики завади. В. с./з. є одним з критеріїв, які характеризують завадостійкість пристроїв керування, зв'язку, контролю тощо. Особливо широко поняття В. с./з. використовують у радіотехніці й зв'язку.

Б. Ю. Мандровський-Соколов.

ВІДНО́ШЕННЯ СИНТАГМАТИ́ЧНЕ в **інформатиці** — семантичне відношення, що виникає між словами природної чи інформаційної мови в певному контексті. В. с. (на протилежність *відношенню парадигматичному*) вказує на наявність деякої ситуації, яка об'єднує об'єкти, позначені в даному контексті відповідними словами. В. с. зв'язані, напр., слова «вода» і «посудина» (в ситуації «вода міститься в посудині») або «вода» і «очищення» (в ситуації «очищення води»). Серед В. с. виділяють суб'єктне, об'єктне, просторове, часове відношення тощо. Деякі В. с. за змістом збігаються з парадигматичними відношеннями, відрізняючись від них лише тим, що пов'язують відповідні слова лише в деяких контекстах. Напр., відношення «бути частиною» є парадигматичним для слів «карбюратор» і «двигун» (будь-який карбюратор — частина двигуна), але синтагматичним для слів «генератор» і «двигун» (генератор не завжди є складовою частиною двигуна). Інші В. с. не збігаються з парадигматичними відношеннями, перебуваючи з ними у взаємно однозначній відповідності. Напр., парадигматичному відношенню «бути потенціальним суб'єктом» відповідає В. с. «бути суб'єктом» (між словами «літак» і «летіти» існує парадигматичне відношення «бути потенціальним суб'єктом», у контексті ж «літак летить» між цими словами реалізується відповідне В. с. «бути суб'єктом»). В. с. використовують гол. чин. для зменшення пошукового шуму. Для цього треба, щоб В. с. в *мові інформаційній* були задані явно. Найчастіше застосовують покажчики зв'язку й покажчики ролі. Перші вказують на наявність В. с. між групою дескрипторів *пошукового образу документа* чи *пошукового припису*, другі — на різновид відношення, яке зв'язує цей *дескриптор* з деяким іншим. *Е. Ф. Скороходько.*

ВІДНО́ШЕННЯ СИНТЕТИ́ЧНЕ — відношення між поняттями, яке виникає, коли в певній ситуації з'являється зв'язок між відповідними класами предметів (на протилежність *відношенню аналітичному*). Термін «В. с.» часто використовують в інформатиці замість терміна *«відношення синтагматичне»*.

Е. Ф. Скороходько.

ВІДНО́ШЕННЯ ТЕКСТУА́ЛЬНЕ — те саме, що й *відношення синтагматичне* в інформатиці.

ВІ́ДПОВІДЬ РОЗПІЗНАВА́ЛЬНОЇ СИСТЕ́МИ — рішення, що його приймає система при поданні на її вхід об'єкта розпізнавання. Залежно від розв'язуваного завдання В. р. с. може бути назва (номер, умовний код) класу (напр., при розпізнаванні букв або слів мовлення), опис об'єкта розпізнавання (при аналізі фотографій слідів частинок), спосіб лікування (мед. діагностика), характер несправності (тех. діагностика) тощо. В. р. с. визначається в результаті виконання алгоритму розпізнавання, покладеного в основу даної *розпізнавальної системи*. Див. також *Розпізнавання образів*. *Т. К. Вінцюк.*

ВІ́НЕРА — ХО́ПФА РІВНЯ́ННЯ **першого роду** — рівняння виду $\int\limits_0^\infty R_{xx}(t-\tau)\times k(\tau)\,d\tau = R_{xy}(t)$, $t>0$, де $R_{xx}(t)$, $R_{xy}(t)$ — *кореляційні функції* стаціонарних ергодичних випадкових процесів $x(t)$, $y(t)$, а $k(t)$ — *імпульсна перехідна функція*. Вперше одержали його 1931 спільно амер. і нім. математики Н. Вінер і Е. Хопф. До В.—Х. р. зводять задачі синтезу оптим. фізично реалізовної передавальної функції (ФРПФ) або імпульсної перехідної функції за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки

$$I = M\left[y(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\right]^2,$$

де $y(t) = H(p)\,x(t)$, $H(p)$ — заданий перетворювальний оператор, M — символ матем. сподівання, $x(t)$ — вхідний сигнал системи, $y(t)$ — бажаний вихідний сигнал системи. При цьому розрізняють задачі: 1) оптим. згладжування, або фільтрації, коли $x(t) = m(t) + n(t)$, де $m(t)$ — корисний сигнал, $n(t)$ — шум; 2) статистичного випереджання, коли $x(t) = m(t)$, $y(t) = m(t+t_0)$, $t_0>0$; 3) оптим. фільтрації з одночасним випереджанням, коли $x(t) = m(t) + n(t)$, $y(t) = m(t + t_0)$, $t_0 > 0$. Загальна формула для визначання оптим. ФРПФ $W(s)$ має вигляд

$$W(s) = \frac{1}{2\pi i\,[\Psi(s)]_+}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{xy}(s)}{[\Psi(s)]_-}e^{st}ds,$$

де $S_{xy}(s)$ — взаємна спектральна щільність сигналів $x(t)$, $y(t)$; $[\Psi(s)]_+$ — функція, аналітична в правій півплощині; $[\Psi(s)]_-$ — функція, аналітична в лівій півплощині; $S_{xx}(s) = [\Psi(s)]_+[\Psi(s)]_-$ — спектральна щільність сигналу $x(t)$.

Для дробово-раціональних спектральних щільностей оптимальну ФРПР знаходять за формулою

$$W(s) = \frac{1}{[\Psi(s)]_+}\left\{\frac{S'_{xy}(s)}{[\Psi(s)]_-}\right\}_+,$$

де операція $\{\cdot\}_+$ означає розкладання $S_{xy}(s)/[\Psi(s)]_-$ на суму елементарних дробів і відкидання членів, які мають полюси в правій півплощині.

Літ.: Теория автоматического регулирования, кн. 2. М., 1967 [бібліогр. с. 653—674]; Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1950.

В. П. Яковлев.

ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЗВИЧАЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ. Значення параметра λ, за яких існують відмінні від тотожного нуля розв'язки рівняння

$$L_1u = \lambda L_2u, \tag{1}$$

які відповідають у деяких точках додатковим умовам

$$L_0u = 0, \tag{2}$$

наз. власними числами (в. ч.), а відповідні розв'язки u рівняння (1) з умовою (2) — власними ф-ціями (в. ф.). Тут $L_\alpha u$, $\alpha = 0, 1, 2$ — диф. вирази. Рівняння (1) з умовами (2) становить задачу на власні значення (з. в. з.). Напр., задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \quad 0 < x < 1, \; u(0) = u(1) = 0 \tag{3}$$

має власні числа й власні ф-ції відповідно

$$\lambda^{(k)} = (\pi k)^2, \quad u^{(k)}(x) = \sin \pi kx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Задачі на власні значення точно розв'язано лише для дуже небагатьох випадків. Для наближеного розв'язування їх застосовують різні *чисельні методи*, основні з них розглянуто нижче.

Метод скінченних різниць, або метод сіток, полягає в тому, що область неперервного змінювання змінного x замінюють на скінченну множину точок або вузлів, які наз. сіткою. Дифер. співвідношення в вузлах сітки замінюють різницевими й замість задачі (1—2) розв'язують відповідну алгебр. задачу (див. *Власних значень і власних векторів матриць способи обчислювання*). Напр., відрізок [0, 1] поділяють на N однакових частин завдовжки $h = \frac{1}{N}$ точками поділу $x_i = ih$ і замість задачі (3) розв'язують алгебр. задачу

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \mu y_i, \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$y_0 = y_N = 0,$$

розв'язки $y^{(k)}$, $\mu^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ якої є наближеннями до перших $N-1$ власних чисел і власних ф-цій задачі (3). Точність звичайного методу сіток характеризується нерівностями

$$|\lambda^{(k)} - \mu^{(k)}| \leqslant M_1(k)h^2, \quad |y_i^{(k)} - u^{(k)}(x_i)| \leqslant M_2(k)h^2,$$

де $M_1(k)$ й $M_2(k)$ — постійні. Іноді застосовують метод сіток підвищеної точності. Особливо ефективним цей метод є для рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = \lambda r(x)u$$

з кусково-неперервними коефіцієнтами p, q, r. При цьому одержують алгебр. задачу з тридіагональною матрицею. Тоді вдається побудувати триточкові різницеві схеми будь-якого порядку точності, тобто справджуються оцінки

$$|\lambda^{(k)} - \mu^{(k)}| \leqslant M_1(k)h^{2m},$$
$$|u^{(k)}(x_i) - y_i^{(k)}| \leqslant M_2(k)h^{2m}, \tag{5}$$

де m — будь-яке ціле число.

Якщо для заданої задачі на власні значення можна вказати близьку до неї в певному розумінні іншу задачу на власне значення, розв'язок якої відомий, то можна використати метод збурень. Для цього вводять параметр збурення ε й розглядають задачу

$$(L_1^* + \varepsilon\bar{L}_1)u = \lambda(L_2^* + \varepsilon\bar{L}_2)u, \quad \bar{L}_\alpha = L_\alpha - L_\alpha^*, \tag{6}$$

таку, що при $\varepsilon = 0$ маємо близьку задачу

$$L_1^*u = \lambda L_2^*u, \tag{7}$$

а при $\varepsilon = 1$ — первісну задачу. Власну ф-цію і власне число (6) шукають у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\varepsilon^k, \quad \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k. \tag{8}$$

Підставивши умови (8) в задачу (6) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, після певних перетворень одержують рекурентні співвідношення для коефіцієнтів $u_k(x)$ і λ_k. Знаючи в. ч. і в. ф. λ_0 й $u_0(x)$ задачі (7), знаходять λ_1 й $u_1(x)$, а потім, використавши значення $\lambda_0, u_0(x)$, λ_1, $u_1(x)$, одержують λ_2 й $u_2(x)$ і т. д. Обмежившись у рівняннях (8) скінченним числом членів, одержують наближені в. ф. і в. ч.

Методом колокацій в. ф. знаходять у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i v_i(x), \tag{9}$$

де ф-ції $v_i(x)$ задовольняють умову (2). З умови (9), яка відповідає рівнянню (1) у p рівномірно розподілених точках, для визна-

чення параметрів c_i одержують систему однорідних рівнянь. Наближені значення власних чисел p знаходять як нулі визначника цієї системи.

Метод рядів полягає в зображенні в. ф. у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v^i(x). \tag{10}$$

Підставивши (10) в (1) і врахувавши розвинення у ряд за $v_s(x)$ ф-цій $L_\alpha v_i(x)$, $\alpha = 1, 2$, одержують нескінченну однорідну систему лінійних алгебр. рівнянь відносно c_i, яку під час розв'язування зрізують. Перші k наближених власних чисел є нулями визначника зрізаної системи k-го порядку. Задачі на власні значення можна розглядати як нелінійні, тому до них можна застосовувати деякі методи розв'язування нелінійних рівнянь (див. *Операторних рівнянь способи розв'язування*). Напр., задачі на власні значення для систем звичайних дифер. рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = A(x, \lambda) Y, \qquad 0 < x < 1, \tag{11}$$

за додаткових умов

$$\sum_{i=1}^{m} B_i(\lambda) Y(x_i) = 0, \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{12}$$

де $A(x, \lambda)$ і $B_i(\lambda)$ — матриці, розв'язують так. Оскільки в. ф. визначають з точністю до постійного множника, додають ще й умову, яка фіксує цей множник. Таку умову наз. нормуванням. Нехай вона має вигляд

$$y_k(x_0) = 1, \tag{13}$$

де y_k — k-а компонента вектора $Y(x)$. Водночас у задачі є на одну умову більше, ніж потрібно для визначення задачі за будь-якого фіксованого λ. Отже, задачу (11) — (13) можна розв'язувати, не враховуючи однієї з умов (12). Одержаний розв'язок підставляють у всі умови (12) і за величиною результатів роблять висновок про близькість вибраного λ до в. ч. Задавши наближення $\bar{\lambda}$ до в. ч. λ, розв'язують крайову задачу

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(x, \bar{\lambda}) \bar{Y}. \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i^{(k)}(\bar{\lambda}) \bar{Y}(x_i) = 0. \tag{15}$$

$$\bar{y}_k(x_0) = 1, \tag{16}$$

де (15) — умови існування рівняння (12) без k-го рівняння. Потім здійснюють ітерації за методом Ньютона у вигляді

$$\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} - \frac{\varphi^2(\bar{\lambda})}{\varphi(\bar{\lambda} + \varphi(\bar{\lambda})) - \varphi(\bar{\lambda})} \tag{17}$$

де

$$\varphi(\lambda) = \left\| \sum_{i=1}^{m} B_i(\lambda) Y(x_i) \right\|^2, \tag{18}$$

$\| \cdot \|$ — норма в евклідовому просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі).

Крім зазначених методів, можна використовувати й деякі інші методи (див. *Власних значень диференціальних рівнянь у частинних похідних способи обчислювання*).

Літ.: Тихонов А. Н., Самарский А. А. Разностная задача Штурма — Лиувилля. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1961, т. 1, № 5; Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2. К., 1966 [бібліогр. с. 241—243]; Приказчиков В. Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма — Лиувилля. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1969, т. 9, № 2; Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. Пер. с нем. М., 1968 [бібліогр. с. 501—503].

В. Г. Приказчиков.

ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ. Нехай A й B — лінійні дифер. оператори в частинних похідних. Нетривіальні розв'язки рівняння

$$Aw = \lambda Bw, \tag{1}$$

які задовольняють задані однорідні граничні умови

$$L_i w |_\Gamma = 0, \tag{2}$$

де L_i — якийсь дифер. *оператор*, наз. власними функціями (в. ф.) задачі (1)—(2), а відповідні їм значення параметра λ — власними значеннями (в. з.) рівняння (1). Якщо $B \equiv E$ (E — тотожний оператор), то замість (1) одержуємо рівняння

$$Aw = \lambda w, \tag{3}$$

яке часто зустрічаємо в різних розділах математики та її застосуваннях.

Напр.: а) в. з. задачі $-\Delta w = \lambda w$, $w|_\Gamma = 0$ для прямокутної області $\{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$, де Δ — оператор Лапласа, визначаються за ф-лою

$$\lambda_{ks} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right); \qquad k, s = 1, 2, \ldots;$$

б) коли $A \equiv \Delta\Delta$ (бігармонічний оператор), а область — круг, то за умов $w \Big|_\Gamma = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$ $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right.$ — похідна по напряму нормалі до контура) рівняння (3) зводиться до звичайного дифер. рівняння, і в. з. визначають через корені ф-цій Бесселя; в) коли $A \equiv \Delta\Delta$, а область — прямокутник, то за умов $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ на двох протилежних сторонах прямокутника (умови на обох інших сторонах — будь-які), розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$w(x, \quad y) = X(x) \sin \frac{\pi s y}{b}, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

де $X(x)$ — невідома (шукана) функція. Підставивши (4) в (3) й відділивши змінні, одержимо звичайне дифер. рівняння 4-го порядку відносно ф-ції $X(x)$. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння й підпорядкувавши його заданим крайовим умовам, одержимо трансцендентне рівняння, корені якого визначають величину параметра λ;

г) в. з. задачі $\Delta\Delta w = -\lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, $w \Big|_\Gamma = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \Big|_\Gamma = 0$ $(q = \text{const})$ для прямокутника $\{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ обчислюють за ф-лою

$$\lambda_{ks} = \frac{k^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2}{\frac{k^2}{a^2} + q \frac{s^2}{b^2}}, \quad k, s = 1, 2, \ldots .$$

Якщо точного розв'язку рівнянь (1) або (3) одержати неможливо, в. з. визначають за допомогою різних наближених методів.

Метод Релея — Рітца застосовують для рівнянь (3) з додатно визначеним оператором, в. ф. якого мають важливі екстрем. властивості, що дають змогу звести задачу відшукування в. з. до дослідження екстремуму функціоналу

$$\left(\frac{Aw, w}{w, w} \right). \quad (5)$$

Цю задачу розв'язують за методом Релея — Рітца: задають послідовність координатних ф-цій $\varphi_n \in H_A$ $(n = 1, 2 \ldots)$, де H_A — лінійний нормований простір, у якому норму елемента $w \in H_A$ задають рівністю $\|w\| = \sqrt{(Aw, w)}$ (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*), які за будь-якого n лінійно незалежні й утворюють повну систему в енерг. просторі H_A; набл. розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k; \quad (6)$$

з умови мінімуму функціоналу (5) при $w = w_n$ одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно коеф. a_k

$$\sum_{k=1}^{n} [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)] a_k = 0, \quad (7)$$
$$m = 1, 2, \ldots, n;$$

прирівнюючи визначник системи (7) до нуля, приходимо до рівняння n-го степеня відносно λ

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1); & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1); & \ldots; & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2); & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2); & \ldots; & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n); & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n); & \ldots; & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Усі корені рівняння (8) — додатні. Коли їх розмістити в порядку зростання, тобто $\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^{(n)}$, то кожний з цих коренів є набл. значенням відповідного в. з. початкового рівняння (3), причому $\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = \lambda_k$.

Метод Релея — Рітца ефективний в обчисленнях перших в. з. і дає для цих значень наближення згори $(\lambda_k^{(n)} \geqslant \lambda_k)$. При обчисленні в. з. з великими номерами виникають труднощі, пов'язані з апроксимацією в. ф. лінійною комбінацією (6): як правило, у виразі (6) доводиться брати досить велику кількість координатних ф-цій, а це дуже ускладнює процес обчислювань і може призвести до нагромадження значних *заокруглення похибок*. Вдалий вибір координатних ф-цій істотно впливає на точність набл. розв'язків, одержуваних за методом Релея — Рітца. Зокрема, якщо ф-ції φ_n утворюють ортонормовану систему, то рівняння (8) спрощується й набирає вигляду

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda; & \cdots & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2); & \cdots & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\varphi_1, \varphi_n); & \cdots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

За **методом Бубнова — Гальоркіна** розв'язок рівнянь (3) має вигляд (6), де $\{\varphi_n\}$ — послідовність ф-цій, які можна достатню кількість разів продиференціювати і які задовольняють усі крайові умови, а також умови лінійної незалежності й повноти. Проектуючи відхил $Aw_n - \lambda w_n$ на підпростір, утворений ф-ціями φ_n, і вимагаючи виконання умови ортогональності

$$\left(A \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right) - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \varphi_m \right) = 0,$$
$$m = 1, 2, \ldots, n,$$

одержуємо систему рівнянь вигляду (7) відносно a_k. Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, знову приходимо до рівняння вигляду (8). Якщо оператор A додатно визначений, то методи Релея — Рітца й Бубнова — Гальоркіна збігаються. В загальному випадку метод Бубнова — Гальоркіна має більшу область застосовності завдяки не таким жорстким обмеженням, що їх накладають на оператор A.

Асимптотичний метод розроблено у зв'язку з розв'язуванням задач про вільні коливання пластин та оболонок. Нехай потрібно визначити частоти власних коливань пологої, прямокутної в плані оболонки з постійними головними кривизнами. Ця задача зводиться до інтегрування дифер. рівняння 8-го порядку вигляду

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + + c\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \lambda\Delta\Delta w = 0, \quad (10)$$

де a, b, c — const. Згідно з цим методом розглядають т. з. «внутрішній» розв'язок, який задовольняє рівняння (10), але, взагалі кажучи, не задовольняє граничних умов, і розв'язок в околі межі, який задовольняє всі граничні умови й наближається асимптотично до «внутрішнього» розв'язку при віддаленні від межі області. Склеюючи ці два розв'язки, одержують трансцендентні рівняння для обчислювання невідомих параметрів, які входять у вираз для в. з. За «внутрішній» розв'язок рівняння (10) можна взяти вираз

$$w = C_0 \sin k_1(x - x_0)\sin k_2(y - y_0), \quad (11)$$

де C_0 — нормувальний множник, k_1, k_2, x_0, y_0 — параметри, які належить визначити. В околі лінії $x = 0$ розв'язок визначається як

$$w_*(x, y) = \Phi(x)\sin k_2(y - y_0). \quad (12)$$

Підставляння (12) в (10) дає дифер. рівняння 8-го порядку з постійними коеф. відносно $\Phi(x)$

$$\Phi^{VIII} + p_1\Phi^{VI} + p_2\Phi^{IV} + p_3\Phi^{II} + p_4\Phi = 0. \quad (13)$$

Застосовувати асимптотичний метод можна, якщо серед коренів характеристичного рівняння, відповідного рівнянню (13), знайдеться не менше як три корені з від'ємною дійсною частиною. Напр., якщо інтеграл рівняння (13) має вигляд

$$\Phi(x) = C_1\sin\beta_1 x + C_2\cos\beta_1 x + C_3 e^{-\alpha_1 x} + + C_4 e^{-\alpha_2 x} + C_5 e^{-\alpha_3 x} + C_6 e^{\alpha_1 x} + C_7 e^{\alpha_2 x} + + C_8 e^{\alpha_3 x}\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0), \quad (14)$$

то, відкидаючи члени, які необмежено зростають зі збільшенням x, одержуємо в околі межі $x = 0$ набл. розв'язок

$$\tilde{w}(x, y) = \Psi(x)\sin k_2(y - y_0), \quad (15)$$

де

$$\Psi(x) = C_1\sin\beta_1 x + C_2\cos\beta_1 x + C_3 e^{-\alpha_1 x} + + C_4 e^{-\alpha_2 x} + C_5 e^{-\alpha_3 x}. \quad (16)$$

Вираз (15) дає змогу задовольнити всі крайові умови на лінії $x = 0$ і граничне співвідношення

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x) = C_0 \sin k_1(x - x_0).$$

Метод скінченних різниць полягає в заміні дифер. оператора й операторів крайових умов скінченнорізницевими виразами, внаслідок чого початкову задачу замінюють якоюсь її дискретною моделлю

$$A_h w_h = \lambda_h w_h. \quad (17)$$

Задача (17) рівносильна обчисленню власних векторів і в. з. матриці (див. *Власних значень і власних векторів матриць способи обчислювання*) порядок якої визначається кількістю внутр. вузлів сіткової області. Перехід від рівняння (3) до його дискретного аналога (17) можливий для довільних областей і довільних операторів, зокрема для тих, які містять змінні коеф. Це надає методові скінченних різниць достатньої універсальності. Але, коли крайові умови містять похідні високих порядків (а це часто трапляється в практично важливих задачах), то для довільних областей виникають труднощі, пов'язані з апроксимацією крайових умов скінченнорізницевими виразами.

Метод наближеного поділу змінних (метод розщеплювання) застосовують для прямокутних областей, коли оператор A має вигляд

$$Aw = \sum_{k=1}^{p} a_k\Delta^k w + b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ 2 \leqslant p \leqslant 4,$$

$$\Delta^k w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k w,\ a_k,\ b,\ c — \text{const},$$

а оператор B або є тотожним оператором, або містить лише похідні $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$, $\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}$, $k = 1, 2, \ldots$ з постійними коеф. Цей метод застосовують і для дискретних, і для неперервних задач за найзагальніших крайових умов. Якщо задачу (1)—(2) замінити дискретним аналогом, то цей метод дає змогу відшукати достатньо добре нульове наближення для повної проблеми в ф. та в. з. різницевої задачі, обминаючи обчислення коренів характеристичного визначника. Це наближення потім можна уточнити одним з відомих ітераційних методів розв'язування алгебр. проблеми в. з. і власних векторів. Метод особливо ефективний при обчислюванні в. з., відповідних вищим формам коливань. Якщо задача (1)—(2) допускає поділ змінних у звичайному розумінні, то метод наближеного поділу змінних вироджується в класичний метод Фур'є.

За методом колокацій набл. розв'язок задачі (1)—(2) шукаємо у вигляді (6), де a_k — якісь параметри, а ф-ції φ_k задовольняють крайові умови (2). Ставлячи вимогу, щоб вираз (6) задовольняв рівняння (1) в заданих n точках області (точках колокації), одержуємо однорідну систему лінійних алгебр. рівнянь відносно параметрів a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Прирівнявши визначник цієї системи до нуля, одержуємо рівняння для знаходження

наближених в. з. Метод колокацій відзначається простотою, але наслідки обчислювань дуже залежать від вибору точок k.

За методом мінімізації середньоквадратичної похибки наближений розв'язок задачі (1)—(2) знаходять у вигляді лінійної комбінації (6) ф-цій φ_k, які задовольняють крайові умови (2). З умови мінімуму функціоналу

$$F(w_n) = \frac{\int_\Omega (Aw_n - \lambda Bw_n)^2 \, d\Omega}{\|w_n\|^2}$$

одержуємо рівняння для визначення наближених в. з. і постійних a_k

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Метод сумарних представлень застосовують у випадку самоспряжених операторів з постійними коеф. для областей, складених з прямокутників, областей з розрізами та виїмками тощо. Цей метод є скінченнорізницевим аналогом методів інтегр. представлень у матем. фізиці. Розв'язування різницевої задачі в будь-якій точці сіткової області при великій кількості вузлів подається у вигляді т. з. формул сумарних представлень, що містять порівняно небагато параметрів. Відносно останніх складають системи лінійних алгебр. рівнянь, що містять параметр λ. Прирівнявши до 0 визначник цієї системи, одержують характеристичне рівняння для визначення в. з. різницевої задачі. В. ф. даються ф-лами сумарних представлень. Цей метод запропонував рад. математик Г. М. Положій (1914—68).

Літ.: Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. «Прикладная математика и механика», 1960, т. 24, в. 5; Положий Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. К., 1962 [бібліогр. с. 157—159]; Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966; Бабаков И. М. Теория колебаний. М., 1968; Буледза А. В. Об одном методе исследования свободных колебаний прямоугольных пластин. «Прикладная механика», 1970, т. 6, в. 9; Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970 [бібліогр. с. 502—510]; Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Пер. с нем. М., 1968 [бібліогр. с. 501—503].

А. В. Буледза.

ВЛА́СНИХ ЗНА́ЧЕНЬ І ВЛА́СНИХ ВЕ́КТОРІВ МА́ТРИЦЬ СПО́СОБИ ОБЧИ́СЛЮВАННЯ. Значення параметра λ, при яких існують не тотожно рівні нулеві розв'язки x системи алгебр. рівнянь

$$Ax = \lambda Bx, \tag{1}$$

наз. власними числами (в. ч.) або власними значеннями, а відповідні їм розв'язки x — власними n-вимірними векторами (в. в.) квадратної матриці A порядку n відносно квадратної матриці B того самого порядку. Якщо матриця B одинична ($B \equiv E$), то кажуть про в. ч. і в. в. матриці A. В. ч. системи (1) є коренями характеристичного полінома (х. п.), тобто коренями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння

$$|A - \lambda B| = 0, \tag{2}$$

де $|\cdot|$ — визначник матриці. В. в. системи (1), який відповідає в. ч. λ_k, задовольняє систему алгебр. рівнянь

$$(A - \lambda_k B)\, x_k = 0. \tag{3}$$

Вивчення в. в. і в. ч. необхідне, напр., при досліджуванні коливань і стійкості різних мех. систем. Знаходження всіх в. ч. і в. в. системи (1) наз. повною проблемою власних значень (п. п. в. з.) Знаходження кількох в. ч. і в. в. системи (1) наз. частковою проблемою власних значень (ч. п. в. з.)

Методи обчислювань в. ч. та в. в. ділять на прямі й непрямі. В прямих методах спочатку знаходять безпосередньо коеф. х. п. Для того, щоб знайти в. ч., треба визначити будь-яким методом його корені. Потім знаходять в. в. як розв'язки системи (3). В прямих методах використовують перетворення подібності, тобто перетворення матриці A виду

$$\tilde{A} = T^{-1} A T, \tag{4}$$

де T — якась матриця і T^{-1} — обернена їй матриця. В результаті таких перетворень х. п. не змінюється, а матриця зводиться до простішого вигляду, х. п. якого легко виписувати. Напр., щоб розв'язати задачу

$$Ax = \lambda x \tag{5}$$

з матрицею відносно невисокого порядку, слід користуватися методом Данилевського, за допомогою якого подібними перетвореннями зводять матрицю A до матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & p_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

яка має в останньому стовпчику коеф. х. п.

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \left[\lambda^n - \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^{n-i}\right]. \tag{7}$$

Осн. вадою більшості прямих методів є нестійкість щодо *заокруглення похибок*, неминучих при обчислюванні на ЕОМ. Така нестійкість проявляється тим більшою мірою, чим більший порядок n. Тому для систем відносно високого порядку доцільно користуватися непрямими методами, які дають змогу знаходити в. ч. і в. в. за допомогою деяких збіжних числових послідовностей, обминаючи побудову х. п. При цьому використовують подібні перетворення (4) з ортогональними матрицями T

$$T^{-1} = T^*, \tag{8}$$

де T^* — транспонована до T матриця. У цьому разі ітераційні процеси стійкі щодо похибок округлення. Крім того, непрямі методи зручні в розумінні організації багаторазового обчислювання на ЕОМ за одними й тими самими простими ф-лами. Напр., для розв'язання п. п.в. з., коли у (5) матриця симетрич-

на ($A = A^*$), слід користуватися методом обертання, який добре зарекомендував себе на практиці. При застосуванні цього методу утворюється послідовність матриць D, подібних до вихідної, позадіагональні елементи яких наближаються до нуля, а діагональні елементи — до в. ч. Точніше, якщо задано міру точності ε, то настане момент, коли справдиться нерівність $|d_{ii} - \lambda| < M\varepsilon^2$, де d_{ii} — діагональний елемент матриці D, λ — в. ч. матриці A, M — стала величина, незалежна від ε. Матриця перетворень T в цьому методі виходить як добуток матриць обертання. Стовпчики матриці T є в. в. матриці A. Метод обертань легко поширюється на систему (1), коли матрицю B додатно означено. Якщо матриця A в (5) — довільна дійсна або якщо вона має стрічкову структуру, то доцільно користуватися QR — методом, який описують такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &A = Q_1R_1,\\ &R_1Q_1 = Q_2R_2, \qquad (9)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &R_{s-1}Q_{s-1} = Q_sR_s. \end{aligned}$$

Тут Q — ортогональні, R — праві трикутні матриці. Такий розклад на множники здійснюють за допомогою матриць обертання або відображування. Матриці $H_s = R_sQ_s$ подібні до початкової, а в процесі ітерацій наближаються до правої квазітрикутної матриці, квадратні клітини на діагоналі якої мають в. ч., близькі до в. ч. початкової матриці. Якщо дійсне в. ч. матриці A має кратність k, йому відповідає діагональна клітина порядку k квазітрикутної матриці. Парі комплексних в. ч. матриці відповідає діагональна клітина 2-го порядку квазітрикутної матриці. Метод зберігає в процесі перетворювань стрічкову структуру матриці, зокрема, майже трикутну матрицю

$$A_2 = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Це дає змогу значно скоротити кількість арифм. операцій. Тому початкову матрицю A спочатку зводять за допомогою подібних перетворювань до вигляду (10). Якщо $A = A^*$, то (10) є тридіагональною матрицею. Цей метод поширюється й на систему (1) з довільними матрицями A і B; він відомий у цьому разі як QZ-метод.

Розв'язуючи п. п. в. з. для системи (1) досить високого порядку, не економно користуватися методами, описаними вище, навіть якщо їх модифіковано спеціально для цієї проблеми. Для обчислення макс. і мінім. за абс. величиною в. ч. і векторів, які їм відповідають, користуються ступеневим методом. Напр., для задачі (5), коли $A = A^*$, в. в., який відповідає макс. в. ч., знаходять як границю послідовності

$$x_{s+1} = Ax_s = A^{s+1}x_0, \qquad (11)$$

починаючи з заданого вектора x_0. Відповідне наближення до в. ч. при цьому обчислюють за ф-лою

$$\lambda_{s+1} = \frac{(x_{s+1}, x_{s+5})}{(x_{s+1}, x_s)}. \qquad (12)$$

Якщо відоме досить задовільне наближення λ_s і x_s до якогось в. ч. і в. в. (5) при $A = A^*$, щоб уточнити наближення, користуються степеневим ітераційним методом виду

$$(A - \lambda_s E)\, x_{s+1} = x_s. \qquad (13)$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо x_{s+1} — найкраще наближення до в. в. Найкраще наближення λ_{s+1} до в. ч. одержимо з ф-ли

$$\lambda_{s+1} = \lambda_s + \frac{1}{\delta_s}; \quad \delta_s = \frac{(x_{s+1}, x_{s+1})}{(x_{s+1}, x_s)}. \qquad (14)$$

Але, як показали практичні розрахунки, степеневі методи не завжди надійні, тобто в процесі ітерацій можна одержати не крайні в. ч. і в. в. Тому для обчислювання крайніх в. ч. і відповідних їм в. в. слід застосовувати методи виду

$$x_{s+1} = x_s + \tau_s w_s, \qquad (15)$$

де вектор w_s і параметр τ_s вибирають спеціально. Напр., для системи (1), коли $A = A^*$ й $B = B^*$, за w_s можна взяти вектор нев'язки

$$w_s = Ax_s - \lambda_s Bx_s, \qquad (16)$$

а параметр τ_s обчислити як корінь кв. рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau & \tau^2 \\ (Ax_s, x_s) & (Ax_s, r_s) & (Ar_s, r_s) \\ (Bx_s, x_s) & (Bx_s, r_s) & (Br_s, r_s) \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Наближення до в. ч. у цьому разі знаходять за ф-лою

$$\lambda_{s+1} = \frac{(Ax_{s+1}, x_{s+1})}{(Bx_{s+1}, x_{s+1})}. \qquad (18)$$

При цьому мінім. корінь рівняння (17) забезпечує збіжність до мінімального в. ч., а макс. корінь — до макс в. ч.

Крім розглянутих методів, існує й багато інших. Для багатьох з них розроблено стандартні програми.

Літ.: Самокиш Б. А. Метод наискорейшего спуска в задаче о собственных элементах полуограниченных операторов. «Известия высших учебных заведений. Математика», 1958, № 5; Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., 1963 [бібліогр. с. 677—734]; Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М., 1966 [бібліогр. с. 247—248]; Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 559—564].

В. Г. Приказчиков.

ВЛАСТИ́ВІСТЬ ВІДСУ́ТНОСТІ ПІСЛЯДІЇ — властивість *потоку випадкового*, що виражається в незалежності ймовірності $v_k(\tau)$ настання k подій потоку в проміжку часу $(t, t+\tau)$ від чергування подій до моменту t. В. в. п. полягає у взаємній незалежності реалізацій потоку в проміжках часу, що не перетинаються один одним. Мати В. в. п. може лише потік, для якого проміжки часу між послідовними подіями взаємно незалежні. В такому разі В. в. п. стає властивістю розподілу тривалості проміжку між подіями потоку. Для того, щоб потік мав В. в. п., достатньо й необхідно, щоб розподіл залишкової тривалості випадкового проміжку $F(z/x) = [Q(x+z) - Q(x)]/[1 - Q(x)]$, $(x \geqslant 0)$ тотожно збігався з розподілом $Q(x)$ самого цього проміжку.

В. в. п. мають, напр., випадковий *Пуассона потік* (показниковий розподіл $1 - e^{\lambda x}$, $(\lambda > 0)$) і дискретний *потік геометричний* (геометричний розподіл $p(1-p)^n$, $(0 < p < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots))$. Це перевіряється безпосередньою підстановкою зазначених ф-цій розподілу у вираз для залишкової тривалості випадкового проміжку. Серед усіх неперервних розподілів імовірностей, зосереджених на додатній напівосі, В. в. п. має лише *показниковий розподіл* $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

М. В. Яровицький.

«ВНИИЭМ» — сімейство цифрових керуючих машин. Розроблені 1962—65 Всесоюзним науково-дослідним інститутом електромеханіки (Москва). Було випущено кілька таких машин, використаних для створення дослідно-пром. систем керування. Найдосконаліша з них — «ВНИИЭМ-3» має двійкову систему числення, форму подавання чисел — з фіксованою комою (з плаваючою комою за підпрограмою), одноадресну структуру команд, довжину слова — 24 двійкові розряди. Особливості системи команд — робота з цілими словами, півсловами й словами подвійної довжини, адресний вибір вхідних і вихідних каналів перетворення; операції з безпосередньою адресацією; операції з алфавітно-цифровою інформацією. Система апаратного контролю — дубльований *арифметичний пристрій*, коди з автокорекцією помилок. Має 168 каналів переривання (з пріоритетом). Швидкодія з фіксованою комою (додавання) — 40 000 операцій за 1 *сек.* Ємність феритового запам'ятовувального пристрою (ЗП) — 4096 слів (розширюється до 28 672 модулями по 8192 слів). Кількість пристроїв на магнітній стрічці, з якими може працювати машина,— 16. Може приймати інформацію від телеграфних і телефонних ліній зв'язку. Осн. вивідні пристрої: алфавітно-цифровий друкувальний механізм АЦДМ, перфострічка, електр. друкувальні машини.

Літ.. Малиновський Б. М. Обчислювальна техніка в народному господарстві. К., 1965; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181].

Б. М. Малиновський.

ВОЛЬТЕ́РРИ РІВНЯ́ННЯ — один з широко вживаних видів *інтегральних рівнянь.*

ВСЕСОЮ́ЗНИЙ ІНСТИТУ́Т НАУКО́ВОЇ І ТЕХНІ́ЧНОЇ ІНФОРМА́ЦІЇ (ВІНІТІ) — інформаційна й науково-дослідна установа в Москві. Організований 1952 в системі АН СРСР як Ін-т наук. інформації (з 1955 має теперішню назву й перебуває в подвійному підпорядкуванні — Держ. комітету Ради Міністрів СРСР з науки і техніки й АН СРСР). Осн. завдання: систематично й вичерпно реферувати всю світову літературу в галузі природознавства й техніки; готувати й видавати на цій основі реферативний журнал, випускати оглядово-бібліографічну й довідкову літературу та експрес-інформацію з найактуальніших питань науки і техніки; організовувати й розвивати наук. дослідження, спрямовані на вдосконалювання методів і тех. засобів, використовуваних у науково-інформаційній діяльності. Структурно ін-т складається з кількох десятків галузевих, функціональних і науково-дослідних відділів, машинолічильної станції, виробничо-видавничого комбінату й довідково-інформаційних служб. Ін-т є гол. науково-інформаційною орг-цією в СРСР (здійснює координацію досліджень і розробок у галузі науково-інформаційної діяльності в країні).

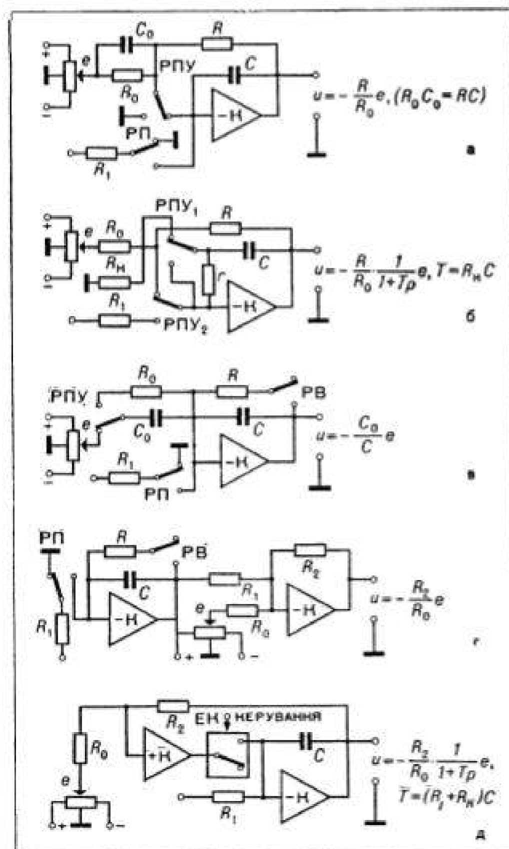
ВІНІТІ видає «Реферативный журнал» (у 172 випусках, з яких 40 виходять окремими випусками, 132 — у 25 зведених томах), випуски «Экспресс-информация» (в 76 серіях), щорічник «Итоги науки и техники» й збірник «Научно-техническая информация». При Ін-ті є аспірантура.

Літ.: Арутюнов Н. Б. Дальнейшее развитие системы научно-технической информации в СССР. «Научно-техническая информация. Серия 1», 1967, № 11; Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Развитие информатики в СССР. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1967, № 11; Фомин А. А. Всесоюзный институт научной и технической информации и его деятельность. М., 1968 [бібліогр. с. 49—61].

О. І. Михайлов.

ВСТАНО́ВЛЕННЯ ПОЧАТКО́ВИХ УМО́В — режим розв'язувальної схеми АОМ, у якому формуються значення напруг на виходах *підсилювачів операційних*, що відповідають у певному масштабі початковим умовам розв'язуваного дифер. рівняння. Значення напруг початкових умов визначаються за масштабом представлення шуканої змінної з рівнянь структурної схеми моделювання. Початкові умови можуть задаватися або зарядом інтегрувального конденсатора, або підмиканням до виходу інтегратора додаткового суматора, який додає напругу початкових умов. Інтегрувальний конденсатор заряджається перед початком інтегрування безпосередньо від джерела напруги початкових умов або непрямим шляхом (через підсилювач постійного струму (ППС)). На схемі (мал., *а*) заряджання інтегрувального конденсатора здійснюється переведенням інтегратора в режим інерційної ланки з форсівною ємністю у вхідному колі. За рівності сталої часу $R_0C_0 = RC$ вихідна напруга встановлюється практично вмить.

Вадою такої схеми є те, що потрібно точно підбирати сталу часу, бо при $R_0C_0 < RC$ процес досягання усталеного значення вихідної напруги сповільнюється, а при $R_0C_0 > RC$ відбувається стрибок напруги на виході, який може призвести до тимчасового перевантаження ППС. Швидкий процес В. п. у. забезпечується переведенням інтегратора в режим масштабної ланки (мал., *б*), до виходу якого підмикається інтегрувальний конденсатор. Час встановлення вихідної напруги залежить у цьому разі від опору $R_н$, що визначається умовами стійкості застосовуваного в схемі ППС і звичайно є достатньо малим. Опір r служить для збереження негативного зворотного зв'язку в момент комутації та обирається в межах кількасот *ком*. Якщо процес розв'язування повторюється з частотою 10 *гц* і більшою, для В. п. у. застосовується схема (мал., *в*), в якій інтегратор переводиться в режим ємнісної масштабної ланки. Ємності C та C_0 перед В. п. у. попередньо розряджаються. Якщо внутр. опір джерела малий, В. п. у. відбувається практично вмить. В АОМ з періодизацією розв'язування часто використовуються схеми В. п. у. (мал., *г* і *д*) з добрими динамічними характеристиками. Вада цих схем — велика, порівняно з попередніми, складність, хоча в схемі (мал., *г*) як додатковий суматор можна використати суматори, що є в схемі набору задачі. Крім того, використовуючи цю схему для В. п. у., шкалу змінювання змінних слід обирати в два рази меншу, щоб уникнути можливого перевантаження додаткового суматора. Додатковий підсилювач у схемі (мал., *д*) має характеризуватися додатним коефіцієнтом підсилення і малим вихідним опором. Високі вимоги ставлять і до електронного ключа (великий опір і відсутність залишкового струму в закритому стані, малий опір — у відкритому тощо).



Схеми встановлення початкових умов: РПУ — реле початкових умов; РП — реле пуску; РВ — реле відправного положення (для розряджування інтегрувального конденсатора), $R_К$ — опір електричного ключа (ЕК) у відкритому стані; R_i — вихідний опір підсилювача +К.

Літ.: Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.— Л., 1964. *Ю. П. Космач.*

ВТРА́ТИ ІНФОРМА́ЦІЇ під час пошуку — невидавання *інформаційно-пошуковою системою* документів, релевантних даному запитові. Коефіцієнт В. і. під час пошуку Q пов'язаний з *коефіцієнтом повноти пошуку* R співвідношенням $Q = 1 - R$. Див. *Ефективність інформаційного пошуку* технічна, *Релевантність документа*. *Н. О. Стоколова.*

ВУЗЛОВИ́Й СПИ́СОК — спосіб асоціативної організації інформації про різні об'єкти в *пам'яті ЦОМ*, при якому кожний об'єкт представляється вузлом перетину кількох ланцюгових списків, що відповідають значенням його ознак. Вузол складається з заголовка вузла, в якому зберігається назва об'єкта, адреси довідкової інформації про цей об'єкт, і кількох спискових слів, які містять у собі значення ознак об'єкта й адреси зв'язку, що відсилають до наступних членів ланцюгових списків з такими самими значеннями ознак. У заголовках вузлів можна зазначати деякі характеристики об'єкта й самого вузла (напр., кількість спискових слів у вузлі). Спискове слово може містити в собі й додаткові відомості про ознаки об'єкта, напр., вказувати відношення між різними ознаками цього об'єкта. Використовуючи В. с., можна будувати в пам'яті ЕЦОМ асоціативні адресні структури, що відображають складні системи класифікаційних та асоціативних зв'язків між об'єктами. В. с. широко застосовують при побудові асоціативно-адресних *інформаційно-пошукових систем* дескрипторного типу.

Літ.: Китов А. И. Программирование информационно-логических задач. М., 1967 [бібліогр. с. 327]. *А. І. Китов.*

ВХІДНИ́Й ПРИ́СТРІЙ — див. *Пристрої введення та виведення інформації*.

ГАМІЛЬТОНІВ ЛАНЦЮГ — *ланцюг* графа, який містить у собі всі вершини *графа* і проходить через кожну з них один і тільки один раз.

ГАМІЛЬТОНІВ ШЛЯХ (к о н т у р) — *гамільтонів ланцюг* (цикл) *графа*, в якому всі дуги орієнтовано в напрямі обходу від початкової до кінцевої вершини (у контурі початкова і кінцева вершини співпадають). Див. також *Графів теорія*.

ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ МЕТОД — метод наближеного визначення умови існування й стійкості періодичних режимів при *нелінійних систем автоматичного керування аналізі*.

ГАУССА МЕТОД — один з прямих методів розв'язування алгебричних лінійних систем рівнянь. Див. *Лінійних алгебричних систем рівнянь способи розв'язування*.

ГАУССА РОЗПОДІЛ — те саме, що й *нормальний розподіл*.

ГАУССІВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС — дійсний *випадковий процес* $\xi(t)$, для якого сумісні розподіли всіх компонент випадкового вектора $\xi(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$ є гауссівськими. Характеристична ф-ція Г. в. п. має вигляд:

$$\varphi_{t_1, \ldots, t_n}(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} a(t_k) z_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} R(t_k, t_j) z_k z_j\right\},$$

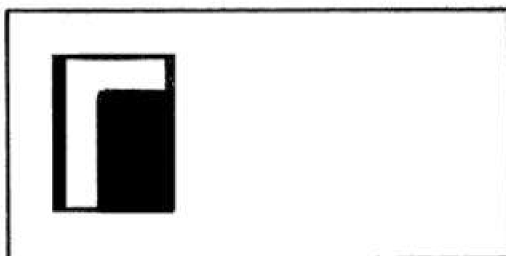
де $a(t) = M\xi(t)$ — *математичне сподівання*, а $R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)]$ — *кореляційна функція*. Процес $\xi(t)$ можна визначити або при всіх $-\infty < t < \infty$, або на скінченному інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$. Якщо t не є часом, а набуває значення з якоїсь параметричної множини Λ, то $\xi(t)$, $t \in \Lambda$ наз. гауссівською випадковою ф-цією.

Розподіл імовірностей Г. в. п. $\xi(t)$ цілком задають двома його характеристиками: матем. сподіванням $a(t)$ та кореляційною ф-цією $R(t, s)$. Матрицю $R = \{R(t_k, t_j)\}$, $k, j = 1, \ldots, n$ наз. кореляційною матрицею сумісного розподілу компонент Г. в. п. В разі, коли R — невироджена, сумісна щільність розподілу компонент Г. в. п. має вигляд:

$$p_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\operatorname{Det} R}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} R^{(-1)}(t_k, t_j)[x_k - a(t_k)][x_j - - a(t_j)]\right\},$$

де $R^{(-1)}(t_k, t_j)$ — елемент матриці $R^{(-1)}$, оберненої до R, а $\operatorname{Det} R$ — визначник матриці R. Г. в. п. має низку важливих властивостей, напр., при лінійному перетворенні Г. в. п. гауссівським є і одержаний процес. Гауссівські випадкові функції є зручною *моделлю математичною* зображення багатьох фізичних процесів. Теплові шуми в електр. мережах, броунів рух частинок, випадкові флуктуації в лінійних системах (дробовий ефект), шуми атмосферної турбулентності тощо можуть правити за приклади Г. в. п. Це пояснюється тим, що за досить загальних умов сума великої кількості незалежних і малих за величиною випадкових процесів наближено є Г. в. п., незалежно від того, яким сумісним розподілам підпорядковано окремі доданки. Математично це випливає з багатовимірного узагальнення *центральної граничної теореми*.



Важливу роль у практичних задачах відіграють гауссівські стаціонарні процеси $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, які мають властивість $a(t) = a$, $R(t, s) = R(t - s)$. Для таких процесів правильним є спектральне зображення $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dy(\lambda)$, де $y(\lambda)$ — комплекснозначний Г. в. п. з ортогональними приростами.

Літ.: Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [бібліогр. с. 648—654]; П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [бібліогр. с. 481—487]; И б р а г и м о в И. А., Р о з а н о в Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М., 1970 [бібліогр. с. 383—384]; Д е ч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 196—201].

О. М. Деменін.

ГЕДЕЛЯ ТЕОРЕМИ ПРО НЕПОВНОТУ — теореми *логіки математичної*, що показують неможливість повної формалізації арифметики та сильніших математичних теорій. Довів і опублікував їх австр. математик К. Гедель 1931. Перша теорема тісно пов'язана з явищем алгоритм. нерозв'язності, а друга є значно тоншим твердженням про формальні системи. Зміст першої теореми про неповноту (якщо обмежитися поки що арифметикою) полягає ось у чому. Нехай A — арифм. формальна система, до якої входять аксіоми Пеано (див. *Арифметика формальна*). При цьому припускають, що A коректно описує арифметику, тобто, що всі формули, які виводять в A, є істинними твердженнями про натуральні числа. Для будь-якої такої системи A перша теорема Геделя твердить, що не всі істинні формули арифметики можна довести в A. Інакше кажучи, поняття істинності формул арифм. мови ширше, ніж поняття довідності в будь-якій формальній системі (якщо вона коректна). Нижче наведено інтуїтивну ідею доведення цієї теореми, істотної

для розуміння змісту обох теорем про неповноту.

Припустимо протилежне, тобто, що арифм. істинність збігається з довідністю в A. Оскільки доведеннями в системі A є скінченні послідовності ф-л, пов'язаних між собою правилами виведення, то перевірити, чи є дана послідовність ф-л доведенням, можна за допомогою досить простого *алгоритму*. При належному кодуванні цей алгоритм можна описати арифм. мовою (див. *Арифметизація метаматематики*). Тому можна побудувати арифм. ф-лу $Pr_A(x)$, яка означає, що x є *кодом* ф-ли, довідної в A. Тепер неважко написати ф-лу — назвемо її ν_A, яка виражає свою власну недовідність. Точніше, для цієї ф-ли в системі A довідною є еквівалентність:

$$\nu_A \leftrightarrow \neg Pr_A(\bar{\nu}_A). \qquad (1)$$

де $\bar{\nu}_A$ є код ф-ли ν_A. Внаслідок припущення про те, що довідність збігається з істинністю, виходить, що ν_A виражає й свою власну хибність. Але тоді ця ф-ла не може бути ні істинною, ні хибною, так що ми приходимо до відомого «парадокса брехуна». Отже, істинність і довідність не збігаються. Прикладом істинної, але недовідної в A ф-ли саме й є ф-ла ν_A: вона істинна, бо стверджує свою недовідність і справді недовідна.

Наведені вище евристичні міркування значною мірою використовують припущення про те, що в A довідними є лише істинні ф-ли. Строгіше дослідження показує, проте, що недовідність ν_A можна вивести з слабшого припущення про несуперечливість системи A. Це уточнення має принциповий характер. Справа в тому, що поняття арифм. істинності не можна передати мовою арифметики, тоді як твердження про несуперечливість A можна записати у вигляді досить простої арифм. ф-ли con A. Через це першу теорему про неповноту можна передати мовою арифметики за допомогою ф-ли:

$$\mathrm{con}_A \to \neg Pr_A(\bar{\nu}_A). \qquad (2)$$

Можна показати, що ця ф-ла сама є вивідною з аксіом Пеано. Звідси легко одержати другу теорему Геделя про неповноту, яка нестрого твердить, що несуперечливість формальної системи A не можна довести засобами цієї системи. І строгіше, якщо формальна система A несуперечлива й містить аксіоми Пеано, то ф-ла con A є недовідною в A. Справді, з довідності ф-л (1) і (2) випливає, що ф-ли ν_A і con A еквівалентні в системі A. Але ν_A є недовідною в A згідно з першою теоремою Геделя; отже, con A також недовідна.

Досі йшлося тільки про арифметику. Але всі попередні судження можна застосувати й до досить довільних формальних систем. Зокрема, зовсім не обов'язково, щоб мовою системи A була мова елементарної арифметики. Єдине, що тут потрібно,— це, щоб осн. поняття арифметики можна було передати мовою розглядуваної формальної системи, а аксіоми Пеано, щоб були довідними в цій системі. Тому теореми Геделя можна застосувати до будь-яких розумних аксіоматизацій арифметики, аналізу чи *множин теорії*.

Теореми про неповноту виявляють одну специфічну трудність, пов'язану з доведеннями несуперечливості. Суть її найзручніше проілюструвати на прикладі теорії множин. Нехай ZF є формальна система теорії множин, яка грунтується на аксіомах Цермело—Френкеля. Досі не існує доведення несуперечливості для ZF. Проте можна наперед сказати, що таке доведення має задовольняти такі дві вимоги (з яких першу обумовлено самою постановкою питання, а друга випливає з теореми Геделя): а) це доведення має спиратися лише на концепції, інтуїтивно простіші за ті, що їх використовують у самій теорії множин; б) його не можна здійснити в межах системи ZF. Але система ZF дуже широка: в ній формалізується практично вся сучасна математика. Тому важко уявити собі, як виглядало б матем. доведення, що задовольняло б зазначені вимоги. Отже, тут зачеплено складні проблеми основ математики, через це теореми Геделя становлять певний філософський інтерес. Існує думка, що теореми про неповноту показують неможливість машинного моделювання нетривіальних форм розумової діяльності. Така думка, очевидно, не має достатніх підстав; Г. т. про н. мають до питання про маш. творчість таке саме відношення, як, напр., логічні парадокси до творчих здібностей розуму людини. Питання про можливості «машинного розуму» дискусійне (див. *Штучний розум*).

Літ.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting. «Fundamenta mathematicae», 1960, v. 49; Линдон Р. Заметки по логике. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 123]; Арбиб М. Мозг, машина и математика. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 217—224]; Нагель Э., Ньюмен Д. Р. Теорема Геделя. Пер. с англ. М., 1970.

М. В. Бєлякін.

ГЕНЕРА́ТОР ВИПАДКО́ВИХ ЧИ́СЕЛ — те саме, що й *давач випадкових чисел*.

ГЕНЕРА́ТОР ПРОГРА́М — програмний комплекс, призначений для формування потрібної користувачеві модифікації програми певного класу. Поняття «Г. п.» близьке до поняття «пакет програм». Г. п. складається здебільшого з кількох *підпрограм*, що реалізують близькі за змістом методи обчисл. математики або методи обробки великих *масивів* даних. Підпрограмами керує спец. організуюча програма (*монітор*), яка, приймаючи від споживача інформацію про потрібну модифікацію методу, формує з стандартних підпрограм завершені змістовні програми.

А. І. Нікітін.

ГЕ́НЦЕНА ФОРМА́ЛЬНІ СИСТЕ́МИ — *логіко-математичні числення* для формалізації та досліджування змістових доведень, які оперують з припущеннями. Г. ф. с. поділяють на системи природного виведення (натуральні, які імітують форму звичайних матем. умови-

водів і через те особливо придатні для формалізованого записування їх) і секвенціальні (за термінологією Генцена — логістичні), спрямовані на аналіз можливих доведень даної формули (див. *Секвенція*), на одержання результатів про нормальну форму доведень та використання їх у *доведень теорії* та в теорії *доведення теорем на ЕОМ*. Іноді Г. ф. с. ототожнюють із системами секвенціального типу; проте натуральні Г. ф. с. можуть використовувати секвенції, а секвенціальні Г. ф. с. мають вигляд числення ф-л, а не секвенцій. Іноді всі Г. ф. с. вважають натуральними, бо всі вони більш-менш відображають звичайні способи оперування з логічними зв'язками та припущеннями.

Натуральні Г. ф. с. містять правила введення логіч. символів і правила виключення символів. Логічних аксіом небагато (звичайно одна-дві). Розглянемо, напр., задавання класичного числення предикатів у вигляді натуральної Г. ф. с. Формули будують звичайним способом за допомогою зв'язок $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\supset$, &. Вивідні об'єкти — односукцедентні секвенції. Аксіоми $A \to A$, $\to (A \vee \neg A)$.

Правила введення:

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B} (\vee^{+});$$

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B} (\vee^{+});$$

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B} (\supset^{+});$$

$$\frac{A, \Gamma \to B \quad A, \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \neg A} (\neg^{+});$$

$$(\bullet)\ \frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x)} (\forall^{+});$$

$$\frac{\Gamma \to A(t)}{\Gamma \to \exists x A(x)} (\exists^{+}).$$

Правила виключення:

$$\frac{\Gamma \to A\&B}{\Gamma \to A} (\&^{-});$$

$$\frac{\Gamma \to A\&B}{\Gamma \to B} (\&^{-});$$

$$\frac{\Gamma \to A \vee B \quad A, \Sigma \to C \quad B, \Delta \to C}{\Gamma, \Sigma, \Delta \to C} (\vee^{-});$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Sigma \to (A \supset B)}{\Gamma, \Sigma \to B} (\supset^{-});$$

$$\frac{\Gamma \to B \quad \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \Delta} (\neg^{-});$$

$$\frac{\Gamma \to \forall x A(x)}{\Gamma \to A(t)} (\forall^{-});$$

$$(\bullet)\ \frac{\Gamma \to \exists x A(x) \quad A(b), \Sigma \to C}{\Gamma, \Sigma \to C} (\exists^{-}).$$

Структурні правила: $\frac{\Gamma \to C}{A, \Gamma \to C}$ (тоншання), $\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, B, A, \Sigma \to C}$ (переставлення), $\frac{A, A, \Gamma \to C}{A, \Gamma \to C}$ (скорочення повторень); t — довільний терм; $(\bullet)$ означає, що змінна b не входить до Γ, Σ, $\exists x A(x)$, C.

Секвенцію під рискою наз. висновком з правила, а секвенції над рискою — засновками. Аксіома $A \to A$ показує, що вводять припущення A; правило $\supset^{+}$ ілюструє звільнення від припущення; формула B верхньої секвенції залежить від припущення A, формула $A \supset B$ нижньої секвенції — вже не залежить. Звільнення від припущень відбувається і в правилах $\neg^{+}$, $\vee^{-}$, $\exists^{-}$. Г. ф. с. натурального типу іноді задають у вигляді числення формул (а не секвенцій) з неявним записом залежності від припущень: виведення в такому численні — це деревоподібна фігура, у вершинах якої можуть бути довільні формули (не обов'язково аксіоми), а всі переходи здійснюються за правилами виведення. Ці правила знаходять, викресливши антецеденти з відповідних правил натуральної системи, описаної за допомогою секвенцій, якщо при цьому відбувається звільнення від припущень, додаються відповідні умови, напр.:

$$\frac{A \quad B}{A \& B} (\&^{+}), \qquad \frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B} (\supset^{+}).$$

Вважається, що входження формули V в таке виведення залежить від припущення D, якщо D знаходиться на вершині виведення над V, не є аксіомою, і в гілці, що веде від розглядуваного входження D до V, не відбувається звільнення від припущення D. Коли тлумачать такого роду виведення, кожному входженню ф-ли C ставлять у відповідність секвенцію $\Gamma \to C$, де Γ — повний список припущень, від яких залежить розглядуване входження ф-ли C. Зв'язок натуральних Г. ф. с. із звичайними (гільбертівськими) варіантами відповідних систем встановлюють за допомогою твердження: $\Gamma \to C$ у натуральній системі виводиться тоді і тільки тоді, коли C виводиться із Γ з фіксованими змінними в гільбертівській системі.

Натуральні Г. ф. с. у їхньому початковому вигляді погано пристосовані для пошуку виведення через аналіз: спроба з'ясувати, за яким правилом, з яких засновків можна одержати певну ф-лу (секвенцію), приводить до неоднозначності: в принципі для цього придатне і правило введення відповідного логічного зв'язку, і будь-яке з правил виключення. При цьому кількість можливих засновків у правилах виключення потенціально необмежена (за рахунок варіювання ф-ли A у правилах $\supset^{-}$, $\vee^{-}$, $\exists^{-}$ та ін.). Тому для застосування до теорії логічного

виведення корисно мати правила, яким властива підформульність: у засновки входять лише підформули висновку, а нескінченність виявляється лише за рахунок варіювання виду термів у правилах типу $\exists^{+}$. У секвенціальних Г. ф. с. або всім правилам властива підформульність, або ця властивість порушується лише для одного правила — правила розрізу

$$\frac{\Gamma \to A \quad A, \Sigma \to \Delta, \Omega}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Omega}$$

або іншого правила близького вигляду, напр.: $\neg^{-}$. Тому системи, що мають властивість підформульності, наз. ще й системами, в яких немає розрізу. Так, напр., розрізу немає в варіанті LK класичного числення предикатів (вивідні об'єкти — довільні секвенції), складені із $\{\supset, \neg, \forall\}$-ф-л. Аксіоми $A \to A$.

Сукцедентні правила:

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)} (\to \supset); \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A} (\to \neg);$$

$$(\bullet) \frac{\Gamma \to \Sigma, A(b)}{\Gamma \to \Sigma, \forall x\, A(x)} (\to \forall).$$

Антецедентні правила:

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{A \& B, \Gamma \to \Delta} (\& \to); \quad \frac{B, \Gamma \to \Delta}{A \& B, \Gamma \to \Delta} (\& \to);$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} (\neg \to); \quad \frac{A\ \Gamma \to \Delta \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta} (\vee \to);$$

$$\frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Delta} (\forall \to);$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta} (\supset \to);$$

$$(\bullet) \frac{A(b), \Gamma \to \Sigma}{\exists x A(x), \quad \to \Sigma} (\exists \to).$$

Структурні правила: переставляння, тоншання і скорочення повторень в антецеденті й сукцеденті та розріз. Знак $(\bullet)$ в $(\to \forall)$, $(\exists \to)$ має те саме значення, що й у $(\forall^{+}, \exists^{-})$.

Коли зіставляють секвенціальні й натуральні Г. ф. с., правилам введення відповідають сукцедентні правила, а правилам виключення — антецедентні правила. При моделюванні в секвенціальних Г. ф. с. правил виключення використовують розріз. Властивість підформульності для LK забезпечує осн. теорема Генцена (теорема про усувність розрізу: за будь-яким виведенням у LK можна побудувати виведення тієї самої секвенції) без розрізу.

Теорема про усувність розрізу дає змогу встановлювати розв'язність безкванторних систем: з підформул даної безкванторної ф-ли можна скласти лише скінченне число несхожих секвенцій (секвенції схожі, якщо вони відрізняються лише порядком і повтореннями членів в антецеденті й сукцеденті), з яких у свою чергу можна скласти тільки скінченне число «кандидатів» у виведення; дана ф-ла довідна, якщо серед цих кандидатів буде виведення. А насправді в процесі пошуку виведення застосовують ефективніший *алгоритм* пошуку «знизу вгору» шляхом аналізу досліджуваної на вивідність секвенції S: провадять «контрзастосування» правил: над S надписують секвенції (чи пари секвенцій), з яких S можна було б одержати, застосувавши один раз правило виведення (через властивість підформульності й відсутність кванторів виходить скінченний список); до кожної з породжених таким способом секвенцій знову застосовують той самий спосіб і т. д. Після скінченного числа кроків буде одержано виведення (на вершинах усіх «гілок» будуть аксіоми) або станеться обрив процесу (зациклювання) — тоді формула невивідна.

Для кванторних систем цю схему модифікують: на кожному етапі «аналізу» при контрзастосуваннях кванторних правил перебирають лише скінченний список можливих термів; процес загалом організовують так, що кожний з можливих термів кінець-кінцем включається в перебір. Через те, що можливих термів нескінченно багато, одержують лише алгоритм встановлення вивідності: для деяких невивідних секвенцій процес аналізу може тривати необмежено без *зациклювання;* для вивідних секвенцій він обов'язково обривається, тобто дає вивід. Особливо зручно ця схема пошуку виведення реалізується для Г. ф. с., що не містять структурних правил. При побудові таких систем користуються оборотними правилами, тобто такими, коли з вивідності висновку випливає вивідність засновків.

Г. ф. с. широко використовують у теорії доведень. Вони дають можливість відображувати особливості змісту теорії за допомогою суто структурних міркувань. Так, Г. ф. с. конструктивної математики часто відрізняються від відповідних класичних систем тільки тим, що в них замість довільних використовують односукцедентні секвенції. Результати типу несуперечливості (невивідність пустої секвенції) або диз'юнктивності часто є тривіальними для систем, у яких немає розрізу: відповідний об'єкт або зовсім не може бути висновком ні з якого правила (пуста секвенція), або його можна одержати лише відповідним способом (тобто з будь-якого диз'юнктивного члена за правилом $\to \vee$ при доведенні диз'юнктивності).

Важливим узагальненням Г. ф. с. є напівформальні системи, що містять правило «нескінченної індукції».

Літ.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Математическая теория логического вывода. М., 1967; Карри Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 518—547].

Г. Є. Мінц.

ГІБРИДНА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА — обчислювальна машина, в якій поєднано ряд особливостей цифрових і аналогових обчислювальних пристроїв. Ідея створення Г. о. м. пов'язана з прагненням усунути вади, властиві аналоговим і *цифровим обчислювальним машинам* (ЦОМ), і об'єднати їхні переваги: швидкодію паралельно працюючих пристроїв *аналогових обчислювальних машин* (АОМ) та їхню здатність розв'язувати цілі класи задач неалгоритмічним шляхом з високою точністю ЦОМ та їхніми можливостями виконувати різні функціональні операції, до яких належать обчислювання відповідно до заданої послідовності виконання операцій, логічні розв'язування та ітераційні обчислювання.

Перші спроби поєднати властивості АОМ і ЦОМ були зумовлені надзвичайною складністю проблем, що виникли при моделюванні в *реальному масштабі часу* таких задач, як політ космічних апаратів та керування виробничими процесами. Можливості чисто аналогових і чисто цифрових машин для розв'язування таких задач виявилися недостатніми. Це привело до об'єднання їх в один обчислювальний комплекс за допомогою *аналого-цифрового перетворювача* та *цифро-аналогового перетворювача* інформації. ЦОМ у таких комплексах виконує ту частину обчислювань, виконувати які за її допомогою найдоцільніше: точне перетворювання координат, обчислювання параметрів траєкторії, моделювання цифрової апаратури керування. АОМ використовують для моделювання динаміки об'єкта й керуючих діянь, де потрібна велика швидкодія і де допустима менша точність. Питання оптим. розподілу обчисл. робіт між аналоговою й цифровою частинами Г. о. м. є дуже важливим, бо при неправильному розв'язанні його у великої гібридної моделі виявляються й негативні властивості обчисл. машин обох типів. Помилки й труднощі, пов'язані з набором задачі, доповнюють ускладнення, пов'язані зі скінченністю темпу вибирання в пристрої аналого-цифрового перетворювання чи з запізнюванням, що визначається часом виконання обчислювань на ЦОМ. Тому з Г. о. м. основними є машини, спроектовані саме у вигляді єдиної гібридної системи. Якщо в таких системах є досить потужні аналогові й цифрові частини, доцільно, щоб заг. програма спільної роботи цих частин передбачала осн. витрати часу на перевірку й підготовку їх до роботи окремо одна від одної. Крім того, треба щоб у цих системах було передбачено можливість незалежного використання аналогової й цифрової частин. Так, при підготовці аналогової частини системи цифрова частина цієї системи повинна бути зайнята розв'язуванням інших задач до того часу, коли потрібно буде, щоб вона взяла участь у розв'язуванні спільної задачі. Для ефективного використання таких машин треба, щоб обслуговуючий персонал мав високу кваліфікацію і щоб було добре розроблено систему матем. забезпечення. При розв'язуванні задач оптимізації, статистичної обробки та ін. необхідні відладжені стандартні програми керування комплексом.

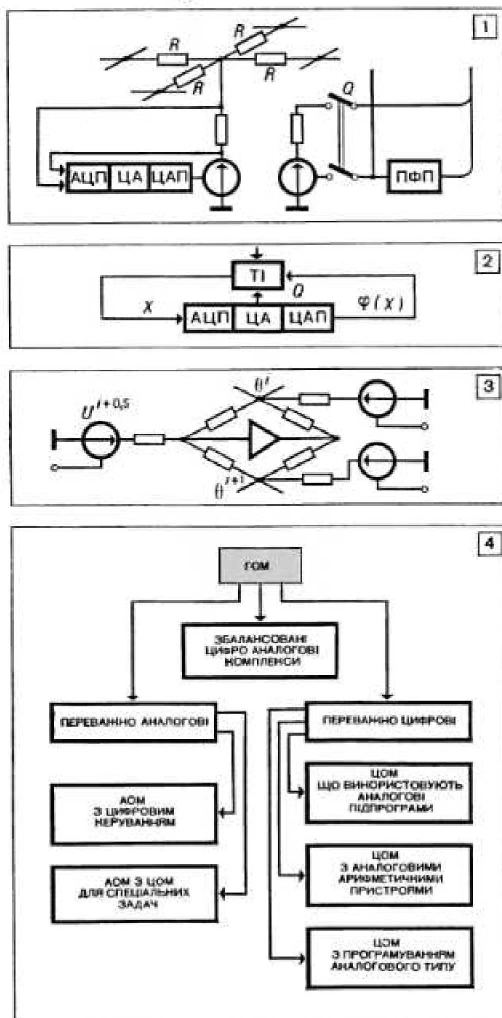
Досвід, нагромаджений у галузі гібридного аналого-цифрового моделювання, дав змогу визначити шлях створення іншого типу Г. о.м. Для задач, при розв'язуванні яких можна обмежитися невисокою точністю обчислювань, використання аналогових підпрограм у складі *програми*, що її виконує цифровий автомат, веде до значної економії машинного часу і зменшення вимог до обсягу оперативної пам'яті. До такого самого результату веде й заміна в деяких спеціалізованих ЦОМ повільно виконуваної суто цифрової програми множення звертанням до гібридного цифро-аналого-цифрового пристрою, що реалізує операцію множення. Набагато більшу економію часу дає застосування аналогових арифметичних блоків, керованих цифровим способом, у яких виконуються аналогові операції множення й додавання. Аналоговий пристрій, реалізований у вигляді підпрограми, який або обчислює значення ф-цій або розв'язує алгебр. чи дифер. рівняння, дає змогу відмовитися від використання багатьох команд і від додаткового цифрового запам'ятовувального пристрою з малим циклом обігу.

Дуже ефективним є застосування аналогових підпрограм при ітеративному розв'язуванні рівнянь у частинних похідних. Схему можливої гібридної системи для розв'язування двовимірних рівнянь у частинних похідних з нелінійним членом наведено на мал. 1, де ПФП — переключальний функціональний перетворювач, АЦП та ЦАП — аналого-цифровий і цифро-аналоговий перетворювачі. У схемі за аналогову частину взято резисторну сітку Гершгоріна, що є моделлю рівнянь Лапласа й Пуассона. Введення струмів у вузли сітки цілком автоматизовано приєднанням її через запам'ятовувальні джерела до керуючого цифрового автомата (ЦА).

Досить перспективною є побудова Г. о. м. для розв'язування звичайних дифер. рівнянь з крайовими умовами за схемою, наведеною на мал. 2. Використання в ній аналогової частини, побудованої на базі оборотних точкових інтеграторів, дає можливість реалізувати крайові умови безпосередньо в самих інтеграторах. Точковим інтегратором k-го порядку одновимірної ф-ції $U = U(t)$ на відрізку $(0, t)$ наз. модель рівняння $h^k \frac{d^k X}{dt^k} + U = 0$, в якому $U(t)$ — задавана, $X(t)$ — одержувана ф-ція, а h — крок дискретизації. Одну з можливих схем оборотного точкового інтегратора 1-го порядку зображено на мал. 3. Оборотним він є тому, що всі його полюси є рівноправними в тому розумінні, що на кожному з них величини у вигляді напруг можна й задавати й одержувати. В Г. о. м., зображеній на мал. 2, всі нелінійні залежності реалізуються в керуючому ЦА. Точкові інтегратори (ТІ) відіграють у ній роль дискретного квазіаналога системи

рівнянь $\tau \frac{dX}{dt} + \varphi(X, t) = 0$ на заданому відрізку $(0, T)$. Крайові умови вводяться в схеми інтеграторів безпосередньо. Роль ЦА зводиться до утворення за допомогою кодів Q потрібної схеми з інтеграторів і до зрівноважування обчисл. системи так, щоб точкове зображення вектора $\varphi(X, t)$ відповідало розв'язуваній системі дифер. рівнянь (див. *Зрівноважування методи*).

Г. о. м. можна класифікувати за схемою, наведеною на мал. 4. Існує декілька осн. типів таких машин. Аналогові машини з цифровим керуванням і цифровою логікою здатні відтворювати найскладніші моделі порівняно зі стандартними АОМ, зберігаючи їхні позитивні якості, зокрема, можливість для дослідника активно втручатись у процес пошуку розв'язку. На цих машинах можуть автоматично виконуватися послідовні розв'язування, а результати, одержані в попередніх розв'язаннях, можуть запам'ятовуватись і використовуватись при виконанні наступних розв'язувань. Це дає змогу реалізувати ітеративний процес розв'язування, що збігається до шуканого результату, ітеративний процес оптимізації параметрів тощо. Першим вдалим прикладом цього типу гібридизації є система «HYDAC» фірми Electronic Associates (США). До машин такого типу належать і вітчизняні Г. о. м. «*Аркус*» і «Екстрема».



1. Схема гібридної системи для розв'язування двовимірних рівнянь у частинних похідних з нелінійним членом.
2. Схема гібридної обчислювальної машини для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.
3. Схема оборотного точкового інтегратора першого порядку.
4. Схема класифікації гібридних обчислювальних машин.

У системах АОМ з ЦОМ для спеціальних задач невелику цифрову машину використовують разом з великою аналоговою системою для розв'язування задач, розв'язати які було б важко або й зовсім неможливо за допомогою чисто аналогової апаратури.

Найпотужнішими з існуючих гібридних обчисл. систем є збалансовані цифро-аналогові комплекси, до складу яких входять універсальні цифрові та універсальні аналогові обчисл. машини. Обидва осн. компоненти таких гібридних систем можна використовувати й окремо для розв'язування широкого класу важливих задач. Але при об'єднанні їх виникає ще потужніша обчисл. система. Цифровою обчисл. машиною, яка використовує аналогові підпрограми, є, напр., система «UCLADSDT» (США) для розв'язування рівнянь у частинних похідних, у якій аналогова апаратура використовується лише для обернення матриць, якого потребує програма ЦОМ.

У цифрових обчисл. машин з аналоговими арифм. пристроями швидкість обчислювання більша, ніж у суто цифровій машині. Цього домагаються, виконуючи деякі операції паралельно за допомогою аналогової апаратури. Такою машиною є, напр., система, розроблена 1962 в Массачусетському технологічному ін-ті.

До цифрових обчисл. машин з програмуванням аналогового типу належать *цифрові диференціальні аналізатори*, які за методом підготовки й розв'язування задач можна віднести до АОМ, за формою представлення інформації і за тех. виконанням — до цифрових електронних машин (див. *Цифрова інтегрувальна машина*).

Г. Є. Пухов, Г. П. Галузинський.

ГІДРОБІÓНІКА — розділ *біоніки*, який для створювання нових і вдосконалювання існуючих технічних пристроїв, призначених для роботи у водному середовищі, вивчає особливості тварин, що живуть у воді.

ГІЛÓК І ГРАНИ́ЦЬ МÉТОД — метод часткового перебору під час розв'язування задач оптимізації з обмеженнями, в якому здійснюється спрямований пошук оптималь-

ного розв'язку серед можливих розв'язків. Г. і г. м.— один з найзагальніших підходів до розв'язування задач, для яких не вироблено ефективних регулярних методів. До таких задач належать задачі комбінаторного типу, нелінійного програмування (наприклад, задачі мінімізації неопуклої функції), *програмування цілочислового* тощо. В основі Г. і г. м. лежать побудови, які здебільшого дають змогу істотно зменшити обсяг перебору: а) обчислення нижньої межі (для задачі мінімізації); в такому разі вихідну задачу замінюють іншою, для розв'язування якої є ефективні методи і значення мінімізованої ф-ції в ній не перевищує відповідного значення вихідної задачі; б) розбивання на підмножини (галуження); реалізація методу пов'язана з поступовим розбиванням множини розв'язків вихідної задачі на дерево підмножин і послідовним уточненням значення нижньої межі на кожній з цих підмножин. Способи обчислювання нижньої межі й галуження залежать від виду конкретної задачі й її специфічних особливостей, облік яких приводить до різних реалізацій схеми Г. і г. м.

Літ. див до ст. *Програмування цілочислове.*

В. О. Трубін.

ГІПЕРБОЛІ́ЧНОГО ТИ́ПУ ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНИХ РІВНЯ́НЬ У ЧАСТИ́ННИХ ПОХІДНИ́Х СПО́СОБИ РОЗВ'Я́ЗУВАННЯ. Для описування поведінки суцільного середовища використовують різні *моделі математичні*, які в багатьох випадках приводять до нелінійних дифер. рівнянь гіперболічного типу (див. *Диференціальних лінійних рівнянь з частинними похідними класифікація*). Такі рівняння лише зрідка мають точні аналітичні розв'язки. До появи ЕОМ можливості чисельного досліджування суцільного середовища були обмежені, в основному, випадком однієї просторової змінної (нестаціонарні задачі), двох просторових змінних (стаціонарні задачі), лінійними моделями та найпростішими набл. методами. Створення ЕОМ дало змогу провадити чисельне досліджування ближчих до природних, а, отже, й складніших матем. моделей суцільного середовища. Тепер розрізняють такі середовища, матем. описування яких приводить до гіперболічних рівнянь: а) ідеальні стисливі рідини; б) стисливі рідини (рівняння, які їх описують, враховують процеси в'язкості й теплопровідності); в) пружні, пружно-пластичні й пружно-в'язкі середовища); г) плазма.

Рівняння, які описують стан суцільного середовища, є матем. виразами законів збереження (маси, імпульсу, енергії тощо), які є правильними для довільного елемента середовища. Як правило, перейшовши до ейлерових прямокутних координат (а це відповідає законам збереження для довільного паралелепіпеда з ребрами, паралельними осям координат), одержують квазілінійні рівняння в дивергентному вигляді:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i(x, t);$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(u_k, \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, m),$$

які є основою для складання різницевої схеми (див. *Скінченнорізницеві методи*). Характерною особливістю розглядуваних моделей суцільного середовища є наявність у них ф-цій і параметрів, які в багатьох випадках можна розглядати як малі. Такими є, напр., коеф. в'язкості, теплопровідності й стисливості. Врахування їх приводить до дисипативної моделі середовища, стан якого описують параболічними рівняннями. А в противному разі приходять до недисипативної моделі середовища, стан якого описують гіперболічними рівняннями. Характерною рисою квазілінійних гіперболічних рівнянь є те, що в розв'язкові можуть виникнути розриви (напр., ударні хвилі, контактні розриви) навіть у тому разі, коли початкові ф-ції є гладенькими. Тому вводять поняття узагальненого розв'язку, основаного на використанні законів збереження в інтегр. формі й умов динамічної сумісності на виниклих розривах — умов, що випливають із цих законів. Виконання цих умов на розривах приводить до необоротності процесу. При цьому розриви треба розуміти як нескінченно тонкі зони переходу, де відбуваються швидкоперебіжні необоротні термодинамічні процеси. Недисипативні моделі можна розглядати як граничні випадки дисипативних моделей, коли параметри дисипативності прямують до нуля. Це зауваження є одним із способів одержування узагальнених розв'язків рівнянь гіперболічного типу як границь розв'язків дисипативних (параболічних) рівнянь, коли параметри дисипативності прямують до нуля; цей спосіб широко застосовують у різницевих методах.

Чисельні методи розв'язування рівнянь гіперболічного типу можна поділити на дві великі групи: 1) методи з явним виділенням особливостей розв'язків; 2) т. з. методи наскрізної лічби, в яких особливостей розв'язків явно не виділяють.

До першої групи методів треба передусім віднести метод характеристик, який з'явився в газовій динаміці порівняно давно, і його успішно застосовували для розраховування одновимірних нестаціонарних течій з небагатьма особливостями, а також для розраховування двовимірних стаціонарних течій в області гіперболічності. Метод характеристик використовують лише для розв'язування гіперболічних рівнянь. Він грунтується на тому, що гіперболічна система рівнянь з двома невідомими має дві сім'ї дійсних характеристик, які становлять координатну сітку. В цьому разі можна цілком уникнути інтерполяцій, а тим самим — і ефектів згладжування та апроксимаційної в'язкості. А якщо невідомих і незалежних змінних більше, починають виявлятися вади цього методу: виникає апроксимаційна в'язкість, при наявності багатьох особливостей *алгоритм* стає логічно складним. Тому методом характеристики доцільно розв'язувати задачі,

в яких кількість розривів невелика. Наприкінці 60-х років 20 ст. досягнуто певного прогресу в використанні методу характеристик для розраховування просторових задач. Доведено, що розв'язок, одержаний методом характеристик, збігається до розв'язку початкової дифер. задачі в разі досить гладеньких розв'язків.

У зв'язку з необхідністю розв'язувати складні задачі газової динаміки, в яких є багато особливостей (ударних хвиль, контактних границь і центрованих хвиль розрідження) виникли нові чисельні методи, т. з. методи наскрізної лічби. В основі цих методів лежить єдине тлумачення всіх ділянок потоку. Єдиності схеми розраховування досягають завдяки наявності дисипативних членів схеми, які згладжують розриви, перетворюючи їх на зони переходу шириною в кілька інтервалів. Відомі схеми наскрізної лічби мають на гладеньких розв'язках локальну точність не вище як 3-го порядку і глобальну точність — не вище як 1-го порядку (якщо враховувати невисоку точність схеми поблизу особливостей). У разі газової динаміки схеми наскрізної лічби досить добре передають інтегр. характеристики потоку й досить точно відтворюють положення й швидкість сильних ударних хвиль. Водночас границі хвиль розрідження спотворюються, контактні границі «розмазуються» апроксимаційною в'язкістю схеми, так що ширина їх із часом збільшується.

Схеми наскрізної лічби за властивостями розв'язності та стійкості рівнянь, які виникають внаслідок скінченнорізницевої апроксимації, можна, в свою чергу, поділити на дві великі групи: а) явні схеми; б) неявні схеми. В явних схемах область залежності різницевого розв'язку є скінченною множиною точок, розміщених на площині початкових даних (якщо обмежитися розглядом задачі Коші), так що кількість точок в області залежності па попередньому часовому рівні не збільшується зі зменшенням кроків сітки τ, h. Отже, двошарову явну схему зображують у вигляді:

$$u_i^{n+1} = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_\alpha^n u_{i+\alpha}^n + f_i^n,$$

де $C_\alpha^n = C_\alpha^n (u_i, \tau, h, n\tau, ih)$, $t = n\tau$, $x = ih$, числа q_1 і q_2 не залежать від τ, h.

У неявних схемах значення u_i^{n+1} виражається через усі значення $u_{i+\alpha}^n$ ($\alpha = -N_1, \dots, N_2$), де числа N_1, N_2 зростають зі зменшенням τ, h. Неявну схему можна записати у вигляді $Au_i^{n+1} = Bu_i^n + F_i$, де *оператори* A й B є фінітними, тобто їх зображують у вигляді

$$A = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_\alpha^{1,n} T_\alpha, \quad B = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_\alpha^{2,n} T_\alpha,$$

де T_α — оператор зсуву.

Явні схеми прості в реалізації, але умова їхньої стійкості (див. *Стійкість різницевих схем*), як правило, дає на величину кроку сильне обмеження вигляду $\tau \leqslant \mathrm{const} \cdot h^m$, а це приводить до надто малого кроку й невиправданого збільшення обсягу обчислювань. Неявні схеми складніші в реалізації при переході з одного часового шару на інший, зате крок τ можна вибирати як завгодно великим, і тим самим його можна визначити, враховуючи тільки потрібну точність.

Явні й неявні схеми є необхідними елементами різницевих методів розв'язування систем гіперболічних рівнянь. Крім поділу схем за властивістю розв'язності (за структурою розв'язувального оператора), існує й класифікація схем за структурою сітки. Сучас. теорія розглядає сітку як скінченну множину точок — носіїв інформації, які будуються залежно від розв'язку, і еволюціонує разом з нею.

Згладжування розривів у розв'язках, яке дає змогу вести наскрізну лічбу, відбувається в схемах наскрізної лічби і внаслідок введення дисипативних членів у дифер. рівняння і внаслідок дисипативних властивостей самої схеми. Об'єднавши обидва механізми дисипативності, можна говорити про апроксимаційну в'язкість різницевих схем. Структуру апроксимаційної в'язкості схеми описують першим дифер. наближенням (п. д. н.) схеми, яке відрізняється від початкової дифер. системи рівнянь членами, що містять старші похідні. Від структури матриць при цих членах залежать не тільки властивості стійкості схеми, а й її дисипативні властивості. У багатьох випадках дуже важливо визначити, наскільки різницева схема або її п. д. н. зберігають групові властивості початкової системи дифер. рівнянь. Зберігання схемою цих властивостей має велике значення в практичній лічбі, особливо для задач газової динаміки, де, напр., неінваріантність п. д. н. відносно перетворювання Галілея призводить до неприємних лічильних ефектів (нестійкість, немонотонність профілів тощо).

При чисельному інтегруванні гіперболічних рівнянь похідні замінюють скінченними різницями, а потім на кожному кроці доводиться розв'язувати систему алгебр. рівнянь. Різницеві схеми повинні задовольняти дві незалежні умови — апроксимації та стійкості. Ці вимоги певною мірою суперечать одна одній. Крім того, різницеві схеми повинні задовольняти ще чимало практично необхідних вимог — дивергентності, економічності тощо. Теорія різницевих схем почала розвиватися в середині 40-х років 20 ст. До цього спричинилися необхідність розв'язувати задачі ядерної енергетики й ракетобудування, а також поява ЕОМ. У 50-х роках 20 ст. було сформульовано й доведено теореми збіжності для різницевих схем, які апроксимують лінійні дифер. рівняння. Ці теореми дають змогу зводити дослідження збіжності різницевої схеми до дослідження її стійкості.

В той час, як досліджування апроксимації різницевої схеми відповідного гіперболічного рівняння є порівняно простим, має локальний характер і по суті зводиться до розкладу в ряд Тейлора, досліджування стійкості — завдання набагато складніше. Незважаючи на чимало досліджень, що їх здійснили різні автори, ще й досі не одержано досить загальних і ефективних критеріїв стійкості й збіжності схем для гіперболічних рівнянь зі змінними коеф. (а тим більше — для нелінійних рівнянь).

Для різницевих схем, які апроксимують гіперболічні рівняння з постійними коеф., стійкість досліджують методом Фур'є. Для цього оцінюють норму образу Фур'є оператора кроку. Відомо, що спектральний радіус матриці образу Фур'є оператора кроку не перебільшує *норми матриці*. Звідси випливає необхідний критерій стійкості: для стійкості різницевої схеми необхідно, щоб спектральний радіус образу Фур'є оператора кроку не перебільшував величини $1 + O(\tau)$, де τ — крок різницевої схеми за часом. Ця умова необхідна й для різницевих схем зі змінними коеф. Якщо зробити кілька додаткових обмежень, вона буде і достатньою для стійкості різницевих схем.

Для досліджування стійкості різницевих схем з коеф., які залежать від просторових змінних, застосовують такі методи: а) метод мажорантних, або апріорних, оцінок; б) локально-алгебр. метод. Метод апріорних оцінок найбільше розвинули в своїх працях рад. і амер. математики. Цей метод аналогічний відповідному методові для дифер. рівнянь, але в разі різницевих схем його дуже важко реалізувати; це зумовлено специфікою різницевого аналізу, в якому, на відміну від апріорних оцінок у теорії дифер. рівнянь, багато співвідношень набувають громіздкого вигляду. В основі локально-алгебр. методу лежить вивчення властивостей локального різницевого оператора, який одержують з відповідного різницевого оператора зі змінними коеф. фіксацією, «заморожуванням» коеф. Тим самим аналіз стійкості різницевого оператора зі змінними коеф. замінюють аналізом цілої сім'ї операторів з постійними коеф. Локальний критерій стійкості є узагальненням методу «заморожування» коеф., використовуваного в теорії дифер. рівнянь. До локального критерію стійкості прилягає дисипативний критерій стійкості, а саме: з дисипативності й апроксимації різницевої схеми випливає стійкість схеми для гіперболічних систем дифер. рівнянь 1-го порядку з ермітовими матрицями. Практичні розрахунки показали, що ці критерії можна використовувати, досліджуючи стійкість різницевих схем для нелінійних рівнянь, хоча це твердження поки що не обгрунтовано.

Наприкінці 60-х років 20 ст., досліджуючи стійкість різницевих схем для нелінійних рівнянь (зокрема, для рівнянь газової динаміки), почали широко застосовувати метод п. д. н., який замінює аналіз різницевої схеми аналізом її дифер. наближення. В разі, коли коеф. початкового дифер. рівняння є постійними або ф-ціями незалежних змінних, для ряду різницевих схем доведено, що з коректності п. д. н. випливає стійкість відповідної різницевої схеми. В протилежному випадку обгрунтування цього методу немає. Проте метод дифер. наближення може пояснити нестійкість різницевих схем, яка буває в розрахунках і яку не вловлює локальний метод Фур'є, бо він не враховує градієнтів.

Наприкінці 60-х років 20 ст. великого розвитку набули різницеві схеми збільшеної точності. Досліджуванню схем підвищеного порядку точності присвячено ряд праць, є вже приклади використання в газодинамічних розрахунках схем 3-го й 4-го порядків точності — використання, яке подає надії.

Зі збільшенням розмірності задачі кількість операцій на точку зростає. Збільшуються логіч. труднощі складання програми розрахунку. Схеми простої апроксимації стають неекономічними. Для одержування економ. стійких різницевих схем запропоновано методи, основані на ідеях розщеплювання різницевих схем, набл. факторизації та розщеплювання (слабкої апроксимації) дифер. рівнянь. До однієї з модифікацій методу розщеплювання можна віднести й метод «частинок у комірках», який тепер широко використовують, розв'язуючи задачі механіки суцільного середовища, в якому розщеплювання не пов'язане зі зниженням розмірності операторів. В основі методу розщеплювання лежить подання складних операторів через найпростіші, тому інтегрування початкового рівняння зводиться до інтегрування рівнянь простішої структури. Методом розщеплювання розв'язують багато складних задач матем. фізики.

Літ., Яненко Н. Н. Введение в разностные методы математической физики, ч. 1—2. Новосибирск, 1968 [бібліогр. ч. 2, с. 379—385]; Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968 [бібліогр. с. 585—592]; Алалыкин Г. Б. [та ін.]. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., 1970; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [бібліогр. с. 538—550]; Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 381—413]; Вычислительные методы в гидродинамике. Пер. с англ. М., 1967.

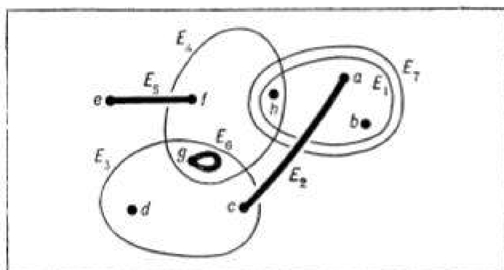
М. М. Яненко, Ю. І. Шокин.

ГІПЕРГРА́Ф — пара $H = (X, E)$, утворена скінченною множиною $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ вершин та певною сім'єю $E = (E_i \,/\, i \in I)$ ребер — непустих частин X, що задовольняють умову $\bigcup_{i \in I} E_i = X$. Напр., для Г. H на мал. $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7)$, $E_1 = E_7 = \{a, b, h\}$, $E_2 = \{a, c\}$, $E_3 = \{c, d, g\}$, $E_4 = \{f, g, h\}$, $E_5 = \{e, f\}$, $E_6 = \{g\}$. Якщо всі E_i — двохелементні, то Г. $H = (X, E)$ — це звичайний *граф* без голих вершин. Теорія Г., використовуючи осн. ідеї *графів теорії*, дає змогу одержати багато результатів коротшим шляхом і в загальнішому вигляді; вона допускає й численні застосування до інших проблем

комбінаторного характеру. До Г., зокрема, відносять матроїди, введені для побудови єдиної алгебр. теорії дерев, циклів та ін. частин у графі.

Літ.: Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [бібліогр. с. 515—542]. Futte W. F. Lectures on matroids. «Journal of research National Bureau of Standards», 1965, v. 6913, № 1—2; Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1971.

О. О. Зиков.



ГІПЕРПЛОЩИНИ ВІДТИНАЛЬНОЇ МЕ́ТОД — один з методів розв'язування задачі *програмування опуклого.* Нехай задачу опуклого програмування сформульовано так: мінімізувати (p, x) при обмеженнях

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

де x і p — n-вимірні вектори, $g_i(x)$ — опуклі ф-ції, (p, x) — скалярний добуток векторів p і x.

Метод складається з попереднього й загального кроків.

На попередньому кроці вибирають точки $x^1, \ldots, x^l$ такі, що область, визначувана нерівностями $g_i(x^j) + (\nabla g_i(x^j), x - x^j) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l$, обмежена. Тут $\nabla g_i(x)$ — *градієнт* ф-ції $g_i(x)$.

Загальний крок полягає ось у чому. Нехай множина $I(x^j) = \{1, 2, \ldots, m\}$, $j = 1, \ldots, l$ і точки $x^1, \ldots, x^k$, $k \geqslant l$ уже побудовано і побудовано відповідні їм множини індексів $I(x^j)$, $j = 1, \ldots, k$. Розв'язуємо задачу мінімізації (p, x) при обмеженнях

$$(\nabla g_i(x^j), x - x^j) + g_i(x^j) \leqslant 0, \quad i \in I(x^j),$$
$$j = 1, \ldots, k. \qquad (2)$$

Точку мінімуму цієї задачі позначимо через x^{k+1}. За $I(x^{k+1})$ беремо множину тих індексів i, для яких $g_i(x^{k+1}) > 0$. Якщо при якомусь k множина $I(x^k)$ — пуста, то x^k — розв'язок задачі. У заг. випадку побудована послідовність x^k така, що $\lim\limits_{k \to \infty} g_i(x^k) \leqslant 0$, а значення (p, x) прямує до значення мінімуму (p, x) в області (1).

Б. М. Пшеничний.

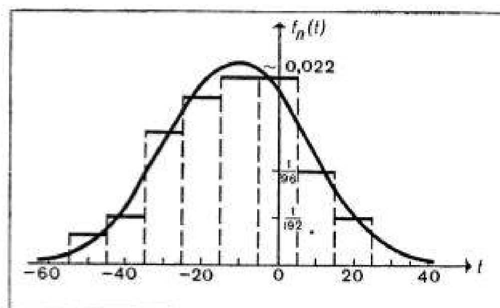
ГІПО́ТЕЗА КОМПА́КТНОСТІ — припущення про те, що підмножина розпізнаваних зображень одного класу є в певному розумінні простою. Поняття простоти можна конкретизувати по-різному. Напр., класи зображень наз. компактними, якщо їх можна відокремити один від одного за допомогою гіперплощин (див. *Роздільна поверхня в розпізнаванні образів*) або коли кожен клас зображень можна подати у вигляді об'єднання якогось числа опуклих множин. У ряді досліджень критерій компактності відображує уявлення про те, що схожість зображень одного класу має бути більшою за схожість зображень різних класів.

М. І. Шлезінгер.

ГІСТОГРА́МА — графічне наближене зображення щільності *розподілу ймовірностей* випадкової величини, побудоване за вибіркою скінченного обсягу. Г. є східчаста ф-ція $f_n(t)$, побудована за вибіркою незалежних спостережень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадкової величини з щільністю $f(t)$ таким чином. Інтервал, у якому лежать спостереження $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поділяють на m $(m < n)$ підінтервалів $[t_0, t_1]$ $[t_1, t_2], \ldots, [t_{m-1}, t_m]$, які називаються інтервалами групування. n_i — кількість спостережень вибірки, що потрапили до інтервалу $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Г. вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що відповідає інтервалам групування $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{m-1}, t_m]$ є східчаста ф-ція $f_n(t)$:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant t_0, \\ \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \cdot \dfrac{n_i}{n} & \text{при } t_i < t \leqslant t_{i+1}, \\ 0 & \text{при } t > t_m. \end{cases}$$

Згідно з *великих чисел законом* значення $f_n(t)$ для t з інтервалу $[t_i, t_{i+1}]$ при великих n



близьке до величини $\delta_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(u)\, du$ — середнього значення щільності f розподілу на інтервалі $[t_i, t_{i+1}]$. Для того, щоб Г. давала добре уявлення про розподіл, треба обирати кількість спостережень та інтервал групування так, щоб у кожному інтервалі

(за винятком, можливо, крайніх інтервалів), було хоч би по п'ять спостережень. Порівнюючи Г. та графіки гаданої ф-ції щільності $f(x)$, на практиці звичайно роблять перший висновок про відповідність між даними спостереженнями й теоретичним припущенням. При цьому всякий досить великий незбіг легко виявити. Через те, що велике розходження з деякою ймовірністю може виникати внаслідок випадкових коливань, то для краще обгрунтованих висновків треба будувати довірчі границі (див. *Довірчий інтервал* для параметра θ, що відповідає довірчому рівневі ε) для величини δ_i. При великих значеннях n наближений довірчий інтервал для величини δ_i, що відповідає довірчому рівневі 0,05, має вигляд

$$\left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\cdot\frac{n_i-2\sqrt{n_i}}{n},\ \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{n_i+2\sqrt{n_i}}{n}\right).$$

Розглянемо, наприклад, результати вимірювань якоїсь *випадкової величини* (в табл. дано кількості спостережень, що потрапили у відповідні інтервали):

Інтервали, $t_i - t_{i+1}$	−55, −45	−45, −35	−35, −25	−25, −15	−15, −5	−5,5	5,15	15,25
Кількість спостережень, n_i	3	5	13	18	21	21	10	5

Тут $n = 96$, усі інтервали групування мають однакову довжину 10 *см*. Г. вибірки дано на мал.: для порівняння зображено щільність нормального розподілу, що добре узгоджується з даними.
А. Я. Дороговцев.

ГЛОБА́ЛЬНІ ЗМІ́ННІ — змінні в *мовах програмування* з блоковою структурою, не описані (не локалізовані) в даному блоці, але використовувані в ньому. Такі змінні описуються в блоці, всередині якого міститься даний блок як *оператор*. Поняття Г. з. тісно пов'язане з поняттями сфери дій *ідентифікаторів*. Див. також *Локалізовані змінні*.
А. І. Халілов.

ГЛОБА́ЛЬНОГО ПО́ШУКУ МЕ́ТОДИ — методи знаходження *екстремуму глобального* для функцій, що мають велику кількість *екстремумів локальних*. Ці методи поки що розроблено слабо; про деякі результати див. *Мінімізації функцій методи*. *Оптимізації методи* чисельні.

ГНІЗДОВИ́Й СПИ́СОК — один з програмних способів організації асоціативної (спискової) інформації в пам'яті машини, при якому всі члени списку розміщуються в кількох полях машинної пам'яті (гніздах). Всередині гнізда окремі члени розміщуються послідовно, а зв'язок між гніздами здійснюється за допомогою адрес зв'язку. При цьому в останньому слові попереднього гнізда зазначається адреса першого слова наступного гнізда. Г. с. економний щодо затрат пам'яті, але складний щодо коректування списками і поповлювання полів пам'яті, що звільнилися. Г. с. зручно застосовувати при побудові великих сталих спискових масивів. Див. *Мови спискові*.
А. І. Китов.

ГНОСЕОЛОГІ́ЧНІ ОСНО́ВИ КІБЕРНЕ́ТИКИ — див. *Філософські питання кібернетики*.

ГОМЕОСТА́ЗИС (від грец. ὅμιος — однаковий, сталий і στασις — стан) — підтримування сталості суттєвих змінних організму (температури, тиску та складу крові тощо) для забезпечення оптимального режиму внутрішнього середовища. Поняття Г. розвинули фізіологи К. Бернар і В. Кеннон, його широко вивчали І. М. Сєченов та І. П. Павлов. Уявлення про Г. тісно пов'язані з поняттями про ультрастійкість і адаптивність. Прагнення організму утримувати суттєві змінні у фізіол. межах пов'язані з процесами саморегуляції, спрямованими на ліквідацію наслідків збурення в тих чи ін. підсистемах організму. Загально визнано, що акт саморегуляції відбувається за допомогою зворотного зв'язку. Тепер вивчають не тільки гомеостатичні системи, що забезпечують сталість обміну речовини й енергії, а й запроваджують поняття про нервово-психічний Г. як основу врівноважування організму з зовнішнім середовищем за допомогою нервової системи та як базу створення оптим. умов для діяльності мозку. Г. вищого рівня має ймовірнісний характер і пов'язаний з пошуком адекватності планів і структури фізіол. актів організму умовам зовн. середовища; Г., пов'язаний з внутр. системами чи локальними ділянками нервової системи, має детермінований характер (див. *Біологічних систем організація*).
К. О. Іванов-Муромський.

ГОМЕОСТАТИ́ЧНА СИСТЕ́МА — технічний пристрій, що моделює особливу властивість живих організмів—*гомеостазис*, тобто властивість організму вдержувати свої характеристики в допустимих для його існування межах (напр., підтримування рівноваги тіла, сталість т-ри тіла, стабілізація вмісту в крові кисню, а також цукру й гормонів та ін.). Англ. нейрофізіолог У. Ешбі (н. 1903) побудував аналогову модель багатозв'язаних процесів керування, що розв'язують завдання гомеостазису, і назвав її г о м е о с т а т о м. Гомеостат Ешбі складається з чотирьох обертових магнітів, що змінюють опори чотирьох рідинних потенціометрів. Напруги, що їх знімають з потенціометрів, після підсилення подаються через перемикачі на котушки, які притягують або відштовхують обертові магніти. При деяких поєднаннях по-

ложень перемикачів полярності сигналів система буде стійкою, а при інших — нестійкою, тобто магніти відхиляються до упорів. У гомеостаті є пристрої, які випадково міняють положення перемикачів полярності, поки не буде знайдено таке, яке забезпечить стійкість, після чого пошук стійкого стану припиняється.

Знаки й величини чотирьох коефіцієнтів пропорційності можна змінювати згаданими реостатами й перемикачами полярності напруг. Крім того, обмотка кожного магніту, яка реалізує *зворотний зв'язок*, живиться від реостата, що має 25 положень. Усього може бути $25^4 = 390\,625$ різних станів гомеостата, частина з яких статично стійкі, а частина — нестійкі. Якщо система перебуває в одному з нестійких станів, то магніти рухаються до упорів, вихідні напруги збільшуються й відбувається чергове перемикання стану. Гомеостат «клацає» доти, поки не знайде стійкий стан, коли магніти перебуватимуть десь коло середнього положення.

Система знаходить стійкий стан навіть тоді, коли діють найрізноманітніші збурення, що надходять у систему (напр., при мех. з'єднанні двох магнітів планкою), або при зміні знака зв'язку (перемиканні полярності одного з електр. зв'язків системи). Таку цілеспрямовану поведінку гомеостата (система не заспокоюється, поки не досягне стійкості) Ешбі назвав властивістю ультрастійкості. Ззовні спостерігачеві Г. с. завжди здаються стійкими, бо нестійкі стани системи проскакують майже миттю. В гомеостаті Ешбі використано чотири підсилювачі. Інші дослідники побудували експериментальні моделі систем, що складаються з багатьох зв'язаних між собою однакових підсилювачів. Крім того, проведено багато робіт з моделювання процесів у Г. с. на універсальних обчисл. машинах. Характерна особливість гомеостата Ешбі: в ньому немає запам'ятовувальних пристроїв (немає пам'яті). Якщо гомеостат знайшов стійкий стан, то при зміні умов він «забуває» його й може повернутися до нього тільки випадково, в процесі нового пошуку.

Розглянемо деякі заг. закономірності роботи Г. с. Нехай у системі є n регулюючих діянь, кожне з яких має m можливих значень, тоді число можливих ходів дорівнюватиме $N = nm$, тривалість пошуку $T_e \leqslant nmT$, де T — тривалість одного вмикання.

Припустимо, що показник екстремуму (ф-ція вигоди) системи матиме досить добре значення в k режимах. Початкова ймовірність попадання в один із цих режимів $p_i = \frac{k}{nm}$. Ентропія (ступінь неорганізованості) системи

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{i=mn} p_i \log p_i.$$

Для гомеостата Ешбі ні ймовірність набуття стійкого стану p_i, ні ступінь неорганізованості системи не змінюється. Але за допомогою нескладних удосконалень Г. с. такого типу можна зробити здатною до навчання, до поліпшення процесу пошуку стійких станів. Для цього треба, щоб у системі виключалися з пошуку малоперспективні стани або в першу чергу випробовувалися найперспективніші стани. Якщо застосовується система вимикання s випробуваних режимів, які виявилися непридатними, ймовірність сприятливого результату випадкового пошуку з кожним ходом зростає:

$$p_i' = \frac{k}{nm - s}, \quad H' = \sum_{i=1}^{i=mn-s} p_i' \log p_i' > H_0,$$

де s — номер останнього ходу. Отже, при навчанні ентропія зменшується. У Г. с. з першочерговим випробуванням найперспективніших станів спец. лічильне реле або інтегратори реєструють число й тривалість існування кожного режиму. Під час пошуку оптим. режиму спочатку випробовують режими, які найчастіше траплялися в даній системі. Мета цього вдосконалення — зменшити час статистичного пошуку режиму. Застосування лічильників (нагромаджувачів інформації) — осн. спосіб поліпшення методики пошуку. Безладний випадковий пошук часто буває нераціональним, бо він триває дуже довго.

На принципі гомеостата Ешбі створено різні пристрої, зокрема спеціалізовану обчисл. машину для визначення оптим. значень параметрів автопілотів та ін. систем автомат. регулювання методом випадкового пошуку з виключанням уже випробуваних комбінацій. Машина оптимально самоналаджується за 20—30 *хв* пошуку.

Літ.: Чичинадзе В. К. О некоторых вопросах построения самонастраивающихся и самообучающихся систем автоматического управления, основанных на принципах случайного поиска. В кн.: Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2. М., 1961; Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями. К., 1963 [бібліогр. с. 320—323]; Эшби У. Р. Конструкция мозга. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 404—407].

О. Г. Івахненко.

ГОМОРІ МЕТОД — метод розв'язування задачі лінійного *програмування цілочислового*, що зводить її розв'язування до розв'язування послідовності задач лінійного програмування відсіканням на кожному кроці оптимального нецілочислового розв'язку. Метод запропонував амер. математик Р. Гоморі.

Нехай задачу лінійного цілочислового програмування записано у вигляді:

$$r_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j => \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad (2)$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$x_j \text{ — ціле}, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (4)$$

де усі a_{ij}, b_j, c_j — задані цілі числа, x_j ($j = 1, \ldots, n$) — змінні задачі і $A^1 = (A_{s_1}, \ldots$

..., A_{s_m}) — базис оптим. плану X^1 задачі лінійного програмування (1—3), $A_{s_i} = (a_{1s_i}, \ldots, a_{ms_i})^T$, $i = 1, \ldots, m$, T — знак транспонування. Помноживши рівняння (2) на $(A^1)^{-1}$, перепишемо їх у вигляді:

$$x_{s_i} + \sum_{j \in N} x_{s_ij} x_j = x_{s_i0}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad (5)$$

або

$$x_{s_i} = x_{s_i0} - \sum_{j \in N} x_{s_ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

де N — множина індексів j векторів A_j, що не належать базисові; всі x_{s_ij}, x_{s_i0} — перетворені значення відповідних коефіцієнтів a_{s_ij}, b_{s_i}. Підставляючи рівність (5) у ф-лу (1), виразимо форму x_0 через небазисні змінні x_j $(j \in N)$.

$$x_0 = x_{00} - \sum_{j \in N} x_{0j} x_j, \qquad (6)$$

де x_{00} — значення лінійної форми, $x_{0j} \geqslant 0$ — оцінки небазисних векторів (див. *Симплекс-метод*) на оптим. плані. Коли всі x_{i0}, що відповідають даному планові X^1, цілі числа, то X^1_*— розв'язок задачі (1—4). Якщо деякі з x_{i0} дробові, виберемо одне з них, напр., x_{l0} і, відправляючись від l-го рядка системи (5), побудуємо додаткове обмеження, якого не задовольняє одержаний нецілочисловий розв'язок $x_{s_i} = x_{s_i0}$, $i = 1, \ldots, m$, $x_j = 0$, $j \in N$, але задовольняють усі цілочислові плани (1—4). Позначимо через $[x_{lj}]$ найбільше ціле число, що не перевищує x_{lj}, тоді $\{x_{lj}\} = x_{lj} - [x_{lj}] \geqslant 0$ — дробова частина x_{lj}. Шукане обмеження можна записати у вигляді:

$$\sum_{j \in N} \{x_{lj}\} x_j \geqslant \{x_{l0}\}. \qquad (7)$$

План X^1 його не задовольняє, бо для нього ліва частина нерівності (7) дорівнює нулеві, а права — дробова частина нецілої величини x_{l0} — більша за нуль. Як l можна вибрати і 0, тобто будувати додаткове обмеження за рівнянням (6). Справді, цілочисловість усіх c_j гарантує цілочисловість x_0 на всіх цілочислових планах. Обмеження (7) переписують у вигляді:

$$x_{n+1} = -\{x_{l0}\} + \sum_{j \in N} \{x_{lj}\} x_j, \; x_{n+1} \geqslant 0 \qquad (8)$$

і додають до умов (2).

Матриця

$$\overline{A} = \begin{Vmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

яку одержують, розширюючи A^1 при додаванні до ф-ли (2) рядка (3) і змінної x_{n+1}, є псевдобазисом для розширеного завдання. Для розв'язування цієї задачі користуються *двоїстим симплекс-методом*, починаючи розв'язувати з псевдобазису A. Процес додавання нових обмежень триває доти, поки на одному з кроків не буде одержано оптим. цілочислового плану або не виявиться, що задача нерозв'язна. В першому випадку одержаний план є розв'язком для задачі (1—4), у другому — задача (1—4) не має цілочислових планів. Г. м. зводиться до розв'язування за скінченну кількість кроків, коли виконано хоч одну з умов: існує розв'язок задачі (1—4) або значення лінійної форми (1) обмежене знизу. Якщо обмеження цілочисловості (4) накладено лише на частину змінних, описане правило побудови додаткового обмеження (8) незастосовне. Але відома видозміна цього правила (розробив її також Р. Гоморі) і для такої задачі. Г. м. узагальнено на задачі опуклого цілочислового програмування, дискретного програмування і в деяких інших напрямах.

Літ. див. до ст. *Програмування цілочислове.*

В. О. Трубін.

ГО́НОК ПРОБЛЕ́МА — проблема усунення можливості неправильного функціонування схеми *автомата*, який містить елементи пам'яті, внаслідок явища гонок. Явище гонок виникає, якщо за умовами спрацьовування автомата одночасно повинні змінювати свій стан кілька елементів пам'яті; при цьому елемент, який змінить стан раніше за інші (тобто елемент, який виграв гонки), може змінити сигнали на входах елементів пам'яті, які беруть участь у гонках, що може призвести до установлення автомата в неправильний стан.

Розроблено методи виявлення гонок та усування їх, а також способи усування небезпеки гонок, коли їх допущено. Актуальною є розробка оптим. методів (для різних умов та обмежень) протигонкового кодування, питань автоматизації протигонкового кодування тощо (див. *Елементний синтез ЦОМ*).

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Миллер Р. Теория переключательных схем. Пер. с англ., т. 2. М., 1971.

Е. Г. Комухаєв.

ГО́РНЕРА СХЕ́МА — одна з найпоширеніших *обчислювальних схем*. Г. с. застосовують, напр., для знаходження коеф. розкладу многочлена $f(x)$ за степенями $x - a$ або для обчислень значень многочленів.

ГРА АЗА́РТНА — багатокрокова гра одного гравця. На t-му кроці гри ($t = 1, 2, \ldots$) гравець, маючи капітал f_{t-1}, вибирає одну з альтернатив, які він має, що залежать від величини f_{t-1}. Після цього відбувається розиграш партії гри (див. *Гра динамічна*), який є реалізацією якоїсь *випадкової величини*, що залежить від ходу гравця. Число, одержуване під час реалізації, є капіталом гравця f_t після t-го кроку. Якщо гравець закінчує гру в момент t, то його виграш визначають як $u(f_t)$, де u — ф-ція корисності гравця, яку задано на множині капіталів. Мета гравця — максимізувати ф-цію корисності.

Г. а. є, напр. «червоне й чорне», коли в кожній партії гравець може зробити ставку на одну з двох альтернатив, що з'являються з заданими ймовірностями. В такій грі *стратегією оптимальною* є ставка в кожній партії всієї наявної у гравця суми, або суми, достатньої для того, щоб зірвати банк.

О. Б. Яновська.

ГРА БЕЗ ПОБІЧНИХ ПЛАТЕЖІВ — *гра кооперативна*, в якій можливості поділу корисності й перерозподілу її між гравцями обмежені. За значення *характеристичної функції* $v(K)$ Г. б. п. п. для коаліції K (див. *Ігор теорія*) беруть множину таких векторів, що K може забезпечити своїм членам виграші, не менші за відповідні компоненти цих векторів. Множину векторів виграшів, які фактично можуть одержати всі учасники гри, позначають через H. Отже, формально Г. б. п. п. описують трійкою $\langle I, v, H\rangle$, де $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множина гравців.

У множині H визначають (як і в класичних кооперативних іграх) відношення *домінування* й на основі цього відношення формулюють різні принципи оптимальності, зокрема, *ядро*, за теоремою Неймана—Моргенштерна і т. д. Доведено, що кожна Г. б. п. п. трьох осіб має розв'язок; відомий приклад Г. б. п. п. семи осіб, що не має розв'язку.

О. Н. Бондарєва, М. М. Воробйов.

ГРА БЕЗКОАЛІЦІЙНА — гра, в якій учасники, діючи ізольовано один від одного, добиваються індивідуальної мети. Формально Г. б. можна задавати системою:

$$\Gamma = \langle I, \{s_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle,$$

де $I = \{1, 2, \ldots, n\}$—множина гравців, s_i — множина стратегій гравця i, а H_i — його *виграшу функція*, яку визначено на декартовім добутку $S = s_1 \times \ldots \times s_h$ і яка набуває дійсних значень.

Прикладом може бути гра Морра з трьома гравцями. Кожен із трьох гравців показує двом іншим один або два пальці. Якщо всі гравці показали однакову кількість пальців, то виграш кожного гравця дорівнює 0. А коли один із гравців показав кількість пальців, відмінну від показаної його партнерами, то він одержує 1, а два інші — по — $\frac{1}{2}$. Однією з стратегій, які приводять до ситуації рівноваги, є така *стратегія мішана:* кожен з гравців з імовірністю $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ показує один палець і з імовірністю $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ — два.

Важливим принципом оптим. поведінки гравців є *здійсненності мети принцип*, який приводить до ситуацій рівноваги. Ці ситуації й ще деякі множини їх прийнято вважати за розв'язки Г. б. Ситуації рівноваги S і t наз. взаємозамінними, коли будь-яка ситуація $r = (r_1, \ldots, r_n)$, де $r_i = s_i$ або $r_i = t_i$, так само рівноважна. Вони наз. еквівалентними, коли $H_i(s) = H_i(t)$ для всіх $i \in N$. Нехай Q — множина всіх ситуацій рівноваги, а Q^1 — множина ситуацій рівноваги, оптим. за Парето (див. *Парето оптимум*). Гру наз. розв'язною за Нешом, коли всі $s \in Q$ є еквівалентні й взаємозамінні. Гру наз. дуже розв'язною, коли Q^1 непусте й усі $s \in Q^1$ — еквівалентні й взаємозамінні. Доведено, що Г. б. не обов'язково має розв'язок за Нешом, але коли вона його має, то цей розв'язок — єдиний. Є й інші підходи до визначення оптим. поведінки в Г. б.

До Г. б. належать *ігри антагоністичні*, в т. ч. ігри на виживання, *ігри на одиничному квадраті*, *ігри динамічні*, *ігри матричні*, *ігри стохастичні* й деякі інші.

Літ.: Воробьев Н. Н. Конечные бескоалиционные игры. «Успехи математических наук», 1959, т. 14, в. 4; Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 2; Нэш Дж. Бескоалиционные игры. В кн.: Матричные игры. М., 1961.

Г. П. Ткаченко.

ГРА БІМАТРИЧНА — *гра безкоаліційна* двох осіб, що мають скінченне число стратегій. Г. б. задають парою матриць виграшів $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ однакових розмірів. Якщо 1-й гравець обирає рядок i, а 2-й — стовпчик j, то виграш 1-го гравця — a_{ij}, а 2-го — b_{ij}. Якщо $a_{ij} + b_{ij} = 0$ для всіх i та j, то Г. б. виявляється *грою матричною*. Теорія біматричних ігор є найпростішим розділом заг. теорії безкоаліційних ігор. Але вичерпної теорії оптим. поводження гравців у Г. б. ще немає.

Прикладом Г. б. може бути гра з матрицями виграшів.

$$\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Цю гру здебільшого інтерпретують як конфлікт двох бандитів, затриманих з підозри в спільному тяжкому злочині, причому кожний має дві стратегії: «відмагатися» і «зізнаватися». Якщо обидва не будуть зізнаватися, то через відсутність прямих доказів їх буде засуджено до помірного покарання (напр., за бродяжництво строк ув'язнення — 1 рік). Якщо обидва зізнаються, то їх буде засуджено до суворого покарання з урахуванням зізнання як пом'якшуючої обставини (напр., 8 років ув'язнення). Якщо один зізнається, а другий — ні, то той, хто зізнався, одержує прощення, а другий — макс. покарання (напр., 10 років ув'язнення). *Рівноваги ситуацією* буде тут спільне зізнання, яке приводить до великих втрат (8 років ув'язнення), а *Парето оптимумом* — спільне замовчування, яке, проте, нестійке.

М. М. Воробйов, М. Ф. Козакова.

ГРА ВИРОДЖЕНА — *гра антагоністична*, в якій *виграшу функція* вироджена, тобто має вигляд:

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i(x)\, g_j(y),$$

де $f_i(x)$ та $g_j(y)$ — ф-ції. задані відповідно на множинах *стратегій чистих* гравців A та B.

Вивчали вироджені *ігри на одиничному квадраті*. Вони зводяться до скінченних антагоністичних *ігор опуклих*. Якщо $f_i(x)$ та $g_j(y)$ — неперервні ф-ції, то гравці A та B мають *стратегії оптимальні*, які є відповідно сумішшю не більше як m і n чистих стратегій. Якщо $f_i(x) = x^i$, а $g_j(y) = y^j$, то Г. в. наз. поліноміальною. Поняття Г. в. можна визначити і для заг. безкоаліційних ігор n осіб. *Г. М. Дюбін.*

ГРА ДИНАМІ́ЧНА — гра n осіб у вигляді процесу, що розвивається у часі, протягом якого гравці приймають послідовно часткові рішення, переходячи від одного стану гри до іншого. І д., в яких гравці приймають рішення в дискретні моменти часу, описують такою схемою. Задають множину станів X, для кожного $x \in X$ множини $S_i(x)$ елементарних стратегій гравців i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (множина $S(x) = \prod_{i=1}^{n} S_i(x)$ визначається як простір елементарних ситуацій $s(x_1) \in S(x_1)$), початковий стан гри $x_1 \in X$ та ф-ції $F_k(x_1, s(x_1), \ldots, x_{k-1}, s(x_{k-1}), x_k)$, які при фіксованому x_k вимірні за останніми своїми аргументами, а при фіксованих $x_1, s(x_1), \ldots, x_{k-1}, s(x_{k-1})$ є ймовірнісними розподілами на X. Партію гри $P = (x_1, s(x_1), x_2, s(x_2), \ldots)$ визначають індуктивно. В початковому стані x_1 кожний гравець i вибирає елементарну стратегію $s_i(x_1) \in S_i(x_1)$, в результаті чого складається елементарна ситуація $s(x_1) \in S(x_1)$. Стан $x_2 \in X$ вибирають згідно з розподілом $F_2(x_1, s(x_1), x_2)$. Якщо визначено відрізок партії $P_k(x_1, s(x_1), \ldots, x_{k-1}, s(x_{k-1}), x_k)$, то аналогічно утворюється елементарна ситуація $s(x_k) \in S(x_k)$, після чого наступний стан $x_{k+1} \in X$ вибирають згідно з розподілом $F_{k+1}(x_1, s(x_1), \ldots, x_k, s(x_k), x_{k+1})$. На кожній партії P визначено виграш $h_i(P)$ гравця i ($i = 1, \ldots, n$). Стратегія f_i гравця i є набір ф-цій $\{f_i^k\}$, де ф-ція f_i^k ($k = 1, 2, \ldots$) кожному відрізку партії p_k довжини k ставить у відповідність елементарну ситуацію $s_i(x_k) \in S_i(x_k)$. Г. д. визначено, якщо кожна ситуація індукує ймовірнісну міру μ_f на множині всіх партій. У цьому разі виграш гравця i в ситуації f визначається як *математичне сподівання* $h_i(P)$ за мірою μ_f: $H_i(f) = \int h_i(P)\, d\mu_f(P)$. Прикладом Г. д. є така гра. Кожному з двох гравців здають певну масть карт. Третю масть тасують, а потім карти цієї масті відкривають одну за одною. Щоразу, коли карту відкрито, обидва гравці одночасно відкривають якусь із своїх карт за своїм бажанням. Той, хто відкрив старшу карту, виграє третю карту (якщо обидва відкривають карти однакової вартості, то не виграє ніхто). Так триває доти, поки всі три масті не буде вичерпано. Після цього кожний гравець підраховує кількість очок на картах, які він виграв; рахунок ведуть за різницею виграшів гравців.

Окремими класами І. д. є *ігри рекурсивні*, *ігри стохастичні* та ігри на виживання. І. д., в яких прийняття рішень неперервне у часі, є, напр., *ігри диференціальні*. *А. М. Ляпунов.*

ГРА З ВИ́БОРОМ МОМЕ́НТУ ЧА́СУ — *гра на одиничному квадраті*, в якій *стратегіями чистими* гравців є вибирання моментів часу для виконання певної дії. Іноді розглядають ігри з вибиранням кількох моментів часу (див. *Дуель* у теорії ігор). *Виграшу функція* Г. з в. м. ч. монотонна за кожною із змінних (затримка дії збільшує шанси успіху) і розривна на діагоналі одиничного квадрата (випереджання противника бажане). *А. С. Михайлова.*

ГРА З НУЛЬОВО́Ю СУ́МОЮ — те саме, що й *гра антагоністична*.

ГРА КООПЕРАТИ́ВНА — нестратегічна гра багатьох гравців з утворенням коаліцій, у якій припускається необмежений перерозподіл виграшів у вигляді т. з. побічних платежів. Основи теорії Г. к. розробили амер. математики Дж. фон Нейман та О. Моргенштерн. Спершу Г. к. конструювали на основі *ігор безкоаліційних*. Саме у грі з багатьма гравцями I для кожної коаліції $K \subset I$ розглядали антагоністичну гру K проти допоміжної до неї коаліції $I \setminus K$. Значення цієї гри, яке позначається через $v(K)$, є ф-цією від K, що називається *характеристичною функцією*. Деякі І. к. можна задати їхніми характеристичними ф-ціями безпосередньо. Прикладами таких ігор є схеми голосування та моделі ринків. Г. к. визначають формально як пару $\langle I, v\rangle$, де $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множина гравців, а v — характеристична ф-ція, задана на підмножинах I. Вектор виграшів гравців є *поділом* гри. Як множину всіх поділів звичайно беруть

$$A = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n:\ x_i \geqslant v(i),\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(I)\right\}.$$

На цій множині визначають співвідношення *домінування*: поділ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ домінує над поділом $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (позначення: $x \succ y$), якщо знайдеться така коаліція K, що $\sum_{i \in K} x_i \leqslant v(K)$ та $x_i > y_i$ для всіх $i \in K$. Перша умова наз. ефективністю коаліції K для поділу x. Ця умова показує, що коаліція може порівнювати лише такі поділи, в яких вона може забезпечити частки всіх своїх учасників. Множину елементів, максимальних відносно домінування, наз. *С — ядром*. Для співвідношення домінування поділів важливу роль грає розв'язок Нейма-

на — Моргенштерна. Однак, нормативна суть розв'язку має кілька вад: розв'язок може складатися більше як з одного поділу; він може не бути єдиним; відомий приклад гри (десяти осіб), що не має розв'язку. Окрім класичної кооперативної теорії, розвиваються й нові теорії, також основані на характеристичній функції. *О. М. Бондарева.*

ГРА НА ГРА́ФІ — гра, подана в такому вигляді. Дано *Бержа граф* $L = (X, \Gamma)$ з виділеною підмножиною $X_0 \subset X$ початкових вершин. Один з гравців (який саме — звичайно визначають жеребкуванням) як свій хід вибирає якусь вершину $x_1 \in X_0$; потім робить хід 2-й гравець, вибираючи вершину $y_1 \in \Gamma x_1$; після цього 1-й гравець вибирає вершину $x_2 \in \Gamma y_1$ і т. д. У багатьох іграх переможцем вважається той, хто перший вибере тупикову вершину — таку z, що $\Gamma z = \varnothing$ (тобто, що супротивника позбавлено змоги зробити черговий хід). Гравець, який вибрав у якийсь момент гри вершину в *ядрі*,— такому $S \subseteq X$, для якого $\forall x \in S, \Gamma x \cap S = \varnothing$ і $\forall x \in X \setminus S, \Gamma x \cap S \neq \varnothing$, має змогу, незалежно від відповіді супротивника, наступним своїм ходом знову вибрати вершину в S і т. д., тобто застрахувати себе від програшу. Можуть існувати й інші стратегії безпрограшної гри (навіть на *графі*, який не має жодного ядра). В складніших іграх елементи графа L забезпечують вагами, і тоді після припинення гри переможця визначають, напр., за сумою ваг вибраних ним вершин. Див. також *Ігор теорія.* *О. О. Зиков.*

ГРА НА ОДИНИ́ЧНОМУ КВАДРА́ТІ — *гра антагоністична*, в якій множинами чистих стратегій 1-го та 2-го гравців є сегменти $[0, 1]$. Ф-цією виграшу в цій грі є ф-ція двох змінних $K(x, y)$, що її наз. часто *ядром* гри й вона задана на одиничному квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$. *Стратегіями мішаними* гравців є ймовірнісні міри, які задають за допомогою ф-цій розподілу $F(x)$ та $G(y)$ на $[0, 1]$. Ф-ція розподілу на відрізку $[0, 1]$ — це монотонно неспадна ф-ція, що набуває на лівому й правому кінцях інтервалу відповідно значень «0» та «1». Умову існування розв'язку гри записують у випадку Г. на о. к. у вигляді:

$$\max_{F(x)} \inf_{G(y)} \int_0^1 \int_0^1 K(xy)\, dF(x)\, dG(y) = \min_{G(y)} \sup_{F(x)} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, dF(x)\, dG(y),$$

де інтеграли розуміють у значенні Стільтьєса. Для неперервної ф-ції $K(x, y)$ ця умова виконується.

Приклад Г. на о. к.— гра, в якій гравці вибирають місце перебування на відрізку $[0, 1]$, причому 1-й гравець намагається максимізувати, а 2-й — мінімізувати відстань між ними. Ядром у цій грі є ф-ція $|x - y|$. 2-й гравець має оптим. чисту стратегію $y = 1/2$, а 1-й повинен з однаковими імовірностями вибирати стратегії $x = 0$ та $x = 1$. Значення гри дорівнює 1/2. Див. також *Стратегія чиста.* *А. І. Соболєв.*

ГРА ОПУ́КЛА — *гра безкоаліційна* n осіб, у якій хоча б у одного гравця множина *стратегій чистих* є опуклою підмножиною лінійного простору, а його *виграшу функція* за будь-яких фіксованих стратегій решти гравців — опуклою на цій підмножині. Якщо множина чистих стратегій кожного гравця Г. о. є компактною, а ф-ції виграшу неперервні, то існує *рівноваги ситуація*, в якій гравці, що мають опуклі ф-ції виграшу, використовують чисті стратегії.

Г. о. наз. с к і н ч е н н о ю, якщо для кожного гравця множина його чистих стратегій є компактною підмножиною якогось скінченновимірного лінійного простору, а ф-ції виграшу всіх гравців — полілінійні. Зокрема, скінченна антагоністична Г. о. задається трійкою $\langle A, B, H \rangle$, де $A \subset E^m$, $B \subset E^n$, а ф-ція H має вигляд

$$H(r, s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i s_j, \quad r \in A, \quad s \in B.$$

Якщо μ та v — розмірності множин оптим. стратегій гравців A і B, а ρ — ранг матриці $\|a_{ij}\|$, то

$$\mu + v \leqslant m + n - s.$$

Г. о. є, напр., антагоністична *гра на одиничному квадраті*, в якій за будь-яких стратегій 1-го гравця ф-ція виграшу є опуклою на множині чистих стратегій 2-го гравця. В цьому випадку 2-й гравець має чисту оптим. стратегію, а 1-й — оптим. стратегію, що є сумішшю не більше як двох чистих. *Г. М. Дюбін.*

ГРА ПОЗИЦІ́ЙНА — гра, що має вигляд багатокрокового процесу і розгортається в дискретному часі. Цей процес відбувається як випадкове блукання по деревоподібно впорядкованій множині позицій (від початкової позиції до якоїсь остаточної) і в якому гравці приймають послідовно часткові рішення в умовах змінних інформаційних станів. Прикладами Г. п. є шахи, салонні картярські ігри, військові операції та дії автоматів. Точне формальне визначення остаточної Г. п. вперше дав амер. математик Г. Кун.

Деревоподібно впорядкована множина визначає для кожної позиції єдиний шлях, що веде до неї з початкової позиції, а також множину можливих з цієї позиції ходів безпосередньо в наступні позиції, тобто множину а л ь т е р н а т и в. Число альтернатив може бути або скінченним, або нескінченним. Позиції, що не мають альтернатив, наз. о с т а т о ч н и м и, а шляхи, що ведуть до них,— п а р т і я м и. Партії можуть тривати й нескінченно. Позиція, в якій перебуває гравець у будь-який момент, здебільшого відома йому не повністю, а лише як якийсь невідомий елемент відомої множини, яку наз. і н ф о р м а ц і й н о ю. *Стратегією чистою* гравця в Г. п. є ф-ція, визначена на сім'ї його інформаційних множин, значеннями якої є альтернативи. Структура Г. п. в основному характеризується сім'ями інформаційних множин

гравців та взаємним розміщенням цих множин. Виділяють класи ігор з повною інформацією (коли кожна інформаційна множина складається з однієї позиції), з майже повною інформацією (коли кожен гравець знає про інших гравців усе), з повною пам'яттю (коли гравець знає про себе все) і т. д. Характерними для теорії Г. п. є проблеми про можливості гравців обмежуватися більш-менш вузькими класами *стратегій мішаних* (напр., *стратегіями поведінки*) залежно від взаємного розміщення інформаційних множин гри. *І. М. Врублевська.*

ГРА ПРОСТА — *гра кооперативна*, в якій *характеристична функція* v може набувати лише двох значень: 0 — на програючих коаліціях та 1 — на виграючих.

Прикладом може бути зважена мажоритарна гра. Нехай кожному гравцеві $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ приписано «вагу» w_i, при цьому ні для якого $k \subset I$ не має місця рівність $\sum_{i \in k} w_i = \sum_{i \in k} w_i$, а коаліція k — виграюча, і $v(k) = 1$. Коаліція $I \setminus k$ — програюча, і $v(I \setminus k) = 0$, якщо k становить «зважену більшість», тобто якщо $\sum_{i \in k} w_i > \sum_{i \in k} w_i$. *М. М. Воробйов.*

ГРА РЕКУРСИВНА — різновид *гри динамічної*. В Г. р. вибір гравцями стратегій на кожному кроці визначає розподіл *імовірностей* підігор, які розігруються на наступному кроці, або закінчення партії. Виграші учасників залежать лише від останньої розіграної підгри. Оскільки ймовірність того, що партія ніколи не скінчиться, відрізняється від нуля, повинно бути визначено виграші гравців у разі нескінченної партії.

Скінченні антагоністичні Г. р. розглянув уперше амер. математик Х. Еверет (1954), праця якого тісно пов'язана з працею амер. математика Л.-С. Шеплі про *ігри стохастичні*. Аналіз будь-якої стохастичної гри можна звести до аналізу якоїсь Г. р. Але через можливість нескінченних партій досліджувати Г. р. у загальному випадку складніше, ніж стохастичні ігри. Проте, як довів Еверет, будь-яка така гра має значення й обидва гравці мають ε-оптимальні стратегії. Він вказав і метод знаходження *гри значення*. Див. також *Ігри антагоністичні*. *В. К. Доманський.*

ГРА СТОХАСТИЧНА — різновид *гри динамічної*. В Г. с. вибір гравцями альтернатив на кожному кроці визначає і виграш на цьому кроці, і *розподіл імовірностей* підігор, які доведеться розігрувати на наступному кроці. При цьому на кожному кроці при будь-якому виборі гравцями альтернатив є ненульова *імовірність* закінчення партії. Внаслідок цього партія з імовірністю, що дорівнює одиниці, закінчується за скінченну кількість кроків.

Скінченні антагоністичні стохастичні ігри вперше (1953) визначив і розглянув амер. матем. Л. Шеплі. Він довів, що будь-яка така гра має значення, і обидва гравці мають оптим. стратегії. Він вказав і на процедуру, що дає змогу знайти як *гри значення*, так і *стратегії оптимальні*. *В. К. Доманський.*

ГРАДІЄНТ ф у н к ц і ї $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ у точці $x \in E^n$ — вектор, координати якого в просторі E^n дорівнюють частинним похідним цієї функції в точці X. Позначають Г. як grad $f(x)$, $\nabla f(x)$ або $f'(x)$. Г. визначає напрям, для якого похідна за напрямом ф-ції $f(x)$ є максимальною. Ця властивість зумовила широке використання Г. в різних *оптимізації методах*.

Для функціоналу $f(x)$, визначеного в лінійному нормованому просторі E, роль Г. відіграє сильна похідна. Оператор $f'(x)$, який діє з E в E^*, наз. с и л ь н о ю п о х і д н о ю (похідною Фреше) функціоналу $f(x)$ в точці x, якщо для довільного елемента $h \in E$ має місце рівність $f(x + h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|)$. Перший доданок у правій частині рівності, що апроксимує $f(x + h) - f(x)$ з точністю до величини порядку малості вищого за $\|h\|$, наз. диференціалом Фреше, або сильним диференціалом. Слабким диференціалом (д и ф е р е н ц і а л о м Г а т о) функціоналу $f(x)$ у точці x називають вираз $Df(x, h) = \frac{d}{dt} f(x + th)/_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$. Існування сильного диференціалу $df(x, h)$ забезпечує існування слабкого диференціалу, причому $Df(x, h) = df(x, h)$, але не завжди буває навпаки. Наявність слабкого диференціалу забезпечує існування сильного диференціалу тоді, коли слабкий диференціал $Df(x, h)$ існує, коли він рівномірно неперервний по x у якійсь кулі E і неперервний по h. У цьому разі існує й сильний диференціал, і $df(x, h) = Df(x, h)$. Якщо слабкий диференціал $Df(x, h)$ є лінійним відносно h, тобто $Df(x, h) = Lh$, то $L = f'(x)$ — оператор, який діє з E в E^*,— наз. с л а б к о ю п о х і д н о ю (похідною Гато) функціоналу $f(x)$ у точці x.
Р. А. Поляк, М. Є. Примак.

ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД — метод мінімізації функції багатьох змінних. Г. м. полягає в побудові послідовності векторів x_k, $k = 1, 2, \ldots$, пов'язаних між собою співвідношенням $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$, де $\nabla f(x_k)$ — *градієнт* мінімізовуваної в точці x ф-ції $f(x)$. Числовий параметр λ_k вибирають з умови мінімуму за λ ф-ції $f(x_k - \lambda)\nabla f(x_k))$, $\lambda \geqslant 0$. Див. також *Оптимізації методи* чисельні.

ГРАМАТИКА АВТОМАТНА, г р а м а т и к а з і с к і н ч е н н и м ч и с л о м с т а н і в — різновид *граматики породжувальної*.

ГРАМАТИКА БЕЗКОНТЕКСТНА, г р а м а т и к а к о н т е к с т н о в і л ь н а — різновид *граматики породжувальної*.

ГРАМАТИКА ЗАЛЕЖНОСТЕЙ, г р а м а т и к а к е р у в а н ь — різновид *граматики породжувальної*.

ГРАМА́ТИКА КАТЕГОРІА́ЛЬНА — різновид *граматики формальної*. Г. к. використовує конструйовані спец. способом імена — категорії для позначення типів слів і словосполучень описуваної мови. Зіставлення категорій із синтаксичними типами, що їх виділяють із смислових міркувань для конкретних природних чи штучних мов, провадиться так. Певні типи вважають елементарними (вихідними) і позначають символами (буквами), які наз. е л е м е н т а р н и м и к а т е г о р і я м и. Якщо є синтаксичний тип, усі словосполучення якого приєднані зліва до словосполучень типу, позначеного L, дають словосполучення типу, позначеного K, то перший з трьох названих типів матиме позначення $[K/L]$. Аналогічно, синтаксичний тип, який, приєднуючись справа до L, дає K, матиме позначення $[L \setminus K]$. Т. ч., синтаксичні типи позначають виразами, утвореними з елементарних категорій послідовним застосуванням двох операцій: $[/]$ і $[\setminus]$; такі вирази наз. к а т е г о р і я м и. Таким чином, сама будова категорії зазначає синтаксичну роль відповідного типу. Зокрема, для опису укр. мови можна запровадити елементарні категорії *Реч* (речення) та *I* (іменник або група іменника). Неперехідні дієслова чи дієслівні групи позначатимуться тоді категорією [*I**Реч*], прикметники — [*I* / *I*], прислівники, що відносяться до дієслова, — [[*I* \\ *Реч*] / [*I* \\ *Реч*]]. Ці позначення показують, що дієслово, приєднане до *I* справа, утворює *Реч*; прикметник, приєднуючись до *I* зліва, — *I*; прислівник, приєднуючись до дієслова зліва, — дієслівну групу (приклад навмисно спрощено; справді ж опис природної мови набагато складніший).

Формально Г. к. та описувана нею мова задаються так. Г. к. визначається як четвірка компонентів: 1) словник (скінченна множина) основних символів; 2) словник елементарних категорій; 3) виділена елементарна категорія, яка наз. г о л о в н о ю; 4) п р и п и с у в а л ь н а ф у н к ц і я, яка ставить у відповідність кожному основному символові скінченне число категорій, утворених з елементарних. Основні символи інтерпретуються як слова мови; елементарні категорії — як назви синтаксичних типів слів і словосполучень, які вважають за вихідні. Головна категорія інтерпретується як символ речення, приписувальна функція — як задання для кожного слова всіх його синтаксичних типів. Наявність у одного слова або словосполучення кількох синтаксичних типів відповідає синтаксичній омонімії. Приписувальна функція ставить у відповідність кожному ланцюжкові $a_1, \ldots, a_n$ основних символів скінченну множину ланцюжків категорій, що складається з найрізноманітніших ланцюжків виду $K_1 \ldots K_n$, де K_i — одна з категорій, що відповідають a_i ($i = 1, \ldots, n$). Безпосереднім скороченням ланцюжка категорій називають замінювання в ньому сусідньої пари категорій, яка має вид $L\,[L \setminus K]$ або $[K / L]\,L$, категорією K (безпосереднє скорочення категорій аналогічне скороченню дробу, але для категорій розрізняють ліві й праві «знаки дробу» й відповідно скорочення). Ланцюжок категорій φ скорочується до ланцюжка категорій ψ, якщо є послідовність ланцюжків, що починається ланцюжком φ і кінчається ланцюжком ψ. В цій послідовності кожний наступний ланцюжок утворюється безпосереднім скороченням попереднього. Ланцюжок основних символів наз. р е ч е н н я м, якщо принаймні один із ланцюжків категорій, поставлених йому у відповідність, скорочується до головної категорії. Множина речень наз. м о в о ю, д о п у щ е н о ю (або о п и с у в а н о ю) цією Г. к. Так, при задаванні описаним вище способом фрагмента укр. мови за допомогою Г. к. з ланцюжком слів «зелений гай шумить» зіставляється ланцюжок категорій [*I* / *I*] і [*I* \\ *Реч*]; він безпосередньо скорочується до ланцюжка *I* [*I*\\ *Реч*], а той — до головної категорії *Реч*; тому зазначений ланцюжок слів є реченням. Наведена система понять являє собою задавання Г. к. як різновиду *граматики розпізнавальної*. Алгоритм, що дає змогу розпізнати, чи є довільний ланцюжок основних символів таким реченням мови, яке допускає ця Г. к., полягає у виписуванні всіх ланцюжків категорій, що відповідають цьому ланцюжкові, і повному скороченні кожного з них усіма можливими способами. Неважко запровадити еквівалентну систему понять, яка описує процес будови речення розгортанням ланцюжків категорій,— тоді Г. к. стане заданою як різновид *граматики породжувальної*.

Клас мов, що їх допускають Г. к., збігається з класом мов, породжувальних граматиками безконтекстними.

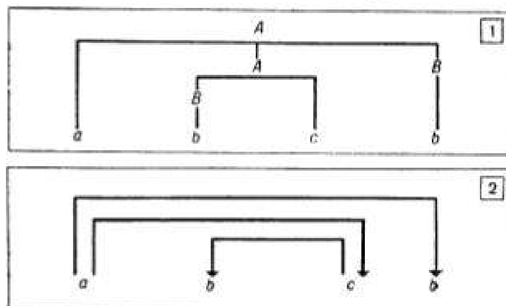
Поняття «Г. к.» було запроваджено у 50-х роках 20 ст. для побудови алгоритму синтаксичного аналізу природних мов. Проте апарат Г. к. малопридатний для практичного моделювання природних мов і тепер використовується майже виключно в теоретичних дослідженнях.

ГРАМА́ТИКА ЛІНІ́ЙНА — безконтекстна граматика, в кожному правилі якої, в правій частині, є не більше як по одному входженню допоміжного символу. Окремим випадком Г. л. є автоматна граматика. Див. *Граматика породжувальна*.

ГРАМА́ТИКА ПОРО́ДЖУВАЛЬНА — система правил, яка дає змогу будувати скінченні послідовності символів; є різновидом *граматики формальної*. Поняття Г. п., використовуване в матем. лінгвістиці, по суті, є окремим випадком поняття *числення*, що його використовують у ін. розділах матем. логіки. Термін «Г. п.» використовують звичайно як назву певного класу числень (що також наз. граматиками Хомського). Кожне числення цього класу задається такими чотирма компонентами: 1) словником (скінченною множиною) о с н о в н и х, або т е р м і н а л ь н и х, символів; 2) словником д о п о м і ж н и х, або нетермінальних символів; 3) виділеним допоміжним символом, який наз. п о ч а т к о-

вим; 4) набором правил виведення, або набором синтаксичних правил, кожне з яких має вигляд $\varphi \rightarrow \psi$, де φ і ψ — *ланцюжки*, що складаються з осн. і допоміжних символів. Осн. символи інтерпретуються як слова мови, допоміжні — як назви класів слів і словосполучень, початковий символ — як символ речення. Синтаксичні правила описують зв'язки між частинами речення. Застосування правила $\varphi \rightarrow \psi$ до ланцюжка, що має вигляд $\alpha\varphi\beta$, означає перетворення його на ланцюжок $\alpha\psi\beta$, де α і β — ланцюжки, один з яких (а то й обидва) можуть бути пустими. Вивід у цій Г. п. є послідовністю ланцюжків, у якій будь-який ланцюжок, крім першого, одержують з попереднього, застосувавши певне правило виведення. Ланцюжок осн. символів, виведений з початкового символу, наз. реченням, а множину всіх речень — мовою, яку породжує ця граматика. Так, у Г. п. з осн. словником $\{a, b, c\}$, допоміжним $\{A, B\}$, початковим символом A й набором правил $\{A \rightarrow aAB,\ A \rightarrow Bc,\ B \rightarrow b\}$ одним із виводів є послідовність A, aAB, $aBcB$, $abcB$, $abcb$. Ланцюжок $abcb$ — речення.

Осн. класи Г. п. виділяють залежно від обмежень, які накладають на синтаксичні правила. У граматиці безпосередніх складників синтаксичні правила мають вигляд $\chi A \omega \rightarrow \chi\psi\omega$; у безконтекстній, або контекстно вільній граматиці — $A \rightarrow \psi$; в автоматній граматиці (або граматиці зі скінченним числом станів) — $A \rightarrow aB$ або $A \rightarrow a$. Тут a позначає осн. символ, A і B — допоміжні, χ, ω і ψ — ланцюжки осн. і допоміжних символів, причому ψ — не пустий. Очевидно, що в зазначеній послідовності класів Г. п. кожний клас є частиною попереднього. Мови, породжувані Г. п. перелічених класів, наз. відповідно мовами безпосередніх складників, безконтекстними чи автоматними. В граматиках складників на кожному кроці виведення замінюється лише один символ, тому в них з кожним виведенням речення асоціюється т. з. деревом виведення. Воно будується так. Корінь дерева відповідає початковому символові. Кожному символові ланцюжка, на який замінюється початковий символ на першому кроці виведення, ставиться у відповідність вузол дерева й до нього проводиться гілка від кореня. Для тих з одержаних вузлів, які позначено допоміжними символами, будується аналогічна конструкція і т. д. Кожне дерево виведення, що розглядається як дерево складників речення при описуванні структури речення, задає на ньому систему складників (для наведеного прикладу дерево виведення подано на мал. 1; відповідна система складників складається з ланцюжків $abcb$, bc, a, b, c, b). Ця особливість граматик складників робить їх важливим засобом для описування природних і штучних мов. Саме граматики складників та їхні окремі випадки є одним з осн. об'єктів вивчення матем. лінгвістики. Для одного окремого випадку безконтекстних граматик — граматик залежностей, або керувань, з кожним реченням породжуваної мови (точніше — з кожним виведенням речення) можна зіставити певне відношення керування. Граматикою залежностей наз. граматика, всі правила якої мають вигляд $A \rightarrow B_1 \dots B_m\, a\, B_{m+1} \dots B_n$, де $0 \leqslant m \leqslant n$, a — основний, а A, B_1, ..., B_n — допоміжні символи. Якщо при побудові певного речення використовується правило зазначеного виду, то в дереві виведення від вузла, позначеного символом A, йдуть гілки до



вузлів, позначених символами B_1, ..., B_m, a, B_{m+1}, ..., B_n; символ a наз. гол. у складнику A, тобто складнику, що відповідає вузлові з позначкою A, й за визначенням вважають, що він керує головними символами складників B_1, ..., B_n. Граматика наведеного прикладу — граматика залежностей, і зазначений вивід задає відношення керування (мал. 2). Є й різновиди Г. п., у яких для породжуваних речень задаються й системи складників і відношення керування.

Еквівалентність Г. п. Дві Г. п. наз. слабо еквівалентними, якщо вони породжують ту саму мову; сильно еквівалентними — якщо, крім того, для будь-якого речення породжуваної мови збігаються описи структури, зроблені за цими граматиками. Розрізняють принаймні три типи сильної еквівалентності: однаковість описування системи складників, описування відношення керування або одночасно описування складників і керування.

Основи теорії Г. п. розроблено в 1950—60-х роках (переважно в працях амер. лінгвіста Н. Хомського) як формальний апарат для опису природних і штучних мов, у зв'язку з внутрішніми потребами лінгвістики й з розв'язуванням мовних задач на ЕОМ.

Серед напрямів математичного дослідження Г. п. варто виділити два: порівнювання різних класів Г. п. та дослідження розв'язності алгоритмічних проблем. Серед перелічених класів мов (мови, породжувані Г. п. заг. виду; мови безпосередніх складників; безконтекстні; автоматні) кожний наступний істотно ширший за попередні. Класи мов, породжуваних граматиками залежностей і категоріальними, збігаються з класом безконтекстних мов. Клас безконтекстних

граматик має більші можливості для побудови опису структури: для безконтекстної граматики, взагалі кажучи, може не існувати сильно еквівалентної їй граматики залежностей чи категоріальної.

Один з найважливіших класів алгоритмічних проблем для Г. п. — проблеми розпізнавання властивостей мов, тобто потрібно знайти алгоритм, який дає змогу за будь-якою граматикою заданого (фіксованого для цієї проблеми) класу K дізнатися, чи має породжувана цією граматикою мова деяку певну властивість. Якщо такий алгоритм існує, то кажуть, що властивість розпізнається в класі K, якщо ж не існує, то вона не розпізнається. Найважливішими властивостями мов, що їх досліджували на розпізнаваність, є: пустота (властивість бути пустою множиною); повнота (властивість збігатися з множиною будь-яких ланцюжків основних символів); істотна невизначеність (властивість, яка полягає в тому, що будь-яка граматика з класу K, яка породжує цю мову, зіставляє з деяким ланцюжком більш як один структурний опис).

Зведення результатів перелічених проблем подано в таблиці (P — розпізнаваність відповідної властивості в цьому класі граматик, H — нерозпізнаваність).

Проблеми	Класи породжувальної граматики			
	Всі граматики породжувальні	Граматики		
		складників	безконтекстні	автоматні
Пустота	Н	Н	Р	Р
Повнота	Н	Н	Н	Р
Істотна невизначеність	Н	Н	Н	Р

Крім перелічених напрямів матем. досліджень Г. п., можна зазначити такі питання: розпізнавання породжуваних мов за допомогою автоматів з магазинною пам'яттю; вивчення складності виведення в Г. п.; пошук класів Г. п., яким за «породжувальною силою» належать проміжні місця в описаній ієрархії Г. п.; зв'язок Г. п. з граматиками розпізнавальними; керування виведеннями в Г. п. тощо (див. також *Лінгвістика математична*).

Практичного застосування апарат Г. п. набуває гол. чином при створенні *мов штучних* і в працях, що стосуються *машинного перекладу*. Більшість із створюваних тепер штучних мов задають саме за допомогою Г. п., причому найчастіше — безконтекстних граматик. Так, стандартні описи *АЛГОЛу-60* та ін. *мов програмування* по суті є Г. п. Використовувати Г. п. в автоматичному перекладі почали внаслідок великих труднощів синтаксичного аналізу речення. Алгоритм синтаксичного аналізу для мови, породжуваної Г. п., частіше виявляється простим і доступним для огляду. Більшість груп, які працюють над автомат. перекладом і суміжними проблемами, певною мірою використовують моделювання природної мови за допомогою Г. п. В роботах, які провадяться в СРСР, використовують Г. п., близькі до граматик залежностей; у США — близькі до граматик складників. Див. також *Інгве гіпотеза*.

Літ.: Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М., 1969 [бібліогр. с. 188—192]; Хомский Н. Формальные свойства грамматик. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966; Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973 [бібліогр. с. 349—356]; Фитиалов С. Я. Об эквивалентности грамматик НС и грамматик зависимостей. В кн.: Проблемы структурной лингвистики. 1967. М., 1968; Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 310—319].

ГРАМА́ТИКА РОЗПІЗНАВА́ЛЬНА — система правил, що для будь-якого ланцюжка (послідовності символів) визначає, чи входить він у фіксовану множину ланцюжків (мову). Див. *Граматика формальна*, *Граматика породжувальна*.

ГРАМА́ТИКА СКЛАДНИКІ́В, граматика безпосередніх складників — різновид *граматики породжувальної*.

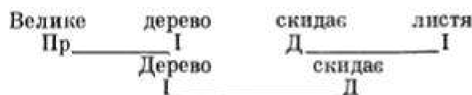
ГРАМА́ТИКА ТРАНСФОРМАЦІ́ЙНА — система правил, що дає змогу будувати речення природної мови з порівняно невеликої кількості найпростіших, так званих ядерних речень за допомогою спец. перетворень, або трансформацій (див. *Мови моделі математичні*). Дослідження Г. т. провадять гол. чин. на рівні неформалізованих міркувань і розгляду окремих прикладів. Г. т. поки що не можна тлумачити й як різновид формальних граматик, оскільки ще не існує її задовільного загального математичного визначення. Поняття Г. т. введено для узагальнення і формалізації прийнятого в англо-амер. лінгвістиці методу трансформаційного аналізу речення. Апарат Г. т. застосовують для деяких досліджень з автоматичної обробки тексту.

Г. т. можна розглядати як один з рівнів *граматики породжувальної*.

Для уникнення труднощів на шляху застосування методу безпосередніх складників Н. Хомський запропонував доповнити цей метод рядом трансформаційних правил, що утворюють трансформаційний рівень граматики. Ці правила знімають обмеження з методу безпосередніх складників, наприклад, дають змогу переставляти символи в ланцюжках, робити одночасно перекодування кількох символів (а правилами безпосередніх складників це забороняється) тощо.

Кожна мова, якщо виходити з правил Г. т., може бути представлена набором ядерних речень і набором трансформацій, яким піддають ці ядерні речення, щоб утворювати різноманітні типи речень даної мови. Аналіз українського речення «Велике дерево скидає

листя» з застосуванням символів Пр, І, Д (Пр — прикметник, І — іменник, Д — дієслово) за схемою безпосередніх складників:



зводиться до конструкції ІД («Дерево скидає»), яка є кінцевою конструкцією, або ядерним реченням. Застосовуючи різні трансформації до ядерного речення, можна одержати різноманітні речення української мови. Проте на трансформаційному рівні в більшості випадків (особливо для флексійних мов, якими є російська та українська) одержуємо не конкретні слова синтезованого речення, а певні одиниці з індексами, наприклад, «іти$_{мин}$», «скидати$_{мин}$», що означає дієслова «іти», «скидати» в минулому часі. Для того, щоб утворення речень відбувалося цілком автоматично, виникла потреба запровадити третій рівень — морфофонемний (на цьому рівні відбувається перетворення названих вище одиниць з індексами на реальні слова синтезованих речень, наприклад, «іти$_{мин}$» перетворюється на «йшов» і т. ін.).

Літ.: Хомский Н. Синтаксические структуры. В кн.: Новое в лингвистике, в. 2. М., 1962; Хомский Н. Лингвистика, логика, психология и вычислительные устройства. В кн.: Математическая лингвистика. М., 1964; Хомский Н., Миллер Дж. Введение в формальный анализ естественных языков. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965.

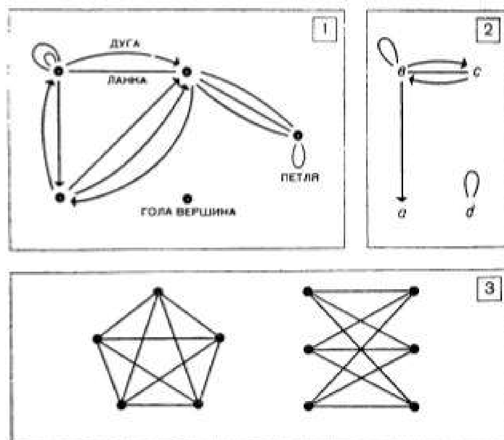
ГРАМА́ТИКА ФОРМА́ЛЬНА — система правил для опису множин скінченних послідовностей символів. Скінченні послідовності символів (ланцюжки), що входять до складу цієї множини, наз. **р е ч е н н я м и**, а сама множина — **м о в о ю**, описуваною цією Г. ф.

Існують два типи Г. ф.: *граматики породжувальні* — системи правил, що дають змогу будувати речення мови, і граматики розпізнавальні — алгоритми, що розпізнають, чи є певний ланцюжок реченням. Цей поділ є дещо умовним, бо будь-яка розпізнавальна граматика по суті задає спосіб побудови всіх речень. Крім того, для найістотніших класів породжувальних граматик (зокрема, для граматик складників, безконтекстних і автоматних), існують алгоритми, які дають змогу для будь-якого ланцюжка символів визначити, чи є він реченням. Розрізняють, крім того, такі класи Г. ф. (напр., *граматики категоріальні*, які можна розглядати і як породжувальні, і як розпізнавальні. Г. ф. застосовують найчастіше для описування природних і штучних мов у *лінгвістиці математичній*. Тепер породжувальні граматики застосовуються більше, ніж розпізнавальні.

Літ.: Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973 [бібліогр. с. 349—356].

ГРАНИ́ЧНА ЗАДА́ЧА — те саме, що й *крайова задача*.

ГРАФ — система об'єктів довільної природи (вершин) і в'язок (ребер), що сполучають якісь пари цих об'єктів. Ребра можуть бути орієнтованими чи неорієнтованими, одна й та сама пара вершин може сполучатися будь-якою кількістю ребер, вершина може бути сполучена сама з собою (мал. 1). Строге означення Г. (за Зиковим) таке: Г. $L = (X, U; P)$ дано, якщо дано множину $X \neq \varnothing$ (вершин), множину U (ребер) і інцидентор — тримісний *предикат* P, причому $P(x, u, y)$ означає висловлення: «ребро u сполучає вершину x із вершиною y» і задовольняє дві умови: а) P визначено на всіх таких упорядкованих трійках



елементів x, u, y, для яких $x, y \in X$ та $u \in U$; б) $\forall u \in U \exists x, y \in X \{P(x, u, y) \& \forall x', y' \in X [P(x', u, y') \Rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')]\}$, тобто кожне ребро сполучає якусь пару (впорядковану) вершин x, y, але крім неї може сполучати ще тільки обернену пару y, x. Ребро, що сполучає x з y, але не y з x, наз. **д у г о ю** (яка виходить з x і заходить в y); ребро, що сполучає x з x, наз. **п е т л е ю** (при вершині x); ребро, що сполучає і x з y, і y з x ($x \neq y$), наз. **л а н к о ю** (між x та y). Дезорієнтація дуги u_0, яка йде з x_0 в y_0, тобто перетворення цієї дуги на ланку, означає перехід від Г. $L = (X, U; P)$ до Г. $L' = (X, U; P')$ з тими самими X, U і новим предикатом, який відрізняється від попереднього лише тим, що обидва вирази $P'(x_0, u_0, y_0)$ та $P'(y_0, u_0, x_0)$ справжні, тим часом як з двох виразів $P(x_0, u_0, y_0)$ та $P'(y_0, u_0, x_0)$ справжнім є лише перший; дезорієнтація всіх дуг перетворює L на Г. $\widetilde{L}(X, U; \widetilde{P})$, де предикат $\widetilde{P}(x, u, y)$ — *диз'юнкція* $P(x, u, y) \vee P(y, u, x)$.

Інше означення Г. (за К. Бержем): Г. є пара $G = (X, U)$, утворена множиною X (вершин) та сімейством U (дуг), що складається з упорядкованих пар вершин, причому одна й та сама пара може фігурувати в U скільки завгодно разів. Усі ребра (в тому числі й петлі) є дугами, тобто їх «орієнтовано», проте якщо в конкретному випадку не має значення, йде

дуга u_0 з x_0 в y_0 чи з y_0 в x_0, цю дугу розглядають як «неорієнтовану» і креслять без стрілки (або з двома протилежними стрілками); при такому означенні Г., в якому k дуг є неорієнтованими, фактично являє собою клас із 2^k різних Г. Надалі при викладі всієї *графів теорії* дотримуватимемося означень та позначень Зикова.

Г. $L' = (X', U'; P')$ наз. **частиною** (за К. Бержем — частинним підграфом) Г. $L = (X, U; P)$, якщо $\varnothing \neq X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$ і на підмножинах X', U' предикат P' збігається з P. Частина L' є підграфом Г. L, якщо всяке ребро з U, що сполучає вершини множини X', належить U'. Частина L' є **суграфом** (за К. Бержем — частинним Г.) Г. L, якщо $X' = X$. Два Г. $L_1 = (X_1, U_1; P_1)$ та $L_2 = (X_2, U_2; P_2)$ ізоморфні, коли можна встановити взаємно однозначну відповідність $X_1 \leftrightarrow X_2$, $U_1 \leftrightarrow U_2$ так, щоб для відповідних вершин і ребер висловлення $P_1(x_1, u_1, y_1)$ і $P_2(x_2, u_2, y_2)$ були рівносильними. Для кожного абстрактного (тобто без вказівки на конкретну природу вершин і ребер) Г. $L = (X, U; P)$, в якому множини X та U не більш як лічбові, напевно можна побудувати його топологічне зображення — ізоморфний Г. L_3, що його вершинами є якісь точки евклідового тривимірного простору, а ребрами — прості жорданові дуги (з позначеннями чи без позначень напряму), які сполучають ці точки й не мають між собою спільних точок, відмінних від вершин. Г. L наз. **плоским**, якщо він допускає таке топологічне зображення, всі вершини й дуги якого розміщено в одній площині (чи на одній сфері, а це рівносильно, оскільки стереографічним проектуванням завжди можна перевести плоске зображення в сферичне і навпаки). Г. без дуг (тобто «неорієнтований»), без петель і кратних ребер наз. **звичайним**; його можна задавати парою (X, U), де U — якась множина (не сімейство!) невпорядкованих пар різних вершин з X. Г. без ланок («орієнтований»), без кратних петель і кратних дуг одного напряму наз. *Бержа графом* (X, U), де U — якась множина впорядкованих пар вершин; такий Г. записують і в вигляді (X, Γ), де Γ — відображення, що кожному $x \in X$ відносить підмножину $\Gamma_x \subseteq X$ тих вершин, у які з x іде дуга чи петля. Напр., для Г. Бержа на мал. 2 маємо $X = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma a = \varnothing$, $\Gamma b = \{a, b, c\}$, $\Gamma c = \{b\}$, $\Gamma d = \{d\}$. Г. наз. **дводольним** (або біхроматичним), якщо множину X його вершин можна розбити на дві підмножини: $X = X_1 \cup X_2$, де $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ так, щоб ніяке ребро не сполучало вершин однієї й тієї самої підмножини; зокрема, дводольний звичайний Г. наз. **графом Кеніга** і при заданому розбитті множини вершин його записують у вигляді $(X_1, X_2; U)$. Г. заданого типу наз. **повним**, якщо в ньому є всі можливі для цього типу ребра (при незмінній множині вершин). Так, у повному звичайному Г. кожну пару різних вершин сполучено рівно однією ланкою; у повному Г. Бержа з кожної вершини в кожну іншу йде одна дуга і при кожній вершині є одна петля; повний Г. Кеніга складається з двох множин вершин і найрізноманітніших ланок, які сполучають вершини однієї множини з вершинами іншої (по одній ланці для кожної такої пари вершин). На мал. 3 показано повний звичайний п'ятивершинний Г. і повний Г. Кеніга з двома тривершинними множинами («три будинки і три криниці»); обидва вони — неплоскі. Г. без ребер ($U = \varnothing$) наз. **порожнім**. З поняттям Г. пов'язана ціла система конкретних проблем і методів переважно практичних або викликаних теор. проблемами з інших галузей математики.

Літ.: Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [бібліогр. с. 515—542]; König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936; Izbicki H. Graphentransformationen. «Monatshefte für Mathematik», 1960, Bd. 64, № 2; Берж К. Теория графов и ее применения. Пер. с франц. М., 1962 [бібліогр. с. 293—302]; Оре О. Теория графов. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 325—338]; Berge C. Graphes et hypergaphes. Paris, 1971.

О. О. Зиков.

ГРАФ ЗВА́ЖЕНИЙ — *граф*, у якому кожній дузі u поставлено у відповідність якесь число $c(u)$, яке називається її «вагою». Вага дуги може мати різні фіз. чи економ. інтерпретації: довжина дуги, вартість або час переміщення по ній, пропускна здатність — в економічних застосуваннях, імовірність безвідмовної роботи — в теорії надійності, напруга або струм — в електр. колах, передача ланки — у системах автоматичного керування. У різних застосуваннях $c(u)$ може набувати додатних і від'ємних, цілих і дробових значень. До найвідоміших задач на Г. з. належать *задача про найкоротший шлях*, задачі про максимальний потік, про найкоротшу зв'язуючу мережу, *задача про комівояжера* та ін. У деяких застосуваннях розглядаються графи з кількома вагами кожної дуги. Так, напр., у сітковій транспортній задачі кожній дузі можуть відповідати дві ваги — довжина дуги та її пропускна здатність.

Літ. див. до ст. *Графів теорія.*

В. О. Трубін.

ГРАФ РОЗФАРБО́ВАНИЙ — неорієнтований граф без петель, множину вершин (або ребер) якого розбито на k неперетинних груп так, що кожна вершина (ребро) належить точно одній групі й суміжні вершини (ребра) належать різним групам. Мінім. кількість таких груп вершин (ребер) наз. **хроматичним числом** (класом) графа. Якщо кожній групі поставити у відповідність свій колір, то у Г. р. суміжні елементи будуть забарвлені в різні кольори. Задачі, пов'язані з розфарбовуванням графів, крім теоретичного, мають і велике практичне значення. Вони виникають під час монтажу й перевірки складних електр. схем, складання графіків турнірів, у соціології тощо.

Літ. див. до ст. *Графів теорія.*

В. О. Трубін.

ГРА́ФІВ ЗВ'Я́ЗНІСТЬ — одна з основних властивостей графів, яка виявляється ось у чому. На множині вершин *графа* L відношення «вершини x та y з'єднані хоча б одним *лан-*

цюгом» є еквівалентність; класи цієї еквівалентності породжують підграфи, що їх наз. компонентами (зв'язності) графа L. Якщо кількість компонент $\varkappa(L) \neq 1$, то граф L наз. зв'язним. У *графів теорії* фундаментальну роль відіграє теорема Менгера: для існування в графі L системи з k ланцюгів ($k \geqslant 1$), які з'єднують дві задані вершини x та y і попарно не мають інших спільних елементів, необхідно й достатньо, щоб ніяке видалення k (чи менше) елементів, які становлять відмінні від x та y вершини чи ребра, які з'єднують x з y, не перетворювало L на такий граф, де x та y належать різним компонентам. «Рebровий» варіант цієї теореми (теорема Коніга) характеризується тим, що видалюваними k елементами є тільки ребра, а k ланцюгів, що з'єднують x з y, не можуть мати спільних ребер (але можуть мати спільні вершини, які відрізняються від x та y). Граф L наз. k-зв'язним вершинно (відповідно реброво), якщо будь-які дві його вершини x та y з'єднані принаймні k ланцюгами попарно без спільних елементів, крім x та y (відповідно попарно без спільних ребер). Максимальний 2-зв'язний (вершинно) підграф графа L наз. його блоком, а вершину, що належить більш як одному блокові,— точкою зчленування; ця точка характеризується тим, що її видалення веде до збільшення кількості компонент графа.

Враховуючи орієнтацію ребер, одержують поняття досяжності. Так, у *Бержа графі* $L = (X, \Gamma)$ вершина y є досяжною з x, якщо існує орієнтований ланцюг з початком x і кінцем y. Граф, у якому будь-які дві вершини є досяжними одна з одної, наз. бізв'язним (або дуже зв'язним). Бікомпоненти графа — це його макс. бізв'язні підграфи, база вершин — така підмножина $Z \subseteq X$, що ніякі дві різні вершини з Z не досяжні одна з одної, а будь-яка вершина $x \in X \setminus Z$ є досяжною хоча б з однієї вершини, що входить у Z. Проблему повного огляду баз вершин графа розв'язують так: виявляють усі ті бікомпоненти, в які не заходить ззовні жодна з дуг, тоді за всілякі бази вершин правлять множини, що їх одержують, вибравши по одній вершині з усіх виявлених бікомпонент. Проблема огляду і знаходження баз дуг — таких мінім. суграфів, які забезпечують ту саму досяжність вершин, що й у початковому графі,— набагато складніша, але й її в певному розумінні розв'язано.

Літ.: Зыков А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [бібліогр. с. 515—542].

О. О. Зиков.

ГРА́ФІВ ТЕО́РІЯ — розділ математики, який вивчає графи й ті узагальнення їх (*транспортні мережі, гіперграфи* тощо), на які поширюються деякі основні поняття й методи, що стосуються графів.

До виникнення заг. теорії *графи* траплялися (під різними назвами) в матем. задачах розважального характеру, в теорії електр. кіл, у хімії, фізиці, біології, соціології, а також у деяких розділах математики, передусім в алгебрі й топології. Оскільки існує широке коло об'єктів та явищ реального світу, які можна витлумачити в термінах Г. т., виникнення теорії абстрактних графів було природним явищем. Інтенсивний розвиток Г. т. зумовлений, в основному, запитами практики; важливу роль у становленні Г. т. відіграли численні дослідження, пов'язані з проблемою чотирьох фарб, а також ідея методу переміжних ланцюгів.

Однією з перших праць, що стосуються Г. т., є праця Л. Ейлера (1736), але основоположником цієї теорії вважають угорського математика Д. Кеніга, автора першої монографії (1936), де графи розглянуто як абстрактні матем. об'єкти і де закладено основи загальної Г. т. Найбільший внесок у дальший розвиток Г. т. зробили угор., амер., канадські, нім., франц., чехословацькі, а також радянські математики, з яких слід відзначити Л. М. Ліхтенбаума (1900—68), О. О. Зикова (н. 1922) та В. Г. Візінга (н. 1937).

Грунтуючись на систематизації та узагальненні ряду ідей і прийомів комбінаторно-логіч. характеру, що значною мірою стосуються пошуків оптим. розв'язків різних дискретних задач, Г. т. разом з *комбінаторним аналізом* становить специфічний розділ сучас. математики, який інтенсивно розвивається; він тісно пов'язаний з такими її розділами, як алгебра, топологія, теорія чисел, *імовірностей теорія, логіка математична, програмування математичне* та ін.

Відповідно до найзагальнішого визначення графа $L = (X, U; P)$ для задавання графа достатньо знати множину його вершин $X = \{x_\alpha / \alpha \in I\}$, множину ребер $U = \{u_\beta / \beta \in J\}$ і множину тих упорядкованих трійок $x_\alpha u_\beta x_\alpha'$ ($\alpha, \alpha' \in I$, $\beta \in J$), на яких є істинним висловлювання $P(x_\alpha, u_\beta, x_\alpha')$. Для випадку звичайних графів чи *Бержа графів* достатньо знати множини X і множини тих невпорядкованих (відповідно впорядкованих) пар $x_\alpha x_\alpha'$, для яких є істинним $\exists\, u \in UP(x_\alpha, u_\alpha, x_\alpha')$. Граф, у якого обидві множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ і $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ скінченні (скінченний граф) і $U \neq \varnothing$, можна задати матрицею інциденцій (a_{ij}), рядки якої відповідають вершинам графа ($i = 1, 2, \ldots, n$), стовпчики — ребрам ($j = 1, 2, \ldots, m$), а елемент a_{ij} містить інформацію про тип ребра u_j (дуга, петля чи ланка) і про відношення цього ребра до вершини x_i (вихідна дуга, вхідна дуга, інцидентна петля, інцидентна ланка чи неінцидентне ребро). Для задавання графа часто користуються квадратною матрицею суміжності (r_{ij}), у якої і рядки, і стовпчики відповідають вершинам графа ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), а елемент r_{ij} містить інформацію про кількість ребер кожного типу, які з'єднують вершини x_i і x_j; в разі звичайного графа $L = (X, U)$ достатньо взяти $r_{ij} = 1$ при $x_i x_j \in U$ і $r_{ij} = 0$ при $x_i x_j \in U$, а в разі графа Бержа $L = (X, \Gamma)$ взяти $r_{ij} = 1$ при $x_j \in \Gamma x_i$

і $r_{ij} = 0$ при $x_j \in \Gamma x_i$. Для графів заг. виду як r_{ij} використовують складніші елементи (або вдовольняються неповною інформацією про граф). До інших способів задавання графів вдаються рідше, а візуальне задавання (графічне) практично ефективне тільки при дуже малій кількості ребер (або в деяких надто спец. випадках).

Встановити тотожність двох скінченних графів $L = (X, U; P)$ і $L' = (X, U; P')$ з одними й тими самими множинами X і U неважко за будь-якого з перелічених вище способів задавання. Навпаки, проблема ізоморфізму (задача з'ясування того, чи існує взаємно однозначна відповідність множин X і X' вершин звичайних графів $L(X, U)$ і $L'(X', U')$, при якій кожному ребру графа L відповідає ребро графа L' і навпаки) навіть у випадку звичайних графів проста лише теоретично. Напр., для з'ясування ізоморфності двох звичайних графів $L = (X, U)$ і $L' = (X', U')$ у разі $|X| = |X'| = n$ і $|U| = |U'|$ потрібні, загалом кажучи, $n!$ порівнювань матриці суміжності одного з них з усіма матрицями суміжності другого, що їх одержують одне від одного різноманітними перестановками рядів (одночасними однаковими перестановками рядків і стовпчиків). Ще важчою є проблема ізоморфного входження, коли для двох графів L і L' необхідно встановити, чи ізоморфний L' якійсь частині графа L. Практично ефективного розв'язання цих двох проблем у заг. вигляді не знайдено, але воно здійсненне для багатьох спец. класів графів або при тих чи інших ослаблених постановки — напр., коли йдеться не про ізоморфізм цих графів, а тільки про те, чи збігаються ті чи інші характеристики, або, скажімо, про оцінку *імовірності* того, що граф містить частину даного виду.

Характеристика графів — це ф-ція, яка відносить до кожного графа елемент якоїсь фіксованої множини (чисел, векторів, многочленів, матриць, розбиттів, класу тих чи інших алгебр. систем тощо) і, як правило, є ізоморфною, тобто на ізоморфних графах вона набуває однакових значень. До найважливіших числових характеристик звичайного графа $L = (X, U)$ належать: кількість вершин $n(L) = |X|$; кількість ребер $m(L) = |U|$; кількість компонент (див. *Графів зв'язність*) $\varkappa(L)$; *цикломатичне число* $\lambda(L) = m(L) - n(L) + \varkappa(L)$; кількості $f_i(L)$ повних та $e_i(L)$ пустих i-вершинних підграфів ($i = 0, 1, 2, \ldots, n(L)$); $f_0(L) = e_0(L) = 1$; щільність $\varphi(L) = \max\{i/f_i(L) \neq 0\}$; нещільність (число внутрішньої стійкості) $\varepsilon(L) = \max\{i/e_i(L) \neq 0\}$; кількості $n_i(L)$ вершин ступеня i (тобто інцидентних рівно i ребрам); ступінь $\sigma(L) = \max\{i/n_i(L) \neq 0\}$; кількості $p_{ji}(L)$ суграфів із j ребрами і цикломатичним числом i; кількості $r_i(L)$ таких розфарбувань вершин рівно i кольорами, при яких ніякі дві суміжні (з'єднані ребром) вершини не пофарбовані однаково; хроматичне число $\gamma(L) = \min\{i/r_i(L) \neq 0\}$; число Хадвігера (ступінь гомоморфізму) $\eta(L)$ — найбільша кількість вершин повного графа, на який можна перетворити граф L (або якийсь його підграф) за допомогою стягування ребер; хроматичний клас (хроматичний індекс) $\chi(L)$ — найменша кількість кольорів, в які можна пофарбувати ребра графа так, щоб ніякі два суміжні (тобто такі, що мають спільну інцидентну вершину) ребра не виявилися того самого кольору; всесуміжність (число зовн. стійкості) $\beta(L)$ — найменша кількість вершин такого підграфа L', що будь-яка вершина L, яка не належить йому, є суміжною хоч би з однією вершиною з L'. Деякі характеристики (радіус, діаметр тощо) пов'язані з метрикою графа, тобто з ф-цією, яка відносить кожній парі вершин x та y віддаль між ними — якесь число $\rho(x, y) \geqslant 0$, напр., довжину найкоротшого з *ланцюгів*, що з'єднують x з y, а інші — з різними представленнями графів. Із числових характеристик можна складати різні многочленні характеристики, напр., вимірний многочлен $\sum_{i \geqslant 0} f_i(L) z^i$, розподільний (хроматичний) многочлен $\sum_{i \geqslant 1} r_i(L) z^i$, та ін., де z — формальна змінна.

Для орієнтованих графів характеристиками є кількість простих орциклів заданої довжини (див. *Цикл* графа), кількість ядер (див. *Гра на графі*), кількість баз і компонент, а також багато чисел, пов'язаних з орметрикою (уточненням поняття віддалі від однієї вершини до другої, яке враховує напрям дуг). Деякі характеристики неорієнтованого графа зумовлені можливістю орієнтувати його ребра так, як задано. Характеристикою графа може бути й якась алгебр. система — *група* автоморфізмів, *півгрупа* ендоморфізмів тощо. Неізоморфними характеристиками є, напр., кількість простих ланцюгів заданої довжини між даною парою вершин графа і матриця таких кількостей для всіх пар його вершин. Багато які з перелічених характеристик переносяться на графи загального виду.

Практично ефективно обчислювану систему ізоморфних характеристик, яка визначала б граф з точністю до ізоморфізму, вказати не вдається. Осн. завданнями щодо характеристик одного й того самого графа є вираження й оцінювання одних характеристик через інші (особливо важливо знаходити точні оцінки згори й знизу для таких трудно обчислюваних характеристик, як $\varphi, \varepsilon, \gamma, \eta, \chi, \beta$ через легко обчислювані $n, m, \varkappa, \lambda, n_i, \sigma$ тощо). Так, для звичайних графів: якщо $\sigma(L) \geqslant 3$ і граф L не містить повних $\sigma(L)$ — вершинних підграфів, то $\gamma(L) \leqslant \sigma(L)$; верхня оцінка для $\gamma(L)$ не може бути ф-цією самої тільки $\varphi(L)$ (нижня оцінка $\gamma(L) \leqslant \varphi(L)$ тривіальна); $\chi(L) \leqslant \sigma(L) + 1$ (нижня оцінка $\chi(L) \geqslant \sigma(L)$ тривіальна); було знайдено точні

верхні й нижні оцінки для $\varphi(L)$, $\varepsilon(L)$, $\gamma(L)$, точну верхню для $\eta(L)$ і точну верхню для $\beta(L)$ через $n(L)$ і $m(L)$; точної нижньої оцінки для $\eta(L)$ через $n(L)$ і $m(L)$ поки що не знайдено, а гіпотезу про те, що завжди $\eta(L) \geqslant \gamma(L)$, підтверджено поки що тільки для графів з $\gamma(L) \leqslant 4$. Одним із способів одержування точних оцінок є повне описування відповідних оптим. графів, а багато які з рівнянь вдається вивести за допомогою тієї чи іншої операції розбирання.

Оптимальні (екстремальні) та критичні графи й різницю між ними розглянемо на конкретному прикладі. Нехай $\mathrm{L}^K(n, \varphi)$ — клас звичайних n-вершинних графів зі щільністю φ, таких, що додавання будь-якого ребра (без додавання вершин і зміни положення попередніх ребер) збільшує щільність, а $\mathrm{L}^M(n, \varphi)$ — підклас таких із цих графів, які при заданих n і φ мають найбільшу можливу кількість ребер. Тоді графи з $\mathrm{L}^K(n, \varphi)$ є *критичними* відносно ребра, а графи з $\mathrm{L}^M(n, \varphi)$ — оптимальними (в цьому випадку максимальними) за кількістю ребер (на мал. 1 наведено відповідні приклади для $n = 5$, $\varphi = 2$). При фіксованих n і $\varphi \leqslant n$ клас $\mathrm{L}^M(n, \varphi)$ складається з єдиного (з точністю до ізоморфізму) графа і до того самого графа приводить і заміна щільності φ хроматичним числом γ; навпаки, класи $\mathrm{L}^K(n, \varphi)$ і $\mathrm{L}^K(n, \gamma)$ з однаковими числовими значеннями φ і γ є різними. Взагалі оптим. граф характеризується тим, що числове значення однієї з його характеристик є найбільшим (чи найменшим) з можливих при фіксованих значеннях заданої системи решти характеристик, а критичний граф — тим, що застосування до нього будь-якої операції певного типу неодмінно збільшує (чи неодмінно зменшує) задану характеристику.

Операція розбирання відносить графові L один чи кілька графів $L_1, L_2, \ldots, L_q$, кожен з яких у якомусь розумінні простіший за початковий (напр., містить менше вершин чи менше ребер). З кожною такою операцією $L \to \{L_1, L_2, \ldots, L_q\}$ можна пов'язати клас характеристик Φ, які задовольняють рекурентне співвідношення

$$\Phi(L) = f(\Phi(L_1), \Phi(L_2), \ \ldots, \ \Phi(L_q)),$$

де f — задана ф-ція, і початкові умови: для «найпростіших» графів L^0, до яких ця операція розбирання незастосовна, значення $\Phi(L^0)$ відомі. В багатьох випадках можна без істотної втрати інформації про граф вважати, що ф-ція f є лінійною, тобто

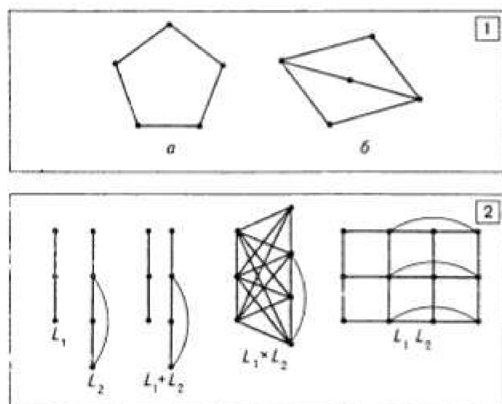
$$\Phi(L) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Phi(L_i),$$

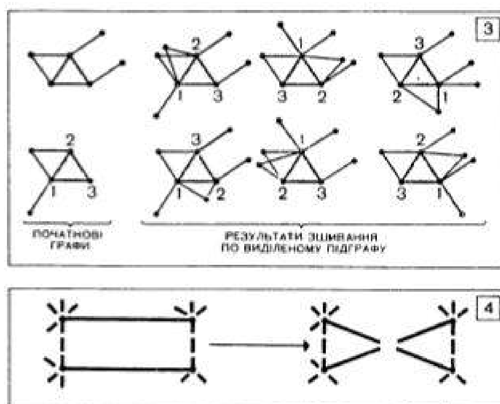
де числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ і значення $\Phi(L^0)$ є твірними елементами якогось кільця K. Осн. завдання для даного класу L графів і заданої операції розбирання: а) знайти умову Ω (у вигляді системи співвідношень між твірними кільця K), яка є необхідною й достатньою для того, щоб характеристика Φ була ізоморфною; б) встановити канонічний вигляд, до якого за допомогою співвідношень Ω приводиться заг. вираз $\Phi(L)$; в) з'ясувати зміст (вдаючись до термінів структури графа L) коеф. канонічного представлення $\Phi(L)$. Напр., якщо L — клас звичайних графів із лінійно впорядкованою множиною вершин, L_p — підграф графа $L \in \mathrm{L}$, породжений усіма вершинами L, суміжними з першою, L_r — підграф, який одержали з L, видаливши першу вершину, то, очевидно, вимірний многочлен $F(L) = \sum_{i \geqslant 0} f_i(L) z^i$ задовольняє рекурентне співвідношення $F(L) = F(L_r) + F(L_p) z$ й початкову умову $F(\cdot) = 1 + z$. Встановлено, що будь-яка ізоморфна характеристика $\Phi(L)$, для якої $\Phi(L) = \alpha_1 \Phi(L_p) + \alpha_2 \Phi(L_r)$ і $\Phi(\cdot) = 1$ (одиниця кільця K з твірними 1, α_1 і α_2), цілком визначається числами $f_i(L)$.

Для практичного обчислювання характеристик графа описаний рекурентний метод, як правило, неефективний (бо кожен з тих графів $L_1, L_2, \ldots, L_q$, які виникають після одного кроку розбирання, звичайно буває не набагато простішим за початковий граф L, а кількість таких графів з кількістю кроків зростає за експоненціальним законом), але він відіграє важливу роль при знаходженні співвідношень між різними характеристиками (напр., вираження чисел $r_i(L)$ через $p_{ji}(L)$).

До **операції композиції** вдаються тоді, коли утворюють новий граф з кількох простіших графів. Напр., з двох звичайних графів $L_1 = (X_1, U_1)$ і $L_2 = (X_2, U_2)$ з $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ можна утворити (мал. 2) суму $L_1 + L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$, добуток $L_1 \times L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 \cup \{x_1x_2 / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ і декартів добуток $L_1 \cdot L_2 = (\{\overrightarrow{x_1x_2} / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}, \{\overrightarrow{x_1x_2} \ \overrightarrow{y_1x_2} / x_1y_1 \in X \ \& \ x_1y_1 \in U_1 \ \& \ \& x_2 \in X_2\} \cup \{\overrightarrow{x_1x_2} \ \overrightarrow{x_1y_2} / x_1 \in X_1 \& x_2, \ y_2 \in X_2 \ \& \ \& \ x_2y_2 \in U_2\})$, де стрілка над парою вершин означає її впорядкованість. Ці три операції мають властивість ізоморфізму (коли початкові графи замінити ізоморфними їм, то й вислідний граф переходить в ізоморфний), а також деякі алгебр. властивості, напр., комутативність і асоціативність. Важливим прикладом операції композиції, якій не властивий ізоморфізм, є зшивання звичайних графів по повному підграфу (мал. 3). Усі відомі досі композиції є такими, що множина графів, нерозкладних ні за якою з цих операцій (тобто таких, що їх не можна представити як результат застосування операції до певної сукупності графів), так само неосяжна, як і множина всіх графів загалом. Через це повний розклад графів не розв'язує в заг. вигляді

проблеми ізоморфізму (навіть у випадках, коли розклад є єдиним, як, напр., за сукупністю операцій додавання й множення або, для зв'язних графів, за операцією декартового множення) і не приводить до повного опису всіх графів (або хоч би тільки всіх звичайних). Проте нерідко ті чи інші операції композиції виявляються корисними для описування класів спец. графів, напр., оптимальних (так, граф Турана $L^M(n, \varphi)$ є добуток r пустих $(p+1)$-вершинних і $\varphi - r$ пустих p-вершинних звичайних графів, де $n = p\varphi + r$, $0 \leqslant r < \varphi$), чи для побудови графів з наперед заданими властивостями. У всіх цих випадках важливо знати, як ведуть себе характеристики щодо цих операцій. Напр., вимірний і розподільний многочлени мають властивість мультиплікативності щодо множення графів.





1. Графи: *а* — критичний; *б* — оптимальний.
2. Операції композиції двох звичайних графів.
3. Зшивання двох звичайних графів по виділеному підграфу.
4. Переміщування ребер звичайного графа.

Операція перетворювання переводить граф у інший граф, як правило, без спрощування чи ускладнювання. Щодо операції цього типу постають питання знаходження інваріантних характеристик графа і питання про повноту систем таких характеристик (тобто про можливість перетворювати один в одного два графи з однією й тією самою системою, послідовно застосовуючи операції). Напр., система ступенів вершин звичайного графа є повною відносно операції переміщування ребер, що її подано на мал. 4.

Локальні властивості графів. Нехай $L = (X, U; P)$ — граф заг. виду; зіркою його вершини x наз. частину, утворену самою вершиною x та всіма інцидентними їй ребрами (разом з їхніми другими кінцевими вершинами). Задаючи всі $n(L)$ зірок окремо, не вказуючи, які вершини різних зірок є однією й тією самою вершиною графа L, одержимо л о к а л ь н у інформацію про L; усі властивості графа, які грунтуються на цій інформації, наз. локальними. Для звичайного графа вся локальна інформація про нього вичерпується системою чисел $\{n_i(L)\}$, тому й характеристики $n(L)$ і $m(L)$, що їх виражають за допомогою цих чисел, належать до локальних; характеристики $\varkappa(L)$, $\lambda(L)$, $\varphi(L)$, $\varepsilon(L)$ і $\eta(L)$ — не локальні. Багато які з узагальнень локальних властивостей можна назвати к в а з і л о к а л ь н и м и, напр., узагальнення, які характеризуються сукупністю оточень усіх вершин звичайного графа (оточення $O(L; x)$ вершини x звичайного графа L — це його підграф, породжений усіма суміжними з x вершинами L) або сукупністю усіх $n(L)$ його $(n(L)-1)$-вершинних підграфів (заданих з точністю до ізоморфізму). Щодо другої сукупності й досі не відомо, чи завжди вона визначає початковий граф L однозначно з точністю до ізоморфізму (проблема Улама — Келлі).

Єдиного *алгоритму* для розв'язування всіх питань Г. т. бути не може, але конкретне питання для конкретного скінченного графа завжди можна розв'язати за скінченну кількість кроків. Проте розв'язок може виявитися занадто громіздким, тому й щодо скінченних алгоритмів виникає проблема їхньої практичної ефективності, тобто можливості істотною мірою уникнути повного перебирання усіх можливих випадків. Практично ефективними є, напр., метод переміжних ланцюгів і метод Форда — Фалкерсона в теорії транспортних мереж. Навпаки, деякі задачі (напр., поміж задачами, пов'язаними з розфарбовуванням вершин) не допускають у заг. випадку практично ефективних алгоритмів, і тоді часто вдаються до таких прийомів, які для переважної більшості графів дають результат за прийнятний час. З цим пов'язане широке застосування в Г. т. ймовірнісних та асимптотичних методів, яке спирається на різні задачі підраховування графів (напр., знайти кількість неізоморфних звичайних графів із заданою кількістю вершин і ребер, заданими ступенями вершин тощо, а також аналогічні їм кількості за додаткової умови зв'язності

графів та ін.), що їх розв'язують методами комбінаторного аналізу.

Графи використовують у *сіткових методах планування й управління*, під час побудови граф-схем автоматів (див. *Абстрактного автомата граф*), у теорії алгоритмів (див. *Алгоритмів графові схеми*) та в ін. розділах кібернетики.

Літ.: Зыков А. А. Реберно-вершинные функции и распределительные свойства графов. «Доклады АН СССР», 1961, т. 139, № 4; Ершов А. П., Кожухин Г. И. Об оценках хроматического числа связных графов. «Доклады АН СССР», 1962, т. 142, № 2; Визинг В. Г. Оценка числа внешней устойчивости графа. «Доклады АН СССР», 1965, т. 164, № 4; Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [бібліогр. с. 515—542]; König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936; Берж К. Теория графов и ее применения. Пер. с франц. М., 1962 [бібліогр. с. 293—302]; Ore O. The four-color problem. New York, 1967 [бібліогр. с. 249—253]; Оре О. Теория графов. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 325—338]; Harary F. Graph theory. Reading, 1969; Sachs H. Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Bd. 1. Leipzig, 1970.
О. О. Зиков.

ГРАФІ́ЧНИЙ РЕЄСТРУ́ЮЧИЙ ПРИ́СТРІЙ — див. *Пристрої відображення інформації.*

ГРАФОПОБУДО́ВНИК — див. *Пристрої відображення інформації.*

ГРИ ЗНА́ЧЕННЯ — загальне значення обох частин рівності

$$v = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y) =$$

$= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y)$ в антагоністичній грі $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$. Якщо гравці мають оптим. (або ε-оптим. для будь-якого $\varepsilon > 0$) стратегії, то Г. з. існує. Застосовуючи свою *стратегію оптимальну*, 1-й гравець забезпечує собі одержання виграшу, не меншого за v, а 2-й гравець гарантує, що його програш не перевищить v (див. *Максиміну принцип*). Г. з. існує для широких класів антагоністичних ігор, зокрема для матричних ігор і для деяких класів нескінченних ігор (див. *Гра на одиничному квадраті*). Приклад гри, що не має значення, див. у ст. *Ігри антагоністичні.*
О. Б. Яновська.

ГРУП ТЕО́РІЯ — розділ алгебри, який вивчає властивості груп. Поняття групи склалося як одне з осн. понять математики і, в першу чергу, алгебри та геометрії. В 20 ст. Г. т. твердо ввійшла у фізику (квантова механіка, кристалографія) і в кібернетику (*абстрактна теорія автоматів*, коли лінійні). На першому етапі Г. т. розвивалася в межах теорії груп підстановок (або груп перетворень), яка становить і зараз один з центр. розділів Г. т. Нехай M — множина. Біекція σ множини M на себе наз. підстановкою множини M. Якщо на множині підстановок множини M розглядати операцію послідовного застосовування підстановок (їхню суперпозицію), то сукупність усіх підстановок утворить групу $S(M)$, яка наз. симетричною групою множини M. Підгрупи групи $S(M)$ наз. групами підстановок множини M. Якщо на множині M визначено яку-небудь структуру так, що M є носієм *алгебри універсальної* або алгебр. системи, то сукупність усіх підстановок множини M, які зберігають усі відношення структури, утворюють групу автоморфізмів цієї структури. Напр., нехай V — векторний простір над полем K. Операції в V — це додавання й множення векторів на $\alpha \in K$. Автоморфізмами простору є невироджені лінійні перетворення (див. *Оператори лінійні*): їхня сукупність — повна лінійна група простору V — і є групою автоморфізмів простору. Ця група ізоморфна групі невироджених квадратних матриць порядку розмірності простору з коеф. із поля K. Нехай E — евклідів векторний простір, і окрім векторних операцій на ньому визначено ще й операцію скалярного добутку. Автоморфізмами простору E є т. з. ортогональні лінійні перетворення, яким в ортонормованому базисі відповідають ортогональні матриці: їхня сукупність утворює ортогональну групу, яка є групою автоморфізмів простору.

Історично першим поняттям групи було поняття групи Галуа многочлена. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен з коеф. a_i з поля K і нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — корені цього многочлена. Тоді сукупність усіх підстановок множини $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ усіх коренів, що зберігають усі відношення виду $\sum c_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_n^{i_n} = 0$ з коефіцієнтами $c_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in K$, наз. групою Галуа многочлена: $f(x)$. Франц. матем. Е. Галуа вивів умову, необхідну і достатню для розв'язності рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ в радикалах. Зокрема, звідси виходила нерозв'язність заг. рівняння 5-го й вищих степенів. Т. з. теорія Галуа, що виникла в зв'язку з розв'язуванням цих задач, стала відправним пунктом для розвитку Г. т. Осн. причиною успіху поняття групи й поняття групи автоморфізмів виявився той визначний факт, що будова групи автоморфізмів якої-небудь структури несе велику інформацію про властивості цієї структури: будова групи автоморфізмів характеризує в якомусь розумінні властивості симетрії відповідної структури. В 20 ст. розвивається теорія абстрактних груп, яка вивчає властивості груп і класів груп, визначених аж до ізоморфізму й незалежно від конкретного задавання їх перетвореннями й автоморфізмами структур. Теорія абстрактних груп з'ясовує, які підгрупи вміщує певна група і як вони в ній розміщені, вивчає наявність або відсутність епіморфізмів одних груп на інші; інтерес являє собою задавання груп твірними та визначальними відношеннями й, нарешті, систематично досліджує різні процедури, що дають змогу будувати нові групи з заданих, — прямі, підпрямі, вільні добутки груп, розширення груп, сплетення та ін.

Літ.: Мальцев А. И. Группы и другие алгебраические системы. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. М., 1956; Курош А. Г. Теория групп. М., 1967 [бібліогр. с. 581—636]; Вейль Г. Классические группы. Пер. с англ. М., 1947 [бібліогр. с. 389—398]; Холл М. Теория групп. Пер. с англ. М., 1962 [бібліогр. с. 452—459].
Л. А. Калужнін.

ГРУПА в алгебрі — множина, в якій визначено одну бінарну, асоціативну та зворотну операції. Докладніше: Г. G — це якась множина G, з кожною парою елементів $a, b \in G$ якої зіставлено якийсь однозначно визначений елемент $c \in G$, що його наз. добутком елементів a та b; $c = ab$.

Операція множення елементів Г. повинна задовольнити такі аксіоми: 1) $(ab)\,c = a\,(bc)$ (аксіома асоціативності); 2) існує однозначно визначений елемент e, що його наз. одиницею, або нейтральним елементом Г. G, для якого має місце рівність $ae = ea = a$ для всіх $a \in G$ (аксіома існування нейтрального елемента); 3) для кожного $a \in G$ існує й якийсь однозначно визначений елемент $a^{-1} \in G$, що його наз. оберненим елементом елементові a, такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (аксіома оберненості операції множення). Якщо для всіх $a, b \in G$ має місце ще й $ab = ba$, то Г. наз. комутативною, або абелевою (див. *Груп теорія*).

Л. А. Калужнін.

ГРУПИ НЕПЕРЕ́РВНІ. Неперервною (топологічною) наз. *групу*, що в ній є топологія, відносно якої групова операція неперервна. Точніше, групу G наз. неперервною, якщо в множину G введено топологію, відносно якої множина G утворює топологічний простір, і якщо ф-ції $g^{-1} = \Phi(g)$—обернений елемент групи та $gg' = F(g, g')$ — добуток елементів групи є неперервними. Якщо G_1 та G_2 — Г. н., то гомоморфізмом $G_1 \to G_2$ наз. гомоморфізм груп, який є неперервним відображенням відповідних топологічних просторів. Зокрема, ізоморфізмом наз. ізоморфізм груп, що є гомеоморфізмом топологічних просторів. Аналогічно цьому в теорії Г. н. з урахуванням топології видозмінюються й інші поняття *груп теорії* (підгрупа, факторгрупа тощо).

Приклади: R — групи дійсних чисел. Груповою операцією є додавання чисел. Топологія вводиться шляхом природного ототожнювання дійсних чисел з точками числової осі. $\Phi(t) = -t$, $F(t, t') = t + t'$ $(t, t' \in R)$. T — група поворотів навколо осі. Груповою операцією є додавання кутів повороту (за модулем 2π). В цьому разі топологія вводиться шляхом природного ототожнювання кута повороту з точкою кола. $GL(n, R)$ — група всіх невироджених квадратних дійсних матриць порядку n. Груповою операцією є множення матриць. Топологія вводиться шляхом ототожнювання матриці з точкою n^2-вимірного евклідового простору, координатами якої є матричні елементи.

У застосуваннях найчастіше доводиться мати справу з групами перетворень. Г. н. перетворень наз. трійку (G, X, Ψ), де G — Г. н., X — топологічний простір і $\Psi(g, x) = T_g x$ $(g \in G,\ x \in X)$ — неперервна ф-ція із значеннями в X. Припускають, що при кожному $g \in G$ T_g є гомеоморфізмом X на себе і що має місце співвідношення $T_g T_{g'} = T_{gg'}$. Група перетворень наз. транзитивною, якщо для кожної пари точок x, $x' \in X$ знайдеться перетворення T_g, яке переводить точку x в x': $T_g x = x'$. Група $GL(n, R)$ природно визначає групу лінійних перетворень векторного простору R^n: $G = GL(n, R)$, $X = R^n$, якщо $g = (g_{ij}) \in GL(n, R)$ і $x = (x_i)$ — вектор з R^n, то $\Psi(g, x) = T_g x = (g_{ij})(x_i)$.

Г. н., які трапляються в застосуваннях, здебільшого є групами Лі. Г. н. G наз. r-параметричною групою Лі, коли якийсь окіл одиниці e групи гомеоморфний r-вимірному евклідовому просторові. В цьому разі в G (локально) можна ввести координати та визначити елемент g за допомогою координат $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Ф-ції $\Phi(g)$ та $F(g, g')$ зводяться до набору з r ф-цій від r (відповідно $2r$) змінних $\Phi_i(g) = \Phi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $F_i(g, g') = F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. З теорії груп відомо, що при належному виборі координат ф-ції Φ_i, F_i є аналітичними. Це дає змогу широко застосовувати матем. аналіз при вивченні груп Лі. Розглянуті вище групи R, T, $GL(n, R)$ є групами Лі (перші дві — однопараметричні, а остання — n^2-параметрична).

Алгеброю Лі L наз. векторний простір (здебільшого над полем дійсних чисел), у якому є бінарна операція $[a, b]$ $(a, b \in L)$, що задовольняє такі умови: є лінійною за обома аргументами; $[a, b] = -[b, a]$; $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [b, a]] = 0$ (тотожність Якобі). Алгебри Лі є об'єктами, простішими за групи Лі. Виявляється, що між алгебрами Лі та групами Лі, якщо розглядати їх локально (тобто в якомусь околі e), існує взаємнооднозначна відповідність, яка дає змогу звести багато питань, які стосуються груп Лі, до відповідних алгебр.

Пояснимо цей зв'язок точніше. Розглянемо Г. н. перетворень (G, X, Ψ), де G — r-вимірна група Лі, X — n-вимірна диференційовна різноманітність і Ψ — нескінченно диференційовна ф-ція. X^* — простір нескінченно диференційовних ф-цій на X. Для кожного $g \in G$, $f(x) \to f(Tgx)$ $(f(x) \in X^*)$ є *оператором лінійним* в X^*. Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — координати елемента g. Частинні похідні

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(T_g x))_{g=e} = X_i f(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

є лінійними дифер. операторами 1-го порядку. Їх наз. операторами Лі групи перетворень (інфінітезимальними операторами). $X_i f(x)\, d\alpha_i$ — зміна ф-ції $f(x)$ від діяння «нескінченно малого» перетворення, що відповідає елементові групи, i-а координата якого відрізняється від i-ї координати e на $d\alpha_i$. Якщо група перетворень ефективна (при $g = e$, $T_g x \not\equiv x$), то лінійні комбінації операторів X_i утворюють r-вимірний векторний простір L. Візьмемо $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$. Виявляється, що $[X_i, X_j] \in L$ і щодо введеної так операції $[,]$ L утворює алгебру Лі (що не залежить від

X та Ψ. Це й є алгебра Лі групи G. Нехай тепер $X_1, \ldots, X_r$ — лінійні дифер. оператори 1-го порядку в X^*. Припустимо, що їхня лінійна оболонка L є r-вимірним векторним простором і $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i \in L$. Тоді L утворює алгебру Лі. Тепер можна побудувати (локально) групу перетворень (G, X, Ψ) і, зокрема, відновити групу G, для якої L є алгеброю Лі, взявши

$$f(\Psi(g, x)) = f(T_g x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i\right) f(x)$$

$$(f(x) \in X^*).$$

Перелічимо деякі групи Лі, що особливо часто трапляються в застосуваннях. Поряд із зазначеними вище групами R, T, G, $GL(n, R)$ це група $GL(n, C)$ всіх невироджених квадратних матриць порядку n з комплексними елементами та ряд її підгруп і підгруп групи $GL(n, R)$. $O(p, q)$: підгрупа $GL(p+q, R)$, що складається з матриць, які залишають інваріантною форму $-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$. Зокрема, $O(n) = O(o, n)$ — група обертань n-вимірного евклідового простору. $SL(n, R)$ $(SL(n, C))$: підгрупа $GL(n, R)$ $(GL(n, C))$, яка складається з матриць з визначником 1. $U(p, q)$: підгрупа $GL(p+q, C)$, яка складається з матриць, що залишають інваріантною ермітову форму $-x_1\bar{x}_1 - \ldots - x_p\bar{x}_p + x_{p+1}\bar{x}_{p+1} + \ldots + x_{p+q}\bar{x}_{p+q}$. Зокрема, $U(n) = U(o, n)$ — група унітарних матриць. $Sp(n, R)$: підгрупа $GL(2n, R)$, яка складається з матриць, що залишають інваріантною форму $x_1y_{n+1} - x_{n+1}y_1 + x_2y_{n+2} - x_{n+2}y_2 + \ldots + x_ny_{2n} - x_{2n}y_n$.

Г. п. застосовують у теорії представлень (див. *Представлень груп теорія*). Нехай G — Г. п. і (K, X, Ψ) — Г. п. перетворень. Гомоморфізм $G \to K$ наз. представленням групи G в групі перетворень (K, X, Ψ). Під представленням здебільшого розуміють лінійне представлення. В цьому разі роль (K, X, Ψ) відіграє група $GL(n, R)$, що її розглядають як групу перетворень n-вимірного векторного простору R^n. Представлення групи ставить у відповідність кожному елементові групи g матрицю T_g, яка визначає лінійне перетворення в R^n так, що $T_gT_{g'} = T_{gg'}$. Центр. задачею теорії представлень є відшукання мінім. підпросторів, інваріантних відносно перетворень T_g (незвідні підпростори (представлення)), і розклад довільних векторів з R^n за цими підпросторами. Тепер інтенсивно розробляють і теорію нескінченновимірних представлень, у якій роль R^n відіграє нескінченновимірний векторний простір. Розглянемо неперервну транзитивну групу перетворень (G, X, Ψ). X^* — якийсь нескінченновимірний векторний простір ф-цій на X (простір усіх неперервних ф-цій, усіх нескінченно диференційовних ф-цій, усіх ф-цій, які підсумовують з квадратом за якоюсь мірою, тощо). Перетворення T_g визначають лінійні оператори $f(x) \to f(T_gx)$ $(f(x) \in X^*)$ простору X^*, які утворюють нескінченновимірне представлення групи G. Вивчення цього представлення, зокрема, одержання розвинення ф-цій з X^* за ф-ціями з незвідних підпросторів, є предметом гармонічного аналізу. Класичний гармонічний аналіз розглядає випадок, коли $G = T$, $X = S^1$ є коло або $G = R$, X — числова вісь. Такими розвиненнями є відповідно ряд і інтеграл Фур'є. Ще один приклад: нехай $G = O(3)$ — група обертань тривимірного евклідового простору, $X = S^2$ — сфера у тривимірному просторі з центром у початку координат. Відповідне розвинення — розвинення ф-ції на сфері в ряд за сферичними ф-ціями.

Теорія динамічних систем вивчає нетранзитивні групи перетворень. Найкраще вивчено системи з групою $G = R$. В цьому разі елемент групи $t \in R$ інтерпретують як час, а $T_tx = x(t)$ — як закон руху точки $x \in X$. Проблематика таких систем бере початок у заг. механіці і має в ній важливі застосування. Теорію груп застосовують у багатьох розділах сучасної математики.

Літ.: Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., 1973 [бібліогр. с. 515—518]; Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., 1958 [бібліогр. с. 345—349]; Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Пер. с англ. М., 1961; Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 579—582]. *Г. І. Кац.*

ГРУПОВЕ ДЖЕРЕЛО НАПРУГИ — джерело струму, в якому величини напруг між вихідними полюсами встановлюються відповідно до заданої програми. Програма вводиться в керуючий пристрій КП Г. д. н. (мал.) і запам'ятовується в ньому у вигляді *кодів*. У ній зазначаються величини та знаки напруг між відповідними вихідними полюсами, а

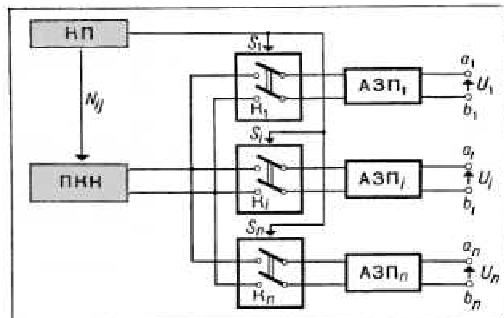


Схема групового джерела напруги.

також порядок видавання кодів і сигналів, що керують роботою пар ключів. Коли керуючих сигналів немає, всі ключі перебувають у розімкненому стані. В процесі роботи з КП на вхід перетворювача код — напруга ПКН надходять коди, синхронно з якими подаються

керуючі сигнали на ключі $К_1$, ..., $К_i$, ..., $К_n$. При появі в момент t_j сигналу S_i відповідний ключ $К_i$ замикається і код N_{ij}, перетворений на напругу $U_i(t_j)$, надходить на вхід аналогового запам'ятовувального пристрою ($АЗП_i$) і фіксується в ньому. При цьому на вихідних полюсах a_i, b_i з'являється напруга $U_i(t_j)$, яка лишається сталою доти, доки КП знову не подасть керуючий сигнал S_i й нове значення коду $N_{i,j+1}$. Отже, на кожній парі вихідних полюсів може бути встановлена напруга, яка ступінчасто апроксимує задану функціональну залежність від незалежної змінної t. До важливих параметрів Г. д. н. належать кількість пар вихідних полюсів, точність встановлення вихідних напруг і допустимий частотний діапазон їхньої зміни. Г. д. н. застосовують в електр. моделюючих сітках для задавання граничних умов, в аналогових, квазіаналогових і динамічних моделях. При використанні Г. д. н. у гібридних системах функції КП може виконувати цифровий автомат гібридної системи.

О. Ф. Катков.

ГУ́РВІЦА КРИТЕ́РІЙ — один із *стійкості критеріїв*.

ГУ́РВІЦА ТЕОРЕ́МА — теорема, що визначає умови, за яких усі корені (нулі) дійсного многочлена

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0 > 0,\ a_n \neq 0,\ n \geqslant 1) \qquad (1)$$

розміщені строго в лівій комплексній півплощині, тобто мають від'ємні дійсні частини.

Вперше задачу було розв'язано в праці Ш. Ерміта (1856), що залишилася невідома для широкого кола спеціалістів. Удруге її сформулював Дж. Максвелл (1868) і розв'язав Е. Раус (1877). Вдаліший розв'язок цієї задачі незалежно від Е. Рауса знайшов А. Гурвіц (1895). У матем. і тех. літературі цей розв'язок наз. теоремою (критерієм) Гурвіца.

Т е о р е м а. Щоб усі корені дійсного многочлена (1) мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \qquad (2)$$

Тут $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, —$$

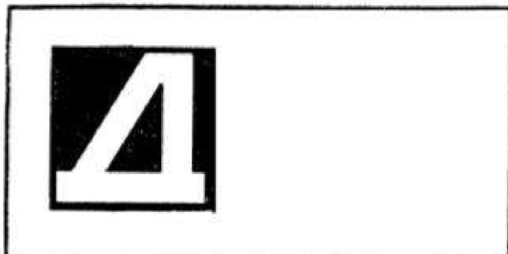
послідовні головні мінори матриці Гурвіца

$$H_f = \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_n \end{Vmatrix} \quad (a_i = 0 \text{ при } i < 0 \text{ та } i > n), \qquad (3)$$

складеної з коефіцієнтів многочлена (1). Многочлен, що задовольняє зазначену теорему, звичайно наз. Гурвіцовим, а мінори Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n — Гурвіцовими визначниками. Г. т. застосовують у матем. теорії стійкості й теорії автомат. регулювання як *стійкості критерій* лінійних (лінеаризованих) систем.

Літ. див. до ст. *Стійкості критерії.*

Ю. М. Чеховий.



ДАВА́Ч ВИПАДКО́ВИХ ЧИ́СЕЛ — пристрій для одержування послідовностей незалежних випадкових чисел з квазірівномірним законом розподілу. Цей закон зумовлений тим, що в електронній цифровій обчислювальній машині (ЕЦОМ) замість неперервної сукупності рівномірно розподілених випадкових чисел використовують дискретну сукупність 2^k чисел з однаковою ймовірністю появи будь-якого з них (k — кількість розрядів машинного числа в двійковому коді). При досить великих k різниця між квазірівномірним і рівномірним розподілом зникає. Звичайно для побудови послідовності випадкових чисел з будь-яким потрібним законом розподілу використовують одне або кілька значень випадкових чисел, квазірівномірно розподілених в інтервалі (0, 1).

Щоб одержати k-розрядне випадкове число, використовують послідовність k незалежних випадкових величин $z_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, що рівноймовірно набувають одне з двох можливих значень 0 та 1. Одержана послідовність нулів та одиниць являє собою послідовність двійкових знаків деякого дробу, який і є шуканим випадковим числом. Отже, для формування випадкових чисел досить побудувати випадкову послідовність нулів та одиниць так, щоб імовірності появи 0 та 1 були строго рівні.

Д. в. ч. можна поділити на дві групи. До першої належать Д. в. ч., які використовують джерела фізичних випадкових процесів (напр., шуми електронних ламп). Шумова ерс джерела після підсилення дає якусь вихідну напругу $U(t)$, яка є випадковою ф-цією часу. Якщо фіксувати значення цієї напруги в досить віддалені один від одного моменти часу t_i, то одержимо дискретну послідовність незалежних випадкових величин U_i. Вибираючи якийсь сталий рівень напруги U_a, визначаємо випадкову величину z_i умовою

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{при } U_i \leqslant U_a, \\ 1, & \text{при } U_i > U_a. \end{cases}$$

Величину напруги U_a вибирають такою, щоб імовірність появи $z_i = 1$ дорівнювала ймовірності появи $z_i = 0$. Одержувані в такий спосіб послідовності є випадковими. До вад цього способу одержування випадкових послідовностей можна віднести певну нестійкість роботи проміжних ланок між джерелом шуму й коміркою пам'яті машини, в якій утворюється нове випадкове число, та нестаціонарність фіз. випадкового процесу. Крім того, цьому способові властива й одна незручність: не можна застосувати повторний підрахунок для підвищення вірогідності результатів та усунення похибок через випадкові збої при розв'язуванні задач на ЕЦОМ.

До 2-ї групи належать Д. в. ч., що дають псевдовипадкові послідовності, які можна одержувати або за допомогою спец. програм на ЕЦОМ, або за допомогою спеціалізованих пристроїв — генераторів псевдовипадкових послідовностей. Такими способами можна одержувати дуже довгі послідовності випадкових чисел, проте вони будуть періодичними.

Д. в. ч. застосовують при моделюванні систем автомат. керування, при розв'язуванні задач *ідентифікації об'єктів керування* та в інших випадках.

Літ.: Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., 1965 [бібліогр. с. 215—227]; Иваненко В. И., Хохель О. А. Задачи стабилизации параметров искусственно генерируемых случайных процессов. «Автоматика и телемеханика», 1969, № 6; Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1968.

О. А. Хохель.

ДАВА́Ч ПООДИНО́КИХ ІМПУЛЬСІВ — неавтономна коливальна ланка (електронний пристрій), яка формує імпульси певної амплітуди й тривалості, або стандартні імпульси, в результаті дії випадкового стрибкоподібного пускового сигналу. Такими пристроями насамперед є загальмовані релаксаційні генератори: мультивібратор чи одновібратор, блокінг-генератор та ін.; в найпростішому випадку — диференціююче коло. Їхня особливість — негайне спрацьовування після запуску. Часова затримка визначається лише характеристиками схеми та приладів, що її реалізують. В обчисл. техніці Д. п. і. наз. і цифровий автомат, який після сигналу «пуск» формує імпульс, синхронний з сигналами генератора тактових імпульсів.

М. А. Левченко.

ДАВА́Ч РОБО́ЧОГО ЦИ́КЛУ — сукупність програмних і апаратурних засобів для керування та узгодження в часі дії окремих пристроїв чи елементів цифрових обчислювальних машин відповідно до заданої послідовності їхньої роботи. Залежно від виконуваних функцій розрізняють: 1) давачі керування й синхронізації, що забезпечують потрібний порядок роботи пристроїв і блоків; 2) давачі керування й синхронізації, які забезпечують виконання елементарних операцій окремими вузлами машини; 3) давачі синхронізації елементів, що видають послідовності імпульсів, які визначаються типом елементів і характером схемних розв'язків. *В. П. Боюн.*

ДАВА́Ч ЧА́СУ, електронний годинник — пристрій, призначений для вимірювання інтервалів часу, видавання часових керуючих сигналів при виконанні робочих програм у ЦОМ, а також для видавання відміток справжнього часу в різних системах керування. Як Д. ч. використовують спец.

лічильники, програмно-апаратні або апаратні (схемні) блоки, які ведуть облік та видавання часових відміток за спец. *програмою.* Для утворення часових відміток, як правило, використовують кварцові генератори певної частоти (кратної часткам секунди) або звичайну електромережу з частотою 50 *гц.* Знаючи частоту надходження імпульсів генератора (півхвиль мережі) та кількість їх, а також початковий час у Д. ч., визначають справжній час.

У ЦОМ Д. ч. являє собою або повнорозрядне слово, що зберігається у фіксованій комірці *оперативного запам'ятовувального пристрою,* або спец. *регістр,* сигнали на зміну поточного значення яких надходять зі схеми утворення часових відміток (дні, години, секунди, частки секунд тощо) через систему переривання. В разі використання комірки ЗП або регістра їхній вміст розглядають як ціле число зі знаком, його можна обробляти за правилами операцій з фіксованою комою. Вмикання й вимикання Д. ч. провадиться за командами машини. Використовуючи Д. ч. як окремий регістр, його попереднє встановлення можна здійснювати вручну з пульта керування ЦОМ або командою за програмою. Часові відмітки підраховують, як правило, незалежно від виконання осн. програми, і машина в будь-який момент часу звертається до Д. ч. як до одного із своїх зовнішніх пристроїв. Застосування Д. ч. дає змогу значно розширити можливості мультипрограмних систем (врахування часу роботи машини по кожній задачі, роботи окремих пристроїв та ін.) і систем, які працюють у *реальному масштабі часу* (опитування стану об'єктів у певні моменти часу, видавання часових відміток і керуючих сигналів тощо).

А. Я. Зубатенко.

ДА́НІ — факти та ідеї, подані у формалізованому вигляді, завдяки чому їх можна передавати чи обробляти за допомогою певного процесу (й відповідних технічних засобів). Д. здебільшого бувають записані на яких-небудь носіях — *перфораційних картах,* спец. бланках, *стрічках магнітних, барабанах магнітних* тощо (див. *Носій запису інформації*). *Автоматична обробка даних* є однією з осн. прикладних задач *кібернетики.* Див. також *Обробки даних система.*

ДВИГУ́Н ПОЛІМЕ́РНИЙ — двигун, робочим тілом у якому є сукупність скоротних полімерних волокон або плівок (див. *Штучний м'яз*). Характерною рисою Д. п. є перетворення енергії, що виділяється під час хім. реакції в робочому середовищі, безпосередньо на мех. енергію, без перетворення на теплову.

ДВОЇ́СТА ЗАДА́ЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВА́ННЯ.— див. *Двоїстості теорія* в програмуванні лінійному.

ДВОЇ́СТА ЗАДА́ЧА ОПУ́КЛОГО ПРОГРАМУВА́ННЯ. Загальна задача *програмування математичного* полягає у відшукуванні

$$v = \sup_{g(x)\geqslant 0, x\in R} f(x) \qquad (1)$$

де $g(x) = \{g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$ — якась вектор-функція, R — мн-на в n-вимірному просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі). Вводячи ф-цію Лагранжа $F(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, g(x))$ цієї задачі, розглянемо задачу, яка полягає у відшукуванні

$$v' = \sup_{x\in R}\inf_{\lambda\geqslant 0} F(x, \lambda). \qquad (2)$$

Задачі (1) і (2) еквівалентні й $v = v'$, якщо тільки початкова задача має розв'язок. У противному разі $v' = -\infty$. Двоїстою до задачі (1) є задача відшукування

$$\tilde{v} = \inf_{\lambda\geqslant 0}\sup_{x\in R} F(x, \lambda) = \inf_{\lambda\geqslant 0}\psi(\lambda). \qquad (3)$$

Для формулювання теореми двоїстості необхідно ввести таке узагальнення задачі (1)

$$v'' = \lim_{\varepsilon_k\to 0}\ \sup_{g(x)\geqslant -\varepsilon_k\geqslant 0, x\in R} f(x). \qquad (4)$$

Якщо множина планів (розв'язків) задачі пуста, то величини v або v'' відповідно слід узяти рівними $-\infty$. При цьому завжди $\tilde{v} \geqslant v'' \geqslant v = v'$. Якщо $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — *опуклі функції* (догори), R — *опукла множина,* тобто задача (1) є задачею *програмування опуклого,* то справджується рівність $v' = \tilde{v}$. Т. ч., для задачі опуклого програмування справджується така теорема. Задача (1) й задача (3) зв'язані співвідношенням двоїстості $v = \tilde{v}$ у тому й тільки в тому разі, якщо перехід від початкової задачі (1) до узагальненої початкової задачі (4) не веде до зростання верхньої грані (1), тобто $v = v''$. Цю теорему наз. т е о р е м о ю д в о ї с т о с т і.

Відомо кілька умов, достатніх, щоб здійснювалося співвідношення двоїстості $v = \tilde{v}$: 1) Ф-ції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$,— опуклі догори й неперервні на замкненій опуклій множині R, множина G планів задачі (1) непуста й обмежена. При цьому верхня грань у прямій задачі досягається при $v < \infty$, хоч нижня грань у двоїстій задачі (3) може і не досягатися. 2) Ф-ції $f(x)$, $g_i(x)$ — опуклі (догори), множина R — опукла і здійснюється умова Слейтера: є план $x^{(0)}$ задачі (1) такий, що $g_i(x^{(0)}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ця умова виключає наявність у задачі умов у вигляді рівностей. Однак для задачі $g_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m_1$; $h_i(x) = 0$; $i = 1, 2, \ldots, s$, $m_1 + 2s = m$, де $h_i(x)$ — лінійні ф-ції, має місце узагальнення умови Слейтера, яке полягає в тому, що є такий план $x^{(0)}$, що $g_i(x^{(0)}) > 0$, $i = 1, \ldots, m_1$, де $x^{(0)}$ — внутр. точка множини R. При цьому нижня грань у двоїстій задачі при $v = \tilde{v} < \infty$ досягається для деякого λ^*. Однак верхня грань у початковій задачі може й не досягатися. 3) Ф-ція $f(x)$ — опукла (догори) кусково-гладка, ф-ції $g_i(x)$ — опуклі догори кусково-лінійні, R—опукла багатогранна множина і множина планів задачі (1) непуста. При цьому в разі $v = \tilde{v} < \infty$ при

якихось $x^* \in G$ і $\lambda^* \geqslant 0$ $v = \tilde{v} = f(x^*) = \psi(\lambda^*)$.

Пара двоїстих задач (1) і (3) тісно пов'язана з задачею відшукання *сідлової точки* ф-ції Лагранжа $F(x, \lambda)$. Цей зв'язок видно з такої теореми. Для існування сідлової точки ф-ції Лагранжа $F(x, \lambda)$ при $x \in R$, $\lambda \geqslant 0$ необхідно й достатньо, щоб задачі (1) і (3) були зв'язані співвідношенням двоїстості й мали як розв'язки якісь точки $x^* \in G$, $\lambda^* \geqslant 0$. При цьому будь-яка пара $x^* \in G$, $\lambda^* \geqslant 0$ розв'язків двоїстих задач становить сідлову точку ф-ції $F(x, \lambda)$ і навпаки, сідлова точка (x^*, λ^*) ф-ції $F(x, \lambda)$ визначає розв'язок x^* і λ^* задач (1) і (3) відповідно. Т. ч., ця теорема дає змогу зводити розв'язування задачі (1) до знаходження сідлової точки ф-цій Лагранжа $F(x, \lambda)$ в області $x \in R$, $\lambda \geqslant 0$, якщо ця точка існує.

Щоб скласти двоїсту задачу, необхідно знайти ф-цію $\psi(\lambda) = \sup_{x \in R} F(x, \lambda)$. Ця ф-ція опукла донизу. Справді, якщо $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$ — будь-яка пара точок m-вимірного простору, то при $0 \leqslant d \leqslant 1$

$$\psi(d\lambda^{(1)} + (1-d)\lambda^{(2)}) = \sup_{x \in R} [dF(x, \lambda^{(1)}) + (1-d)F(x, \lambda^{(2)})] \leqslant d \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(1)}) + (1-d) \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(2)}) = d\psi(\lambda^{(1)}) + (1-d)\psi(\lambda^{(2)}).$$

Отже, двоїста задача $\inf_{\lambda \geqslant 0} \psi(\lambda)$ є задачею опуклого програмування для загальної задачі матем. програмування. Оскільки завжди $v \leqslant \tilde{v}$, то розв'язок двоїстої задачі дає оцінки зверху глобального максимуму (див. *Екстремум глобальний*) багатоекстремальної задачі (1).

Проілюструємо на конкретному прикладі складання двоїстої задачі. Нехай початковою є така задача: $\max_{b - Ax \geqslant 0,\ x \geqslant 0(R)} (c, x)$, де $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$, b — постійні вектори, а $A = \|a_{ij}\|$ — матриця розміру $n \times m$. Знайдемо ф-цію $\psi(\lambda)$, де $\lambda \geqslant 0$ вектор вимірності m:

$$\psi(\lambda) \max_{x \geqslant 0} \{(c, x) + (\lambda, b - Ax)\} = (b, \lambda) + \max_{x \geqslant 0} (c - A'\lambda, x) = \begin{cases} (b, \lambda), \text{ якщо } c - A'\lambda \leqslant 0; \\ \infty \text{ — в противному разі.} \end{cases}$$

Т. ч., двоїстою задачею до початкової є задача $\min_{c - A'\lambda \leqslant 0,\ \lambda \geqslant 0} (b, \lambda)$. Тут A' — матриця, транспонована A.

В. П. Гуленко.

ДВОЇСТИЙ ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД — модифікація *градієнтного методу* Ерроу—Гурвіца. Д. г. м. розв'язує таку задачу *програмування опуклого:* знайти вектор x, що максимізує ф-цію $f(x)$ за умови $g(x) \geqslant 0$. Нехай виконано такі умови: а) $f(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ — опуклі ф-ції (догори); б) існує вектор x^0 такий, що $g(x^0) > 0$; в) $f(x)$ — строго опукла ф-ція (догори); тоді оптим. розв'язок x цієї задачі єдиний; г) для будь-якого $u \geqslant 0$ функція Лагранжа $\varphi(x, u) = f(x) + (u, g(x))$ має скінченний максимум по x. Тоді неперервний двоїстий градієнтний процес

$$u_j(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } u_j(t) = 0,\ g_j(x(t)) > 0,\ u_j(0) \geqslant 0, \\ j = 1, \ldots, m, -g_i(x(t)) \text{ в решті випадків,} \end{cases}$$

де $x(t) = x(u(t))$, а $x(u)$ знаходять з умови $\varphi(x(u), u) = \max_x \varphi(x, u)$, збігається до якоїсь *сідлової точки* $(x(\bar{u}), \bar{u})$ ф-ції Лагранжа φ.

Реалізуючи цей процес на ЕЦОМ, необхідно перейти до його скінченнорізницевого аналога. Скінченнорізницевий двоїстий градієнтний процес виду $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho g(x(t))\}$, $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, $u(0) \geqslant 0$ із заданою швидкістю зміни $\rho > 0$ є стійким щодо $u(t)$. Ця стійкість означає, що для будь-якої початкової точки $u(0) \geqslant 0$ і будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\rho_0 > 0$ таке, що для розв'язку $u(t)$ процесу при $\rho \leqslant \rho_0$ існує ціле число t_0 з властивостями $V(u(t+1)) < V(u(t))$ для $0 < t < t_0$, $V(u(t)) \leqslant \varepsilon$ для $t \geqslant t_0$, де $V(u) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} |u - \bar{u}|^2$, U — множина векторів u таких, що (x, u) є сідловою точкою ф-ції Лагранжа $\varphi(x, u)$. Т. ч. має місце монотонна збіжність вектора $u(t)$ до ε = околу точки $\bar{u} \in \bar{U}$, а отже, і збіжність вектора $x(t)$ до як завгодно малого околу точки x. При виконанні умов а) — г) та умови неперервності похідних f_{xx} в разі лінійності ф-ції $g(x)$ можна обрати такий крок $\rho \leqslant \rho_0$, що матиме місце монотонна збіжність вектора $u(t)$ до якогось $\bar{u} \in \bar{U}$, а отже, й вектора $x(t)$ до оптим. розв'язку задачі $\bar{x}$. Цим самим методом можна розв'язати задачу *програмування лінійного.*

Осн. практичною вадою зазначеної методики є труднощі у визначенні заздалегідь кроку ρ_0. Проте ці труднощі можна подолати, якщо розглянути процес $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho(t)\gamma(t)g(x(t))\}$, $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, $u(0) \geqslant 0$, де $\sum_{t=0}^{\infty} \rho(t) = \infty$, $\sum_{t=0}^{\infty} \rho^2(t) = S < \infty$, $\gamma(t) | g(x(t)) | \leqslant k < \infty$. За цих умов має місце, загалом кажучи, немонотонна збіжність вектора $u(t)$ до вектора $\bar{u} \in \bar{U}$, а тому й вектора $x(t)$ до $\bar{x}$.

В. П. Гуленко.

ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД, метод послідовного уточнювання оцінок — метод, призначений для розв'язування задачі лінійного програмування, в якому здійснюється спрямований рух по опорних планах двоїстої задачі до знаходження оптимального розв'язку вихідної задачі; формулюється в термінах первісної

задачі. Д. с.-м. є *симплекс-метод* для задачі, двоїстої до первісної (див. *Двоїстості теорія* в програмуванні лінійному).

В. О. Трубін.

ДВОЇСТИХ НАПРЯМІВ МЕТОД — один з *оптимізації методів.*

ДВОЇСТІ ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ — такі функції *алгебри логіки* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Ф-ція f_2 наз. двоїстою до функції f_1. Тоді очевидно, що й f_1 буде двоїстою ф-цією до ф-ції f_2 і взагалі двоїста ф-ція до двоїстої ф-ції є первісною ф-цією. В алгебрі логіки виконується такий принцип двоїстості: якщо

$$\Phi(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{np_n}) = f(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), f_2(x_{21}, \ldots, x_{2p_2}), \ldots f_n(x_{n1}, \ldots, x_{np_n})),$$

то

$$\Phi^*(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{np_n}) = f^*(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), f_2^*(x_{21}, \ldots, x_{2p_2}), \ldots, f_n^*(x_{n_1}, \ldots, x_{np_n})),$$

де $\Phi^*, f^*, f_1^*, \ldots, f_n^*$ — ф-ції двоїсті відповідно до $\Phi, f, f_1, \ldots, f_n$. Звідси випливає, що коли f виражено через &, $\vee$, $\bar{\ }$, то, щоб одержати вираз двоїстої до неї ф-ції f^*, треба скрізь замінити & на $\vee$ і $\vee$ на &. Якщо у виразі для f були константи 0 та 1, то треба замінити 0 на 1, а 1 на 0. Напр., двоїстою до ф-ції $x \vee y$ є ф-ція $x \mathbin{\&} y$, а двоїстою до ф-ції $\bar{x}$ є сама $\bar{x}$.

М. І. Кратко.

ДВОЇСТОСТІ ЗАКОН, принцип двоїстості — твердження щодо формул *алгебри логіки*, яке стверджує, що коли дві формули $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{L}$ еквівалентні, то й двоїсті їм формули $\mathfrak{A}^*$ та $\mathfrak{L}^*$ також еквівалентні. Поняття двоїстості стосується формул, у яких з *логічних операцій* трапляються лише операції *кон'юнкції, диз'юнкції* та заперечення. Ф-лу $\mathfrak{A}^*$ наз. двоїстою ф-лі $\mathfrak{A}$, якщо її одержують з $\mathfrak{A}$, замінивши в ній скрізь операції кон'юнкції на операції диз'юнкції, а диз'юнкції — на кон'юнкції.

ДВОЇСТОСТІ ТЕОРІЯ в програмуванні лінійному — теорія, яка вивчає загальні властивості пари тісно пов'язаних між собою двоїстих задач лінійного програмування; використовується для побудови чисельних методів розв'язання задач. Дві задачі *програмування лінійного*

$$1.\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,$$

$$i = 1, \ldots, m; \qquad x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n;$$

$$\text{і } 2.\ \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \Rightarrow \min \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant c_j,$$

$$j = 1, \ldots, n; \qquad u_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

де всі $a_{ij} b_i$, c_j — задані числа, а всі x_j, u_i — змінні цих задач, наз. двоїстою (спряженою) парою; кожна із задач наз. двоїстою у відношенні до другої. Властивість двоїстої пари задач виражено в теоремах двоїстості.

Перша теорема. Якщо оптим. план 1-ї (2-ї) задачі існує, то існує оптим. план другої з цих задач, при цьому для довільної пари допустимих планів $X = (x_1, \ldots, x_n)$ та $U = (u_1 \ldots, u_m)$ цих задач виконується нерівність $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$, яка переходить у рівність, коли X та U є оптим. планами відповідних задач. Якщо 1-а (2-а) задача не має допустимих планів і існують допустимі плани задачі 2-ї (1-ї), то лінійна форма 2-ї (1-ї) задачі набуває як завгодно великих за абсолютною величиною від'ємних (додатних) значень. Якщо існують допустимі плани 1-ї (2-ї) задачі, що набувають як завгодно великих за абсолютною величиною додатних (від'ємних) значень, то 2-а (1-а) задача не має допустимих планів.

Друга теорема. Якщо X^* — оптим. план 1-ї задачі, а U^* — оптим. план 2-ї задачі, то компоненти цих планів зв'язані співвідношеннями

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) u_i^* = 0, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad (1)$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^*\right) x_j^* = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Навпаки, якщо співвідношення (1) і (2) виконуються для пари *опорних планів* X^*, U^*, то ці плани оптимальні. Співвідношення (1) та (2) служать критерієм оптимальності поточного плану в більшості методів розв'язування задачі лінійного програмування. Нехай X^*—опорний план 1-ї задачі. Підставивши його компоненти у ф-ли (1) і (2), обчислимо вектор U^*. Якщо U^* — план 2-ї задачі, з викладеного випливає оптимальність пари X^*, U^*.

Змінні 2-ї (1-ї) задачі можна розглядати як Лагранжові множники для 1-ї (2-ї) задачі.

Нехай $L(X, U)$ — функція Лагранжа:

$$L(X, U) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} x_j\Big).$$

Тоді плани X^* та U^* є відповідно оптим. планами 1-ї та 2-ї задачі в тому й лише в тому разі, якщо X^*, U^* є *сідловою точкою* функції $L(X, U)$ при обмеженнях $X \geqslant 0$, $U \geqslant 0$. Якщо одну з задач двоїстої пари подано в заг.

вигляді, то пару двоїстих задач записують так:

$$3.\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j => \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, m_1 < m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = m_1 + 1, \ldots, m;$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n_1 \leqslant n;$$

$$4.\ \sum_{j=1}^{m} b_i u_i => \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant c_j, \qquad j = 1, \ldots, n_1 \leqslant n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n;$$

$$u_i \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m_1 \leqslant m.$$

Всі перелічені вище властивості 1-ї та 2-ї задач зберігаються і для 3-ї та 4-ї задач. Співвідношення (1) та (2) для задач (3-ї) та (4-ї) переписуються у вигляді

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) u_i^* = 0, \qquad (3')$$

$$i = 1, \ldots, m_1 \leqslant m,$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^*\right) x_j^* = 0 \qquad (4')$$

$$j = 1, \ldots, n_1 \leqslant n.$$

Теореми двоїстості лежать в основі побудови й обгрунтування осн. чисельних побудов методів лінійного програмування. Вони великою мірою узагальнені на випадок *програмування опуклого* й на нескінченновимірний випадок. Д. т. в лінійному програмуванні тісно пов'язана з *ігор теорією.* Розгляд пари двоїстих задач лінійного програмування особливо характерний для економ. досліджень. Зокрема, якщо 1-а задача є задачею максимізації виробництва однорідного продукту при обмеженнях на кількість ресурсів, то оптим. план 2-ї задачі дає оцінку вартості одиниць ресурсів. Ці оцінки відіграють велику роль у теорії ціноутворення.

Літ. див. до ст. *Програмування лінійне.*

Н. З. Шор, В. О. Трубін.

ДВОПО́ЛЮСНИК КОНТА́КТНИЙ — *схема контактна* з одним вхідним і одним вихідним полюсами.

ДВОТОЧКО́ВА́ КРАЙОВА́ ЗАДА́ЧА — *крайова задача,* в якій обмеження (крайові умови) задано у двох точках.

ДЕКОДУ́ЮЧИЙ ПРИ́СТРІЙ — див. *Дешифратор.*

ДЕКО́МПОЗИЦІЇ МЕ́ТОД, блоковий метод — метод розв'язування задачі лінійного програмування, що зводить її до розв'язування послідовності задач меншої розмірності. Д. м. розроблено гол. чин. для зменшення кількості звертань до зовн. пам'яті ЦОМ при розв'язуванні задач *програмування лінійного* з великою кількістю змінних і обмежень. Інша область застосування Д. м.— задачі, в яких частину обмежень і змінних наділено будь-якими специфічними властивостями, які дають змогу застосовувати для розв'язування таких часткових задач методи, що є найефективніші в кожному окремому випадку. При цьому вихідна задача за допомогою Д. м. зводиться до розв'язування послідовності задач меншої розмірності, кожну з яких розв'язують, враховуючи її специфічні властивості. Вперше Д. м. розробили амер. вчені Дж. Данціг та Ф. Вулф 1960. В їхньому підході просування в послідовності розв'язування задачі здійснюється за *опорними планами* первісної задачі, при цьому лінійна форма змінюється монотонно. В Д. м. Данціга й Вулфа розглядається задача лінійного програмування, обмеження якої поділено на два блоки: необхідно знайти максимум ф-ції

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j => \max \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^0 x_j = B^0, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^1 x_j = B^1, \qquad (3)$$

$$X \geqslant 0 \qquad (4)$$

де $C = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор-рядок, $B = (B^0, B^1)^T = (b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{m+m_1})^T$ — $(m + m_1)$-вимірний вектор обмеження задачі, $A_j = (A_j^0, A_j^1)^T = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}, a_{m+1j}, \ldots, a_{m+m_1 j})^T$ — $(m + m_1)$-вимірний j-й вектор умов, $j = (1, \ldots, n)$, T — знак транспонування, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор змінних. Нехай множину планів X системи (3—4) обмежено й $X^1, \ldots, X^N$ — всі її опорні плани. В разі необмеженості множини (3—4) принципових труднощів не виникає. Довільний план X із (3—4) можна представити лінійною комбінацією опорних планів

$$X = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu X^\nu; \qquad (5)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu = 1; \qquad (6)$$

$$\lambda_\nu \geqslant 0; \quad \nu = 1, \ldots, N. \qquad (7)$$

Підставляючи рів-ня (5) у рів-ня (1—2), задачу (1—4) зводять до вигляду:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sigma_\nu \lambda_\nu => \max \qquad (8)$$

за обмежень (6—7) і

$$\sum_{\nu=1}^{N} P^{\nu}\lambda_{\nu} = B^0, \qquad (9)$$

де

$$\sigma_{\nu} = (C, X_{\nu}), \quad P_{\nu} = (A_1^0, \ldots, A_n^0)\, X_{\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, N. \qquad (10)$$

Задача (6—9) містить $(m + 1)$ обмеження замість $m + m_1$ у первісній задачі, зате кількість змінних N набагато більша за n. Проте для розв'язування задачі (6—9) Д. м. не потрібно знати всі вектори P^{ν}. На кожному кроці досить мати тільки $m + 1$ векторів P^{ν}, які входять у поточний базис задачі. Перевірка базису на оптимальність і визначення вектора, що має включатися в базис, здійснюється розв'язуванням допоміжної задачі лінійного програмування з умовами (3—4). Якщо матриця обмежень (3) має блоково-діагональну форму

$$A^1 = (A_1^1, \ldots, A_n^1) = \begin{Vmatrix} A^{11} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & A^{12} & \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots A^{1r} \end{Vmatrix},$$

то допоміжна задача розпадається на r задач меншого обсягу, й це спрощує процедуру і скорочує час розв'язування задачі. Таку особливість мають, напр., матриці *транспортної задачі* та її узагальнень, розподільної задачі тощо.

Літ. див. до ст. *Програмування лінійне.*

В. О. Трубін.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ, функція Дірака, $\delta(t)$ — функція, за допомогою якої описують імпульс нескінченно малої тривалості (миттьовий імпульс) і нескінченно великої амплітуди. Вважається, що цей імпульс існує лише при значенні аргументу, який дорівнює нулеві. Інтеграл ф-ції в будь-яких скінченних межах, що включають початок координат, тобто площа імпульсу, обмеженого Д.-ф., $\int_{-a}^{+a} \delta(t)\, dt = 1$. Як виходить із самого визначення Д.-ф.,

$$\int_{t-\tau-\varepsilon}^{t-\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau) f(t)\, dt = f(\tau), \quad \varepsilon > 0,$$

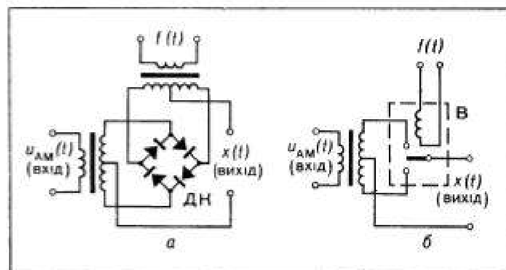
де τ — величина зсуву в часі, ε — інтервал часу, якщо $f(t)$ — неперервна в околі τ. В окремому випадку $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$. Функції, що мають таку властивість, назвали *узагальненими функціями*. Існує кілька ф-цій, напр. $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{k^2}}$ або $\frac{k}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{t}{k}}{t^2}$, граничні значення яких при $k \to 0$ дають Д.-ф.

З Д.-ф. можна проводити ті самі операції, що й із звичайними ф-ціями. Інтеграл від Д.-ф. за часом наз. одиничною ф-цією або одиничною стрибкоподібною ф-цією. $\int_0^{\infty} \delta(t-\tau)\, dt = 1\,[t-\tau]$. Д.-ф. широко використовують у різних розділах *автоматичного керування теорії*. Імпульсна перехідна ф-ція, дискретизація неперервної ф-ції в часі, *автокореляційна функція* сигналу типу *білого шуму*, спектральна густина гармонічного коливання та ін.— пов'язані з використанням поняття Д.-ф.

Літ.: Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., 1962 [бібліогр. с. 235—236].

В. Ю. Мандровський-Соколов.

ДЕМОДУЛЯ́ТОР, детектор — пристрій, що здійснює демодуляцію (детектування), тобто операцію виділення корисного (модулюючого) сигналу з модульованих коливань. При гармонічній несучій залежно від виду *модуляції* розрізняють амплітудні, частотні й фазові Д. Аналогічно при імпульсній несучій (див. *Модуляція імпульсна*) розрізняють амплітудно-,широтно-, частотно- й фазо-імпульсні Д. Як і в *модуляторі*, в Д. обов'язково є елементи нелінійні чи лінійні, але з параметрами, що змінюються в часі. На мал. зображено принципові схеми двох найпростіших амплітудних Д.— діодного кільцевого (*а*) і вібраційного (*б*); ці схеми Д. (синхронних детекторів) часто використовуються в *регуляторах екстремальних*, вимірювальних приладах та ін. пристроях. Тут $u_{AM}(t)$ — амплітудно-модульовані коливання (вхідний сигнал Д.); $f(t)$ — опорний гармонічний сигнал, синхронний з несучими коливаннями; $x(t)$ — корисний сигнал, виділений за допомогою Д. (вихідний сигнал Д.). Діодний кільцевий Д. містить істотно нелінійну ланку — діодну кільцеву схему (ДК), а вібраційний — лінійну ланку з параметрами, що періодично змінюються в часі,— вібратор В. Обидві схеми оборотні й допускають включання їх як модуляторів. Д. широко застосовують у різних галузях техніки, пов'язаних з передаванням або перетворюванням сигналів (повідомлень), у т. ч. в техніці зв'язку та автомат. регулювання, у вимірювальній техніці, у цифровій та аналого-цифровій обчисл. техніці тощо.



Принципові схеми амплітудних демодуляторів: *а* — діодного кільцевого; *б* — вібраційного.

Ю. М. Чеховий

ДЕМПФУВА́ННЯ — гасіння коливань у динамічній системі внаслідок розсіювання (дисипації) їхньої енергії. У мех. коливальних системах потенціальна енергія акумулюється в пружних елементах (пружини), а кінетична — в масах інерційних елементів, в електр. системах — у конденсаторах і котушках індуктивності відповідно. В мех. системах енергія розсіюється внаслідок в'язкого чи сухого тертя, а в електр.— внаслідок наявності в коливальному контурі активного (омічного) опору. Диференціальне рівняння найпростішої коливальної системи записують у заг. вигляді: $\tau^2\ddot{x} + 2d\tau\dot{x} + x = 0$, де d — відносний коеф. гасіння, τ — величина, обернена коловій частоті власних коливань системи, x — відхилення від положення рівноваги.

Д. коливань кількісно характеризується величиною d. Коли $d = 0$, в системі відбуваються незгасаючі коливання (консервативна система). Якщо $d < 1$, коливання мають згасаючий характер (дисипативна система). Критичним значенням є $d = 1$, що відповідає зривові коливань, тобто режимові переходу від коливних рухів до аперіодичних. Якщо ж $d > 1$, процеси в системі мають аперіодич. характер. Характер рухів у системі, яку описують дифер. рівнянням 2-го порядку, залежно від величини d якісно характеризується таблицею:

Значення d	Характер рухів
$d \leqslant -1$	Аперіодичне зростання відхилення x
$-1 < d < 0$	Коливання зі зростаючою амплітудою
$d = 0$	Незгасаючі коливання з постійною амплітудою
$0 < d < 1$	Згасаючі коливання
$d \geqslant 1$	Аперіодичний спад відхилення x

Зусилля, що його розвиває демпфер (глушник), напр., у мех. системах, діє в напрямі, протилежному напрямові вектора миттьової швидкості маси, що коливається, з величиною, пропорційною цій швидкості (першій похідній зміщення). З матем. точки зору це призводить до збільшення коефіцієнта при першій похідній у наведеному рівнянні, тобто до збільшення d, а з фізичної — до збільшення розсіювання енергії коливань. Для Д. коливань у замкнених системах автомат. регулювання застосовують введення першої похідної помилки до *регулювання закону*.

А. А. Тунік.

«ДЕ́РЕВО» в теорії графів — зв'язний *граф* без циклів (див. *Графів теорія*). Найважливіші характеристичні властивості «Д.» виражено такими шістьма рівносильними одне одному висловлюваннями: $\varkappa(L) = 1$ і $\lambda(L) = 0$ (означення «Д.»); $\lambda(L) = 0$ і $m(L) = n(L) - 1$; $\varkappa(L) = 1$ і $m(L) = n(L) - 1$; для будь-якої пари вершин x, y в L існує один (і тільки один) *ланцюг*, що з'єднує x з y; $\varkappa(L) = 1$, але якщо з L видалити будь-яке ребро, то для одержаного графа L^- $\varkappa(L^-) = 2$; $\lambda(L) = 0$, але, якщо до L додати будь-яке ребро (не додаючи вершин), то в одержаного графа L^+ $\lambda(L^+) = 1$, де L — довільний граф, $n(L)$ — кількість його вершин, $m(L)$ — кількість ребер, $\varkappa(L)$ — кількість компонент, $\lambda(L)$ — *цикломатичне число*.

Довільний граф без циклів часто наз. лісом (бо кожна його компонента — «Д.»). Ордерево, що росте з x_0, це «Д.», в якому виділено одну вершину x_0 («корінь»), а ребра орієнтовано так, що всі ланцюги, які починаються в x_0, є шляхами (тобто їхні дуги орієнтовано в напрямі обходу).

О. О. Зиков.

«ДЕ́РЕВО» КОНТА́КТНЕ з n реле — *схема контактна* з одним вхідним полюсом, 2^n вихідними полюсами та $2^{n+1} - 2$ перемикальними контактами. Призначене для реалізації всіх n-членних кон'юнкцій n булевих змінних. Кожна *кон'юнкція* реалізується між входом і якимось виходом. По замкненому шляху, що встановлюється між входом і одним з виходів, можна з'ясувати, яку з 2^n комбінацій сигналів подано на реле схеми. «Д.» к. з n реле складається з n ярусів (мал.). В i-му ярусі ($i = 1, 2, \ldots, n$), починаючи нумерацію ярусів від входу, міститься 2^i контактів. «Д.» к. наз. стандартним, якщо кожне реле керує контактами одного (і тільки одного) ярусу. «Д.» к. має таку властивість роздільності: будь-який шлях, що з'єднує два вихідні полюси, містить замикальний і розмикальний контакти того самого реле і тому має нульову провідність. Якщо в «Д.» к. об'єднати деякі множини виходів, то одержаний багатополюсник реалізує диз'юнкцію відповідних кон'юнкцій. «Д.» к. використовують, синтезуючи різні *схеми релейно-контактні*; його можна

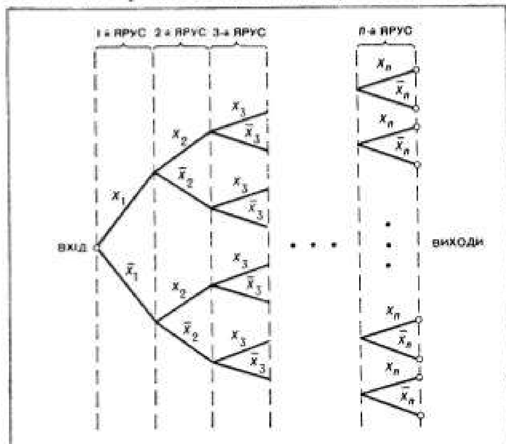


Схема контактного «дерева», складеного з n реле.

використовувати і як *дешифратор*. Див. також *Релейно-контактних схем теорія*.

Літ.: Коршунов А. Д. О нижних оценках сложности контактных схем, реализующих попарно ортогональные функции алгебры логики. В кн.: Дискретный анализ, в. 2. Новосибирск, 1964; Мур Э. Ф. Минимальные полностью декодирующие контактные схемы. В кн.: Кибернетический сборник, № 6. М., 1963.

О. Д. Коршунов.

ДЕРЖА́ВНИЙ ФОНД АЛГОРИ́ТМІВ І ПРОГРА́М (ДФАП) — частина Генерального довідково-інформаційного фонду СРСР. Почали його створювати в Рад. Союзі 1966 для розв'язування науково-тех. і економ. задач. ДФАП складається із матеріалів з матем. забезпечення ЕОМ ОЦ АН СРСР, фондів держ. публічної науково-тех. бібліотеки СРСР (ДПНТБ СРСР) і Всесоюзного науково-тех. інформаційного центру (ВНТІЦентр) Держ. Комітету Ради Міністрів СРСР по науці й техніці, галузевих, відомчих фондів провідних орг-цій та фондів орг-цій і підприємств, які використовують ЕОМ. В УРСР, БРСР та в ряді ін. союзних республік створено респ. фонди алгоритмів і програм, які є складовою частиною ДФАП.

До ДФАП включають лише зовсім закінчені й перевірені на практиці різні елементи матем. забезпечення, що їх, крім того, оформлено за відповідними методиками. Сюди включають такі матеріали: системи матем. забезпечення окремих процесів, ЕОМ та їхніх комплексів (напр., автоматизовані системи процесу обробки даних на ЕОМ методами *математичної статистики* та *імовірностей теорії*); *алгоритми* й *програми* для розв'язування наук., інженерно-тех. і планово-економ. завдань, а також інструкції щодо застосування й використання їх; програми, що входять до складу систем матем. забезпечення конкретних типів ЕОМ; методичні та інструктивні матеріали з програмування, *алгоритмічних мов* та *обчислювальних робіт методів організації*; *транслятори* з різних мов програмування разом з інструкціями щодо застосування й використання їх; системи орг-ції *бібліотек стандартних підпрограм;* програми-тести для перевірки правильності роботи окремих пристроїв ЕОМ і діагностики пошкоджень у них; інформаційні та довідково-бібліографічні матеріали з алгоритмів і програм, які входять у системи матем. забезпечення ЕОМ.

Галузеві й відомчі фонди алгоритмів і програм створюють у провідних орг-ціях, що їх визначають м-ва і відомства. Вони складаються з матеріалів, розроблених і використовуваних в орг-ціях (підприємствах) м-ва (відомства).

Осн. завдання мережі ДФАП: розробка методів апробації та оформлення систем матем. забезпечення ЕОМ; поліпшення орг-ції обчисл. робіт, збільшення ефективності використання ЕОМ у країні й зменшення трудомісткості підготовки алгоритмів і стандартних програм для розв'язування задач різних класів на ЕОМ; проведення консультативної роботи щодо розробки і впровадження елементів матем. забезпечення ЕОМ; збирання, класифікація, апробація, зберігання та розсилання розроблених алгоритмів і стандартних програм зацікавленим орг-ціям у країні; видавання алгоритмів, програм, систем матем. забезпечення та інструктивно-методичних матеріалів, що є в б-ці фонду; організація обміну науково-тех. інформацією з матем. забезпечення ЕОМ між ДФАП і орг-ціями, що використовують у своїй діяльності обчисл. техніку.

Щоб виконувати завдання, ДФАП підтримує контакти з багатьма н.-д., проектними і навч. орг-ціями, що використовують і розробляють обчисл. техніку. Провідні орг-ції здійснюють методичне керівництво роботами щодо створення та функціонування фондів орг-цій галузі (відомства). Вони відповідають за подання до ДПНТБ СРСР опублікованих у друкованих виданнях орг-ціями міністерства (відомства) відповідних матеріалів з матем. забезпечення; за підготовку, апробацію, повноту й наукову вірогідність, оформлення та надходження неопублікованих матеріалів галузі (відомства) до ВНТІЦентру; дають рекомендації щодо розробки, дослідження та впровадження алгоритмів і програм, необхідних для галузі; забезпечують організацію перегляду вітчизн. і зарубіжних друкованих видань із спеціальності, складають інформаційні картки на алгоритми, програми та ін. матеріали з матем. забезпечення ЕОМ, опубліковані в цих виданнях. Філіали ДФАП, як правило, оснащено тех. засобами, щоб вони могли забезпечити видання своїх матеріалів і задовольняти запити споживачів.

І. В. Сергієнко.

ДЕСКРИ́ПТОР — одиниця інформаційно-пошукової мови, що відповідає певному поняттю. Д. використовують у складі пошукових образів для описування частини основного смислового змісту документа або запиту. Д. ставиться в однозначну відповідність із групою *ключових слів* природної мови, відібраних з тексту певної галузі знань для побудови дескрипторної мови та еквівалентних за смислом у межах сфери дії певної *інформаційно-пошукової системи.* Таку групу слів наз. класом умовної еквівалентності. Умови еквівалентності вибирають залежно від практичних вимог до даної інформаційно-пошукової системи. Д. у *мові інформаційно-пошуковій* є перекладом будь-якого ключового слова з відповідного класу умовної еквівалентності, тому в дескрипторному словнику як ім'я Д. можна взяти будь-яке (краще найчастіше вживане або коротке) ключове слово або словосполуку з цього класу чи цифровий код. Багатозначному слову природної мови відповідає кілька Д., а кільком синонімічним словам і виразам — один Д. Омонімічність ключових слів у дескрипторних словниках усувають за допомогою позначок-відсилань до відповідних Д. Між Д. відповідно до об'єктивно існуючих відношень між поняттями встановлюються *відношення парадигматичні* (зокрема, родо-видові й асоціативні). Це зазначають у дескрипторних словниках (інформаційно-пошукових *тезаурусах*) і використовують у дескрипторних мовах, щоб збільшити семантичні можливості інформаційно-пошукової мови й зменшити втрати в процесі інформаційного пошуку. Термін «Д.» запропонував і вперше використав 1948—50 амер. математик Кельвін Н. Муерс.

Н. О. Куземська.

ДЕТЕРМІНО́ВАНІ СИСТЕ́МИ — системи, процеси в яких пов'язані між собою так, що можна простежити ланцюг причин і наслідків. Детермінізм тісно пов'язаний із ступенем організації системи. До Д. с. належать, напр., системи автомат. керування, що складаються з елементів, у яких кожному значенню вхідних діянь відповідають цілком певні значення вихідних змінних, швидкості й прискорення їхньої зміни. Такі елементи описують у статичному режимі алгебричними, а в динамічних режимах — диференціальними чи інтегральними рівняннями. Протилежними до Д. с. є статистичні (ймовірнісні) системи, в яких визначеного співвідношення між входами і виходами немає, а можна встановити лише деякі ймовірнісні співвідношення між ними. Проте багато «складних» систем, що складаються з великої кількості детермінованих *підсистем* з випадковими зв'язками між ними, належать до класу індетермінованих.

О. Г. Івахненко.

ДЕШИФРА́ТОР, вибіркова схема — логічний пристрій, який перетворює (розшифровує) код числа, що надійшов на його входи, у сигнал на одному з його виходів. Якщо число подано у вигляді n двійкових розрядів, то в Д. має бути $m = 2^n$ виходів. Д. використовують у *цифрових обчислювальних машинах* (ЦОМ) та в пристроях для видавання сигналів у різні кола керування залежно від комбінацій вхідних сигналів (напр., для перетворення коду операції на керуючий сигнал). За допомогою Д. провадиться розшифровування *адрес* комірок запам'ятовувальних пристроїв, вхідних та вихідних каналів пристроїв зв'язку з об'єктами цифрових керуючих машин, каналів зв'язку в автоматизованих системах передавання інформації тощо.

Д. прийнято характеризувати економічністю, яка визначається методом побудови його схеми й типами складових елементів, часом, що витрачається на розшифровування коду числа, та надійністю роботи. Для побудови Д. використовують напівпровідникові діоди (див. *Діодні логічні елементи*), тріоди, феритові осердя з прямокутною петлею гістерезису, а також логічні елементи різних систем (феритно-транзисторні, діодно-трансформаторні, потенціальні та ін.). Залежно від типу використаних елементів, розрізняють Д. потенціальні (статичні) та імпульсні (динамічні).

Д. будь-якої складності можна побудувати з логічних елементів трьох основних типів — «І», «АБО» і «НЕ». При побудові схем Д. слід прагнути до мінімізації кількості логічних елементів і підсилювачів, а також до забезпечення потрібної швидкодії електронного блока даного функціонального призначення. За принципом дії Д. можуть бути паралельними, послідовними або паралельно-послідовними. Така класифікація враховує спосіб подавання на входи Д. кодів чисел. Д., які розшифровують паралельний код, будуються за «прямокутною», «пірамідальною» або «деревоподібною» схемою. Зазначені типи схем відрізняються кількістю використовуваних елементів і навантаженням на різних входах. Два останні різновиди схем є дво- або багатоступінчастими, вони економічніші, й їх доцільно використовувати при великій кількості вхідних змінних. Послідовні Д. застосовують здебільшого при обмеженій кількості комбінацій вхідних змінних, бо при великій кількості змінних їхні схеми дуже складні й громіздкі. Паралельно-послідовні Д. будують тоді, коли одна частина вхідних змінних

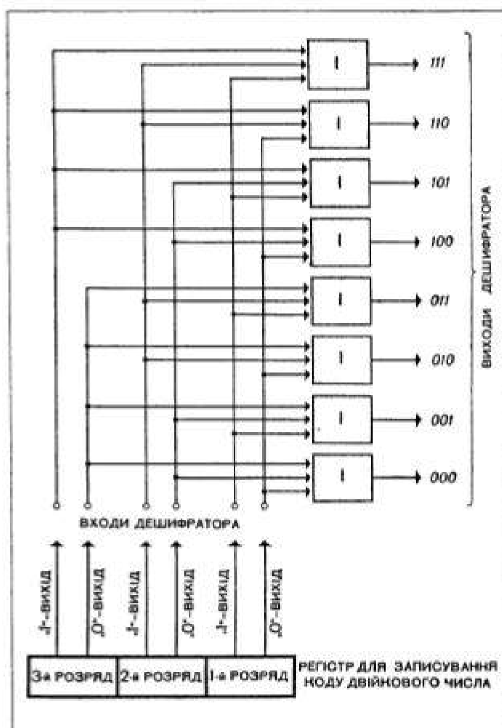


Схема дешифратора для розшифровування кодів трирозрядних двійкових чисел.

запам'ятовується на тригерах, а друга надходить безпосередньо на входи схем збіжностей (елемент «І» на малюнку). Див. також *Блоки ЦОМ типові*.

Літ.: Дроздов Е. А., Пятибратов А. П Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., 1964 [бібліогр. с. 539—541]; Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [бібліогр. с. 480];

В. М. Єгипко.

ДЕШИФРУВА́ННЯ ТЕ́КСТІВ — визначення невідомої системи письма й змісту представлених цією мовою текстів. Розрізняють Д. т., написаних відомою мовою, коли тексти спеціально зашифровано, й дешифрування історичних писемностей невідомими мовами. У першому випадку пошук ключа до коду грунтується на порівнянні статистики знаків у тексті й у відомій мові; у другому — використовують принципово інші методи, які

спираються на загально-лінгвістичні принципи й порівняння з гаданими спорідненими мовами.

Д. т. історичних писемностей — це відновлення розуміння забутих писемностей і мови. Воно полягає у визначенні спочатку системи письма, фонетики й граматичної структури, а потім змісту історичних текстів. При цьому виникають ситуації, коли письмо не відоме, але відомий найпізніший стан мови дешифрованого тексту (давньоперський клинопис, давньоєгипетське ієрогліфічне письмо, майянське ієрогліфічне письмо). В інших випадках тексти відомого письма складені невідомою мовою (етруські тексти, хеттські клинописні тексти, клинописні написи Урарту). Відомі Д. т. 19 ст. грунтуються на використанні білінгви — двомовного тексту. Найвідоміші Д. т. 20 ст.: хеттський клинопис (Б. Грозний, 1915), кріто-мікенське лінійне складове письмо класу Б (М. Вентріс, Дж. Чедвік, 1952) ієрогліфічне письмо майя (Ю. В. Кнорозов, 1955) здійснено без білінгви. В останніх двох випадках для аналізу невідомої писемності було розроблено й застосовано статистико-позиційні методи, які дають змогу розділити службові й кореневі морфеми за їхньою взаємною поєднуваністю й одержати істотну інформацію про граматичний лад мови та про можливі мови-аналоги, які можуть допомогти визначити зміст текстів. Статистико-позиційний метод, як основу машинного дешифрування, систематично викладено в монографії Ю. В. Кнорозова. Здійснено машинний аналіз і киданської писемності та протоіндійських написів (М.-А. Пробст). Для першої одержано важливі граматичні характеристики і встановлено аналогію з урало-алтайськими мовами. Для другої — машинна обробка текстів допомогла лінгвістам встановити аналогії з дравідійськими мовами.

Літ.: Кнорозов Ю. В. Письменность индейцев майя. М.— Л., 1963 [бібліогр. с. 638—653]; Шрейдер Ю. А. Значение методов формального исследования исторических письменностей. «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, в. 4; Пробст М. А. О точных методах исследования конструкции текста. «Кибернетика», 1966, № 1; Шеворошкин В. В. Звуковые цепи в языках мира. М., 1969.

А. О. Білецький, Ю. А. Шрейдер.

ДЖЕРЕЛО́ ОПО́РНОЇ НАПРУ́ГИ — джерело фіксованої напруги, яка використовується в аналогових обчислювальних пристроях і машинах неперервної дії для одержування за допомогою резистивних подільників якоїсь постійної напруги в нелінійних блоках, у блоках множення та при моделюванні постійної величини. Крім того, як еталонна напруга Д. о. н. застосовується при точному вимірюванні потенціалів в окремих точках схеми матем. моделювання, в схемах *аналого-цифрових перетворювачів* і *цифро-аналогових перетворювачів*, у схемах стабілізаторів напруги та ін. У схемах обчисл. техніки неперервної дії напруга Д. о. н. звичайно дорівнює за величиною найбільшій допустимій напрузі на виході *підсилювача операційного* (для лампових підсилювачів ±100 *в*). Для одержання прецизійної *еталонної напруги* як Д. о. н. використовують нормальні елементи, недоліком яких є зовсім незначний струм навантаження (1—10 *мка*). В схемах електронних стабілізаторів напруги за Д. о. н. правлять газонаповнені стабілітрони або кремнієві опорні діоди. Кремнієві опорні діоди за багатьма показниками перевершують газові стабілітрони. Осн. джерело нестабільності напруги опорних діодів — коливання т-ри діоду. Застосуванням термокомпенсації температурний дрейф опорної напруги можна звести до 10^{-4} %/1° С.

Ю. П. Космач, А. Г. Тимошенко.

ДЖЕРЕЛО́ ПОВІДО́МЛЕНЬ — матеріальний об'єкт, основною особливістю якого є те, що він створює сукупність відомостей про свій стан. Ця сукупність відомостей, що створюється Д. п. і підлягає передаванню, наз. п о в і д о м л е н н я м. Д. п. класифікують за властивостями *випадкових процесів*, які описують повідомлення, за характером зміни повідомлень і характером роботи.

Випадковий процес, що описує повідомлення, є ф-цією часу $t \in T$, яка набуває випадкових значень $\xi_t \in N$, де N — множина можливих значень повідомлень у кожний фіксований момент часу. Сукупність повідомлень (що їх виробляє Д. п.) з заданими статистичними властивостями наз. а н с а м б л е м п о в і д о м л е н ь.

Залежно від властивостей спільних розподілів випадкових величин, які становлять процес, Д. п. поділяють на Д. п. з незалежними компонентами (компоненти повідомлення $\{\xi_k\}$ в них є незалежними випадковими величинами), на гауссівські, марковські та стаціонарні Д. п. За характером множини N і за зміною повідомлень у часі T розрізняють Д. п. дискретні й неперервні. Д. п. наз. д и с к р е т н и м за множиною у тому разі, якщо N—скінченна або лічбова множина (повідомлення зі скінченним або лічбовим числом значень). Таким Д. п. є, напр., ЕЦОМ, яка виробляє послідовність двійкових символів, або пристрій, який передає скінченне число рівнів вимірного параметра якого-небудь фіз. процесу. Д. п. наз. н е п е р е р в н и м за множиною тоді, коли N — неперервна множина. Неперервним за множиною Д. п. є, напр., пристрій, який передає неперервну множину значень температури якогось об'єкта.

Якщо ділянка визначення повідомлень T є монотонно зростаючою послідовністю моментів часу — моментів виникнення компонент повідомлень $\{t_k\}$ $(t_k < t_{k+1})$, то Д. п. наз. джерелом з д и с к р е т н и м ч а с о м. Отже, Д. п. з дискретним часом характеризується повідомленнями, які змінюються в певні наперед задані моменти часу. Прикладом Д. п. з дискретним часом є ЦОМ, що виробляє послідовність двійкових символів. Якщо T — скінченний чи нескінченний інтервал часу, то має місце Д. п. з н е п е р е р в н и м ч а с о м. Отже, джерела з неперервним часом характеризуються повідомленнями, які неперервно змінюються в часі. Д. п. з неперервним часом, є напр., радіо-

й телепередавачі. За характером роботи Д. п. бувають з фіксованою і керованою швидкістю формування повідомлень. Д. п. з фіксованою швидкістю наз. Д. п. без пам'яті, а Д. п. з керованою швидкістю — Д. п. з пам'яттю. В джерелах без пам'яті повідомлення видаються в моменти часу, що не залежать від роботи наступних пристроїв. Такими Д. п. є, напр., пристрої магнітного записування, передавальні телевізійні трубки. Д. п. з пам'яттю зберігають повідомлення в записаному вигляді й видають їх на вимогу інших пристроїв. До таких Д. п. відносять різні запам'ятовувальні пристрої, які видають повідомлення на запит.

Літ.: Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., 1970 [бібліогр. с. 708—709]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965.

Р. Л. Добрушин, О. Я. Матов, В. В. Прелов.

ДИЗ'ЮНКТИ́ВНА НОРМА́ЛЬНА ФО́РМА (ДНФ) — форма висловлювання, яка має вигляд диз'юнкції кон'юнкцій, при цьому кожний член *кон'юнкції* являє собою елементарне висловлювання або заперечення його. ДНФ двоїста щодо кон'юнктивної нормальної форми. Ту чи іншу форму *алгебри логіки* зводять до ДНФ на основі перетворень, визначуваних рівносильностями алгебри логіки. За допомогою ДНФ можна встановити, чи завжди хибна та або інша ф-ла. Якщо кожний член диз'юнкції завжди хибний, то й уся диз'юнкція хибна. А щоб з'ясувати, чи кожний член диз'юнкції завжди хибний чи ні, досить з'ясувати, чи трапляється в кожній кон'юнкції елементарне висловлювання і його заперечення. Коли так, то кон'юнкція завжди хибна.

ДИЗ'ЮНКТИ́ВНА НОРМА́ЛЬНА ФО́РМА МІНІМА́ЛЬНА — *диз'юнктивна нормальна форма тупикова*, яка має найменшу складність. Задачу про пошук Д. н. ф. м. наз. задачею мінімізації *диз'юнктивної нормальної форми* (ДНФ). Ця задача завжди має тривіальний розв'язок, який полягає в побудові всіх тупикових ДНФ, у порівнюванні їхньої складності й виборі тупикової ДНФ, яка має найменшу складність. Однак на практиці цей метод не застосовують. Пошук практичних методів мінімізації привів до створення складного матем. апарату, значення якого виходить за межі мінімізації ДНФ.

Вивчені *метричні властивості диз'юнктивних нормальних форм* дають уявлення про труднощі побудови звичайних алгоритмів мінімізації ДНФ (див. *Алгоритм локальний)*. Процес мінімізації складається з кількох послідовних етапів. На першому етапі за довільною ДНФ *булевої функції* або за її таблицею істинності будують скорочену ДНФ $\mathfrak{N}_f = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$

Застосувавши локальні алгоритми, з $\mathfrak{N}_f$ можна вилучити деякі елементарні кон'юнкції і таким чином перейти до якоїсь простішої ДНФ $\mathfrak{N}_f$. За $\mathfrak{N}_f$ можна побудувати Д. н. ф. м. шляхом перебору певної множини тупикових ДНФ. Цей перебір можна спрямовувати так, щоб зменшувати загальне число шуканих тупикових ДНФ. Проте існують булеві ф-ції, для яких скорочену ДНФ не можна спростити ніяким локальним алгоритмом з досить загального класу. Більше того, жоден локальний алгоритм для цієї ф-ції не може дати корисної інформації про Д. н. ф. м. Це означає, що Д. н. ф. м. для цих булевих ф-цій можна знайти лише шляхом перебору в певній множині тупикових ДНФ. Щоб зменшити перебір під час пошуку Д. н. ф. м., у цьому разі можна використати методику послідовного аналізу варіантів.

Літ.: Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Андон Ф. И. Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. «Кибернетика», 1966, № 6; Андон Ф. И. Минимизация д. н. ф. функций алгебры логики методом последовательного анализа вариантов. «Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем», 1968, в. 3.

Й. І. Брона.

ДИЗ'ЮНКТИ́ВНА НОРМА́ЛЬНА ФО́РМА ТУПИКО́ВА. Нехай $\mathfrak{N}_f = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$ — скорочена *диз'юнктивна нормальна форма* (ДНФ) *булевої функції* f. Елементарна *кон'юнкція* $\mathfrak{A}_i$ вбирається *диз'юнкцією* $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{A}_{i1} \vee \dots \vee \mathfrak{A}_{im}$, якщо $(\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{N}_1) = 1$. Якщо з $\mathfrak{A}_f$ послідовно вилучати по одній елементарній кон'юнкції $\mathfrak{A}_i$, що вбирається тими, які залишилися, доти, доки це можливо, то в результаті одержимо Д. н. ф. т. З $\mathfrak{N}_f$ можна побудувати кілька Д. н. ф. т. Ту з Д. н. ф. т., яка містить мінімальне число елементарних кон'юнкцій, наз. найкоротшою. Д. н. ф. т., що має найменшу складність, наз. мінімальною. Якщо кожну Д. н. ф. т. можна знайти порівняно простим методом, вказаним в означенні Д. н. ф. т., то *диз'юнктивну нормальну форму мінімальну* можна знайти лише в результаті порівняння Д. н. ф. т.

Серед методів пошуку Д. н. ф. т. можна виділити два осн. напрями. Перший — методи пошуку індивідуальних Д. н. ф. т., які мають певні властивості (напр., близьких у тому чи іншому розумінні до мінімальних, достатньо простих тощо). Другий — цілеспрямоване спрощення скороченої ДНФ з тим, щоб у результаті спрощення не втратити Д. н. ф. т., що має цікаві для нас властивості. Першим методом такого роду був *Квайна метод мінімізації*, за яким у скороченій ДНФ відмічають елементарні кон'юнкції, що входять до всіх Д. н. ф. т. Множину їх позначають $\mathfrak{N}_{\cap \text{т}}$ і наз. ядром.

З $\mathfrak{N}_f$ вилучають елементарні кон'юнкції, які вбирає ядро. В результаті скорочення ДНФ перетворюється на простішу, але з тими ж властивостями, що й скорочена ДНФ. Доведено необхідну й достатню умову невходження елементарної кон'юнкції до множини $\mathfrak{N}_{\Sigma \text{т}}$, яка містить усі елементарні кон'юнкції, що входять хоча б до однієї Д. н. ф. т., і запропоновано *алгоритм локальний* одержання дуже скороченої ДНФ, простішої за скорочену, але такої, яка містить інформацію

про всі Д. н. ф. т. Досліджено обчисленість *предикатів*, які дають інформацію про деякі інші властивості Д. н. ф. т. (Див. також *Метричні властивості диз'юнктивних нормальних форм*).

Літ.: Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Журавлев Ю. И. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. «Дискретный анализ», 1964, в. 3.

Й. І. Брона.

ДИЗ'ЮНКЦІЯ — спільна назва для операції *диз'юнкція слабка* та *диз'юнкція строга*. Часто термін «Д.» вживають замість терміна «диз'юнкція слабка».

ДИЗ'ЮНКЦІЯ СЛАБКÁ — *булева функція* двох аргументів. Позначають її знаком $\vee$ і задають такою таблицею істинності

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Д. с. відповідає в розмовній мові розділовому сполучникові «або». Вона комутативна, асоціативна, дистрибутивна щодо *кон'юнкції*, Д. с., як і кон'юнкцію та *заперечення*, використовують у нормальних формах представлення булевих ф-цій. Д. с. й заперечення становлять функціонально повну систему булевих ф-цій.

ДИЗ'ЮНКЦІЯ СТРÓГА, антиеквівалентність, додавання за модулем 2 — *булева функція* двох аргументів. Позначають її знаком $\vee\vee$, $\dot{\vee}$ або $\dotplus$ і задають такою таблицею істинності:

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Д. с. відповідає у розмовній мові розділовому сполучникові «або». Вона комутативна, асоціативна й дистрибутивна щодо *кон'юнкції*. Д. с. разом з кон'юнкцією та ф-цією-константою є операціями *Жегалкіна алгебри* й становлять функціонально повну систему булевих ф-цій.

ДИНАМІ́ЧНИЙ РОЗПО́ДІЛ ПА́М'ЯТІ — див. *Пам'яті розподіл.*

ДИНАМІ́ЧНИХ СИСТЕ́М ТЕО́РІЯ ЧУТЛИ́ВОСТІ — розділ теорії автоматичного керування, що вивчає вплив варіації параметрів на динамічні властивості систем. Під варіацією параметрів розуміють будь-які відхилення їх від значень, прийнятих за первісні. Ці відхилення можуть бути відомі цілком і описані деякими ф-ціями часу чи відомі лише з точністю до належності до певного класу (напр., обмежені за модулем чи іншою нормою, або ж відомі деякі статистичні характеристики їх). Варіації параметрів можуть бути скінченними або ж нескінченно малими, причому порядок дифер. рівняння, яке їх описує, може лишатися незмінним чи змінюватися. В теорії чутливості первісною динамічною системою прийнято називати таку динамічну систему, параметри якої дорівнюють заданим і не зазнають змін; рух у ній прийнято називати осн. рухом. Ту саму систему при змінених значеннях параметрів наз. варійованою, а рух у ній — варійованим. Різницю між варійованим та осн. рухом наз. додатковим рухом.

Осн. завдання теорії чутливості — аналіз додаткового руху, спричиненого варіацією параметрів. Він включає кількісні оцінки, дослідження стійкості, моделювання, синтез систем з урахуванням заданих вимог до якості додаткового руху, розробку методів активного впливу на параметри системи керування з метою досягнення заданої якості додаткового руху. Осн. положення теорії розробили М. Л. Биховський, Р. Томович, П. В. Кокотович та ін. Г. Боде запровадив поняття чутливості як відношення відносної варіації параметра q_i до викликаної ним відносної варіації передавальної ф-ції $W(s)$:

$$S_W^{q_i} = \frac{\partial q_i / q_i}{\partial W / W} = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln W}.$$

Частіше застосовують обернену величину

$$S_{q_i}^W = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln q_i}.$$

Як прямі оцінки чутливості прийнято використовувати т. з. ф-ції чутливості $u(t;\ q_i)$, що відіграють велику роль у кількісній оцінці ступеня впливу варіацій параметрів q_i на динамічні властивості системи. Ф-ції чутливості у випадку нескінченно малих варіацій параметрів визначають таким способом. Нехай первісну динамічну систему описує дифер. рівняння

$$F(\ddot{x},\ \dot{x},\ x,\ t,\ q_0) = 0, \tag{1}$$

де ф-ція $x = x(t;\ q_0)$ — розв'язок рівняння, q_0 — параметр. При зміні q_0 на величину Δq зміниться відповідно й рівняння

$$F(\ddot{x},\ \dot{x},\ x,\ t;\quad q_0 + \Delta q) = 0$$

та його розв'язок, $x = x(t;\ q_0 + \Delta q)$, що описує варійований рух. Різниця $x(t;\ q_0 + \Delta q) - x(t;\ q_0)$ описує додатковий рух. Границю відношення цієї різниці

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{x(t;\ q_0 + \Delta q) - x(t;\ q_0)}{\Delta q} = \frac{\partial x(t;\ q_0)}{\partial q_0} = u(t;\ q_0)$$

наз. функцією чутливості $u(t; q_0)$. Якщо у первісній динамічній системі, а, отже, й у дифер. рівнянні, що її описує, змінюються кілька параметрів, то ф-цію чутливості визначають так само, як і ф-цію кількох параметрів: $u(t; q_0, q_1, \ldots, q_i)$. Ф-ції чутливості можна визначити, розв'язавши дифер. рівняння, які наз. рівняннями чутливості й які легко одержати з первісних рівнянь (1), якщо розв'язки їх є неперервними ф-ціями параметрів. Справді, коли визначити окремі похідні ф-ції $F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0)$ за q_0, то на основі рівняння (1)

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \cdot \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial x} \times$$

$$\times \frac{\partial x}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial q_0} = 0, \qquad (2)$$

де

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_0}, \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_0}.$$

А якщо тепер врахувати, що згідно з визначенням коеф. чутливості

$$\frac{\partial x}{\partial q_0} = u(t, q_0), \quad \frac{\partial u(t, q_0)}{\partial t} = \dot{u}(t, q_0),$$

$$\frac{\partial^2 u(t, q_0)}{\partial t^2} = \ddot{u}(t, q_0),$$

то з виразу (2) одержимо рівняння чутливості:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \ddot{u} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial F}{\partial x} u = -\frac{\partial F}{\partial q_0}. \qquad (3)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що вони завжди лінійні, навіть коли первісне рівняння (1) є нелінійним, тому що похідні $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial F}{\partial x}$ не залежать від $u(t, q_0)$. Якщо первісне рівняння (1) лінійне відносно $x, \dot{x}, \ddot{x}$, то ліва частина рівняння чутливості має таку саму структуру й такі самі коефіцієнти, як і первісне рівняння. Справді, в цьому разі $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial F}{\partial x}$ дорівнюють коефіцієнтам при змінних $\ddot{x}$, $\dot{x}$ та x у первісному рівнянні. Якщо первісне рівняння (1) залежить від двох і більше параметрів $q_0, q_1, \ldots, q_i$, то рівняння чутливості визначають так само.

Методи розв'язування рівняння чутливості засобами обчисл. техніки для малих збурень параметрів достатньою мірою розвинули Г. Майсінгер та ін. Їх широко застосовують для визначення ф-цій чутливості. Часто для визначення цих ф-цій, особливо лінійних систем, використовують структурні методи. Метод варійованої ланки, що його розробив М. Л. Биховський, зручний тим, що для одержання ф-ції чутливості досить мати вхідні та вихідні величини первісної системи й варійованої ланки і модель залежності характеристик лише цієї ланки від варіації параметрів. П. В. Кокотович поширив цей метод на ширший клас систем, у т. ч. й на нелінійні та нестаціонарні.

Для визначення ф-ції чутливості потрібні дві моделі: первісної системи й моделі, подібної до неї, об'єднаних зв'язною ланкою з *передавальною функцією* $\partial W/\partial q$. Якщо в системі змінюються k параметрів, то для визначення ф-ції чутливості потрібно мати k моделей, подібних до первісної. Це незручно, тому на практиці по черзі визначають ф-ції чутливості за допомогою однієї моделі, комутуючи зв'язні ланцюги для кожної варіації Δq_k. П. В. Кокотович, використавши поняття логарифмічної чутливості

$$S_{W_a}^{W} = \frac{\partial \ln W(s)}{\partial \ln W_a(s)}$$

і теорію графів, розробив метод визначення ф-цій чутливості на одній моделі, виділивши в ній т. з. точки чутливості. Але цей метод загалом можна застосовувати не до всіх систем. Для аналізу чутливості, крім безпосереднього визначення ф-цій чутливості, застосовують різні непрямі оцінки, напр. частотні оцінки:

$$S_W^k(j\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln W(j\omega)}; \; S_q^k(j\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln q}$$

де $K(j\omega)$ — амплітудно-фазова характеристика всієї системи, $W(j\omega)$ — амплітудно-фазова характеристика варійованої ланки. Проте безпосередньо обчислити додатковий рух за ними важко. Часто застосовують квадратичні показники (напр., дисперсію $\sigma^2_{\Delta x}$) додаткового руху, викликаного варіацією параметрів. Досить повно розроблено й інші непрямі оцінки — кореневі чи алгебричні, напр., коефіцієнти чутливості нулів та полюсів передавальної ф-ції системи до варіації параметрів q_i. Осн. положення теорії чутливості неперервних систем поширено й на розривні системи.

Теорію чутливості дедалі ширше застосовують у системах автомат. керування. Ф-ції чутливості містять надзвичайно цінну інформацію для розв'язування завдань синтезу динамічних систем. Одним з найважливіших завдань є синтез систем, що мають мінім. чутливість до варіації параметрів. Такий синтез можна здійснити на основі певних умов, що їх накладають на якийсь функціонал $I\{\Delta x(t)\}$, що характеризує додатковий рух. На основі вимоги, щоб цей функціонал дорівнював нулеві, синтезують системи, що мають властивість параметричної інваріантності, тобто нечутливі до варіацій параметрів. Розроблено методи синтезу оптим. за нечутливістю систем на основі мінімізації функціоналу $I\{\Delta x(t)\}$. У працях деяких авторів, напр., пропонується розглядати задачу чутливості як теоретико-ігрову задачу автомат. керування, припустивши, що збурення, викликане зміною параметрів, є антагоністичним щодо динамічних властивостей об'єкта й керую-

чого діяння. Таке застосування методів *ігор теорії* в теорії чутливості є перспективним, особливо для синтезу оптим. систем керування, які нечутливі до варіації параметрів об'єкта і, крім того, мають мінімаксні властивості. Оскільки теор. фундамент теорії чутливості становлять класичні методи теорії малих збурень, існує певний зв'язок між чутливістю й теорією стійкості в малому за Ляпуновим. Показано, що рівняння, які визначають ф-ції чутливості стосовно до малих змін первісних умов дифер. рівнянь, збігаються з рівняннями першого наближення в теорії стійкості О. М. Ляпунова. Цей зв'язок має не лише теоретичне, а й важливе практичне значення.

Теорію чутливості застосовують при побудові безпошукових самонастроюваних систем. Використовуючи певну аналітичну залежність між сигналами осн. системи й моделі чутливості, обчислюють ф-ції чутливості, на основі яких визначають якийсь функціонал $I = \int_0^T F(u_1, u_2, \ldots, u_n, t)\, dt$, що залежить від змінних параметрів. Процес самонастроювання провадиться так, щоб цей функціонал наближався до нуля. Осн. труднощі під час побудови таких систем полягають в обчислюванні ф-цій чутливості, пов'язаному з необхідністю розв'язувати інтегральні рівняння типу згортки. Ряд авторів пропонують у своїх працях методи наближеного визначення згортки, а це значно спрощує обчислення ф-цій чутливості.

Велике практичне значення має т. з. обернена задача чутливості, яка полягає в оцінці варіації параметрів за спостереженням викликаного ними збудження первісного сигналу. Обчислені варіації параметрів за відхиленням первісного сигналу можна використати для активного впливу на параметри системи керування, щоб поліпшити якість роботи всієї системи. Хоч матем. фундамент для розв'язування оберненої задачі вже є, але питання практичного застосування її розроблено ще недостатньо.

Літ.: Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., 1958 [бібліогр. с. 153—156]; Чувствительность автоматических систем. М., 1968; Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. Л., 1969 [бібліогр. с. 205—207]; Tomovic R. Sensitivity analysis of dynamic systems. Belgrade, 1963.

А. Г. Шевельов.

ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ УМОВИ ГРУБОСТІ — умови, при виконанні яких динамічна система є грубою, тобто досить малі зміни її параметрів не порушують топологічну структуру фазового простору її (див. *Нелінійних систем автоматичного керування аналіз*). Або строгіше: систему наз. грубою якщо границі областей її фазового простору, всередині яких фазові траєкторії мають однаковий якісний характер, неперервно залежать від параметрів системи. Оскільки параметри реальних систем можна визначити лише наближено, то лише грубі системи можуть бути матем. моделями, в яких топологічна структура фазового простору перебуває у відповідності з фіз. явищами. Розглянемо систему двох рівнянь з аналітичними правими частинами

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \qquad (1)$$

в області G площини x, y, обмеженої циклом без контакту g (g — проста замкнена крива, що має неперервно обертову дотичну й перетинає всі траєкторії, що проходять через неї, не дотикаючись ні до якої з них). Розглянемо й систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y). \qquad (2)$$

Систему (1) наз. грубою в області G, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при аналітичних $p(x, y)$, $q(x, y)$, які задовольняють у G умови

$$|p(x, y)| < \delta, \; |q(x, y)| < \delta, \; |p'_x(x, y)| < \delta,$$

$$|p'_y(x, y)| < \delta, \; |q'_x(x, y)| < \delta, \; |q'_y(x, y)| < \delta,$$

існує взаємно однозначне й взаємно неперервне відображення області G в саму себе, при якому кожна траєкторія системи (1) переходить у траєкторію системи (2) й назад, при цьому точки, що відповідають одна одній, містяться на відстані, меншій як ε. Для того, щоб система (1) була грубою в ділянці G, необхідно й достатньо, щоб у цій ділянці станам рівноваги відповідали корені характеристичного рівняння системи першого наближення з відмінними від нуля дійсними частинами; для кожного періодичного розв'язку періоду τ $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$ виконувалась нерівність

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} [P'_x(\varphi, \Psi) + Q'_y(\varphi, \Psi)]\, dt \neq 0;$$

стани рівноваги, що відповідають з різними знаками дійсним кореням характеристичного рівняння системи першого наближення, не були з'єднані інтегр. кривими. Простір параметрів (коефіцієнтів) динамічної системи розбивають на області, в кожній точці яких система є грубою; межами між цими областями є біфуркаційні поверхні, на яких система — не груба.

Літ.: Андронов А. А. [та ін.]. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967 [бібліогр. с. 484—485].

Р. А. Нелєпін.

ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОД — метод моделювання алгебричних і диференціальних об'єктів, при якому бажаний розподіл струмів і напруг у моделюючому багатополюснику постійної структури одержують циклічним підмиканням до нього за допомогою ключової матричної схеми іншого багатополюсника (в заг. випадку — нелінійного й змінної структури) та запам'ятовуванням зрівноважувальних напруг на конденсаторах досить великої ємності. Моделі,

побудовані відповідно до Д. м. м., наз. **динамічними моделями**. Підмикання багатополюсника змінної структури П до багатополюсника постійної структури М за допомогою ключової матричної схеми Q і керування його параметрами й структурою здійснюється за програмою, яку заносять у цифрову частину Ц динамічної моделі (мал. 1). Під час роботи цифрова частина служить для запам'ятовування $I_Ц$ — цифрової частини повної первісної інформації I, керування за допомогою *кодів* N багатополюсником П і ключами матричної схеми Q та для виведення одержаних при цьому результатів у вигляді кодів S. Частини $I_М$ та $I_П$ первісної інформації I вводяться відповідно в багатополюсники М і П безпосередньо, минаючи цифровий блок Ц. У динамічних моделях процес зрівноважування не можна припиняти, бо при припиненні досягнутий розподіл струмів і напруг у моделювальному колі почне змінюватись через розрядження конденсаторів. Структура динамічної моделі на будь-якому кроці перемикання визначається ключовою матрицею Q, кожна з компонент якої може набувати тільки двоє значень «0» та «1» ($q_{ij} = 0$ відповідає розімкненому положенню ключа між i-ю горизонтальною та j-ю вертикальною шинами, а $q_{ij} = 1$ — замкненому). В заг. випадку матриця Q може бути функцією часу й одержуваних величин Z, тобто $Q = Q(t, \mathrm{Z})$, де Z — вектор з компонентами Z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Деякі окремі випадки цієї заг. схеми динамічної моделі приводять до т. з. групових елементів електр. кола. На мал. 2 наведено схему групового підсилювача (ГП) з приєднаним до нього багатополюсником М. Схема ГП складається з *підсилювача відпрацьовуючого* (ПВ), запам'ятовувальних конденсаторів C_0 та пар ключів $K_1, \ldots, K_m$. Якщо по черзі замикання їх відбувається з відносно великою частотою і якщо виконуються деякі інші умови, пристрій буде еквівалентним звичайним *підсилювачам*, увімкненим між точками a_1 — $b_1, \ldots, a_m$ — b_m. Схему динамічного операційного елемента, який є, по суті, динамічним *аналогом* звичайного *підсилювача операційного*, наведено на мал. 3. У заг. випадку двополюсники Y_0 та Y_1 мають будь-яку складність.

1. Блок-схема динамічної моделі.
2. Схема групового підсилювача.
3. Схема динамічного операційного елемента.
4. Схема динамічної моделі системи алгебричних диференціальних рівнянь.

Якщо виконати певні умови, відносну *похибку* ν-ї гармоніки можна визначити за формулою

$$\delta_\nu = \frac{\dot U_{0\nu} - (\dot U_{0\nu})_{\text{точн}}}{(\dot U_{0\nu})_{\text{точн}}},$$

де $(\dot U_{0\nu})_{\text{точн}}$ і $\dot U_{0\nu}$ — точні й реальні комплексні амплітуди ν-х гармонік вихідної напруги. Відносна похибка

$$\delta_\nu = 1 - \frac{1 - \dfrac{NY_{0\nu}}{KG_0}}{1 + \dfrac{1}{K}\left[\dfrac{NY_{1\nu}}{G_0} + \left(1 + \dfrac{Y_{1\nu}}{Y_{0\nu}}\right)\left(1 + j\dfrac{2\pi\nu NC_0}{TG_0}\right)\right]}$$

залежить від параметрів підсилювача, параметрів операційного елемента (G_0 — вихідна провідність, N — число точок, відпрацьовуваних груповим підсилювачем, T — інтервал часу). Цей вираз написано в припущенні, що хід елемента холостий. При збільшенні коефіцієнта K методична похибка наближається до 0. З аналізу відносної похибки випливає, що наближений розрахунок динамічних електронних кіл з груповим підсилювачем можна провадити, як і для звичайних кіл, з одночасно ввімкненими підсилювачами, але зі збільшеними провідностями, відповідно до

виразу $Y_v \approx G_0 \frac{h}{T_0} = \frac{G_0}{N}$. Застосовуючи динамічні операційні елементи, можна побудувати динамічні моделі систем алгебр. і дифер. рівнянь. На мал. 4 показано принципову схему моделі з груповим підсилювачем для розв'язування систем рівнянь виду $Ax = F$ (при цьому треба, щоб $C_1, \ldots, C_n$ дорівнювали 0) і рівнянь виду $\frac{dx}{dt} + Ax = F$. У цьому випадку початкові умови треба задавати не тільки на конденсаторах $C_1, \ldots, C_n$, а й на конденсаторах C_0. Оригінальні динамічні моделі можна побудувати, застосовуючи групові опори. Принципову схему групового опору одержують із схеми *групового джерела напруги*, замінивши перетворювач коду на напругу перетворювачем коду на опір. Як такі перетворювачі можна застосовувати відомі *опори цифрові керовані* й провідності. Робота схеми групового опору грунтується на можливості відімкнути на короткий час опір, якщо паралельно приєднати якусь ємність і, внаслідок цього, — на можливості використовувати один змінний опір, що перемикається, в різних розгалуженнях кола. У динамічних колах перемикати можна не лише джерела напруги, підсилювачі й омічні опори, а й *перетворювачі функціональні*, множильні пристрої та інші складні кола.

У динамічних моделях порівняно зі звичайними значно зменшено кількість лічильно-розв'язувального обладнання. У деяких випадках вони поступаються перед звичайними моделями щодо швидкодії й точності одержуваних розв'язків, але їхня надійність значно вища. Це зумовлено тим, що в динамічних моделях зменшено кількість підсилювачів постійного струму, функціональних перетворювачів тощо. Замість них введено елементи дискретної дії — ключові елементи й пристрій керування, надійність яких висока, а кількість елементів у них менша. Д. м. м. дає змогу побудувати легко керовані, економічні, надійні й малогабаритні *квазіаналогові моделі* для розв'язування систем звичайних дифер. рівнянь, рівнянь у частинних похідних у скінченно-різницевій постановці, задач *програмування лінійного* та *програмування нелінійного*, задач *ігор теорії;* машини для розрахунку сіткових графіків, машини для розрахунку статично невизначуваних систем. Цей метод можна застосовувати, моделюючи об'єкти, стан і роботу яких можна описувати звичайними дифер. або алгебр. рівняннями й нерівностями. Звичайно, динамічні моделі можна застосовувати не завжди. Найкраще застосовувати їх тоді, коли зменшення кількості обладнання, мала вага, малі габарити, мала споживана потужність і висока надійність мають більше значення, ніж висока точність і швидкодія.

Літ.: Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564]; Моделирующие математические машины с переменной структурой. К., 1976 [бібліогр. с. 243—246]. *Г. Є. Пухов, О. Ф. Катков.*

ДИСК МАГНІТНИЙ — пристрій для реєстрації, зберігання й використання інформації, яка записується на магнітний носій, що вкриває поверхню диска. Розвиток цифрових обчислювальних машин (ЦОМ) зумовив потребу створити *запам'ятовувальні пристрої* (ЗП) великої ємності з порівняно невеликим часом вибирання інформації. Як такі ЗП використовують *нагромаджувачі* на Д. м. (НМД), основні елементи яких — обертові диски ($D = 300 \div 1000$ *мм*), вкриті з обох боків феромагнітним шаром, над яким розміщено магнітні головки (МГ), що записують інформацію у вигляді концентричних доріжок на робочій поверхні диска й аналогічно зчитують її. НМД звичайно складається з кількох (до 50) жорстких дисків, насаджених на спільний вал, що обертається зі сталою швидкістю ($n = 900 \div 3000$ *об/хв*). У проміжки між дисками на спец. рухомих важелях введено МГ. Важіль, що рухається вздовж радіуса диска, здійснює вибір заданої доріжки. В іншому типі НМД важелі можуть переміщуватися ще й уздовж осі обертання дисків (вибір диска); через свою складність така конструкція не набула широкого застосування. Переміщення важелів здійснюється за допомогою пневматичних, гідравлічних або електр. приводів. Крім НМД з рухомими МГ, поширені й конструкції з фіксованими, нерухомими МГ. У цьому випадку кожна магнітна доріжка обслуговується своєю МГ, вибір доріжки здійснюється за допомогою електронного комутатора.

Тепер в НМД, як правило, застосовуються «плаваючі» магнітні головки, які автоматично підтримують величину зазора між МГ та робочою поверхнею диска (порядку 5—10 *мк*), при цьому поздовжня щільність запису досягає порядку 80—130 *біт/мм*. Ємність Д. м. в одному пристрої досягає 12 500 млн. двійкових знаків (тип 2600—6М фірми Bryant Computer Products). Останнім часом широко застосовуються НМД зі змінним носієм — змінними дисковими пакетами. В системах, де вимагається підвищена надійність і стійкість роботи, застосовують гнучкі диски. В них гнучкий Д. м. (напр., з магнітної плівки, що її застосовують для виготовлення *стрічок магнітних*) обертається над рівною полірованою плитою з вмонтованими в неї МГ. Під діянням повітря, що захоплюється при швидкому обертанні диска, між його робочою поверхнею і МГ установлюється потрібний повітряний зазор. *Р. Я. Черняк.*

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ — перетворювання неперервної величини на дискретну. Застосовується в системах передавання, зберігання та обробки інформації й є невід'ємною операцією при використанні цифрових обчисл. пристроїв для обробки інформації, що надходить у вигляді неперервних сигналів. Так, передавання фототелеграфних (функція двох аргументів) і телевізійних (функція трьох аргументів) зображень здійснюється розбиванням їх на дискретні рядки й відповідно дискретні кадри. Передавання мовлення

(функція однієї змінної) за допомогою імпульсно-кодової модуляції пов'язане з дискретизацією неперервного сигналу й наступним кодуванням. Див. також *Квантування*.

М. Ф. Бейко.

ДИСКРЕТИЗА́ЦІЯ ЗОБРА́ЖЕНЬ — наближене представлення неперервної функції, що описує яскравість зображення, її значеннями в окремих точках. Д. з. здійснюють для зручності введення інформації про зображення в спеціалізований розпізнавальний пристрій або в ЦОМ. У розпізнавальних пристроях зображення звичайно сприймається певною множиною світлочутливих елементів, які наз. рецепторами. Сигнал на виході кожного рецептора характеризує яскравість зображення в одній його точці. За аналогією з механізмом сприймання зорових зображень оком людини, множину рецепторів наз. *сітківкою* або рецепторним полем. Див. також *Квантування зображень*.

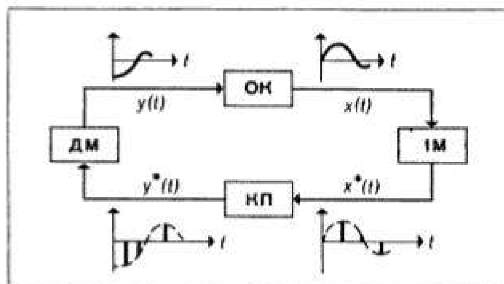
В. І. Васильєв.

ДИСКРЕ́ТНА СИСТЕ́МА — система, що функціонує в дискретному часовому просторі й визначається дискретними станами. Дискретність часового простору означає, що явища, які супроводять зміни стану системи, можуть відбуватися тільки в моменти часу, що становлять якусь дискретну множину. Зокрема, переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в цілочислові моменти часу. Заг. випадок зводять до цього часткового, вводячи цілочислову нумерацію моментів можливої зміни стану системи. Умова дискретності стану вказує на дискретність множин допустимих значень усіх часових характеристик системи, тобто всіх компонент марковського вектора, який у кожний момент часу цілком визначає стан системи. Найпростіший приклад Д. с.—послідовність випробувань з кількома можливими наслідками. При цьому роль часу відіграє номер випробування, роль стану — номер наслідку цього випробування. Неперервну систему в деяких випадках можна розглядати як дискретну. Це буває, коли враховують її стани тільки в окремі моменти часу й заокруглюють їхні значення до цілих одиниць.

Описують і досліджують Д. с. за допомогою дискретних *Маркова ланцюгів*, різницевих рівнянь, стохастичних матриць, напівмарковських процесів з дискретним перебуванням у кожному з можливих станів та за допомогою *автоматів імовірнісних*. На практиці досить поширені системи, для яких дискретним є або тільки час, або тільки стан. Важливим класом систем є т. з. системи з дискретним втручанням випадку, які майже завжди поводять себе як неперервні й тільки в дискретні моменти зазнають випадкових діянь.

М. В. Яровицький.

ДИСКРЕ́ТНА СИСТЕ́МА КЕРУВА́ННЯ, і м п у л ь с н а с и с т е м а к е р у в а н н я — динамічна система, в якій між двома чи більше її елементами інформація передається за допомогою часової послідовності імпульсів. Така послідовність несе корисну інформацію тільки в тому разі, коли її промодульовано вхідним сигналом. Цю функцію *модуляції* в імпульсних системах (див. *Модуляція імпульсна*) виконують імпульсні модулятори або перетворювачі «аналог — код». Найпростішу типову структурну схему Д. с. к. наведено на мал., де ОК — об'єкт керування, КП — керуючий (імпульсний або цифровий) пристрій, ІМ — імпульсний модулятор (перетворювач «аналог — код»). У тих випадках, коли об'єкт керування не має властивостей, необхідних, щоб виконувати функції імпульсного *демодулятора* (ДМ), на вході його



Структурна схема дискретної системи керування.

як проміжну ланку встановлюють спец. ДМ (перетворювач «код — напруга»).

Найхарактерніша особливість (із погляду дослідження динаміки Д. с. к.) цифрових систем керування полягає в тому, що цифрові системи керування, строго кажучи, завжди є *нелінійними системами керування*, в яких треба враховувати ефекти *квантування* і за часом, і за рівнем. Поведінку Д. с. к. в дискретні моменти часу описують різницевими рівняннями, причому для цифрових систем ці рівняння завжди нелінійні.

У зв'язку з розширенням сфери застосування ЦОМ, які виконують у багатьох випадках функції КП, питома вага Д. с. к. в техніці збільшується, а сфера застосування їх безперервно розширюється. Див. також *Автоматичного керування теорія, Дискретних систем автоматичного керування аналіз, Дискретних систем автоматичного керування синтез, Стійкості дискретних систем теорія*.

В. М. Кунцевич.

ДИСКРЕ́ТНЕ МОДЕЛЮ́ЮЧЕ СЕРЕДО́ВИЩЕ — див. *Квазіаналогове моделююче середовище*.

ДИСКРЕ́ТНИЙ АНА́ЛІЗ — розділ математики, в якому вивчають властивості структур фінітного (скінченного) характеру, що виникають як усередині самої математики, так і в її застосуваннях. До таких скінченних структур можна віднести, наприклад, скінченні *групи*, скінченні *графи* та деякі математичні моделі перетворювачів інформації, такі як *автомати скінченні, Тьюрінга машини* тощо. Іноді допускають розширення предмета Д. а. до довільних дискретних структур і приходять до дискретної математики, ототожнюючи її з Д. а. До таких структур можна віднести деякі алгебр. системи, нескінченні гра-

фи та деякі види обчисл. середовищ, такі, як кліткові автомати тощо. Як синонім понять Д. а. й дискретної математики іноді вживають термін «скінченна математика». Нижче термін Д. а. вживається в широкому розумінні, включаючи дискретну математику.

На відміну від Д. а. класична математика в основному вивчає властивості об'єктів неперервного характеру. Використання класичної або дискретної математики як апаратів дослідження пов'язано з задачами, які ставить перед собою дослідник, і з тим, яку модель досліджуваного явища він розглядає — дискретну чи неперервну. Так, напр., знаходячи масу радіоактивної речовини в даний момент, з певною точністю можна вважати, що процес зміни маси при радіоактивному розпаді має неперервний характер, і разом з тим ясно, що насправді цей процес дискретний. Самий поділ математики на класичну й дискретну значною мірою умовний, оскільки, напр., з одного боку відбувається активна циркуляція ідей і методів між ними, а з другого — часто виникає необхідність досліджувати моделі, які мають і дискретні й неперервні властивості одночасно. Слід відзначити також, що в математиці існують напрями, які використовують засоби дискретної математики для вивчення неперервних моделей і, навпаки, часто засоби і постановки задач класичного аналізу використовують, досліджуючи дискретні структури. Це вказує на певне злиття розгляданих областей.

Специфіка методів і задач Д. а. зумовлена необхідністю відмовлятися від основоположних понять класичної математики — границі й неперервності, а через це й тим, що для багатьох задач Д. а. сильні засоби класичної математики виявляються, як правило, мало прийнятними. До підрозділів Д. а. відносять *комбінаторний аналіз, графів теорію, кодування теорію,* теорію функціональних систем і деякі інші. Часто під терміном Д. а., вважаючи, що його предмет вичерпується скінченними структурами, розуміють саме сукупність перелічених дисциплін. З погляду розширеного розуміння цього предмета до Д. а. можна віднести й цілі розділи математики, напр. *логіку математичну,* й частини таких розділів, як теорія чисел, алгебра, *обчислювальна математика, імовірностей теорія* й деякі інші, в яких досліджуваний об'єкт має дискретний характер.

Елементи Д. а. виникли в глибокій давнині й, розвиваючись паралельно з іншими розділами математики, значною мірою були їхньою складовою частиною. Типовими для того періоду були задачі, пов'язані з властивостями цілих чисел; потім вони привели до створення теорії чисел. До них можна віднести й задачі відшукування алгоритмів, додавання і множення натуральних чисел у стародавніх єгиптян (2 тисячоліття до н. е.), задачі про підсумовування та про подільність натуральних чисел у піфагорійській школі (5-4 ст. до н. е.) тощо. Пізніше, в основному в зв'язку з ігровими задачами, з'явились елементи комбінаторного аналізу й дискретної теорії ймовірностей, а в зв'язку з заг. проблемами теорії чисел, алгебри й геометрії (18—19 ст.) виникли важливі поняття алгебри, такі, як група, поле, кільце та ін., які визначили розвиток і зміст алгебри на багато років наперед і які мали, по суті, дискретну природу. Прагнення до строгості матем. міркувань та аналіз робочого інструменту математики — логіки — привели до виділення ще одного важливого розділу математики — математичної логіки (19 ст.). Проте найбільшого розвитку Д. а. досяг у зв'язку з запитами практики, які привели до появи нової науки — *кібернетики* та її теор. частини — теор. кібернетики (20 ст.). Теор. кібернетика, яка безпосередньо вивчає з позицій математики найрізноманітніші проблеми, що їх ставить перед кібернетикою практична діяльність людини, є потужним постачальником ідей і завдань для Д. а. Так, прикладні питання, потребуючи великої числової обробки, стимулювали появу сильних числових методів розв'язування задач. Ці методи оформилися потім в обчисл. математику, а аналіз поняття «обчисленність» і «алгоритм» привели до появи важливого розділу матем. логіки — *алгоритмів теорії.* Зростаючий потік інформації й пов'язані з ним завдання зберігання, обробки й передавання її привели до виникнення теорії кодування; для економ. задач, задач електротехніки, так само, як і для внутр. задач математики, постала потреба розробити теорії графів; задачі конструювання й описування роботи складних керуючих систем привели до теорії функціональних систем і т. д. Разом з тим теор. кібернетика широко використовує результати Д. а., розв'язуючи свої задачі.

Окрім уже відзначених, Д. а. має ще ряд особливостей. Так, разом з задачами типу існування, які мають загальноматем. характер, важливе місце в Д. а. займають і задачі типу алгоритмічної розв'язності й побудови конкретних розв'язувальних *алгоритмів.* Другою особливістю Д. а. є те, що він, по суті, вперше зіткнувся з необхідністю глибокого дослідження т. з. дискретних багатоекстремальних задач, які особливо часто виникають у теор. кібернетиці. Відповідні методи класичної математики для пошуку *екстремумів,* які істотно використовують певну гладкість ф-цій, у цих випадках виявляються мало ефективними. Типовими задачами такого роду в Д. а. є, напр., задачі про відшукання в певному розумінні *стратегій оптимальних* у шаховій партії при обмеженій кількості ходів, а також важливе питання теор. кібернетики про побудову *диз'юнктивних нормальних форм мінімальних* для *булевих функцій,* тобто т. з. проблема мінімізації булевих функцій (див. *Алгебра логіки*). Особливістю Д. а., пов'язаною вже з задачами для скінченних структур, є й те, що для багатьох із цих задач, як правило, існує алгоритм розв'язку, тоді як у класичній математиці повний розв'язок задачі часто можливий лише за досить

жорстких обмежень. Прикладом такого алгоритму може бути алгоритм перегляду всіх можливих варіантів, тобто алгоритм типу «повного перебору». До задач цього виду можна віднести, напр., згадані задачі про стратегії в шаховій партії, про мінімізацію булевих функцій та ін. Однак методи розв'язування типу «повного перебору» дуже трудомісткі й практично мало прийнятні, в зв'язку з чим виникає ряд нових задач, пов'язаних з умовами, які обмежують перебір і приводять до зведення індивідуальних задач, які характеризуються конкретними значеннями параметрів, до масової проблеми, що характеризується нескінченною множиною значень параметрів; виникають задачі накладання обмежень, природних для цього класу задач, на засоби розв'язування і т. д. Постановка такого роду питань і розробка методик здійснюється на конкретних моделях, що їх постачають різні розділи математики. До них належать, напр., моделі мінімізації булевих функцій і синтезу керуючих систем з теор. кібернетики та ряд інших.

Літ.: Яблонский С. В. Обзор некоторых результатов в области дискретной математики. «Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме „Кибернетика" АН СССР», 1970, № 5; Дискретный анализ, № 1—19. Новосибирск, 1963—71; Проблемы кибернетики, № 1—25. М., 1958—72; Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. Пер. с англ. М., 1965.

В. Б. Кудрявцев.

ДИСКРЕ́ТНИХ ЕЛЕМЕ́НТІВ СИСТЕ́МА — набір логічних елементів, який забезпечує побудову найскладніших логічних пристроїв ЦОМ. Цю побудову здійснюють на основі підстановки ф-ції будь-якого *логічного елемента ЦОМ* як аргументу ф-ції ін. елемента й відновлення заданої якості інформаційних сигналів. Щоб було додержано умов функціональної повноти, Д. е. с. повинна реалізувати функціонально повну систему *перемикальних функцій*. Для виконання умов тех. повноти Д. е. с. досить мати один елемент, що відновлює величини інформаційних сигналів у межах їхніх ділянок відображення. Для елементів окремих Д. е. с. характерні узгодженість параметрів та багато заг. особливостей щодо швидкодії, надійності, конструкції й технології виробництва.

Найпростішим типом Д. е. с. є універсальний логіч. елемент, що реалізує ф-цію $\overline{x \cdot y}$ чи $\overline{x \vee y}$, виконаний, напр., у вигляді сукупності діодної схеми збігу або поділу та транзисторного інвертора, який, крім інвертування, виконує ф-ції відновлювання рівнів інформаційних сигналів. Є багато різновидів універсальних елементів. Їх розрізняють залежно від типу компонентів (напр., діодна логіка, резисторно-транзисторна логіка, транзисторна логіка тощо), зв'язків між компонентами, що виконують логічні операції (безпосередні, резисторні, транзисторні зв'язки та ін.), від режиму роботи активних елементів (насичені, ненасичені) тощо.

Практично Д. е. с. виконують здебільшого надмірними за функціональним складом, щоб забезпечити простоту й гнучкість при синтезі логіч. схем. Прикладом такої надмірної Д.е. с. є набір, до складу якого входить елемент з підвищеною навантажувальною здатністю, кілька різновидів *тригерів*, універсальні елементи з різною кількістю логіч. входів. Крім універсальних елементів з одним ступенем комбінаційної логіки, до Д. е. с. часто входять і елементи з двома ступенями логіки. В наборі є й елемент для розширення кількості входів 1-го або 2-го ступеня деяких універсальних елементів.

Коли Д. е. с. розширюють за рахунок спеціалізованих елементів для виконання різних логіч. ф-цій, цю систему важко уніфікувати й стандартизувати (а це має особливо важливе значення, якщо елементи виготовляють у вигляді *інтегральних схем*). Оптим. розв'язання суперечливих вимог спеціалізації та універсалізації до набору Д. е. с. домагаються в багатофункціональних великих інтегр. схемах, які при нескладному попередньому настроюванні без зміни структури й топології схеми можуть реалізувати будь-яку потрібну логічну ф-цію. В Д. е. с. з інтегр. схем стираються межі між логіч., запам'ятовувальними й відновлювальними елементами, а великого значення набуває спрощення й однорідність міжелементних зв'язків. Див. також *Імпульсна елементна структура, Потенціальна елементна структура ЦОМ, Потенціально-імпульсна елементна структура, Елементна структура ЦОМ*.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Микроэлектроника и большие системы. Пер. с англ. М., 1967.

Е. Г. Комухаев.

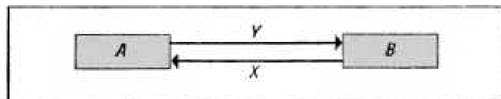
ДИСКРЕ́ТНИХ ПЕРЕТВО́РЮВАЧІВ ТЕО́РІЯ — розділ теоретичної кібернетики, в якому методами *автоматів теорії* досліджують функціонування пристроїв, які виконують перетворення інформації відповідно до заданих алгоритмів. Осн. галузями застосування Д. п. т. є теоретичні питання програмування та алгоритмічне й логічне проектування структур обчисл. машин.

Нехай A — ініціальний *X-Y-Мілі автомат*, у якому визначено заключний стан a^*. На відміну від *абстрактної теорії автоматів*, де алфавіти X і Y розглядають як абстрактні множини, в Д. п. т. елементам цих алфавітів приписують певний смисл (інтерпретація). Для цього зафіксуємо нескінченну множину B. Елементи цієї множини наз. інформаційними об'єктами, а сама множина — інформаційною множиною. Припустимо, що у B виділено якусь підмножину B_0 початкових інформаційних об'єктів. Кожному вихідному сигналові $y \in Y$ автомата A поставимо у відповідність (часткове) перетворення f_y множини B на себе, а певним елементам b множини B поставимо у відповідність вихідний сигнал $x = \mu(b)$ автомата A. Якщо задано таку відповідність між вихідними сигналами автома-

та A й перетвореннями множини B та між елементами множини B і вхідними сигналами автомата A, то кажуть, що задано інтерпретацію вхідних і вихідних сигналів автомата A. Ініціальний автомат Мілі з заключним станом наз. дискретним перетворювачем, якщо для його вхідних і вихідних сигналів задано інтерпретацію. При цьому кажуть, що дискретний перетворювач діє на множині B, а перетворення f_y наз. елементарними операторами дискретного перетворювача. Інформаційну множину розглядають як *Мура автомат* з виділеною множиною B_0 початкових станів, якщо ф-цію переходів визначити рівністю $by = f_y(b)$ й узяти μ як ф-цію виходів. Такий автомат B наз. *автоматом операційним*, а дискретний перетворювач, при такому розгляді — *автоматом керуючим*. Кожний дискретний перетворювач A визначає якесь часткове перетворення f_A множини B станів операційного автомата (інформаційної множини). Це перетворення наз. оператором, представленим дискретним перетворювачем A. Щоб обчислити $f_A(b)$, операційний автомат треба установити в стан b і з'єднати його з дискретним перетворювачем A, установленим у початковий стан. Одержимо систему з двох автоматів (мал.), яка починає функціонувати. Якщо через скінченну кількість тактів автомат A перейде в заключний стан a^*, то вважають, що $f_A(b)$ визначена й дорівнює станові автомата B, в який він перейде в цей момент часу. А якщо ні — $f_A(b)$ вважають невизначеним. Кажуть також, що A застосовний (не застосовний) до стану b автомата B. Очевидно, $f_A(b)$ визначене тоді й тільки тоді, коли існують слова $p \in F(X)$ і $q \in F(Y)$, такі, що

$$\varphi_A^*(p) = q; \quad \varphi_b(q) = p, \qquad (1)$$

де φ_A^* — обмеження автоматного відображення φ_A, представленого автоматом A на множину таких слів p, що $a_0 p = a^*$. Якщо слова, які задовольняють систему рівнянь (1) існують, то вони визначені лише однозначно і $f_A(b) = bq$.



Абстрактна схема керуючого й операційного автоматів.

Як приклад дискретних перетворювачів розглядають головки *Тьюрінга машин*, інтерпретовані *алгоритмів графові схеми*, логічні *операторні схеми* алгоритмів, схеми алгоритмів над пам'яттю, *програми*, *мікропрограми* та *пристрої керування ЦОМ*. Досліджено структуру операційних автоматів, які найчастіше трапляються в сучасних обчисл. машинах (див. *Автомат регістровий*). Одним з осн. завдань Д. п. т. є вивчення структури перетворень, які вони представляють. З цією метою було побудовано клас спец. алгебр (див. *Алгебра алгоритмів*). Дослідження співвідношень у конкретних алгебрах цього класу й перетворення виразів, які відповідають операторам, що їх представляють дискретні перетворювачі, дають змогу розв'язувати задачу синтезу дискретних перетворювачів, які задовольняють ті чи ін. критерії оптимальності. Велике значення має й вивчення різних видів еквівалентності дискретних перетворювачів.

Літ.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1; Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5.

О. А. Летичевський.

ДИСКРЕ́ТНИХ СИСТЕ́М АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ АНА́ЛІЗ — розділ *автоматичного керування теорії*, що вивчає процеси в дискретних (імпульсних) системах (ДС) автоматичного керування та різні якісні й кількісні характеристики їх (стійкість, точність, якість перехідних процесів тощо).

Процес керування в ДС супроводиться *квантуванням* за часом, тому рух таких систем описують здебільшого різницевими рівняннями.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, u_n), \ \sigma_n = \varphi(\mathbf{x}_n). \qquad (1)$$

де $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(m)})$ — вектор фазових координат $x_n^{(i)}$, які однозначно визначають динамічний стан ДС у момент часу $t = t_n$, що відповідає появі n-го імпульсу; m — порядок ДС; $u_n = u(t_n)$ — зовнішнє діяння (вхід ДС); $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = (f^{(1)}(\mathbf{x}, u), f^{(2)}(\mathbf{x}, u), \ldots, f^{(m)}(\mathbf{x}, u))$ — вектор-функція $\mathbf{x}$ та u, що дорівнює нулеві при $\mathbf{x} = 0$ та $u = 0$; $\sigma_n = \sigma(t_n)$ — в и х і д ДС (регульована величина, помилка регулювання і т. ін.); $\varphi(\mathbf{x})$ — скалярна ф-ція фазових координат ДС; $n = 0, 1, 2, \ldots$ — номер імпульсу (незалежна змінна системи різницевих рівнянь (1)).

Аналіз ДС полягає в дослідженні властивостей розв'язків різницевих рівнянь (1). При $u_n \equiv 0$ розв'язки системи (1) описують в і л ь н і рухи ДС, а при $u_n \neq 0$ — в и м у ш е н і. Відповідно до цієї класифікації задачі аналізу ДС поділяють на задачі аналізу вільних та вимушених рухів. Залежно від характеру правої частини системи рівнянь (1) розрізняють л і н і й н і та н е л і н і й н і ДС. Нелінійні ДС відрізняються від лінійних значно більшою різноманітністю й складністю форм можливих рухів, тому осн. задачі й особливо методи аналізу лінійних і нелінійних ДС виявляються істотно відмінними.

А н а л і з с т і й к о с т і ДС полягає у визначенні таких співвідношень між параметрами системи, при яких досліджуваній ДС властива та чи інша форма стійкості.

Для лінійних стаціонарних ДС цю задачу розв'язано до кінця, бо для них одержано *стійкості критерії*, що встановлюють необхідні й достатні умови стійкості. Для нелінійних і лінійних нестаціонарних ДС такого «остаточного» розв'язку не існує; для них відомі лише заг. методи розв'язування задачі (див. напр., *Ляпунова методи*), які, як правило, дають лише достатні умови стійкості. Для деяких найпростіших класів нелінійних ДС (напр., ДС, що складаються із з'єднаних між собою лінійних і нелінійних блоків) одержано критерії стійкості, що в явному вигляді накладають обмеження на параметри системи; але ці критерії в заг. випадку також визначають лише достатні умови стійкості. Нелінійні ДС (на відміну від лінійних) можуть бути стійкими не при всіх початкових станах. У зв'язку з цим постає задача про стійкість в області, яка полягає в тому, щоб у просторі фазових координат $\mathbf{x}$ відшукати область таких початкових станів, з яких ДС приходить у заданий рівноважний (стаціонарний) стан (див. *Стійкості дискретних систем теорія*).

Аналіз якості процесу регулювання являє собою дослідження реакції ДС автомат. керування на різного роду типові діяння. Як такі діяння застосовують: 1) ступінчасті функції

$$u_n = \begin{cases} \text{const} & \text{при } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases}; \qquad (2)$$

2) гармонічні ф-ції

$$u_n = A_0 \sin(\bar{\omega} n + \alpha_0), \qquad (3)$$

де A_0 й α_0 — амплітуда і початкова фаза гармонічної дії, $\bar{\omega} = \omega T$ — відносна частота (в радіанах), T — крок квантування за часом, а ω — частота; і 3) стаціонарні випадкові ф-ції, задані їхньою спектральною щільністю або *кореляційною функцією* тощо.

Для лінійних ДС задачі аналізу якості процесу регулювання (див. *Критерії якості систем автоматичного керування*), як правило, можна розв'язати точно, бо в цьому разі при детермінованих пробних діяннях розв'язки системи рівнянь (1) можна знайти аналітично у вигляді явних ф-цій незалежної змінної n, а при стаціонарних випадкових діяннях можна визначити статистичні характеристики (спектральну щільність і кореляційну ф-цію) реакції ДС. Для нелінійних ДС ці задачі вдається розв'язати лише в найпростіших випадках і лише наближено (на рівні оцінок). Найзручнішим матем. апаратом, що його застосовують для розв'язування подібних задач, є *Лапласа дискретні перетворювання* (або перетворювання Фур'є). Для наближеного аналізу якості процесів у нелінійних ДС широко застосовують і апарат гармонічної або статистичної лінеаризації.

Аналіз періодичних процесів (автоколивань). Система різницевих рівнянь (1) може мати незгасаючі коливальні (періодичні) розв'язки, що задовольняють співвідношення

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+N}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

де $N \geqslant 2$ — період коливань. У лінійних ДС таким розв'язкам відповідають коливальні процеси, що перебувають на грані стійкості (консервативні системи). У нелінічних ДС процеси виду (4) можуть бути стійкими; в цьому разі їх наз. *автоколиваннями*. Задача аналізу автоколивань полягає у визначенні параметрів (амплітуди, періоду і т. ін.) періодичних процесів та у відшуканні умов, за яких ці процеси мають ту чи іншу форму стійкості. Параметри періодичних процесів можна визначати і точними (метод припасовування), і наближеними (метод гармонічної лінеаризації) методами. Точні методи, хоч і дають можливість відшукати справжні значення параметрів процесу, потребують виконання громіздких і трудомістких обчислювань. Питання про стійкість знайдених періодичних процесів у цьому разі можна розв'язати строго, на основі 1-го методу Ляпунова. Для наближених методів необхідні, як правило, набагато менш громіздкі обчислювання, але одержані при цьому оцінки параметрів періодичних процесів і особливо оцінки їхньої стійкості не мають достатньої строгості. І точні й наближені методи вимагають здебільшого апріорної інформації про можливі форми періодичних процесів (кількість імпульсів за період — N, кількість змін знака імпульсів за період тощо), а це значно утруднює практичне застосування їх і знижує цінність результатів дослідження.

Аналіз дисипативності нелінійних ДС. Нелінійну ДС наз. дисипативною (інколи — гранично обмеженою), якщо існує таке число $\mu > 0$ і для будь-якого початкового стану $\mathbf{x}_0$ — таке досить велике число $N(\mathbf{x}_0)$, що для всіх $\mathbf{x}_0$ (або для всіх $\mathbf{x}_0$ з певної обмеженої області)

$$\|\mathbf{x}_n\| \leqslant \mu \text{ при всіх } n \geqslant N(\mathbf{x}_0), \qquad (5)$$

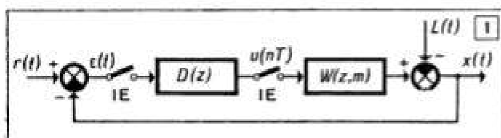
де символ $\|\mathbf{x}\|$ означає норму вектора $\mathbf{x}$. Практично це означає, що з будь-яких початкових станів (або з якоїсь обмеженої області) ДС наближається до якогось околу (5) початку координат (точка $\mathbf{x}_n = 0$) фазового простору і при всіх $n \geqslant N$ не виходить за межі цього околу. Задача аналізу дисипативності нелінійних ДС полягає у визначенні умов (обмежень на параметри ДС), при яких ДС прямує до зазначеного околу, а також у визначенні його розмірів (числа μ). ДС може мати стійкі або нестійкі *точки рівноваги* й стійкі або нестійкі граничні цикли, що відповідають різним періодичним процесам; але якщо ця система дисипативна, то всі зазначені точки й цикли належать околові (5). Отже, аналіз дисипативності дає змогу одержати оцінку точності ДС в усталеному режимі, але не дає змоги дійти якихось висновків щодо тривалості та якості *перехідного процесу*. Аналіз дисп-

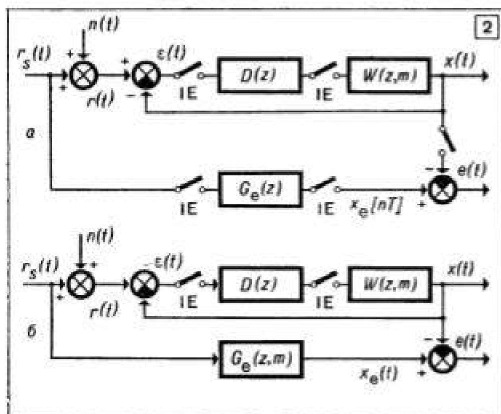
пативності доцільно провадити тоді, коли в ДС можуть існувати багато різних форм періодичних процесів, але апріорної інформації про їхні число та форми немає. В цих випадках аналіз дисипативності дає змогу одержати деякі оцінки точності процесу регулювання, не вдаючись до трудомістких обчислювань, пов'язаних з докладним аналізом усіх можливих форм періодичних процесів. Для аналізу дисипативності застосовують матем. апарат ф-цій Ляпунова, а в тих випадках, коли система рівнянь (1) містить лінійну частину, застосовують і частотні методи. Конкретний вид системи різницевих рівнянь (1), а отже, й конкретні методи розв'язування різних задач аналізу ДС істотно залежать від виду *модуляції імпульсної* (способу квантування) — AIM, ШІМ чи ЧІМ,— застосованого в системі.

Літ.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [бібліогр. с. 173—174]; Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. К., 1970 [бібліогр. с. 330—336].

В. М. Кунцевич, Ю. М. Чеховий.

ДИСКРЕ́ТНИХ СИСТЕ́М АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ СИ́НТЕЗ — визначення структури й значень параметрів *дискретної системи керування* (ДСАК), за яких система відповідає вимогам, що ставляться до неї. Звичайно при Д. с. а. к. с. об'єкт керування задано. В цьому разі задача синтезу зводиться до визначення структури й параметрів керуючої частини ДСАК. В одній з окремих, але важливих задач Д. с. а. к. с. (т. з. задачі параметричного синтезу) структура керуючої частини ДСАК теж буває заданою заздалегідь, і необхідно знайти лише значення її параметрів (див. *Оптимальних параметрів системи вибір*). В загальному випадку ДСАК має задану (незмінну) частину, і треба визначити структуру та значення параметрів змінюваної частини.





1. Схема здійснення послідовної дискретної корекції.
2. Розрахункові схеми для синтезу систем з «еталонною моделлю»: *а* — схема, що використовує оцінки у дискретні моменти часу; *б* — схема, що використовує оцінки в неперервному часі.

Конкретна постановка задачі синтезу й методи її розв'язування істотно залежать від характеру вимог, що ставляться до ДСАК. У багатьох практичних задачах ці вимоги мають вигляд обмежень, які накладаються на систему (напр., *стійкості критерії*, *динамічних систем умови грубості*, *спостережуваності й керованості умови*, вимоги *астатизму n-го порядку* тощо). Такі задачі, як правило, мають не єдиний розв'язок і дають можливість виділити клас систем, що задовольняють поставлені вимоги. В інших задачах синтезу треба побудувати ДСАК так, щоб забезпечити мінімізацію якогось критерію (див. *Критерії якості систем автоматичного керування*). ДСАК, синтезовані за таких умов, наз. оптимальними щодо мінімуму обраного критерію.

Розв'язання багатьох задач синтезу важко формалізувати, тому деякі методи здійснення його являють собою ітераційний процес (або послідовність проб і помилок), який включає в себе *дискретних систем автоматичного керування аналіз.*

Найбільше розроблено й формалізовано методи синтезу лінійних ДСАК. Залежно від форми матем. описування ДСАК ці методи поділяють на синтез у частотній або часовій області.

У частотній області задача полягає у визначенні оптим. (щодо обраного критерію) характеристик замкненої ДСАК — *передавальної функції* $K_{\text{з.опт.}}(z, m)$ або частотної характеристики $K_{\text{з.опт.}}(j, \omega, m)$ (див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) і дальшої реалізації їх шляхом *корекції систем автоматичного керування.*

У багатьох методах Д. с. а. к. с. у такій постановці задачі розглядають схему послідовної дискретної корекції одноконтурної лінійної ДСАК (мал. 1). Тут $W(z, m) = \frac{x(z, m)}{u(z)} = \frac{P(z, m)}{Q(z)}$ — передавальна функція незмінної частини системи; $D(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)}$ — передавальна функція коректувального пристрою; $K_{\text{з}}(z, m)_x = \frac{x(z, m)}{r(z)}$ — передавальна функція замкненої системи; $K_{\text{з}}(z, m)_\varepsilon = \frac{\varepsilon(z, m)}{r(z)}$ — передавальна функція замкненої системи щодо похибки; $r(t)$ — вхідний сигнал системи (задавальне діяння); $x(t)$ — вихідний сигнал системи (керована координата); $u(t)$ — керуюче діяння; $L(t)$ — збурювальне

діяння (зведене до виходу системи); $\varepsilon(t)$ — похибка системи; $r(z, m)$, $x(z, m)$, ... — *Лапласа дискретні перетворювання* сигналів $r(t)$, $x(t)$, ...; ІЕ — імпульсний елемент; T — період ІЕ. Передавальну функцію дискретного коректувального пристрою $D(z)$ знаходять після визначення оптим. передавальної функції замкненої системи за формулою

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{K_{з.опт.}(z)_x}{1 - K_{з.опт.}(z)_x}$$

або

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{1 - K_{з.опт.}(z)_\varepsilon}{K_{з.опт.}(z)_\varepsilon}.$$

Різні вимоги, які ставлять до системи і її передавальної функції $K_{з.опт.}(z)$, використовуючи методи Д. с. а. к. с. цього класу, наведено у верхній табл.

Вимоги, які ставлять до системи	Вимоги, які має задовольняти при цьому передавальна функція замкненої системи $K_{з.опт.}(z)$
Фізична реалізовність	Степінь чисельника $K_{з.опт.}(z)$ не повинен перевищувати степінь знаменника ($W(z, m)$ — не містить запізнення)
Стійкість	Усі полюси $K_{з.опт.}(z)$ мають розміщуватися всередині кола одиничного радіуса
Грубість	$K_{з.опт.}(z)_x$ має містити множник $[P(z)]_-$ (якщо незмінна частина стійка) і, крім того, $K_{з.опт.}(z)_\varepsilon$ має містити множник $[Q(z)]_-$ (якщо незмінювана частина нестійка)
Астатизм k-го порядку	$K_{з.опт.}(z)_x$ має містити множник $(z-1)^k$
Відсутність прихованих коливань	$K_{з.опт.}(z)_x$ має містити множник $P(z)$

Примітка. Операцію представлення полінома $A(z)$ у вигляді добутку двох співмножників $A(z) = [A(z)]_+ [A(z)]_-$, перший з яких — $[A(z)]_+$ має всі нулі всередині кола одиничного радіуса, а другий — $A[(z)]_-$ — поза ним, який наз. операцією факторизації.

Вид функції $F(e)$ і додаткові умови	Показники якості систем $I(m)$
$F(e) = 1$	$I(m) = \sum_{n=0}^{s-1} 1 = s$ — час перехідного процесу
$F(e) = e[nT, m]$, $s=\infty$	$I(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e[nT, m]$ — сумарна похибка
$F(e) = e^2[nT, m]$, $s=\infty$	$I(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e^2[nT, m]$ — сумарна квадратична похибка
$F(e) = e^2[nT, m]$, $e[nT, m] \equiv 0$ при $n \geqslant s$	$I(m) = \sum_{n=0}^{s=1} e^2[nT, m]$ — сумарна квадратична похибка за скінченної тривалості перехідного процесу

Розгляньмо докладніше деякі постановки задач Д. с. а. к. с. і методи розв'язування їх.

Синтез за умовами скінченної тривалості процесів. Задачу синтезу систем, які мають властивість скінченної тривалості процесів, ставлять для поліноміальних вхідних діянь

$$r_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i,$$

де t — неперервний час, $a_i = \text{const}$, $k \geqslant 1$. У лінійних ДСАК має місце *процес скінченної тривалості*, якщо $K_{з.опт.}(z)$ є скінченним поліномом по степенях z^{-1}. Розроблено ще методи синтезу систем зі скінченною тривалістю процесів, коли є обмеження (типу насичення) на керуюче діяння, а також з урахуванням збурювальних діянь; в останньому випадку система синтезується так, щоб здійснювались умови скінченної тривалості і щодо діяння $r(t)$, і щодо діяння $L(t)$.

Синтез систем з «еталонною моделлю». Часто за показник якості системи беруть функціонал $I(m)$ *функції решітчастої*, яка є різницею між бажаним $x_e[nT, m]$ і дійсним $x[nT, m]$ вихідними сигналами:

$$e[nT, m] = x_e[nT, m] - x[nT, m].$$

При цьому застосовують розрахункові схеми з т. з. «еталонною моделлю» (мал. 2). Тут

$G_e(z, m)$ — передавальна функція еталонної моделі, яка здійснює задане перетворення корисного сигналу r_s на потрібний x_e; $n(t)$ — завада; решта позначень відповідає прийнятим на мал. 1.

У досить загальному випадку функціонал $I(m)$ можна подати у вигляді

$$I(m) = \sum_{n=0}^{s-1} F(e[nT, m]), \qquad (1)$$

де $F(e)$ — певна функція. Окремі випадки $F(e)$ й відповідні показники якості наведено в нижній табл.

Щоб оцінити поведінку системи між дискретними моментами часу, розглядають середнє значення функціоналу (1)

$$\overline{I(m)} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{s-1} \int_0^T F(e[nT, m])\, dm.$$

При цьому, як і в розглянутих вище у табл. випадках, залежно від виду $F(e)$ одержують різні показники якості системи. Якщо вхідний сигнал системи $r(t)$ являє собою стаціонарний *випадковий процес*, за показники, аналогічні наведеним вище, беруть

$$I(m) = M\left\{\sum_{n=0}^{\infty} F(e[nT, m])\right\} \qquad (2)$$

і

$$\overline{I(m)} = \frac{1}{T} M\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T F(e[nT, m])\, dm = \right.$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} M\left\{\int_0^T F(e[nT, m])\, dm\right\} \qquad (3)$$

відповідно для дискретного й неперервного часу, де M — символ *математичного сподівання*.

Для випадку, коли $F(e) = e^2$, а незмінювана частина системи $W(z)$ стійка й не має запізнювання, передавальна функція системи, оптим. щодо мінімуму функціоналів (2) або (3), визначається формулами

$$K_{з.опт.}(z)_x = \frac{1}{[\Phi_{rr}(z)]_+} \times$$

$$\times \left\{\frac{G_e(z)[\Phi_{r_s r_s}(z) + \Phi_{nr_s}(z)]}{[\Phi_{rr}(z)]_-}\right\}_+$$

або

$$K_{з.опт.}(z)_x = \frac{W(z)}{[K_1(z)]_+ [\Phi_{rr}(z)]_+} \times$$

$$\times \left\{\frac{K_2(z^{-1})[\Phi_{r_s r_s}(z) + \Phi_{nr_s}(z)]}{[K_1(z)]_- [\Phi_{rr}(z)]_-}\right\}_+$$

де $K_1(z) = \int_0^1 W(z, m) W(z^{-1}, m)\, dm;$

$$K_2(z) = \int_0^1 \widehat{W}G_e(z, m)\, dm,$$

$$\widehat{W}G_e(z, m) = Z_m\{W(-s) G_e(s)\},$$

s — параметр звичайного перетворення Лапласа,

Z_m — символ модифікованого z-перетворення; $\Phi_{r_s r_s}(z)$, $\Phi_{rr}(z)$, $\Phi_{nr_s}(z)$ — спектральні щільності (z-перетворення *автокореляційних функцій* сигналів r_s та r і *взаємної кореляційної функції* сигналів n та r_s); $\{A(z)\}_+ + \{A(z)\}_- = A(z)$ — операція розщеплення, тобто подання полінома $A(z)$ у вигляді суми двох поліномів, перший з яких $\{A(z)\}_+$ має полюси всередині кола одиничного радіуса, а другий — $\{A(z)\}_-$ — поза ним.

При статистичному Д. с. а. к. с. розв'язано велику кількість задач, які відрізняються видом незмінюваної частини $W(z)$ (нестійка, із запізнюванням), вибраних функціоналів і обмежень. Розрахункові процедури для детермінованих діянь $r(t)$ багато в чому подібні наведеним вище.

У ряді випадків еталонну модель можна задати іншими характеристиками (напр., розташуванням своїх полюсів, частотною характеристикою); при цьому застосовують також *кореневого годографа метод*, метод логарифмічних частотних характеристик та ін.

При розв'язуванні задачі Д. с. а. к. с. у часовій області великого поширення набув метод а н а л і т и ч н о г о к о н с т р у ю в а н н я р е г у л я т о р і в. Для лінійного, повністю керованого об'єкта, описуваного різницевим рівнянням

$$\mathbf{x}[(n+1)T] = A\mathbf{x}[nT] + B\mathbf{u}[nT],$$

цей метод дає змогу визначити таке керування $\mathbf{u}[nT] = U(\mathbf{x}[nT])$, при якому поряд із забезпеченням асимптотичної стійкості системи керування мінімізується функціонал

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(\mathbf{x}[nT], \mathbf{u}[nT]). \qquad (4)$$

Тут $\mathbf{x}[nT]$ — m-вимірний вектор фазових координат; $\mathbf{u}[nT]$ — q-вимірний вектор керуючих діянь; A, B — числові матриці; $\omega(\mathbf{x}[nT], \mathbf{u}[nT]) = \mathbf{x}'[nT]\,Q\mathbf{x}[nT] + 2\mathbf{x}'[nT] \times \times Б\mathbf{u}[nT] + \mathbf{u}'[nT]\,R\mathbf{u}[nT]$, $Q>0$; $Б>0$; $R>0$ — задані числові матриці, які задовольняють умову $\begin{vmatrix} QБ \\ Б'R \end{vmatrix} > 0$; $'$ — знак транспонування.

Відомо кілька різних методів розв'язування цієї задачі, які дають однакові остаточні результати; найпростіший з них грунтується на використанні функцій Ляпунова. Вибираючи додатно означену функцію Ляпунова $v[nT] = V(\mathbf{x}[nT], \mathbf{u}[nT])$, першу різницю якої беруть рівною $-\omega(\mathbf{x}[nT], \mathbf{u}[nT])$, одержують

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-\Delta v[nT]) = V(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0]).$$

Показано, що коли вибирають $V(\mathbf{x}[nT])$ у вигляді $V(\mathbf{x}[nT]) = \mathbf{x}'[nT]\, P\mathbf{x}[nT]$, керування, оптим. щодо мінімуму функціоналу (4), має вигляд

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}[nT]) = -(R + B'PB)^{-1}(B'PA + Б')\,\mathbf{x}[nT],$$

де додатно означену матрицю P визначають з рівняння

$$P - A'PA - Q + (A'PB + Б)(R + B'PB)^{-1} \times \times (A'PB + Б)' = 0.$$

Багато з розглянутих вище методів Д. с.а. к. с. поширено і на випадок дискретних *багатовимірних систем автоматичного керування.* При синтезі таких систем застосовують і деякі специфічні методи, напр., синтез за умовами *автономності* або інваріантності (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

Для нелінійних об'єктів у загальному випадку не вдається розв'язати задачу керування у вигляді $\mathbf{u} = \mathrm{L}(\mathbf{x})$ (L — в загальному випадку нелінійний оператор), тобто в класі систем із зворотним зв'язком. Відомі лише методи визначення оптим. програмного керування, тобто керування, яке відшукують у вигляді $\mathbf{u} = \mathbf{u}[nT]$. Так, напр., для об'єктів, описуваних нелінійним різницевим рівнянням

$$\mathbf{x}[(n+1)T] = F(\mathbf{x}[nT], \mathbf{u}[nT], nT),$$

де $\mathbf{u} \in R$, R — замкнена обмежена множина *допустимих керувань*, послідовність керування $\mathbf{u}[nT]$, що мінімізує вибраний функціонал, можна визначити або за допомогою дискретного аналога принципу максимуму, або за допомогою методів *програмування динамічного.*

Крім розглянутих методів останнім часом значну увагу приділяють синтезові дискретних систем керування об'єктами з випадковими параметрами; синтез таких систем базується на застосуванні ідей та методів *дуального керування* й *керування з адаптацією.* Див. також *Неперервних систем автоматичного керування синтез.*

Літ.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [бібліогр. с. 173—174]; Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., 1966 [бібліогр. с. 410—413]; Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [бібліогр. с. 347—381]; Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964.

Ю. В. Крементуло, В. М. Кунцевич.

ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ — один з основних методів *математичної статистики*, застосовуваний для аналізу результатів спостережень, що залежать від різноманітних факторів, які діють одночасно, для вибору найважливіших факторів, оцінки їхнього впливу на ці результати тощо. Д. а. розвивався переважно у зв'язку з застосуванням його в с.-г. статистиці. Тепер Д. а. застосовують, аналізуючи найрізноманітніші експерименти. Одним з першочергових питань, розглядуваних Д. а., є питання про те, чи сукупність спостережень експерименту є набором спостережень однієї нормально розподіленої *випадкової величини*, чи сумішшю спостережень нормально розподілених випадкових величин, що різняться лише серед. значеннями. Прикладом застосування Д. а. є с.-г. експерименти, коли порівнюють впливи різних добрив, способів обробітку грунту й сортів насіння на врожайність культур.

Найпростішу з задач Д. а. можна описати так. Припустимо, що одержані під час експерименту спостереження поділено на r груп, причому i-а група містить n_i величин, припустимо нормальних, з середнім значенням m_i і *дисперсією* σ^2, постійною для всіх груп. Треба перевірити гіпотезу (див. *Статистична перевірка гіпотез*) про те, що всі значення m_i дорівнюють одне одному, або оцінити мінливість середніх m_i. Нехай x_{ij} — j-а величина в i-й групі, $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ — серед. арифмет. спостережень i-ї групи, а $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ $\left(n = \sum_{i=1}^{r} n_i\right)$ — серед. арифметичне всіх спостережень. Рівність

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

становить повну суму квадратів відхилень спостережень від загального серед. $\bar{x}$ у вигляді суми двох частин, з яких перша дає суму квадратів відхилень кожного спостереження від відповідного групового серед. значення («сума квадратів усередині груп»), а друга — суму квадратів відхилень групових серед. значень від загального серед. значення («сума квадратів між групами»). Величини

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \text{ і } Q_2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

пов'язані з оцінкою дисперсії всередині груп та оцінкою дисперсії між групами і мають такі властивості. Якщо випадкові величини незалежні й мають *нормальний розподіл* з заг. дисперсією σ^2, то величини Q_1 і Q_2 незалежні. Коли припустити, що $m_i = m$ для всіх i, величини $\frac{Q}{\sigma^2}$, $\frac{Q_1}{\sigma^2}$, $\frac{Q_2}{\sigma^2}$ $(Q = Q_1 + Q_2)$ мають розподіл χ^2 з $n-1$, $r-1$, $n-r$ ступенями вільності відповідно. Якщо величина $S_1^2 = \frac{1}{r-1}Q_1$ мало відрізняється від величини $S_2^2 = \frac{1}{n-r}Q_2$, то немає підстав вва-

жати серед. значення у групах за різні. А коли S_1^2 значно переважає S_2^2, то виникає підозра, що серед. значення груп різні.

Більш обгрунтовані висновки одержують так. Відношення $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ наз. дисперсійним відношенням і має розподіл (розподіл F), визначуваний числами r і n. Замість дисперсійного відношення часто використовують величину z, яку визначають за рівнянням $e^{2z} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$. Розподіл величини z також відомий, є таблиці розподілів величин e^{2z} і z. Для перевірки гіпотези про те, що m_i однакові при всіх i, користуються «критерієм z». «Критерій z» полягає в тому, що припущення про рівність середніх відкидається при рівні значущості ε, коли для здобутого під час експерименту значення z виконується нерівність $|z| > z_\varepsilon$, де z_ε визначається так, що ймовірність $P\{|z| > z_\varepsilon\} = \varepsilon$. Якщо серед. значення m_i не рівні одне одному, то величина $\frac{r-1}{n} \times (S_1^2 - S_2^2)$ є незсуненою оцінкою (див. *Статистичні оцінки*) для значення $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i (m_i - \bar{m})^2$, $\left(\text{тут } \bar{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i m_i\right)$, яке можна розглядати як міру мінливості невідомих середніх значень m_i. Величина

$$t = \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}} \cdot \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j - (m_i - m_j)}{S_2}, \quad i \neq j$$

має розподіл Стьюдента з $n - r$ ступенями вільності. Інтервал $\bar{x}_i - \bar{x}_j - t_\varepsilon S_2 \sqrt{\frac{n_i + n_j}{n_i n_j}}$, $\bar{x}_i - \bar{x}_j + t_\varepsilon S_2 \sqrt{\frac{n_i + n_j}{n_i n_j}}$ є довірчим інтервалом для різниці між невідомими серед. $m_i - m_j$, який відповідає довірчому рівневі ε, число t_ε взято так, що $P\{|t| > t_\varepsilon\} = \varepsilon$. Розглянутий метод наз. також **однофакторним аналізом**, або класифікацією за однією ознакою. Д. а. можна узагальнити на випадок, коли спостереження є незалежними k-вимірними випадковими векторами або коли спостережувані випадкові величини поділяються на групи складнішим способом, напр., за кількома ознаками (**багатофакторний аналіз**) тощо.

Важливий клас задач Д. а. пов'язаний з аналізом моделей з випадковими факторами. В найпростішому випадку розглядають схему, в якій спостереження x_{ij} мають структуру $x_{ij} = \mu + a_i + l_{ij}$, де величини a_i, l_{ij} незалежні в сукупності й мають нульові *математичні сподівання*, причому a_i однаково розподілені з дисперсією σ_a^2, а x_{ij} — з дисперсією σ_l^2. Спостереження x_{ij}, що стосуються i-ї групи, залежні, ця залежність характеризується коеф. внутрішньогрупової кореляції ρ величин x_{ij_1} і x_{ij_2} $(j_1 \neq j_2)$: $\rho = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_l^2}$. За припущення, що величини a_i і l_{ij} — нормальні випадкові величини, побудовано довірчі інтервали для ρ, довірчі інтервали й оцінки для σ_a^2 і σ_l^2, критерії для перевірки гіпотези про те, що $\sigma_a^2 = 0$, тощо.

Літ.: Шеффе Г. Дисперсионный анализ. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 616—625].

А. Я. Дороговцев.

ДИСПЕ́РСІЯ (лат. dispersio — розсіювання) $D\xi$ випадкової величини ξ є характеристика розсіювання значень цієї *випадкової величини* навколо її *математичного сподівання;* визначається формулою $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, де M — символ математичного сподівання. Величина $\sqrt{D\xi}$ наз. **стандартним відхиленням випадкової величини** і є мірою, що характеризує розкид можливих значень відносно її середнього значення $M\xi$. Якщо ξ — дискретна випадкова величина, що набуває значення x_k з *імовірностями* p_k, то D можна обчислити за формулою $D\xi = \sum x_k p_k - \left(\sum x_k p_k\right)^2$, а якщо ξ має щільність розподілу $p(x)$, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx\right)^2.$$

Осн. властивості Д.: Д. сталої дорівнює нулеві; Д. не зміниться, якщо до випадкової величини додати сталу; при множенні випадкової величини на сталий множник k Д. множиться на k^2; Д. суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі Д. Якщо $D\xi = 0$, то $P\{\xi = c\} = 1$ для якоїсь сталої c.

Наведемо значення Д. для найважливіших розподілів (при цьому для дискретних розподілів візьмемо $p_k = P(\xi = k)$):

1) біномний розподіл $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $D\xi = np(1-p)$;

2) гіпергеометричний розподіл $p_k = C_z^k \times C_{N-z}^{n-k} (C_N^n)^{-1}$, $k = \min(n, z)$, $n \leqslant N$, $D\xi = (N-n)(N-1)^{-1} np(1-p)$ $(Np = z)$;

3) розподіл Пуассона $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, $D\xi = a$ (тобто Д. пуассонівського розподілу збігається з його середнім значенням);

4) розподіл Гаусса $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $D\xi = \sigma^2$;

5) рівномірний розподіл в інтервалі $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $f(x) = \frac{1}{a}\left(|x| < \frac{a}{2}\right)$, $D\xi = \frac{a^2}{12}$;

6) показниковий розподіл $p(x) = ae^{-ax}$ $(x \geqslant 0)$, $D\xi = \frac{2}{a^2}$;

7) гамма-розподіл $f(x) = \frac{x^{\mu-1}e^{-x}}{\Gamma(\mu)}$, $D\xi = \mu = M\xi$;

8) розподіл Стьюдента $D\xi = \frac{n}{n-2}$, де n — число ступенів вільності;

9) логнормальний розподіл $p(x) = a \times (\sqrt{2\pi}x)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \times (b + a \ln x)^2\right\}, x > 0$, $D\xi = \omega^2\rho^2 (\omega^2 - 1)$, $\omega = \exp\left(\frac{1}{2}a^2\right)$, $\rho = \exp\left(-\frac{b}{a}\right)$ (див. *Розподіл імовірностей*).

Щоб визначити Д. за рядом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ незалежних результатів вимірювань випадкової величини, беруть $D\xi = s^2$, де $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Величина s^2 є переконливою оцінкою $D\xi$, тобто при $n \to \infty$ s^2 сходиться за імовірністю до $D\xi$; більше того, величина $\sqrt{n}(s^2 - D\xi)$ при $n \gg 1$ має розподіл, близький до нормального із середнім значенням нуль і Д. $\mu_4 - (D\xi)^2$, де $\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4$. Докладнішу інформацію про величину s^2 можна одержати при конкретних припущеннях про розподіл величини ξ. Напр., якщо ξ має нормальний розподіл з параметрами (a, σ^2), то $\frac{\sqrt{n-1}s^2}{\sigma^2}$ має розподіл, що не залежить від a і σ (χ^2— розподіл з $n - 1$ ступенем вільності), що дає змогу будувати для Д. *довірчі інтервали*.

Й. І. Гіхман.

ДИСПЕ́ТЧЕР у програмуванні — див. *Операційна система.*

ДИСПЕ́ТЧЕРСЬКОГО УПРАВЛІ́ННЯ АВТОМАТИЗА́ЦІЯ — застосування комплексної системи (клас *систем «людина — машина»*) для автоматизації процесу управління з урахуванням оптимальних режимів роботи керованого об'єкта. За допомогою Д. у. а. здійснюється: збирання та обробка інформації про хід керованого процесу, оперативне планування роботи об'єкта в оптим. режимі, контроль за виконанням оперативних планів шляхом видавання диспетчерові сигналів (на світлових табло, друкованих бланках тощо), одержування поточної інформації про хід процесу й виконання оперативних наказів, одержування даних про стан об'єктів тощо. В систему Д. у. а. входять: оператор (диспетчер), *керуюча обчислювальна машина* (КОМ), засоби зв'язку оператора з КОМ і керованими об'єктами (включаючи телезв'язок), системи давачів і виконавчих пристроїв, які здійснюють контроль і виконання наказів безпосередньо на об'єкті. Частину системи, яка включає в себе КОМ і засоби зв'язку з оператором, наз. автодиспетчером. Є два ступені Д. у. а.: на першому система працює як «порадник», КОМ розробляє оперативні плани роботи об'єкта і знімає відповідну інформацію, а виконує їх диспетчер (оператор); на другому ступені всі функції управління бере на себе КОМ, яка має *зворотний зв'язок.* За допомогою такої системи повністю здійснюється планування, контроль і аналіз роботи об'єкта. У цьому разі система функціонує як самопристосовувана. Втручання оператора потрібне тільки в особливо складних випадках. Д. у. а. застосовують здебільшого при управлінні транспортом, енергооб'єднаннями, металург. та хім. підприємствами, в системах зв'язку тощо. В СРСР за допомогою Д. у. а. було вперше здійснено стикування космічних кораблів у міжпланетному просторі, а також керування космічним апаратом «Луноход-1». На Україні комплексну Д. у. а. застосовують на Ворошиловградському паровозобудівному заводі, Львівському телевізійному заводі та на інших машинобудівних і приладобудівних заводах.

На залізницях застосовують дільничні, станційні й комплексні автоматизовані системи диспетчерського управління. В цих системах КОМ збирає та обробляє інформацію про рух поїздів, складає й коректує плани-графіки руху поїздів і здійснює оперативний контроль за виконанням їх. За диспетчером зберігається заг. керівництво й виконання функцій, які важко алгоритмізувати. При Д. у. а. машина за допомогою комплексу *програм* видає план-графік руху поїздів на 2—4 *год.* Для здійснення функції управління рухом (коректувань графіка) в машину з дорожньої дільниці надходить інформація про рух поїздів на дільниці. Як тільки з чергової k-ї станції відходить поїзд, за допомогою Д. у. а. автоматично встановлюється маршрут на проходження наступної $k + 1$-ї станції, а іноді й двох станцій, з урахуванням поїзної обстановки на дільниці. Д. у. а. на дільницях залізниць дає змогу раціонально вести графік руху вантажних і пасажирських поїздів залежно від кількості їх на дільниці, їхньої ваги, місцеперебування тощо; забезпечує централізоване управління на одноколійних та одноколійних із двоколійними вставками дільницях протяжністю до 600 *км* з кількістю поїздів на добу до 100—500, при швидкості понад 150 *км/год.* Економ. ефектом застосування Д. у. а. на залізницях є збільшення дільничної швидкості руху поїздів на 5—10%. Д. у. а. широко застосовують на великих сортувальних і вузлових станціях і під час планування робіт. Тут осн. економічний ефект полягає в поліпшенні обороту вагонів і локомотивів, зменшенні кількості маневрових засобів. Першу автоматизовану систему диспетчерського управління в СРСР розроблено 1953—63.

Д. у. а. енергосистемами широко застосовують в СРСР, це дає значний економ. ефект: напр., внаслідок зменшення витрати умовного палива на 1% можна зекономити понад

30 млн. крб. Д. у. а. енергосистемами дає змогу виконувати осн. функції щодо планування тривалих і добових режимів, оперативно коректувати режим енерг. об'єднання, запобігати аваріям, розпізнавати й ліквідувати передаварійні та аварійні ситуації. За допомогою Д. у. а. здійснюється збирання та обробка статистичних даних про витрату енергії, які надходять від споживачів, а також від електростанцій та енергосистем; про стан стаціонарного устаткування, високовольтних ліній передачі, запасів води у водосховищах гідростанцій тощо. На основі складених планів провадиться автомат. розрахунок добових графіків розподілу навантаження між електростанціями й великими агрегатами. В процесі реалізації добового графіка здійснюється автомат. коректування режиму функціонування енергосистем.

У США Д. у. а. застосовують в управлінні Каліфорнійською енергосистемою. Подібне до цього управління енергосистемами застосовують у Франції, Англії, ФРН, Японії та ін. країнах.

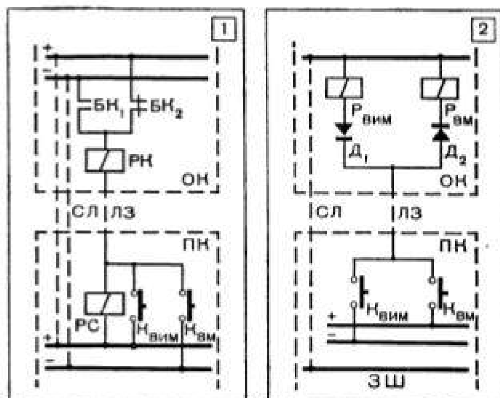
Літ.: Буданцев Ю. Ю. Электронные помощники диспетчера. М., 1963; Островский А. С. Техника связи, диспетчеризации и оперативного управления в промышленности. М. — Л., 1964 [бібліогр. с. 223—224]; Лившиц С. Б. Организация диспетчерской службы отраслевого производственного объединения. Л., 1965; Завьялов Б. А. Участковый автодиспетчер. М., 1967 [бібліогр. с. 220]; Петров А. П. Эксплуатация железных дорог с применением электронной вычислительной техники. М., 1969 [бібліогр. с. 187—189].

О. О. Бакаєв, В. В. Шкурба.

ДИСТАНЦІЙНЕ КЕРУВАННЯ — процес виконання оператором або автоматичним пристроєм операцій зміни стану технічних об'єктів на відстані шляхом передавання сигналів по лініях зв'язку. Як правило, у процесі Д. к. здійснюють і передавання сигналів про виконання цих операцій (дистанційний контроль). При Д. к. звичайно виконують найпростіші операції — вмикають або вимикають об'єкт, передають сигнали про його стан тощо. Д. к. широко застосовують у диспетчерських системах пром. підприємств, електр. станцій і електр. мереж, гідротех. споруд, шахт і залізничних вузлів. Об'єктами керування є вимикачі, роз'єднувачі, контактори для пуску електр. двигунів, засувки й вентилі. Кожному об'єктові для керування виділяють самостійну лінію зв'язку. В системах з Д. к., як правило, використовують проводові (звичайно кабельні) лінії зв'язку. Оскільки при такому керуванні не використовують методи ущільнення ліній зв'язку, то сигнали, що передаються, прості за формою і звичайно являють собою імпульси (або неперервні сигнали) постійного струму, які відрізняються в деяких випадках інтенсивністю й полярністю. Системи з Д. к. відзначаються простою структурою й високою надійністю. Вплив зовнішніх електр. і магн. полів послаблюється завдяки екрануванню багатожильних кабельних ліній зв'язку та підвищенню потужності сигналів керування.

Економічна ефективність використання систем з Д. к. визначається кількістю об'єктів керування й довжиною лінії зв'язку. Ці системи доцільно використовувати при відносно невеликих відстанях — до $2 \div 4$ *км*, при $20 \div 30$ об'єктах керування. При більших відстанях для керування об'єктами використовують засоби *телемеханіки*.

Є багато варіантів схем Д. к. Розробляючи такі схеми, особливу увагу приділяють захистові від хибних операцій, зумовлених завадами або пошкодженнями апаратури. На мал. 1 показано електричну схему керування об'єктом, який може перебувати в двох станах



1. Схема дистанційного керування двопозиційним об'єктом.
2. Варіант схеми дистанційного керування двопозиційним об'єктом.

(двопозиційним об'єктом). Об'єкт керування ОК з'єднують з пунктом керування ПК лінією зв'язку ЛЗ. Схеми на ОК та ПК живить одне джерело постійного струму через спільну лінію СЛ. В нормальному (неробочому) стані обмотки реле керування РК та реле сигналізації положення об'єкта РС обтікає струм, величина якого залежить від опору обмоток РК та РС, а полярність — від стану об'єктів керування. Якщо об'єкт ввімкнено, то його блок-контакти $БК_1$ замикаються, а $БК_2$ — розмикаються. Величина струму, який протікає по лінії зв'язку, обмежується опором обмотки реле РС, вона недостатня для спрацювання реле РК. Вмикають (вимикають) об'єкт на ПК, натискаючи кнопку вмикання $К_{ВМ}$ (кнопку вимикання $К_{ВИМ}$). При цьому обмотка реле РС закорочується і струм у колі різко збільшується. Реле РК спрацьовує, і його контактами й допоміжними блок-контактами об'єкта здійснюється операція керування.

У наведеній схемі команди керування й сигнали стану об'єкта передаються по однопроводовій лінії. Щоб підвищити надійність роботи схем Д. к., використовують двопроводові лінії, в яких команди керування й сигнали стану об'єктів передають по окремих лініях. У схемі керування двопозиційним об'єктом (мал. 2) команди керування розділяються діодами за полярністю струму керу-

вання. Коли натиснути $К_{ВМ}$, до лінії зв'язку надходить струм, полярність якого приймають за позитивну, а на ОК через діод $Д_2$ вмикається обмотка реле вмикання $Р_{ВМ}$. Реле спрацьовує і об'єкт вмикається контактами цього реле. Щоб вимкнути об'єкт, натискають кнопку $К_{ВИМ}$, і струм зворотної полярності через діод $Д_1$ вмикає реле вимикання $Р_{ВИМ}$, контактами якого об'єкт вимикається.

Літ.: Райнес Р. Л. Дистанционное управление. В кн.: Автоматизация производства и промышленная электроника, т. 1. М., 1962; Райнес Р. Л., Горянинов О. А. Телеуправление. М.— Л., 1965 [бібліогр. с. 531—536]. *А. М. Лучук.*

ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНА СИСТЕ́МА АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — система автоматичного керування з законом регулювання, при якому інформація про збурення вводиться за допомогою диференціальних *зворотних зв'язків* за вхідною та вихідною координатами ланки, яка зазнає дії збурення. Такі системи наз. ще системами з непрямим або диференціальним вимірюванням збурення (за аналогією з мех. диференціалом, де провадиться віднімання мех. обертових рухів). У Д. с. а. к. величину, яка чисельно дорівнює збуренню або перебуває в незмінній і достатньо простій залежності від нього, можна виділити порівнюванням величин λ_y і λ_z, одержаних перетворенням координат y і z замкненого контура (відповідну ділянку схеми на мал. обведено пунктиром). Ці координати слід обирати так, щоб збурення λ було між ними. Розгляньмо лінійну систему автомат. регулювання (див. мал.). За нульових початкових умов

$$\lambda_д(p) = \lambda_y(p) - \lambda_z(p) =$$
$$= [Y_{п1}(p) - Y_{п2}(p)Y_1(p)Y_2(p)]\,y(p) -$$
$$- Y_{п2}(p)Y_2(p)\lambda(p), \qquad (1)$$

де p — параметр перетворення Лапласа. Якщо виконується рівність

$$Y_{п1}(p) = Y_{п2}(p)Y_1(p)Y_2(p), \qquad (2)$$

що її часто наз. умовою еквівалентності, то

$$\lambda_д(p) = -Y_{п2}(p)Y_2(p)\lambda(p). \qquad (3)$$

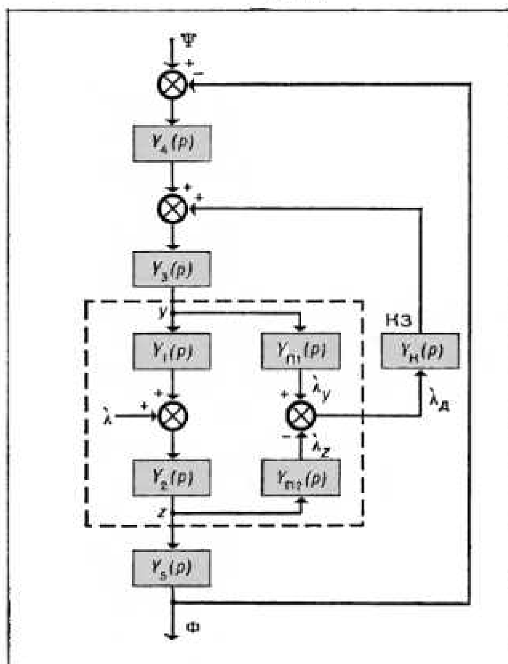
Якщо, крім цього, $Y_{п2}(p) = Y_2^{-1}(p)$ і $Y_{п1}(p) = Y_1(p)$, то $\lambda_д = -\lambda$. Отже, за виконання умов (2, 3) величина $\lambda_д$ є аналогом збурення λ. Цю властивість можна використати для створення компаундуючого зв'язку КЗ (див. мал.). *Передавальна функція* системи відносно збурення λ

$$Y_{збур}(p) = \frac{\Phi(p)}{\lambda(p)} =$$
$$= \frac{Y_2(p)Y_5(p)[1 - Y_3(p)Y_{п1}(p)Y_к(p)]}{1 + Y_1(p)Y_2(p)Y_3(p)Y_4(p)Y_5(p) - Y_3(p)Y_к(p)[Y_{п1}(p) - Y_2(p)Y_1(p)Y_{п2}(p)]}. \qquad (4)$$

Якщо виконується умова (2), то

$$Y_{збур} = \frac{Y_2(p)Y_5(p)[1 - Y_3(p)Y_{п1}(p)Y_к(p)]}{1 + Y_1(p)Y_2(p)Y_3(p)Y_4(p)Y_5(p)}. \qquad (5)$$

У знаменнику рівняння (5) немає передавальних функцій елементів, за допомогою яких здійснюється диференціальне вимірювання збурення. Отже, при точному виконанні воно не впливає на стійкість системи. Ланка $Y_к(p)$ створює з елементом $Y_{п1}(p)$ позитивний зворотний зв'язок, а з елементом $Y_{п2}(p)$ — негативний. При виконанні умови (2) вплив цих зв'язків на стійкість взаємно знищується. Відхилення від умови (2) еквівалентне зворотному зв'язкові (позитивному чи негативному). З рівняння (5) можна зробити висновок, що для забезпечення абс. інваріантності Φ відносно λ необхідно, щоб



Структурна схема диференціальної системи автоматичного керування: Ψ — задавальне діяння; Φ — регульована величина; λ — збурення; $\lambda_д$ — непрямо виміряне збурення; $Y_{(p)}$ — передавальні функції елементів системи.

$$Y_к(p) = Y_3^{-1}(p)\cdot Y_{п_1}^{-1}(p). \qquad (6)$$

Ця умова важко здійсненна в загальному випадку, бо при цьому потрібно реалізувати обернені передавальні функції

$$Y_{п2}^{-1}(p) \text{ і } Y_3^{-1}(p)Y_{п1}^{-1}(p).$$

Таким чином, у Д. с. а. к. можлива тільки інваріантність до ε й умова (6) вказує лише

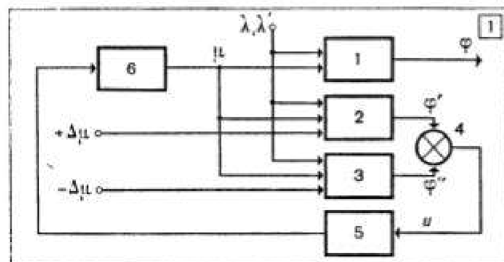
межу, до якої треба наближати $Y_k(p)$. Разом з тим у Д. с. а. к. можна здійснювати інваріантність і в усталеному режимі, більше того, ця система, будучи замкнена, дає змогу забезпечити не лише компенсацію, а й перекомпенсацію дії збурення (негативний статизм регулювання),— як і системи з компаундуючими зв'язками за збуренням. Для цього необхідно, щоб

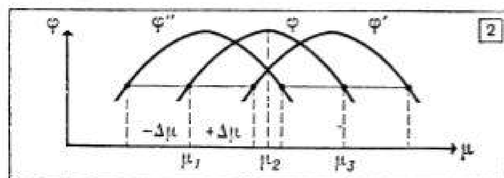
$$Y_к(0) > \frac{1}{Y_з(0)\, Y_{п1}(0)}. \quad (7)$$

Принцип диференціального вимірювання збурення можна використовувати в деяких нелінійних системах. Прикладом Д. с. а. к. є система стабілізації напруги генератора, тут об'єкт керування — генератор — охоплюється диференціальним зв'язком (вилкою). Диференціальне вимірювання збурень застосовують і в слідкуючих системах, у системах стабілізації літальних апаратів, системах екстремального регулювання і т. ін.

Літ.: Костюк О. М. Умова еквівалентності систем диференціального керування та систем керування за збуреннями. «Автоматика», 1961, № 1; Менский Б. М. К вопросу о реализации принципа инвариантности. «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1961, № 5; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 364—371]; Івахненко О. Г. Кібернетичні системи з комбінованим керуванням. К., 1963 [бібліогр. с. 471—479]. *В. І. Костюк.*

ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНА СИСТЕ́МА ЕКСТРЕМА́ЛЬНОГО РЕГУЛЮВА́ННЯ — безпошукова система екстремального регулювання, в якій за допомогою зміщення екстремальних характеристик у просторі регулюючих діянь у будь-який момент часу спостерігаються одночасно два режими роботи (дві точки екстремальної характеристики). Багато реальних об'єктів не допускають спец. пошукових коливань, тому для керування ними не можна застосовувати звичайні принципи побудови *систем екстремального регулювання.* Д. с. е. р. можна застосувати там, де вдається побудувати модель екстрем. об'єкта керування і ввести в неї осн. збурювальні діяння, яких зазнає об'єкт. Прикладом цього можуть бути деякі об'єкти хім. промисловості, що піддаються *моделюванню фізичному.* Структурну схему Д. с. е. р. наведено на мал. 1. На вхід двох моделей (2 і 3) неперервно подаються однакові за величиною, але протилежні за знаком регулюючі діяння $\Delta\mu$, під впливом яких екстрем. характеристика в одній моделі зміщується вліво, а в другій — вправо відносно характеристики φ об'єкта керування (мал. 2). Коли на вході (1) об'єкта діє регулююче діяння μ_1, то показник якості φ' на виході першої моделі визначатиметься діянням $\mu_1 + \Delta\mu$, а показник якості φ'' на виході другої моделі — $\mu_1 - \Delta\mu$. Те саме стосується й точки μ_3. Розглянувши, таким чином, ряд значень регулюючого діяння, можна переконатися в тому, що екстрем. характеристики моделей будуть зсунуті відносно характеристики об'єкта регулювання φ. Оскільки на обидві моделі впливають усі ті збурення λ, λ', що діють і на об'єкт, і переміщують екстрем. характеристику відповідно в горизонтальному й вертикальному напрямах, то при переміщенні характеристики об'єкта переміщуються й характеристики моделей, не змінюючи свого положення ні щодо характеристики об'єкта, ні одна щодо одної. Виміряні значення показників якості φ' і φ'' подаються на пристрій віднімання (4), а результат віднімання після підсилення пристроєм (5) керує двигуном (6). Диференціальна система підтримує рівність $\varphi' - \varphi'' = 0$ при будь-яких збуреннях, що діють на об'єкт і на моделі. Ця рівність задовольняється тільки при значенні регулюючого діяння μ_2 (мал. 2), яке відповідає екстремумові характеристики об'єкта керування.





1. Структурна схема диференціальної системи екстремального регулювання.
2. Статичні екстремальні характеристики моделей (φ', φ'') та об'єкта (φ).

Якщо в диференціальній системі характеристики моделей зовсім ідентичні, то для пропорційної системи *регулювання закон* матиме вигляд $u = \alpha\Delta\mu\varepsilon$, де α — коефіцієнт пропорційності (підсилення); $\Delta\mu$ — постійне зміщення моделей; ε — відхилення від екстремуму; u — напруга, що керує виконавчим двигуном. Д. с. е. р. є єдиною з загальновідомих екстрем. систем, що забезпечує абсолютну інваріантність щодо збурень λ'. Д. с. е. р. мало чим відрізняється від звичайних *слідкуючих систем,* і для визначення її динамічних властивостей можна застосувати методи дослідження таких систем.

Незважаючи на те, що сфера застосування диференціальних систем обмежена через необхідність створювати моделі об'єктів, існує багато пром. об'єктів, у яких це завдання розв'язується відносно просто.

Літ.: Кунцевич В. М. Системы экстремального управления. К., 1961 [бібліогр. с. 145—149]; Васильев В. И. Дифференциальные системы экстремального регулирования. К., 1963 [бібліогр. с. 70—71]; Васильев В. І. Екстремальні системи керування без пошукових коливань. К., 1966 [бібліогр. с. 172—175]. *В. І. Васильєв.*

ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНИХ ЛІНІ́ЙНИХ РІВНЯ́НЬ З ЧАСТИ́ННИМИ ПОХІДНИ́МИ КЛАСИФІКА́ЦІЯ. Диференціальне рівняння, яке містить, крім незалежних змінних і шуканої функції, ще й частинні похідні цієї функції, наз. дифер. рівнянням з частинними похідними. Найвищий порядок частинних похідних, які входять до рівняння, наз. порядком дифер. рівняння. Дифер. рівняння наз. лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої ф-ції й усіх її похідних. Дифер. рівняння 2-го порядку

$$A_{11}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2A_{12}(x_1x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+$$

$$+A_{22}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\Phi\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \quad (1)$$

в даній точці $x=(x_1, x_2)$ наз. еліптичним, параболічним і гіперболічним, якщо в цій точці відповідно

$$\Delta > 0;\quad \Delta = 0;\quad \Delta < 0, \quad (2)$$

де $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$.

Класифікація дифер. рівнянь 2-го порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=$$

$$=\Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad (3)$$

де $x=(x_1,\ldots,x_n)$, основана на зведенні квадратичної форми $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i\alpha_j$ до канонічного вигляду. Вибравши належні перетворення $\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$, $k=1,\ldots,n$, зведемо (3) до вигляду

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\pm\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}\right)=F\left(\xi,u,\frac{\partial u}{\partial \xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right),$$

де $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. (4)

Дифер. рівняння (3) наз. еліптичним у даній точці, якщо $m=n$ і всі знаки в лівій частині (4) однакові; гіперболічним у даній точці, якщо $m=n$ і всі знаки, крім одного, в лівій частині (4) однакові, й параболічним у вузькому розумінні, якщо в лівій частині (4) всі члени мають однакові знаки, одного члена, напр. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$, немає, а права частина має відповідно похідну $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$.

Дифер. рівняння (3) наз. параболічним (у широкому розумінні), якщо $m<n$, його наз. ультрагіперболічним у даній точці, якщо $m=n$ і в лівій частині (4) є більше як по одному додатньому і від'ємному знаку.

Систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1}=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u_j}{\partial x_2}+$$

$$+\Phi_i(x_1,x_2,u_1,\ldots,u_N),\ i=1,\ldots,N \quad (5)$$

наз. гіперболічною системою (г. с.) в даній точці, якщо в цій точці визначник матриці

$$(A_{ij}-\lambda\delta_{ij}),\ \text{де}\ \delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{Bmatrix}, \quad (6)$$

має дійсні й різні корені. Якщо вказаний визначник не має в точці дійсних коренів, то систему (5) наз. еліптичною системою (е. с.) в точці. Прикладом е. с. 1-го порядку є система Коші — Рімана

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{0\leqslant k\leqslant n_j}A_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}(x)\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=$$

$$=\Phi_i(x), \quad (7)$$

$$i=1,\ldots,N,\ x=(x_1,\ldots,x_n),\ k=\sum_{s=1}^{n}k_s,$$

наз. еліптичною в точці, якщо за будь-яких значень дійсних змінних $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, для яких $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^2>0$, визначник порядку N, у якого елемент на перетині i-го рядка і j-го стовпця має вигляд

$$\sum A_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n} \quad (8)$$

і відрізняється від нуля в цій точці. Прикладом е. с. 2-го порядку є система рівнянь Ламе:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)+$$

$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0.$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right)+$$

$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0$$

при $\frac{1}{2}\neq\sigma\neq 1,\quad \sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$.

Дифер. рівняння $2m$-го порядку

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant 2m}A^{(k_1,\ldots,k_n)}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=\Phi(x),$$

$$x=(x_1,\ldots,x_n), \quad (9)$$

де коеф. A не змінюється від будь-якого переставляння індексів $k_1, k_2, \ldots, k_n$, наз. еліптичним у точці, якщо в цій точці для будь-яких дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2 > 0$, справджується нерівність

$$\left| \sum_{k=2m} A^{(k_1, \ldots, k_n)}(x)\, \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right| \geqslant \geqslant \mu(x) \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{2m},\ \mu(x) > 0. \qquad (10)$$

Прикладом еліптичного рівняння 4-го порядку є бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0.$$

Е. с. і еліптичні рівняння високого порядку є узагальненням еліптичного рівняння 2-го порядку

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + + cu + \Phi = 0, \qquad (11)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} t_i t_j \right| \geqslant \mu \sum_{s=1}^{n} t_s^2,\ \mu > 0,\ A_{ij} = A_{ji}.$$

Систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{2pk_0 + k \leqslant 2pn_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x) \times \times \frac{\partial^{k_0 + k} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x),\quad k_0 < n_j, \qquad (12)$$

$$i = 1, \ldots N,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\quad k = \sum_{s=1}^{n} k_s,$$

де p — ціле число, наз. параболічною системою (п. с.) (у розумінні Петровського) в точці (t, x), якщо для будь-яких дійсних $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2 = 1$ корені визначника порядку N, у якого елемент на перетині i-го рядка й j-го стовпця має вигляд

$$\sum_{2pk_0 + k = 2pn_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x)\, \lambda^{k_0} (i\alpha_1)^{k_1} \ldots \ldots (i\alpha_n)^{k_n} - \lambda^{n_j} \delta_{ij} \qquad (13)$$

і задовольняє в цій точці нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda \leqslant -\delta \qquad (14)$$

з якоюсь додатньою постійною δ.

П. с. є узагальненням одного параболічного рівняння 2-го порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu(t, x). \qquad (15)$$

Систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n_j} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0 + k \leqslant n_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x) \times \times \frac{\partial^{k_0 + k} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x) \qquad (16)$$

$$k_0 < n_j,$$

$$i = 1, \ldots, N,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\quad k = \sum_{s=1}^{n} k_s$$

наз. г. с. (у розумінні Петровського) в точці (t, x), якщо за будь-яких дійсних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2 > 0$ визначник порядку N, у якого елемент на перетині i-го рядка і j-го стовпця має вигляд

$$\sum A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x)\, \lambda^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} - \lambda^{n_j} \delta_{ij}, \qquad (17)$$

має в цій точці тільки дійсні й різні корені. Г. с. є узагальненням одного гіперболічного рівняння 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu(t, x). \qquad (18)$$

Дифер. рівняння або система рівнянь належать до даного типу в певній області, якщо вони належать до цього типу в кожній точці цієї області. Якщо дифер. рівняння в одній частині області належить до одного типу, а в іншій — до іншого, то в усій області його наз. рівнянням мішаного типу; те саме стосується й систем рівнянь.

Є класифікація і складніших дифер. рівнянь, напр., нелінійних, але цю класифікацію тепер не можна вважати усталеною.

Літ.: Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961; Бабич В. М. [та ін.]. Линейные уравнения математической физики. М., 1964 [бібліогр. с. 343—362].

В. Г. Приказчиков.

ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНИХ РЕНТ МЕ́ТОД — метод розв'язування *транспортної задачі* лінійного програмування. В основу методу покладено ідею розгляду процесу розв'язування задачі як процесу стабілізації екон. системи. Метод немов імітує формування дифер. ренти в моделі транспортних перевезень і погодженості попиту й пропозиції. На відміну, напр., від розв'язування транспортної задачі за методом потенціалів, де з самого початку провадиться розподіл усієї продукції, який потім послідовно поліпшується, при застосуванні Д. р. м. спочатку розподіляють лише частину продукції, але зате оптимально: «споживачів» прикріплюють до найекономічніших у розумінні вартості перевезень «постачальників». Наступні етапи прикріплювання споживачів до постачальників пов'язані з умовним збільшенням вартості перевезень

за рахунок присвоєння постачальникам додаткової вартості — ренти — й збільшення «кредитоспроможності» споживачів, що не ввійшли в план. У момент цілковитого розподілу продукції та остаточного розрахунку одержаний план прикріплення споживачів до постачальників є оптимальним. *О. О. Бакаєв.*

ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНІ РІВНЯ́ННЯ — клас рівнянь у математиці. Див. *Рівнянь класифікація.*

ДИФЕРЕНЦІА́ТОР — пристрій для одержання похідної вхідної змінної. Щоб одержати

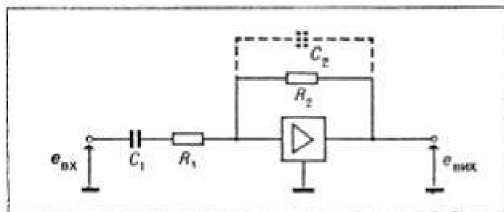


Схема диференціатора.

похідну за часом, в аналогових машинах здебільшого застосовують схеми, які реалізують не ідеальний оператор диференціювання p, а оператори $\frac{ap}{T_0p+1}$ або $\frac{ap}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$, за допомогою яких операція диференціювання виконується наближено (мал.). Осн. достоїнством таких Д. є їхня здатність частково згладжувати паразитні високочастотні перешкоди в вихідному сигналі $e_{вих} = \frac{R_2C_1p}{(R_1C_1p+1)(R_2C_2p+1)} e_{вх}$, які істотно посилив би ідеальний Д. Є також Д., які наближено реалізують операцію диференціювання й побудовані на RC-колах або трансформаторах. *В. Ф. Євдокимов.*

ДИФЕРЕНЦІЮВА́ННЯ СИГНА́ЛІВ — операція одержання похідної сигналу. Якщо задачі розв'язують на *аналогових обчислювальних машинах*, похідні *машинних змінних* за часом здебільшого відтворюються методом неявних ф-цій без використання *диференціаторів*, яких, по змозі, намагаються не застосовувати через обмеженість їхнього робочого частотного діапазону й через те, що вони істотно посилюють паразитні високочастотні перешкоди. Але часто в пристроях керування або для вимірювання треба виконувати безпосереднє Д. с. В цих випадках використовують диференціатори. *В. Ф. Євдокимов.*

ДИФЕРЕНЦІЮВА́ННЯ СИ́МВОЛЬНЕ, диференціювання аналітичне — одержання за допомогою ЦОМ похідної даної функції в аналітичному вигляді. Ця операція була одним з перших прикладів використання ЦОМ для нечислової математики, вона й досі є найхарактернішою процедурою при автоматизації *символьних перетворювань на ЕОМ*. Починаючи з 1953, розроблено і впроваджено багато різних *алгоритмів* диференціювання. В основі цих алгоритмів лежить спільний принцип — послідовне виконання на кожному етапі роботи таких двох дій: вибирання підвиразу, який підлягає обробці на цьому етапі, і замінювання вибраного підвиразу іншим за допомогою відповідного правила диференціювання.

П р и к л а д. Якщо треба знайти похідну $\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)$, то як перший підвираз беруть сам цей вираз. У цьому разі з множини правил диференціювання застосовують правило $\frac{d}{dx}(F_1 + F_2) = \frac{d}{dx}F_1 + \frac{d}{dx}F_2$, за яким зводять цей вираз до вигляду $\frac{d}{dx}\sin x + \frac{d}{dx}\cos x$. Потім для перетворювання можна вибирати або підвираз $\frac{d}{dx}\sin x$, або $\frac{d}{dx}\cos x$. Відповідно застосовуються правила $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ і $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$. В результаті одержимо $\cos x - \sin x$.

Характерними особливостями кожної *програми* диференціювання є форма задавання початкового виразу, спосіб представлення цього виразу в машині, кількість виконуваних спрощувань і кількість застосовуваних правил диференціювання.

У перших програмах вирази задавались як послідовність умовних *кодів*, де кожен код відповідав одній операції. Напр. ф-ція $V = x^2$ записувалась як $E0000X00200V$, де $E00$ означає операції піднесення до степеня. Результат виводився в такому самому вигляді. Наступні програми наближали форму запису до загальноприйнятої в математиці. Тепер програми сприймають початковий вираз у сформованому лінеаризованому записі, прийнятому в *мовах програмування* типу АЛГОЛ і ФОРТРАН. Так, вираз $A + x^2$ запишеться або як $A + x \uparrow 2$ або як $A + x$ **2, залежно від того, якими символами позначено операцію піднесення до степеня. Внутр. представлення виразів для перших програм мало в чому відрізнялося від зовн. представлення. Тепер як внутр. представлення використовують здебільшого модифікації запису Лукашевича і схем Канторовича.

Багато програм використовують різною мірою засоби спрощування виразів, одержаних внаслідок диференціювання. Це забезпечує наочніший запис результату, а також значно прискорює процес диференціювання. Так, напр., неспрощений результат диференціювання за x виразу $ax + xe^{x^2}$ має вигляд $0 \cdot x + a \cdot 1 + 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2 \cdot x$. Спростивши його, одержимо вираз $a + e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$. Ефективність програми залежить і від кількості використовуваних правил диференціювання. Напр., крім заг. правила $(uv)'$, де u і v розглядають як ф-ції, мож-

на використовувати ще два правила в тих випадках, коли або u, або v не залежить від змінної диференціювання. Можна піти далі й використати ще два правила в тому разі, коли або u, або v є числами. Збільшення кількості правил прискорює процес диференціювання, але ускладнює саму програму.

Програми диференціювання спочатку створювали як самостійні програми. Потім вони, як правило, почали входити у великі системи, призначені для проведення аналітичних перетворювань на машинах, у вигляді або *операторів*, або операцій вхідної мови таких систем. Так, у найпоширенішій закордонній системі FORMAC введено операцію *FMCD/F*. Вираз $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ у цій системі записують як *FMCD/F* (z, x, 2). В СРСР найпотужнішими системами для аналітичних перетворювань є машина «МИР-2» і система СІРІУС. Вхідною мовою машини «МИР-2» — *АНАЛІТИКом* наведена вище похідна запишеться як $d/dx \uparrow 2$ (z), а в системі СІРІУС як d (2, x) z.

Приклад похідної, одержаної на машині «МИР-2»:

$$d/dx\,(5 \times x \uparrow \mathrm{SIN}\,(x+2) + \mathrm{EXP}\,(\mathrm{LN}\,(x-3)) + $$
$$+ \mathrm{LN}\ (\mathrm{CTG}\ (x + \mathrm{SIN}\,(x))) \times \mathrm{ARCSIN}\,(4 \times x) =$$
$$= 5 \times ((\mathrm{SIN}\,(2+x) \times x \uparrow (-1 + \mathrm{SIN}\,(2+x)) +$$
$$+ \mathrm{COS}\ (2+x) \times x \uparrow \mathrm{SIN}\ (2+x) \times \mathrm{LN}\ (x)) \times$$
$$\times \mathrm{EXP}\,(\mathrm{LN}\,(-3+x)) + 1/(-3+x) \times$$
$$\times \mathrm{EXP}\,(\mathrm{LN}\ (-3+x)) \times x \uparrow \mathrm{SIN}\ (2+x)) -$$
$$- ((1 + \mathrm{COS}\ (x)/\mathrm{SIN}\,(x + \mathrm{SIN}\,(x)) \uparrow 2 \times$$
$$\times \mathrm{ARCSIN}\ (4 \times x/) + 4/\sqrt{}\,(1 - ((4 \times x) \uparrow 2)) \times$$
$$\times \mathrm{LN}\ (\mathrm{CTG}\,(x + \mathrm{SIN}\,(x))).$$

Літ.: Белоус Л. Ф. Аналитическое дифференцирование в системе СИРИУС. «Автоматизация программирования», 1969, в. 2; Гринченко Т. А., Царюк Н. П. Аналитическое дифференцирование в машине «Мир-2». «Математическое обеспечение ЭЦВМ», 1970, в. 2; Sammet J. E. Survey of formula manipulation. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1966, v. 9, № 8.

Т. О. Грінченко.

ДИФЕРЕНЦІЮВА́ННЯ ЧИСЕ́ЛЬНЕ — наближене обчислювання значень похідних зазначених порядків від функції, заданої у вигляді таблиць або аналітично.

Один з методів обчислювання похідних від ф-ції $f(x)$, заданої таблицею її значень в $n+1$ вузлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $(x_0 \leqslant x_i \leqslant x_n)$, полягає ось у чому: ф-цію $f(x)$ на відрізку, який нас цікавить, замінюють інтерполяційною ф-цією $P(x)$ (найчастіше многочленом n-го степеня) і вважають, що m - а похідна

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n\to 0} \frac{f^{(m-1)}(x+n) - f^{(m-1)}(x)}{n} \approx$$

$\approx P^{(m)}(x)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$. Вибір інтерполяційної ф-ли $P(x)$ залежить від того, яку дано систему вузлів сітки для $f(x)$ та при яких значеннях x потрібно обчислити похідні. Напр., якщо значення $f(x)$ задано для рівновіддалених значень аргумента з кроком h і значення похідної m-го порядку потрібно обчислити для x, що лежать поблизу вузла x_0, то як інтерполяційний многочлен $P(x)$ (див. *Інтерполяція функцій*) вибирають многочлен Ньютона для інтерполювання вперед. Тоді ф-ли Д. ч. матимуть такий вигляд:

$$f^m(x) \approx \frac{1}{h^m} \frac{d^m P(x_0 + ht)}{dt^m} =$$
$$= \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^{n} \frac{d^m C_t^k}{dt^m} \Delta^k f(x_0), \qquad (1)$$

де $\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_0 + h) - \Delta^{k-1} f(x_0)$ — висхідна скінченна різниця k-го порядку від ф-ції $f(x)$, $x = x_0 + ht$, $C_t^k = \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}$. Зокрема,

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Big(\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) +$$
$$+ \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n f(x_0)\Big).$$

Аналогічно, якщо скористатися з інтерполяційних ф-л Ньютона для інтерполювання назад та з ф-л Бесселя, можна знайти похідні m-го порядку для x, розміщених відповідно поблизу кінця та середини табл. Зокрема

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{n}\Big(\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{1}{n}\nabla^n f_n,$$

де $\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x)_{n-1}$ — спадна скінченна різниця k-го порядку.

Наближене диференціювання з використанням інтерполяційних многочленів — операція менш точна, ніж інтерполювання, бо близькість одної до одної двох ординат кривих $y = f(x)$ та $y = P(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ ще не гарантує близькості на цьому відрізкові їхніх похідних. Особливо важливе значення при обчислюванні похідних мають питання оцінки *похибок*. Похибка методу, або залишковий член, при використанні інтерполяційних ф-л має вид:

$$R_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!\,(n+k+1)!} \times$$
$$\times f^{(n+k+1)}(\zeta_k) \frac{d^{m-k}\omega(x)}{dx^{m-k}},$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, $\zeta_k \in [x_0, x_n]$, $m \leqslant n$. Вираз для залишкового члена значно спрощується, якщо x знаходиться поза відрізком $[x_0, x_n]$. Тоді, якщо

$f(x)$ — $(n+1)$ раз диференційовна ф-ція на найменшому відрізку $[a, b]$, який має вузли інтерполювання та точку x, то

$$R_m(x) = \frac{\omega^{(m)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \ \zeta \in [a, b].$$

Щоб одержати практичну оцінку модуля залишкового члена, $f^{(n+1)}(\zeta)$ оцінюють максимальним значенням $|f^{(n+1)}(x)|$ на $[a, b]$. В деяких випадках вигідніше виражати значення похідних у вузлі сітки x_i безпосередньо через значення ф-ції. Побудувати такі ф-ли можна, користуючись інтерполяційним многочленом Лагранжа або розвиненням у ряд Тейлора виразу $A = \sum_{k=1}^{q} C_k f(x_i + \alpha_k h)$ навколо точки x_i. При цьому коефіцієнти C_k добирають так, щоб розвинення A в ряд Тейлора не містило $f^{(l)}(x_i)$ $(0 \leqslant l < m,\ m+1 \leqslant l \leqslant m + r$, де r — ціле додатне число), і містило значення $f^{(m)}(x_i)$ з множником, що дорівнює одиниці. Тоді

$$\sum_{k=1}^{q} C_k f(x_i + \alpha_k h) = f^{(m)}(x_i) + R_m(x_i).$$

Щоб визначити C_k, спершу треба одержати систему q $(q = m + r + 1)$ рівнянь, розв'язок якої знаходиться в замкненому вигляді. Оцінка залишкового члена має вигляд:

$$|R_m(x_i)| \leqslant \frac{h^q}{q!} |f^{(q)}| \max \sum_{p=1}^{q} |\alpha_p^q C_p|.$$

У випадку, коли точки сітки рівновіддалені, порівнювання різних ф-л вигляду (2) показує, що найпростіші ф-ли будуть і найточніші тоді, коли похідна обчислюється в середньому вузлі x_i, до того ж вираз A будується за непарним числом вузлів, що лежать по обидва боки від x_i. Наведемо деякі з таких ф-л:

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \ \xi \in [x_{i+1}, x_{i-1}],$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi_1), \ \xi_1 \in [x_{i+1}, x_{i-1}],$$

$$f'''(x_i) = \frac{1}{2h^3}(f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})) - \frac{h^2}{4} f^{(V)}(\xi_2),$$

$$\xi_2 \in [x_{i-2}, x_{i+2}].$$

Вираз вигляду A можна утворити не тільки для представлення похідної заданого порядку m у вузлі x_i, а й для представлення будь-якого лінійного дифер. агрегату $\sum_{k=0}^{m} \varphi^k(x_i) = f^{(k)}(x_i)$, де $\varphi_k(x)$ — задані неперервні ф-ції. Це використовують під час числового розв'язування крайових задач для звичайних дифер. рівнянь.

Проводячи Д. ч. за ф-лами (1), (2), треба брати до уваги й величину неусувної похибки, що виникає тому, що нам відомі не точні значення ф-ції $f(x_i)$ у вузлах сітки, а наближені $\tilde{f}(x_i)$. В випадку, коли диференціювання провадять за ф-лами (2), абс. неусувна похибка

$$\varepsilon^*(x_i) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k |C_k|, \ \ \varepsilon_k \leqslant |f(x_i + \alpha_k h) - \tilde{f}(x_i + \alpha_k h)|.$$

Задача відшукування похідної $f'(x)$ за експериментальною випадковою ф-цією $\tilde{f}(x)$ значно відрізняється від задачі диференціювання ф-ції, для якої відомі точні дані. У цьому випадку спостереження x має випадкові значні помилки, а відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ дуже чутливе навіть до невеликих помилок, якщо Δx стає досить малим. Тому звичайні ф-ли Д. ч. можуть дуже спотворювати результати. Для розв'язання такої задачі при досить щільному ряді початкових значень $\tilde{f}(x)$ можна застосувати згладжування емпіричних даних з використанням методу найменших квадратів (див. *Апроксимація функції середньоквадратична*). Припустимо, що точні дані $f(x_i)$ на протязі кількох рівновіддалених вимірів мало відрізняються від відповідних ординат параболи $y = ax^2 + bx + c$. Нехай, напр., це має місце, якщо комбінувати вимірювання в точці $x = 0$ з двома сусідніми (ліворуч та праворуч). Щоб дібрати три параметри до п'яти початкових даних, користуються *найменших квадратів методом*, тобто знаходять мінімум величини $\sum_{i=-2}^{2} (\tilde{f}(x_i) - ax_i^2 - bx_i - c)^2$, добираючи параметри a, b та c. Якщо треба виправити значення $\tilde{f}(0)$, знаходять лише значення параметра c. Аналогічно знаходять виправлене значення похідної в точці $x = 0$. При цьому потрібно мати шукане значення параметра b. В результаті

$$f'(x_i) \approx \frac{-2\tilde{f}(x_{i-2}) - \tilde{f}(x_{i-1}) + \tilde{f}(x_{i+1}) + 2\tilde{f}(x_{i+2})}{10h}.$$

Якщо використати не дві, а чотири сусідні точки по обидва боки від точки x_i, то ф-ли

Д. ч. для x_i, що лежать усередині проміжку $[x_0, x_n]$, мають вигляд:

$$f'(x_i) \approx \frac{\sum_{k=-2}^{2} k\tilde{f}(x_i + kh)}{2h \sum_{k=2}^{j} k^2}.$$

Аналогічний прийом застосовують, щоб побудувати значення похідних у крайніх вузлах інтерполяції, але згладжування емпіричних даних відбувається тільки за рахунок точок, які лежать ліворуч (або праворуч) від відповідних крайніх точок. Якщо, напр., згладжування на початку кривої провадити за чотирма точками, які лежать праворуч від точки x_0, то

$$f'(x_0) \approx$$

$$\approx \frac{-21\tilde{f}(x_0) + 13\tilde{f}(x_1) + 17\tilde{f}(x_2) - g\tilde{f}(x_3)}{20h}.$$

Для обчислення значень другої похідної провадять згладжування значень першої похідної за методом найменших квадратів і, взявши їх за початкові, знаходять вираз для другої похідної.

Задача відновлювання похідної за ф-цією, заданою експериментально, належить до числа некоректно поставлених задач. Тому для випадку великих помилок вимірювань відновлювати похідну можна, використовуючи метод регуляризації Тихонова (див. *Некоректно поставлених задач способи розв'язування*).

Нехай $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[x_0, x_n]$. Тоді її похідна, за визначенням, задовольняє інтегр. рівняння Вольтерри 1-го роду,

$$f(x) = \int_a^x f'(s)\,ds + f(d), \quad x_0 \leqslant x, \; d \leqslant x_n,$$

для розв'язання якого й застосовують метод регуляризації. Відшукання похідної також можна звести до розв'язання інтегр. рівняння вигляду $\int_{x_0}^{x_n} K(x, s) f'(s)\,ds = \Phi(x)$ з неперервним ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} x_n - x, & x_0 \leqslant s \leqslant x \\ x_n - s, & x < s \leqslant x_n \end{cases}$$

та правою частиною $\Phi(x) = \int_x^{x_n} f(s)\,ds - f(x_0)(x_n - x)$.

Розв'язок цього рівняння знаходять теж методом регуляризації. Для відшукання похідних вищих порядків можна зробити аналогічно. Метод регуляризації можна застосувати для стійкого знаходження лінійної комбінації вигляду $f''(x) + c_1 f'(x) + b_1 f(x)$ ($c_1, b_1 = \text{const}$) за експериментальними даними $\tilde{f}(x)$. Результати обчислення підтверджують, що переваги має метод регуляризації, коли похибка даних порівнянна за порядком з кроком сітки.

В практичних застосуваннях важливим є такий спосіб Д. ч.: якщо знайдено $g(x)$, для якої $|f(x) - g(x)| \leqslant \delta$ і відомо, що $|f'(x) - [f(x+h) - f(x)]|h| \leqslant ch$, то

$$\left| f'(x) - \frac{g(x \pm \sqrt{2\delta/c}) - g(x)}{\pm\sqrt{2\delta/c}} \right| \leqslant 2\sqrt{2\delta c}.$$

Знак «+» або «−» та значення h і δ потрібно вибрати так, щоб аргументи f та g попали в ділянку визначення цих ф-цій. У заг. випадку неправильно вважати, що $f'(x) \approx g'(x)$. Але якщо $f(x)$ — періодична ф-ція на відрізку $[-\pi, \pi]$, а $g(x)$ — тригонометричний многочлен порядку n, то $f'(x) \approx g'(x)$, при цьому

$$|f'(x) - g'(x)| \leqslant \delta n +$$

$$+ \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi^2}\ln 2 + \pi e + 4\right) E_n(f'),$$

де $E_n(f')$ — величина найкращого наближення тригонометричними многочленами n-го порядку (див. *Апроксимація функцій рівномірна*). Зокрема, для будь-якої ф-ції φ

$$E_n(\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |\varphi^{(k)}(x)|}{(n+1)^k},$$

якщо існує k-а похідна $\varphi^{(k)}(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Візьмемо за $g(x)$ многочлен тригонометричної інтерполяції $f(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k,$$

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right) t_j^{-k}$$

$$t = e^{ix}, \quad t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j},$$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\left[\frac{2}{\pi}(2n+1)\right]\right\} E_n(f).$$

Припустимо ще, що значення $f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right)$ відомі з абс. похибкою, яка не перевищує ε. У цьому разі

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \delta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\left[\frac{2}{\pi}(2n+1)\right]\right\}\left[E_n(f) + \varepsilon\right] +$$

$$+ E_n(f).$$

У всіх наведених вище ф-лах для одержання повної похибки Д. ч. необхідно враховувати й похибку реалізації ф-л на обчисл. машинах (див. *Похибок обчислювань теорія*).

В інженерній практиці для Д. ч. застосовують моделюючі пристрої — *диференціатори*.

Літ.: Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Веденеев Е. П., Жидков Н. П. Применение метода регуляризации к дифференцированию функций одного переменного, заданного таблично. «Вычислительные методы и программирование», 1969, в. 13; Иванов В. В. Анализ точности вычислительных алгоритмов. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1970, т. 10, № 2; Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961.

В. В. Іванов, О. О. Скоробагатько.

ДИФУЗІЙНИЙ ПРОЦЕ́С — марковський процес із неперервною множиною станів. Для таких *марковських процесів* існує щільність імовірності переходу $p(t, x, s, y)$, де t — початковий момент часу, s — кінцевий момент часу, x та y — стани процесу в моменти t і s відповідно. Нехай X — n-вимірний евклідів простір і $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — координати точки x, $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ — координати точки y, а $|x - y|$ — евклідова віддаль між цими точками. Припускається, що при всякому $\Delta > 0$ існують границі:

$$\lim_{h\downarrow 0, h_1\downarrow 0} \int\limits_{|x-y|\leqslant\Delta} (y^i - x^i)\, p(t-h, x, t+h_1, y)\, dy = a_i(t, x);$$

$$\lim_{h\downarrow 0, h_1\downarrow 0} \frac{1}{h+h_1} \int (y^i - x^i)(y^j - x^j)\, p(t-h, x, t+h_1, y)\, dy = b_{ij}(t, x);$$

$$\lim_{h\downarrow 0, h_1\downarrow 0} \frac{1}{h+h_1} \int\limits_{|x-y|\geqslant\Delta} p(t-h, x, t+h, y)\, dy = 0.$$

Коеф. $a_i(t, s)$ наз. коеф. переносу, а вектор $a(t, x)$ з координатами $a_i(t, x)$ — вектором переносу, $b_{ij}(t, x)$ — коеф. дифузії, *матриця* $B(t, x)$ з елементами $b_{ij}(t, x)$ — матрицею дифузії. Такі марковські процеси наз. дифузійними, оскільки їх можна інтерпретувати як імовірнісне описування явища дифузії. При вивченні дифузійних марковських процесів істотно може допомогти апарат стохастичних диференціальних рівнянь. Див. також *Випадкових процесів теорія*.

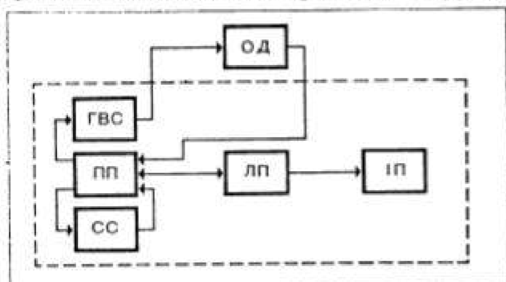
А. В. Скороход.

ДІАГНО́СТИКА АВТОМАТИ́ЧНА — автоматичне одержання та обробка інформації про стан технічних систем для виявлення їхніх несправностей і тих елементів, ненормальне функціонування яких призвело (чи може призвести) до виникнення несправностей. Зростання складності сучасних тех. систем значно випереджає за темпами зростання їхньої надійності, а це призводить до зменшення середнього часу між відмовами й до збільшення часу вимушеного простою, і тому проблема створення заг. методів синтезу систем автомат. діагностики (САД) і розробки оптим. *алгоритмів* їхнього функціонування є актуальною. Осн. завданнями, що виникають при цьому, є: розробка принципів аналізу тех. систем з точки зору діагностики їхнього стану; розробка методів побудови оптим. *програм* діагностики стану складних тех. систем та розробка принципів конструювання й реалізації САД. Перше завдання передбачає емпіричне дослідження реальних тех. систем, які виступають об'єктами діагностики, щоб виділити можливі непрацездатні стани й можливі перевірки та знайти зв'язок між можливими станами і наслідками окремих перевірок, зібрати статистичні матеріали про *розподіл імовірностей* окремих станів системи, про затрати на виконання перевірок та ін. Одержані відомості є відправними даними при розв'язуванні завдання побудови оптим. програм діагностики. Розв'язання цього завдання передбачає виділення якоїсь мінім. сукупності перевірок, достатньої, щоб розрізнити всі стани (побудова тесту) і скласти певну послідовність (програму) проведення перевірок, що входять у тест. При розв'язуванні цих завдань широко використовують матем. апарат *алгебри логіки*, *імовірностей теорії* та різні методи приймання рішень і спрямованого пошуку (лінійне й динамічне програмування, *ігор теорія* і т. д).

Оптим. програма діагностики є основою для проектування САД, бо саме програма визначає в основному структуру й алгоритм функціонування цієї системи. Від вибраної програми істотно залежать такі осн. показники САД, як складність, надійність, габарити, вага, вартість, достовірність результатів діагностики та час, що йде на діагностику стану обстежуваної тех. системи. Повна автоматизація процесу діагностики дає змогу підвищити готовність діагностованих систем, зменшити кількість обслуговуючого персоналу й знизити вимоги до його кваліфікації. До осн. принципів конструювання САД належать ще такі два: універсальність, тобто можливість застосовувати одні й ті самі САД для діагностики цілих класів тех. систем, і самоперевірка САД, оскільки сучасні такі системи досить складні й, отже, можуть виявлятися несправними. Щоб забезпечити універсальність САД, для цього роблять стандартні вузли й підсистеми, з яких можна створювати САД з різними характеристиками. Крім того, універсальності досягають і перетворюванням контрольованих сигналів на дискретну форму, це дає змогу й далі переробляти їх за допомогою ЕЦОМ. Застосування принципу універсальності дає змогу зменшити кількість можливих САД та їхню вартість.

Як приклад на мал. подано одну з можливих блок-схем САД для автомат. діагностики об'єкта діагностики ОД. Програмний пристрій ПП відповідно до закладеної в нього *програми діагностичної* в певні моменти часу видає сигнал у блок генераторів випробувальних сигналів ГВС, внаслідок чого й спрацьовує один з генераторів. Вироблюваний у ГВС калібрований випробувальний сигнал над-

ходить до відповідного кола обстежуваної системи ОД. Логічний пристрій ЛП, що працює за командами ПП, забезпечує порівнювання з урахуванням допусків сигналу, який характеризує реакцію-відповідь ОД, з його номінальним значенням; аналізує результати порівнювання й виробляє сигнали типу «в нормі», «не в нормі»; визначає місце несправності й подає сигнали на продовження чи припинення перевірок на індикаторний пристрій ІП, що служить для індикації результатів діагностики. Справність САД визначають за допомогою її системи самоперевірки СС, яка видає заздалегідь відомі вихідні сигнали реакції на типові вхідні сигнали. У логіч. пристрої ці сигнали порівнюються з стандартними, які задає програмний пристрій.



Блок-схема системи автоматичної діагностики.

Існуючі САД розрізняють: за цільовим призначенням — системи для контролю працездатності ОД, пошуку несправностей в ОД і для діагностики стану (тобто і для контролю працездатності, і для пошуку несправностей ОД); за можливістю змінювати алгоритм функціонування — системи з жорсткою і гнучкою програмами; за видом оброблюваної інформації — аналогові й дискретні; за впливом на ОД — активні, що використовують ГВС для одержання діагностичної інформації, і пасивні, що використовують вбудовані в ОД давачі; за конструктивним зв'язком з ОД — зовнішні САД, конструктивно не зв'язані з ОД, і вбудовані САД, конструктивно зв'язані з ОД (окремі елементи і блоки САД можуть бути вбудовані в ОД). Див. також *Діагностика несправностей ЦОМ*, *Діагностування складних технічних комплексів*, *Тести*.

Літ.: Мозгалевский А. В. [та ін.]. Автоматический поиск неисправностей. Л., 1967 [бібліогр. с. 262—263]; Верзаков Г. Ф. [та ін.]. Введение в техническую диагностику. М., 1968 [бібліогр. с. 220—223]; Гайденко В. С. [та ін.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [бібліогр. с. 471—476]; Пархоменко П. И. О технической диагностике. М., 1969; Кузнецов П. И., Пчелинцев Л. А., Гайденко В. С. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969 [бібліогр. с. 233—238].

Г. Ф. Верзаков.

ДІАГНОСТИКА НЕСПРАВНОСТЕЙ ЦОМ — методи виявлення несправностей у цифровій обчислювальній машині (ЦОМ) за ознаками, що характеризують ті чи інші порушення правильності її функціонування. Виявлення несправностей у ЦОМ здійснюється шляхом контролю правильності роботи її обладнання з використанням відповідних алгоритмів пошуку несправностей.

Розрізняють такі види діагн. контролю: програмний (ПДК), апаратний (АДК) і програмно-апаратний (ПАДК). Кожний вид діагностичного контролю з різною ефективністю дає змогу локалізувати несправності, що виникають у ЦОМ, і, в загальному випадку, є продовженням контролю працездатності ЦОМ.

При програмному діагностичному контролі (див. *Контроль програмний*) методи виявлення несправностей у ЦОМ реалізуються програмними засобами. Цей контроль здійснюють за допомогою випробовувальних програм, які містяться в *запам'ятовувальному пристрої* контрольованої машини й забезпечують пошук несправностей виконанням стандартних команд ЦОМ та аналізом одержаних при цьому результатів. Випробовувальна програма разом з відповідними початковими даними дає змогу з певною ймовірністю виявити елемент машини, в якому є фіз. несправність, або групу елементів, серед яких є й несправний елемент. У такій програмі команди, під час виконання яких працюють елементи контрольованої схеми й за результатами виконання яких виявляють несправність, прийнято вважати за основні. Решту команд розглядають як допоміжні. Надійність випробовувальної програми характеризується ймовірністю того, що ніяка з виявлених несправностей не вплине на виконання допоміжних команд програми й на роботу елементів, які функціонують під час виконання її, але не входять до контрольованої схеми.

Для пошуку несправностей у ЦОМ звичайно застосовують систему випробовувальних програм, до якої входять дві системи підпрограм: контролюючі та діагностичні. Осн. призначення контролюючої підпрограми — виявляти несправності в контрольованій схемі. Якщо на основі інформації, одержаної внаслідок виконання контролюючої підпрограми, встановлено місцеперебування несправного елемента, то провадиться усунення несправності. Якщо ж ця інформація виявляється недостатньою, щоб знайти місце несправності, здійснюється перехід до виконання діагн. підпрограми, яка реалізує алгоритм пошуку несправностей і призначена для визначання та вказування елемента з фіз. несправністю (див. *Програма діагностична*). Досвід показує, що діагн. підпрограми мають низьку надійність, бо дають змогу виявляти місце лише тих несправностей, які не призводять до помилок, що впливають на правильність виконання власне діагн. підпрограми. Частка обладнання, відмови якого призводять до помилок, що впливають на правильність виконання діагн. підпрограми, при цьому буває дуже значна. Позитивні якості ПДК в тому, що немає потреби змінювати структуру ЦОМ і додавати ще контролюючого облад-

нання. Осн. вади ПДК: невелика точність знаходження місця несправності й недостатнє охоплення контролем вузлів ЦОМ; значний обсяг випробовувальних програм, що зумовлює труднощі введення їх у машину та зберігання.

При апаратному діагностичному контролі методи виявлення несправностей у ЦОМ реалізуються за допомогою спец. контролюючого обладнання. Прикладом АДК є використання модуля з індикацією несправностей, який являє собою електронну схему, здатну здійснювати індикацію власної відмови в роботі. Найпростішим прикладом таких модулів є зарезервовані функціональні елементи, що мають схему порівнювання вихідних величин. Вадою АДК, в якому застосовуються модулі з індикацією несправностей, є труднощі тех. реалізації їх. Другим видом АДК є апаратно-логіч. контроль, при якому контрольоване обладнання поділяють на групи і для кожної з них розробляють методику перевірки й контролюючу схему, що реалізує цю методику. Відповідно до обраної методики контролююча схема забезпечує вироблення й подавання на контрольовану схему потрібних вхідних сигналів, приймання й аналіз вихідних сигналів контрольованої схеми й індикацію номера несправного елемента при виявленні несправності. Апаратно-логіч. контроль є ефективним, бо охоплює значну частину обладнання ЦОМ і відзначається точністю знаходження місця несправності в контрольованих вузлах. Вадою цього виду АДК є потреба вводити нові елементи й зв'язки в структуру ЦОМ. Апаратний контроль застосовують і для перевірки правильності обчислень у процесі роботи ЦОМ (напр., контроль за модулем), він дає змогу з певною ефективністю виявляти несправності, що виникають (див. *Контроль ЦОМ*). При контролі за модулем у розрядну сітку машини вводять додаткові розряди, які служать для зберігання інформації, й це дає змогу виявляти помилки в словах машини. Найпростішим видом контролю за модулем є контроль за парністю: до двійкового коду слова додається «1» або «0» (вміщувані в додатковий розряд) так, щоб сума цифр усіх розрядів нового коду за модулем 2 дорівнювала нулеві. Нерівність нулеві цієї суми свідчить про наявність помилки в коді слова.

Програмно-апаратний діагностичний контроль являє собою поєднання двох попередніх видів діагн. контролю. ПАДК вважається найефективнішим і найперспективнішим. Його забезпечують за допомогою діагностичних програм, розміщених у пам'яті машини, й додаткового (відносно основної структури ЦОМ) обладнання. В деяких варіантах ПАДК апаратна частина виявляє несправності з точністю до вузла або блока цифрової машини, а діагн. програми шукають несправності у вузлі або блоці, що відмовив. В інших варіантах ПАДК у структуру ЦОМ вводять додаткові елементи й зв'язки, які забезпечують розширення вихідного переліку команд і створення в ЦОМ спец. режимів роботи. При цьому апаратні засоби забезпечують можливість роботи ЦОМ звичайного (макропрограмного) типу в режимі мікропрограмного керування. Використання мікропрограмних режимів роботи дає змогу розширити сферу застосовності діагн. програм і довести точність знаходження місця несправності до окремих функціональних елементів. Вади цього виду контролю пов'язані з необхідністю враховувати вимоги діагн. контролю до структури машини та її конструкції. ПАДК може здійснюватися й за допомогою обладнання, автономного щодо осн. машинного обладнання. Засобом автономного контролю може служити обчисл. машина, яка аналізує правильність роботи іншої машини. Автономний контроль можна здійснювати й за допомогою спеціалізованих контролюючих пристроїв, що реалізують певну методику перевірки правильності роботи вузлів контрольованої ЦОМ. Прикладом може бути пристрій контролю й автомат. пошуку несправностей логіч. схем, який реалізує метод діагностичних таблиць. Згідно з цим методом аналіз схеми провадиться порівнюванням її реакцій на різні комбінації вхідних сигналів з реакціями справної схеми й наступним зіставлянням усіх результатів порівнювання. Схему ЦОМ розбивають на кілька контрольованих ділянок. Для кожної ділянки складають тест і діагностичну таблицю й забезпечують можливість підмикати контролюючий пристрій до входів і виходів (контрольних точок) відповідного вузла машини. Перевірка його зводиться до виконання тесту. При виявленні відмови несправну частину вузла визначають за діагн. таблицею.

Літ.: Клямко Э. И. Схемный и тестовый контроль автоматических цифровых вычислительных машин. М., 1963 [бібліогр. с. 191]; Миронов Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [бібліогр. с. 266—267]; Диагностика неисправностей вычислительных машин. М., 1965; Путинцев Н. Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. М., 1966 [бібліогр. с. 417—418]; Сидоров А. М. Методы контроля электронных цифровых машин. М., 1966 [бібліогр. с. 160]; Волков А. Ф., Ведешенков В. А., Зенкин В. Д. Автоматический поиск неисправностей в ЦВМ. М., 1968 [бібліогр. с. 144—146].

Л. О. Коритна.

ДІАГНОСТУВА́ННЯ СКЛАДНИ́Х ТЕХНІ́ЧНИХ КО́МПЛЕКСІВ, технічна діагностика — контроль, перевірка й прогнозування технічного стану, як правило, складних технічних комплексів, що функціонують у межах заданого класу режимів або алгоритмів, та апаратурна реалізація цих процедур. Діагностування станів і несправностей у найрізноманітніших мех., енерг., радіотех. і радіоелектронних пристроях, блоках автомат. телеф. станцій, ЦОМ та обчисл. комплексах — характерні приклади діагн. процедур. Розв'язання завдання діагностування в складних системах передбачає в кожному конкретному випадку побудову *моделі математичної* об'єкта, вибір та оптимізацію

діагн. процедур і реалізацію їх у вигляді тех. пристроїв або *програм* для ЦОМ.

Клас методів, розроблених для розв'язування основних завдань діагностування в складних тех. системах, грунтується на різних розділах матем. і дискретного аналізу, *операцій дослідження, програмування математичного*, статистичної динаміки й евристичних прийомів. Здійсненність діагн. процедур і засобів їхньої реалізації потребувала розробки спец. розділів сучасної математики — теорії тестів, теорії запитальників тощо.

1

$Z^{\tau}; W^{\tau}; Y^{\tau+1}$		Y^{τ}		
		...	$y_1^{\tau}, \ldots, y_m^{\tau}$	...
	⋮			
X^{τ}	$x_1^{\tau}, \ldots, x_n^{\tau}$	...	$z_1^{\tau}, \ldots, z_k^{\tau}$; $W_1^{\tau}, \ldots, W_{\theta}^{\tau}$; $y_1^{\tau+1}, \ldots, y_m^{\tau+1}$	...
	⋮			

2

R		E				
		Ψ_0	...	Ψ_i	...	Ψ_M
	t_1	r_{01}	...	r_{i1}	...	r_{M1}
	⋮	⋮		⋮		⋮
	t_j	r_{0j}		r_{ij}		r_{Mj}
	⋮	⋮		⋮		⋮
	$t_{(T)}$	$r_{0(T)}$		$r_{i(T)}$		$r_{M(T)}$

3

A		P		
		...	p_{ik}	...
	t_1	...	$a_{ik,1}$	...
	⋮			
T	t_j	...	$a_{ik,j}$	...
	⋮			
	$t_{(T)}$	...	$a_{ik,(T)}$	...

Відправним завданням у розробці оптимальних діагн. процедур є побудова матем. моделі тех. комплексу (об'єкта), який перевіряють. Для певного класу тех. комплексів модель об'єкта контролю можна зобразити як *автомат скінченний*

$$Z^{\tau} = f(X^{\tau}, Y^{\tau}),$$
$$Y^{\tau+1} = h(W^{\tau}, Y^{\tau}), \quad (1)$$

де X — вхідні, Y — внутрішні, Z — вихідні вектори координат; τ визначає момент часу (такт). За описом моделі об'єкта будується таблиця переходів (мал. 1). Зовнішній вхідний набір $x_1^{\tau}, \ldots, x_n^{\tau}$ при внутрішньому вхідному стані $y_1^{\tau}, \ldots, y_m^{\tau}$ переводить скінченну динамічну систему в стан, представлений внутрішнім вхідним станом $y_1^{\tau+1}, \ldots, y_m^{\tau+1}$, якому передував зовнішній вихідний набір $z_{1_0}^{\tau}, \ldots, z_k^{\tau}$ і внутрішній вихідний стан $w_1^{\tau}, \ldots, w_l^{\tau}$ у момент τ. Побудова програм перевірки виконується за результатами аналізу об'єкта в справному й несправному станах. Як стан (1), так і несправності s_j задаються формальним способом. В результаті будуються функції

$$\Psi_0 = \Psi_0(\Lambda, \tau) \text{ та } \Psi_i = \Psi_i(\Lambda, \tau),$$

реалізовувані відповідно справним і несправним (в i-несправному стані) тех. комплексами. Аргумент Λ являє собою керуючі діяння на об'єкт, а сама ф-ція Ψ — виконувані об'єктом дії. Коли в об'єкті є несправність виду s_i, він реалізує відому ф-цію $\Psi_i = \Psi_i(\Lambda, \tau)$, яку задано в тій самій множині T і яка приймає значення з тієї самої множини R, $r_{ij} = \Psi_i(t_j)$, що й ф-ція Ψ_0, реалізовувана справним об'єктом. Окремі перевірки об'єкта t_j, $j = 1, 2, \ldots, |T|$ і їхні результати $r_{ij} \in R$ однозначно відповідають ф-ціям Ψ_i, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, M$, і це дає змогу будувати таблиці функцій несправностей (мал. 2). Дальшим етапом є побудова формального вирішувального правила перевірки працездатності об'єкта й локалізації несправностей. Воно будується на різниці пари ф-цій φ_i і φ_k, $i, k = \{0, 1, \ldots, M\}$, $i \neq k$ при якійсь перевірці t_j за співвідношенням $a_{ik,j} \in A$, що приймає двоє значень:

$$a_{ik,j} = \begin{cases} 1, & \text{для } \Psi_i(t_j) \neq \Psi_k(t_j) \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

З множини M ф-цій Ψ_i для всіх можливих пар $p_{ik} \in P$ будують таблицю покриттів мал. 3), в якій розрізняльними елементами відносно пар Ψ та Ψ_k є перевірки $t_j \in T$. Розрізняльна сукупність елементів множини T визначає клас безумовних програм перевірки тех. комплексу.

Щоб розв'язати завдання діагностування в неперервних системах, його матем. опис треба зобразити у вигляді моделі скінченної динамічної системи. Розроблені програми є основою для вибору чи розробки тех. засобів реалізації програм перевірки.

Реалізація програм перевірки найефективніша при використанні автомат. (спеціалізованих або універсальних) засобів перевірки об'єкта контролю і становить *діагностику автоматичну*. Універсальні автомат. засоби, що працюють за змінною програмою, придатні для перевірки певного класу об'єктів контро-

лю. Одним із таких засобів є універсальна машина «ПУМА», яка охоплює кілька десятків тисяч точок зв'язку з об'єктом контролю. Одну з можливих класифікацій способів та засобів перевірки складних тех. комплексів подано на мал. 4. Діагностування станів і несправностей у складних тех. комплексах є невід'ємною частиною їхнього функціонування. Тому оптимізацію діагн. процедур та ефективну реалізацію їх автомат. засобами можна розв'язувати комплексно в процесі синтезу самого об'єкта.



Літ.: Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Пархоменко П. П. О технической диагностике. М., 1969; Гайденко В. С. [та ін.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [бібліогр. с. 471—476]; Кузнецов П. И., Пчелинцев Л. А., Гайденко В. С. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969 [бібліогр. с. 233—238].

К. Д. Жук.

ДІАЛО́ГА РЕЖИ́М — режим роботи людини з обчислювальною машиною, характерним для якого є періодичне повторювання циклу, що включає видавання машині завдання, одержання відповіді та аналіз її. Д. р. забезпечується роботою людини з обчислювальною машиною за допомогою індивідуальних пультів. Д. р. передбачає розв'язування таких задач, програма яких у момент початку розв'язування може бути не зовсім відома; людина слідкує за здійсненням процесу обробки в обчисл. машині, фіксує ті чи інші проміжні результати і в ході розв'язування задачі видає машині інструкції, керуючи її роботою. Таким чином, Д. р. реалізує найприроднішу з погляду психології *взаємодію людини з обчислювальною машиною* при розв'язуванні творчих задач. Для ефективної реалізації Д. р. треба, щоб середній час реакції машини, тобто середній час між введенням завдання і одержанням відповіді, був досить невеликим (цей час здебільшого становить від часток секунди до кількох секунд). Д. р. застосовують, коли використовують засоби *обчислювальної техніки* користувачі — спеціалісти різних галузей науки й техніки, бо в цьому разі користувач розв'язує свою задачу сам, без посередника-програміста. Д. р. особливо ефективний при розв'язуванні таких творчих задач, як доведення теорем, ігрові задачі, аналітичні перетворювання тощо, які потребують евристичного підходу. До цього самого типу задач можна віднести й задачу наладжування програм (див. *Наладжувальні програми*), різні проектно-конструкторські роботи тощо. Розроблено спец. мови для Д. р., що включають і засоби звичайних *алгоритмічних мов*, і засоби для видавання машині завдань. Найпоширенішими з цих мов є JOSS та BASIC. Як правило, Д. р. реалізується в системах розподілу часу (див. *Обробка інформації в режимі розподілу часу*). Найуживанішими тех. засобами, що забезпечують обмін інформацією між людиною й машиною в процесі діалога (т. з. термінальними пристроями), є клавішні пристрої та пристрої візуального відображення зі світловим олівцем (див. *Екранний пульт*). У перспективі ефективний Д. р.базуватиметься, мабуть, на пристроях візуального відображення в поєднанні з пристроями введення мовної інформації й набуде широкого застосування в машинах 4-го покоління.

А. І. Нікітін, А. М. Чадов.

ДІ́ЙСНИЙ ЧАС МОДЕЛЮВА́ННЯ — див. *Час моделювання дійсний.*

ДІО́Д НАПІВПРОВІДНИКО́ВИЙ — двополюсний прилад, дія якого грунтується на принципі використання нелінійних властивостей електронно-діркового переходу в напівпровідниках або контактах напівпровідник — метал, а також на залежності цих властивостей від діяння світла, температури й радіоактивного випромінювання. Для виготовлення Д. н. найширше застосовують германій, кремній, селен, арсенід галію та карбід кремнію.

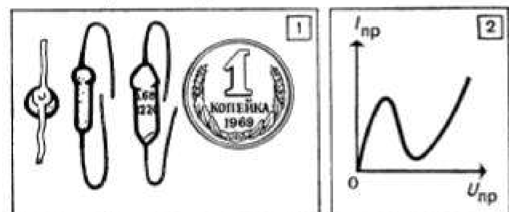
За конструктивно-технологічною ознакою Д. н. поділяють на точкові й площинні (мал. 1). Точкові діоди виготовляють, дотикаючи металевою голкою до поверхні напівпровідникового кристалу. Для поліпшення їхніх електр. параметрів і стабілізації використовують процес електроформування. Технологічні методи виготовлення площинних Д. н. досить різноманітні: вирощування з розплаву, сплавлювання, дифузія, епітаксіальне осаджування та ін. Інтенсивно розвиваються нові, перспективні методи створювання p — n переходів, які використовують для легування напівпровідника, електронне та іонне бомбардування. Д. н. широко застосовують в обчислювальній техніці при побудові, напр., логічних схем (див. *Діодні логічні елементи*), *дешифраторів*, пасивних *запам'ятовувальних пристроїв* (імпульсні діоди), для введення та відображення інформації (світло- й фотодіоди) та ін.

Властивості Д. н. описуються системою електр. параметрів, яка характеризує роботу приладу в схемі й використовується під час інженерних розрахунків відповідних кіл.

Для імпульсних діодів, напр., вводяться такі параметри: постійний прямий спад напруги при заданій величині прямого струму, постійний зворотний струм при заданій вели-

чині зворотної напруги, час відновлення зворотного опору $\tau_{відн}$, макс. імпульсний прямий спад напруги на діоді при заданій величині імпульсу струму та ємність C діода.

Граничні електр. режими роботи імпульсного діода визначаються максимально допустимими зворотною напругою, середнім прямим струмом та імпульсним струмом. Найтиповіші для імпульсних діодів (типу Д9Д, Д310, Д311, Д219, КД503А та ін.) значення $\tau_{відн}$ — у діапазоні 5—300 *нсек*, а $C = 0{,}5—15$ *пф*.



1. Зовнішній вигляд напівпровідникових діодів. 2. Вольт-амперна характеристика тунельного діода.

Особливість імпульсних діодів полягає в необхідності зменшувати час життя неосн. носіїв струму $\tau_{нн}$ в напівпровіднику та ємність діода для досягнення великої швидкодії. Шляхи зменшення $\tau_{нн}$ — термогартування, легування золотом (напр., у діодах Д311, Д219, КД503А та ін.), опромінювання потоком електронів, нейтронною радіацією та ін. Застосування цих спец. способів у поєднанні з прогресивними технологіч. методами (дифузійна меза-технологія, планарно-епітаксіальна технологія та ін.) дають можливість виготовляти імпульсні діоди, які за сукупністю електр. параметрів наближаються до ідеальних ключових елементів. Дальше зменшення інерційності імпульсних Д. н. тісно пов'язане з мікромініатюризацією приладів та використанням нових напівпровідникових матеріалів (напр., інтерметалевих сполук).

Рівень розвитку технології *інтегральних схем* дає тепер змогу створювати багатокомпонентні діодні схеми (діодні лінійки й матриці) в мікроелектронному виконанні. Заміна ними аналогічних діодних структур, що їх збирають з окремих Д. н. ручним паянням, дає можливість різко підвищити швидкодію та надійність і зменшити габарити, вагу й вартість відповідних вузлів ЕОМ.

У радіоелектроніці Д. н. застосовують для детектування, перетворювання й модулювання НВЧ коливань (НВЧ діоди), випрямлення змінного струму (випрямні діоди), стабілізації постійної напруги (стабілітрони) та для ін. потреб.

У параметричних підсилювачах і системах автоматики застосовують Д. н., у якому використовується залежність ємності $p — n$ переходу від прикладеної до нього напруги. Такий діод називається варикапом. Особливе місце серед Д. н. займають тунельні діоди, чию дію основано на квантово-мех. тунельному ефекті. Пряма гілка їхньої вольт-амперної характеристики (мал. 2) має падаючу ділянку, якій відповідає від'ємна диф. провідність. На тунельних діодах будують прості схеми генераторів, підсилювачів, перетворювачів частоти, перемикачів тощо. Малі габарити, вага і споживана потужність і велика швидкодія сприяють застосуванню тунельних діодів у вузлах ЕОМ.

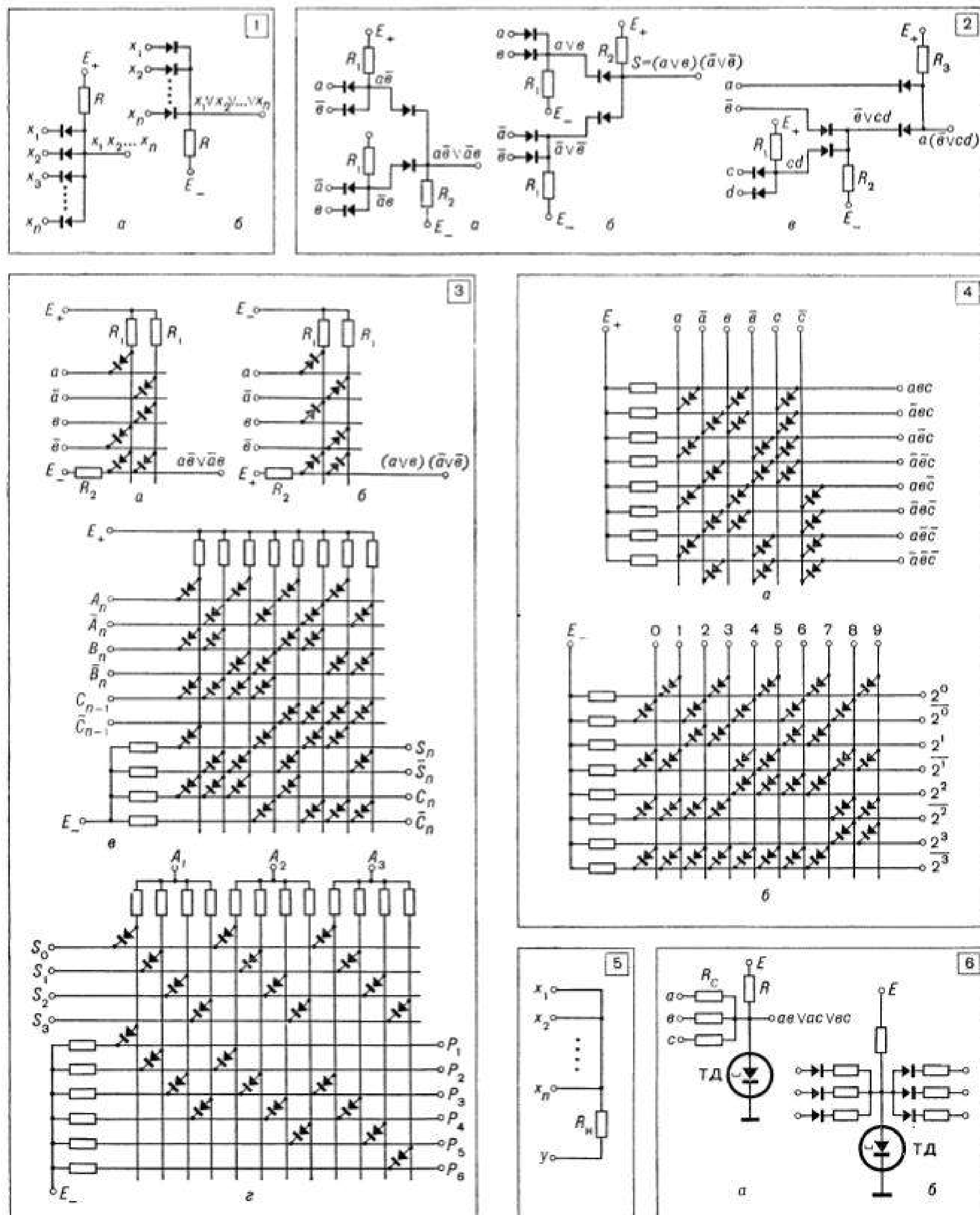
Літ.: Справочник по полупроводниковым диодам и транзисторам. М.— Л., 1964; Полупроводниковые диоды. Параметры, методы измерений. М., 1968 [бібліогр. с. 289]. *С. Л. Сидоренко.*

ДІОДНА ЛІНІЙКА — див. *Діодні логічні елементи.*

ДІОДНА МАТРИЦЯ — див. *Діодні логічні елементи.*

ДІОДНІ ЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ — електронні кола, побудовані з діодів і резисторів і призначені для реалізації логічних функцій. Д. л. е. були першими напівпровідниковими логічними елементами, їх застосовували вже в лампових ЦОМ. У Д. л. е. використовується властивість напівпровідникового діода чинити різний опір струмові, що тече в ньому, залежно від полярності прикладеної напруги. Електр. схеми найпростіших Д. л. е. зображено на мал. 1. Якщо потенціал V_1 на вході, відповідний логічній «1», перевищує потенціал V_0, відповідний логічному «0», то кажуть, що в схемі використовуються «позитивні» сигнали, а якщо $V_1 < V_0$,— то «негативні». Для схем з позитивними сигналами джерела живлення обирають так, щоб виконувалась умова: $E_+ > V_1 > V_0 > E_-$, причому одна з напруг живлення E_+ або E_- може дорівнювати нулеві. Опір R завжди набагато більший за прямий, але менший за зворотний опір діода. За цих умов на виході схеми «І» (мал. 1, *а*) потенціал, близький до V_1, встановлюється лише в тому разі, якщо на всі n входів подано сигнали «1». Якщо хоч один із входів перебуває під потенціалом V_0, то відповідний діод відкритий, і оскільки його прямий опір малий, то й на виході встановлюється потенціал, близький до V_0. На виході схеми «АБО» (мал. 1, *б*) такий потенціал буває лише тоді, коли на всі входи подано сигнал «0». Якщо хоч на одному з входів з'являється сигнал «1», то відповідний діод відкривається, і потенціал на виході схеми зростає до значення, близького до V_1. При роботі зображених на мал. 1 схем з негативними сигналами виконувані ними логічні ф-ції змінюються: схема мал. 1, *а* реалізує ф-цію «АБО», а схема мал. 1, *б* — ф-цію «І». При цьому виконується умова: $E_+ > V_0 > V_1 > E_-$. Для реалізації логіч. ф-цій, що є суперпозицією ф-цій «І» чи «АБО», описані Д. л. е. можна комбінувати між собою, приєднуючи виходи одних до входів інших. В результаті одержують багатоступінчасті Д. л. е., які складаються з ряду послідовно ввімкнених схем «І» та «АБО» (мал. 2).

Логічні змінні в ЦОМ найчастіше формують тригери, які можуть водночас видавати й прямі й інвертовані сигнали. За наявності таких сигналів довільну логічну ф-цію в принципі



можна реалізувати за допомогою Д. л. е. «І» та «АБО», зокрема, за допомогою двоступінчастих Д. л. е. типу «І»/«АБО» чи «АБО»/«І». Д. л. е. типу «І»/«АБО» реалізують логіч. ф-ції, подані в диз'юнктивній, а Д. л. е. типу «АБО»/«І» — в кон'юнктивній нормальній формі. В двоступінчастих Д. л. е. всі шляхи проходження сигналу аналогічні, між кожним входом і виходом послідовно ввімкнено однакову кількість діодів, і цим забезпечено рівність затримок та ослаблень сигналів.

Двоступінчасті Д. л. е. часто описують за допомогою матричних схем (мал. 3, *а* і *б*). Матрична форма особливо зручна для зображування Д. л. е., які реалізують водночас кілька різних ф-цій від спільних логічних

змінних (мал. 3, *в* і *г*). Окремим випадком таких Д. л. е. є діодні дешифратори й перетворювачі кодів (мал. 4). Якщо в Д. л. е. «І» чи «АБО» (див. мал. 1) напругу живлення замінити напругою одного з сигналів, то одержимо Д. л. е. «з керуванням за напругою живлення». Такі Д. л. е. використано, наприклад, у схемі зсувача, зображеній на мал. 3, *г*. Замість джерела E_+ напруга подається на них з *регістра* вихідного коду. Д. л. е. цього типу часто наз. клапанами, вважаючи сигнал, що замінює джерело живлення, за основний, а сигнали на входах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — за керуючі.

У ряді випадків у Д. л. е. «І» та «АБО» замість резистора R можна підключити навантаження. В результаті одержують Д. л. е. «з логікою навантаження». Подібну схему «АБО» з керуванням за напругою живлення зображено на мал. 5. Якщо схема працює з позитивними сигналами й велика напруга в навантаженні інтерпретується як $F = \bar{1}$, то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)\bar{y}$, тобто Д. л. е. реалізує ф-цію «АБО» з забороною. Такий Д. л. е. можна використати, напр., на виході логічного кола, де навантаження являє собою певний виконавчий орган. Д. л. е. можна складати з окремих д і о д н и х л і н і й о к (смужок, зборок), що є сукупністю кількох діодів зі спільним анодом або катодом (тобто з гальванічним зв'язком між усіма *p*- або *n*-ділянками напівпровідника відповідно). Д. л. е. для реалізації систем логічних ф-цій (дешифратори, перетворювачі кодів тощо) зручніше складати з д і о д н и х м а т р и ц ь — пристроїв, побудованих із двох перехресних систем провідних *шин*, між якими в заданих місцях увімкнено напівпровідникові діоди. Швидкодія Д. л. е. визначається імпульсними характеристиками діодів, сумарною ємністю навантаження закритих діодів і монтажу та максимальними струмами, які може відбирати Д. л. е. в режимі перемикання від джерел живлення та джерел вхідних сигналів. Будучи пасивними елементами, діоди не можуть підсилювати сигнал. У міру проходження по колу з Д. л. е. сигнали ослаблюються: зменшується перепад між рівнями V_1 та V_0 й особливо різко — струм, який можна відбирати з виходу логіч. кола (порівняно зі струмами на вході). Зі збільшенням числа ступенів дедалі суворішими стають допуски на опори й вимоги до величини струмів, відбираних від джерел сигналів і джерел живлення. Для підвищення ефективності Д. л. е. бажаними є великі, порівняно з перепадом потенціалів $|V_1 - V_0|$, живильні напруги, але при цьому зростає й може стати надмірною й потужність, розсіювана резисторами. Через вплив перелічених факторів число ступенів у Д. л. е. звичайно обмежують двома-трьома. При побудові довших логіч. кіл Д. л. е. комбінують з підсилюючими елементами на *тріодах напівпровідникових*, магнітних осердях, лампах тощо. Перевагою чисто діодних логіч. схем є їхні менші габарити, низька вартість і вища надійність.

Останнім часом швидко вдосконалюється технологія виготовлення Д. л. е. Починають випускати мікроелектронні діодні лінійки й матриці, в яких усі діоди та з'єднання сформовано на одному кристалі напівпровідника і вміщено в спільний корпус, а також Д. л. е. в інтегральному виконанні, в яких на одному кристалі або на одному підкладі формують не лише діоди та міжз'єднання, а й резистори. В таких елементах, окрім різкого збільшення щільності компонування, досягають і більшої надійності й швидкодії при зменшенні вартості. Перехід на мікроелектронне виконання потребує іншого підходу до проектування логічних кіл з Д. л. е. Якщо раніше при проектуванні схем прагнули використовувати якомога меншу кількість діодів, то тепер доцільнішою може виявитися мінімізація, напр., кількості «корпусів» (тобто діодних матриць або лінійок) незалежно від заповнення їх діодами.

Швидкодіючі Д. л. е. можна будувати на тунельних діодах (див. *Діод напівпровідниковий*), які на відміну від звичайних діодів є активними приладами і дають змогу посилювати сигнали. Схеми на таких діодах реалізують порогові логічні ф-ції $\prod_{m}^{n}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, які набувають значення «1», якщо n чи більше аргументів одночасно дорівнюють «1». На мал. 6,*а* для прикладу показано схему найпростішого логічного *мажоритарного елемента* на тунельному діоді з трьома входами. З виходу знімається великий струм («1»), якщо не менш як на два входи діє сигнал «1». Д. л. е. на тунельних діодах відзначаються високою швидкодією (тактова частота порядку 100 *Мгц* і вища), малою споживаною потужністю та багатими логічними можливостями. Основна їхня вада — відсутність внутрішньої розв'язки між входом і виходом, і це утруднює об'єднування схем у вузли. Щоб забезпечити спрямованість потоку інформації, доводиться використовувати багатофазні системи імпульсного живлення. Простіше спрямованість передавання сигналу забезпечується застосуванням у колах зв'язку звичайних або зворотних діодів (мал. 6, *б*). Д. л. е. на тунельних діодах доцільно використовувати для побудови швидкодіючих вузлів ЦОМ, у яких допустимим є застосування логіч. елементів з невеликим коеф. розгалуження. Дальше вдосконалення Д. л. е. цього типу, підвищення їхньої надійності й розширення сфери застосування пов'язане з поліпшенням відтворюваності й стабільності параметрів тунельних діодів та з розвитком інтегральної технології виготовлення відповідних схем.

Літ.: К о т т В. М., Г а в р и л о в Г. К., Б а в а р о в С. Ф. Туннельные диоды в вычислительной технике. М., 1967 [бібліогр. с. 212—214]; Р и ч а р д с Р. К. Элементы и схемы цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1961; П р е с с м а н А. И. Расчет и проектирование схем на полупроводниковых приборах для цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1963; Х а р л и Р. Б. Логические схемы на транзисторах. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 423].

В. М. Корсунський.

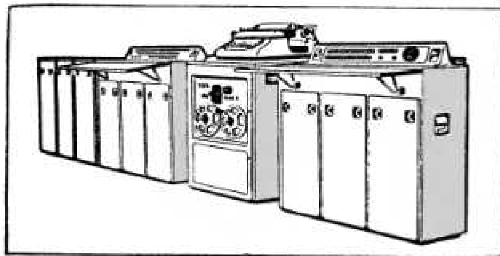
ДІРА́КА ФУ́НКЦІЯ — те саме, що й *дельта-функція*.

«ДНЕПР» — перша вітчизняна цифрова *керуюча обчислювальна машина* на напівпровідникових елементах. Створено її в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1961. «Д.» складається (мал.) з центральної обчислювальної частини та *пристрою зв'язку з об'єктом*.

Обчислювальна частина являє собою самостійну універсальну *цифрову обчислювальну машину* середньої продуктивності (час виконання операції додавання — 29,5÷57,5 *мксек*). Ємність *оперативного запам'ятовувального пристрою* — змінна (ОЗУ комплектують блоками по 512 слів), усього може бути використано до восьми блоків. Алгоритмічна повнота використовуваних у машині операцій дає змогу запрограмувати *алгоритм* керування для багатьох сучасних технологічних процесів. Система команд «Д.» — двохадресна, форма подавання чисел — з комою, фіксованою перед вищим розрядом, довжина слова (разом зі знаковим розрядом) — 26 розрядів, система елементів — імпульсно-потенціальна.

Пристрій зв'язку з об'єктом забезпечує автомат. введення показань 250 програмно-опитуваних давачів безперервного сигналу, до 192 частотних давачів і до 1344 сигналів релейного типу 0—12 *в*. «Д.» має 60 каналів для видавання аналогових і 480 каналів — для видавання релейних сигналів керування та пульт оператора, обладнаний регістром візуальної індикації й клавіатурою введення інформації керування процесом. Щоб машину можна було використовувати в *обробки даних системах* і як обчислювальну машину середньої продуктивності, для цього її можна доповнювати додатковими пристроями: *нагромаджувачем* на магн. стрічці (розрахований на записування 1 500 000 слів, швидкість записування — 5650 слів за 1 *сек*), швидкодіючим цифродрукувальним пристроєм (швидкість друкування 1200 ± 50 шестирозрядних чисел за 1 *хв*) й стрічковим *перфоратором* (швидкість виведення даних на 5-доріжкову телеграфну перфострічку 1200 ± 50 рядків за 1 *хв*).

«Д.» використовують як центр. ланку системи автоматизації безперервних процесів. Машина автоматично опитує давачі процесу, обчислює оптим. режим керування й видає відповідні завдання локальним регуляторам (їхнім *виконавчим механізмам*). Завдання або друкуються (в системі, замкненій через людину-оператора), або реалізуються автоматично (через блоки видавання сигналів керування). «Д.» може обчислювати техніко-економічні показники процесу й друкувати їх через задані інтервали часу (через годину, зміну й добу). Машину застосовують і в системах обробки даних фіз. експерименту, оскільки вона має пристрої, які полегшують її зв'язок з вимірювальними приладами та схемами керування експериментом. Структура системи обробки даних на базі «Д.» залежить від характеру експерименту. При локальному експерименті доцільно безпосередньо підключати машину до давачів досліджуваного об'єкта. Внаслідок специфіки давачів машину підключають до них за допомогою блока підсилювачів. До машини додають пристрій графічного відтворювання результатів експерименту й швидкодіючий *алфавітно-цифровий друкувальний пристрій*. В експериментах, що здійснюються на віддалених одна від одної установках, систему треба ділити на дві частини: знімання та обробки інформації. Як буферний пристрій зв'язку між ними використовують нагромаджувач на перфострічці. Дані від окремих об'єктів дослідження записуються на перфострічку, потім інформація вводиться в обчисл. частину «Д.» для відповідної обробки.



Керуюча машина широкого призначення «Днепр».

У процесі вдосконалення до «Д.» включено систему переривання через 28 причин і додано кілька блоків введення з паперової перфострічки та виведення інформації (швидкодіючий цифровий друкувальний пристрій). «Д.» можна використовувати в цифро-аналогових комплексах для моделювання та вивчання виробничих процесів.

Літ.: Малиновский Б. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М., 1963 [бібліогр. с. 285—286]; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181]. *Б. М. Малиновський.*

«ДНЕПР-2» — керуюча обчислювальна система, орієнтована на застосування її як центральної ланки в інформаційно-керуючих системах на промислових підприємствах. Складається з двох основних частин (мал.) — обчислювального комплексу ОК «Днепр-21» та керуючого комплексу КК «Днепр-22».

Обчислювальний комплекс призначений для обробки інформації, яка надходить від *зовнішніх пристроїв* і від КК. ОК можна застосовувати як окрему обчисл. машину для обробки економічних даних і розв'язування інженерно-тех. задач. Оперативний запам'ятовувальний пристрій (ЗП) ОК на феритових кільцях має до 32К комірок (42-розрядних). Передбачено підмикання довгочасного ЗП до 32К комірок. Система числення — двійкова. Середня швидкодія машини — 20 тис. операцій за 1 *сек*. До складу ОК входить один мультиплексний і два селекторні канали, що працюють автономно з пам'яттю машини. Передбачено підмикання пристроїв введення — виведення з

перфострічок і перфокарт, швидкодіючого *алфавітно-цифрового друкувального пристрою*, *телетайпів* і друкарських машинок (разом до 96 зовн. пристроїв). Зовнішніми ЗП машини є нагромаджувачі на магнітній стрічці (до 16 стрічкопротягувальних пристроїв). Слова містять у собі змінну кількість 9-розрядних символів: числа — до 8, буквено-цифрова інформація — до 127 символів. У пам'яті адресується кожний символ.

Команди містять у собі одно або кілька *машинних слів* залежно від типу команди й кількості адрес, які є в ній. У машині є 0-адресні, 1-адресні, 2-адресні і, в деяких випадках, багатоадресні команди. Адреси можуть бути одно-, дво- і трисимвольні. У командах допускається як пряма й непряма адресація, так і безпосереднє задавання операндів. Мультиплексний канал, забезпечуючи автономний обмін інформацією зовн. пристроїв з пам'яттю машини, здійснює редагування інформації при введенні й виведенні, яке аналогічне редагуванню за шаблоном, прийнятому в мові *КОБОЛ*. Система переривання грунтується на схемно-програмному принципі й забезпечує відпрацювання сигналів переривання, що надходять від КК, зовн. пристроїв та нагромаджувачів, а також внутр. сигналів переривання, які інформують про збої в центр. процесорі (ЦП) і про особливі ситуації, які виникають при регулярному виконанні програми (переповнення, захист пам'яті тощо). Гнучка структура системи переривання дає змогу організувати будь-яку логіку багатопрограмної обробки інформації.

Керуючий комплекс (КК) призначено для приймання інформації від керованого об'єкта, видавання керуючих сигналів на об'єкт і для первинної обробки інформації. Крім того, КК здійснює обмін між оператором, що слідкує за технологічним процесом, та ОК. Основні функції КК: автоматичне збирання інформації від давачів керованого об'єкта (автономно й за командами КК); вирівнювання поточних значень сигналів аналогових давачів (фільтрація від випадкових перешкод вхідного сигналу); автомат. слідкування за перебуванням сигналів аналогових давачів у заданих межах; автомат. слідкування за станом давачів двопозиційного типу (виявлення моменту й знака перемикання їх); автомат. слідкування за появою сигналів від давачів числово-імпульсного типу й нагромадження числа імпульсів по кожному з них; видавання відомостей про аварійний стан об'єкта керування, апаратури комплексу, давачів та ліній зв'язку. Вхідні сигнали (заг. кількість їх понад 1600) можуть надходити від давачів струму, частот, потенціалу, числово-імпульсних та двопозиційних давачів. Вихідні сигнали (заг. кількість їх понад 1000) видаються на реле й різні регулятори.



Керуюча обчислювальна система «Днепр-2».

Широкі логічні можливості й гнучку структуру «Д.-2» доповнює розвинена система матем. забезпечення. Зовн. мови, спеціалізовані програми-диспетчери та набори стандартних *підпрограм* дають змогу швидко організувати обчисл. процес на «Д.-2» у системах різних призначень. Числовий *код* (ЧКД) призначений для програмування будь-яких задач, у т. ч. й задачі керування технологічними процесами, стандартних підпрограм і системних *програм*. *Транслятор* ЧКД переводить програми на машинні коди, а за допомогою ретранслятора можна надрукувати в ЧКД будь-яку машинну програму. Автокод АКД-1 призначений для програм, які включають у бібліотеку, та для інших програм, що вимагають широкого використання можливостей системи машинних команд. До автокоду входять як засоби для програмування — зовнішня мова й транслятор, так і засоби наладжування у зовнішній мові — мова наладжування й програма-автоналаджувач (АНД).

Автокод реального масштабу часу (АКДРЧ) призначено для програм керування технологічними процесами й тех. об'єктами. Мова АКДРЧ включає всі засоби АКД-1, містить у собі додаткові макрокоманди обміну «Днепра-21» з «Днепром-22», з системою переривання та годинником. Програми, записані в АКДРЧ, наочно відображують функ-

ціонування машини в реальному масштабі часу, зв'язок її з зовн. об'єктами.

Транслятор з *АЛГОЛу-60* дає змогу налагоджувати програми безпосередньо зовн. мовою в режимі діалога програмувальника з машиною.

Транслятор з КОБОЛу є необхідною частиною матем. забезпечення систем керування виробничими процесами, обчисл. центрів торговельного та економ. профілю.

Програма-диспетчер ДД-1 організовує обчисл. процес у системах керування технологічними процесами на базі модифікацій машини з малою ємністю оперативного ЗП і невеликою кількістю зовн. пристроїв.

Програма-диспетчер ДД-2 організовує процес налагоджування програм (записаних числовим кодом) одночасно з трьох телетайпів.

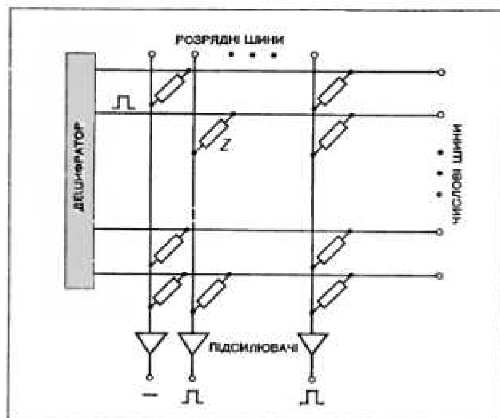
Програма-диспетчер ДД-3 організовує обчисл. процес в інформаційно-керуючих системах, системах керування технологічними процесами, обчисл. центрах та системах обробки експериментальних даних. ДД-3 працює на розширених модифікаціях машини, забезпечуючи зручну роботу оператора і програмувальника під час налагоджування й розв'язування задач у мультипрограмному режимі; програма-диспетчер ДД-3 включає блоки керування даними.

Літ.: Управляющая система «Днепр-2». К., 1968; Никитин А. И. Применение УВС «Днепр-2» в качестве базовой машины в системах комплексной автоматизации на предприятиях. В кн.: VII-ая Всесоюзная сессия семинара «Управляющие машины и системы». К., 1970.

А. Г. Кухарчук, А. І. Нікітін, А. О. Стогній.

ДОВГОЧА́СНИЙ ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ (ДЗП), постійний ЗП, пасивний ЗП — запам'ятовувальний пристрій, у якому немає засобів записування, що дають змогу змінювати інформацію за допомогою команд у процесі роботи цифрової обчислювальної машини; призначений для тривалого зберігання й видавання інформації в інші пристрої. Здебільшого в ДЗП зберігаються часто застосовувані в обчислюваннях константи, підпрограми, табличні дані, тестові програми, програми спеціалізованих ЦОМ тощо, тобто інформація, яка не потребує надто частих змін. У заг. випадку ДЗП являє собою перетворювач кодів зі сталим співвідношенням між вхідними кодами (адресами слів) та вихідними кодами (словами). Залежно від типу запам'ятовувального елемента, застосовуваного в пристрої, розрізняють ДЗП з лінійними або нелінійними елементами й оптичні. ДЗП з лінійними елементами має *нагромаджувач* матричної форми (мал.). Сигнал вибирання певної числової шини надходить до розрядної лише тоді, коли є елемент зв'язку у відповідному перетині. Застосовують переважно резистивні, конденсаторні та індуктивні матриці. Резистивні та конденсаторні матриці виготовляють напилюванням або друкуванням на паперових чи пластмасових картах елементів зв'язку і провідників. Інформацію наносять наступною перфорацією (руйнуванням відповідних зв'язків) або використанням масок у процесі виготовлення. Труднощі побудови ДЗП великої ємності, пов'язані зі значним споживанням енергії при макс. частоті звертання, з великими розкидами величин опорів або ємності конденсаторів, що погіршують співвідношення сигнал/завада, зменшують інтерес до таких ДЗП.

Великого поширення набули в ДЗП матриці з індуктивним зв'язком, з розімкненим чи замкненим магнітопроводом. У першому випадку числові й розрядні шини прокладають друкуванням з обох боків тонкої ізоляційної пластини або на двох пластинах, між якими вставляють екрануючу карту або карту, що збільшує індукційний зв'язок за рахунок вихрових струмів, з перфорацією в місцях, визначених кодом зображуваної інформації. Якщо застосовують розімкнений магнітопровід, для підсилення індуктивного зв'язку між числовими та розрядними шинами вставляють феритовий стрижень. Широко відомі трансформаторні ДЗП, в яких застосовують індуктивні матриці з замкненим магнітопроводом. При цьому числові шини пронизують осердя з вихідною обмоткою тих розрядів, у яких на дану адресу слід записати код «1».



Нагромаджувач довгочасного запам'ятовувального пристрою з лінійними елементами.

ДЗП з нелінійними елементами мають переваги, які полягають в обмеженні паразитних зв'язків, поліпшенні відношення сигнал/завада і зниженні вимог до кіл вибірки числа. В цих ДЗП використовують діодні матриці або магнітні елементи з прямокутною петлею гістерезису. З магнітних елементів при побудові ДЗП найчастіше застосовують замкнені феритові осердя різної конфігурації, *твістори* з постійними магнітами й плоскі магнітні плівки.

В оптичних ДЗП інформація зберігається у вигляді візерунка, що складається з непрозорих і прозорих ділянок на плоскій поверхні типу карти, пластинки чи диска. Інформацію зчитує світловий промінь, що проходить крізь носій. Пошук інформації

здійснюється переміщенням променя, переміщенням носія або одночасним переміщенням променя й носія одного відносно одного. Можливість побудови ДЗП дужче швидкодіючих, надійніших і з меншими затратами, ніж оперативні ЗП (обмеживши функції ДЗП у процесі роботи лише ф-цією видавання інформації) і наявність великих масивів інформації, що залишаються протягом тривалого часу експлуатації машини незмінними (константи, стандартні й тестові програми тощо), роблять застосування ДЗП перспективним для часткової заміни ОЗП не лише в спеціалізованих, а й в універсальних ЦОМ. *Ф. Н. Зиков.*

ДОВЕ́ДЕННЯ ТЕОРЕ́М НА ЕОМ, машинний пошук логічного висновку — напрям у теоретичній кібернетиці, який вивчає можливості моделювання на електронній обчислювальній машині розумової діяльності математика. Важливість цього напряму зумовлена тим, що в математиці легше, ніж в інших видах творчості, формалізувати й умову розв'язуваної задачі, й елементарні кроки, допустимі під час її розв'язування, і перевірку результату (як і в усіх галузях творчості, сам процес мислення піддається формалізації з величезними труднощами і втратами).

Теор. передумовою для автоматизації Д. т. на ЕОМ стало створення *логіки математичної*, яка формалізувала поняття логічного виведення теореми з аксіом. Ще до появи ЕОМ у працях класиків матем. логіки було розроблено методи, які стали реальною базою практичних *алгоритмів* пошуку висновку. Перші практичні спроби побудувати машинні *програми* встановлення вивідності було зроблено в США на поч. 50-х років. Програма «логік-теоретик» працювала з поширеним, але надто незручним для пошуку висновку формулюванням однієї нескладної теорії (див. *Числення висловлювань*). Тому практичні результати цієї програми були мізерними. Однак використана в ній методика виявилася корисною і мала принципове значення для формування напряму, який названо *програмуванням евристичним*. Набагато цікавіші логічні теореми доведено за допомогою програми Хао Вана, яку покладено в основу другого напряму в автоматизації доведень. Згодом перший напрям було продовжено (напр., Гелернтер використав аналіз креслеників для організації процесу доведення геом. теорем). Проте переважна більшість робіт з Д. т. на ЕОМ (слідом за роботами Хао Вана) базується насамперед на розроблянні методів матем. логіки. Об'єднання досягнень теорії логіч. виведення й евристичного програмування поки що повністю не здійснено.

Коло теорем, реально доведених на ЕОМ, обмежене, й теореми ці не дуже складні. Відповідні доведення часто спирались на істотну допомогу з боку людини або у вигляді «підказуючого» формулювання початкової задачі, або у вигляді вказівок під час розв'язування її (напр., «використати таку лему», «здійснити індукцію за такою формулою» тощо). Крім ряду логічних теорем, було доведено деякі теореми елементарної алгебри, елементарної та проективної геометрій і елементарної теорії чисел. Напр., такі: «якщо квадрат кожного елемента дорівнює одиниці, то група комутативна», «квадратний корінь з простого числа ірраціональний», «простих чисел нескінченно багато». Складність доведення двох останніх теорем, очевидно, наближається до меж сучасних можливостей машинного пошуку виведення. Отже, доведення справді-таки складних теорем, а тим більше теорем, які не вдається довести людині, поки що малоперспективне. Тому більший інтерес становлять не досягнуті практичні результати, а постановки задач і методи.

Є кілька способів у Д. т. на ЕОМ. Під час доведення теореми значну частину тех. роботи математик може доручити ЕОМ, бо в процесі доведення виникає великий обсяг обчислень або безліч варіантів, кожен з яких легко можна розглянути. Цим способом одержано, напр., деякі результати з теорії чисел. Хоч проведення таких доведень часто вимагає, щоб математик спеціально орієнтував хід своїх міркувань на використання ЕОМ, але цей спосіб випадає, власне, з проблематики машинного пошуку висновку. Спосіб перспективний, та поки що його можливості використано мало. Другий спосіб — це кооперування математика й ЕОМ, за якого людина визначає принциповий напрям доведення й висловлює гіпотези, а машина виконує всі проміжні логічні переходи і викладки, перевіряє гіпотези і видає матеріал для формування дальших гіпотез. Цей напрям тільки починає розвиватися й потребує не лише теор. розробки, а й дальшого удосконалення систем зв'язку людини з ЕОМ. До цього напряму належать задачі коректування гіпотез і природного пошуку виведення.

Найпоширенішою є така постановка проблеми автоматизації доведень: матем. теорія формалізується (базою для формалізації є числення предикатів), теореми теорії перетворюються на ф-ли, вивідні з тих чи інших аксіом. Після цього треба побудувати алгоритм установлення вивідності, тобто алгоритм, який дає правильну відповідь на запитання про вивідність ф-ли і повинен закінчити роботу для всіх вивідних ф-л, але для деяких (або для всіх) невивідних ф-л може працювати нескінченно довго. Така постановка пов'язана з нерозв'язністю переважної більшості цікавих теорій, тобто принципово неможливо побудувати алгоритм, який розпізнає вивідність для всіх формул мови теорії. Існують інші постановки проблеми. 1) Пошук високоякісного виведення. Якість виведення не уточнюють, але мають на увазі виведення якомога компактніше (неприпустимим є надмірне застосування правил), якнайбільше «склеєне» (одне й те саме допоміжне твердження не слід виводити двічі на різних етапах доведення), записане в природному, звичному для математика вигляді. В Ленінгр. відділенні Матем. ін-ту ім. В. А. Стеклова було

розроблено й запрограмовано алгоритм, який знаходив у межах числення висловлювань природний висновок твердження зі списку гіпотез і записував цей висновок у вигляді логіко-матем. тексту російською мовою. 2) Коректування гіпотез і посилення теорем. Розробляють методи, які дають змогу вводити в задану ф-лу невеликі виправлення так, щоб вона стала теоремою або (якщо початкова ф-ла вивідна), перетворилася на сильнішу теорему. Досліджують критерії якості виправлень. 3) Напіврозв'язувальні алгоритми. Спираючись на наявність у нерозв'язних теоріях значних розв'язних фрагментів, розробляють розв'язувальні процедури для цих фрагментів та алгоритми встановлення вивідності, які завершують роботу для якомога ширших класів ф-л.

Основу майже всіх запропонованих алгоритмів установлення вивідності становить апарат секвенціальних числень (див. *Генцена формальні системи*). Ці числення часто допомагають організувати процес пошуку висновку «знизу вгору» — шляхом визначення для кожної формули F порівняно невеликого числа її можливих «безпосередніх попередників», тобто формул, з яких F можна вивести. У найпростіших випадках уже тільки це дає реальну можливість установити вивідність. Однак для числення предикатів такий пошук часто призводить до появи величезної кількості «зайвих» формул, тому безпосередньо застосовувати цей метод стає неможливо. Було запропоновано спосіб, відповідно до якого шукають «знизу вгору» не сам висновок, а певну його «заготовку» з неуточненими значеннями використовуваних змінних. На певних етапах побудови заготовки перевіряється, чи не можна так уточнити значення змінних, щоб одержати вже справжній висновок. Цей метод дає змогу позбутися надмірностей під час виведення й наблизитися до практичних алгоритмів, але перевірка складної заготовки — справа надто важка. Тому перспективнішими є методи, які поєднують неуточненість значень змінних з порівняною простотою кожного кроку роботи: метод резолюцій, який можна застосовувати до класичного числення предикатів, і обернений метод, який можна застосовувати майже до всіх секвенціальних числень. Для підвищення практичної ефективності цих методів вирішальне значення має вивчення т. з. «стратегій», які накладають ті або інші обмеження на процес установлення вивідності. Досліджують, чи можливо включати в схему цих методів специфічні механізми аксіоматичних теорій, правила для рівності та індукції, складніші формальні мови тощо.

Проблему автоматизації доведень вивчають в СРСР, США, Великобританії, Швеції, ФРН, Польщі та ін. країнах. Спец. міжнародні симпозіуми «Машинний розум» відбуваються щороку в Едінбурзі (Великобританія). Два всесоюзні симпозіуми з машинного пошуку виведення відбулися у Тракаї (Лит. РСР). Див. також *Автоматизований пошук доведень теорем*.

Літ.: Шанин Н. А. [та ін.]. Алгорифм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний. М.— Л., 1965; Математическая теория логического вывода. М., 1967; Маслов С. Ю. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1968, т. 98; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 491—546]; Кибернетический сборник. Новая серия, в. 7. М., 1970; Machine intelligence. Edinburg, 1971. *С. Ю. Маслов.*

ДОВЕ́ДЕНЬ ТЕО́РІЯ, метаматематика — наука, що вивчає формалізовані математичні теорії й доведення в них. Ввів її нім. математик Д. Гільберт (1862—1943) у рамках запропонованої ним програми обгрунтування математики через доведення несуперечливості. Тепер Д. т. вивчає ширше коло питань, що стосуються структури формалізованих доведень. Центральним для Д. т. є встановлена Гільбертом відмінність між «дійсними» матем. твердженнями, що мають зміст, та «ідеальними» твердженнями, які самі по собі не обов'язково допускають тлумачення, але дають можливість скорочувати доведення дійсних тверджень. За дійсні твердження Гільберт приймав фінітні твердження, тобто, фактично твердження про рівність і відмінність між конструктивними об'єктами (результатами конструктивних процесів). Характерною ознакою фінітних тверджень є відсутність у них конструкцій, пов'язаних з актуальною (завершеною) нескінченністю, т. з. трансфінітних конструкцій, напр., «для кожного натурального числа», «існує натуральне число», «те натуральне число, що має властивість S» тощо. Проблему обгрунтування математики було б розв'язано, якби вдалося вказати заг. метод виключення ідеальних тверджень з доведення дійсних тверджень. Гільберт помітив, що для цього, в свою чергу, досить за допомогою фінітних засобів довести несуперечливість математики, тобто твердження про те, що ні для якого твердження A не можна довести ні A, ні заперечення A (або твердження про недовідність $0 = 1$). Він вказав і підхід до розв'язання цієї задачі, який і досі є осн. методом Д. т.: треба зробити об'єктом вивчення саму розглядувану матем. теорію і встановити, що серед її теорем нема теореми $0 = 1$. З цією метою теорію формалізують: перелічують її первісні поняття й матем. аксіоми (так само чинять і тоді, коли використовують аксіоматичний метод в інших галузях математики), а також осн. логічні поняття й допустимі правила переходу. Такий перелік визначає формальну систему, або *формалізм*.

Формальну систему, яку вивчають засобами Д. т., наз. предметною теорією, а ту частину Д. т., яка до неї відноситься,— її метатеорією. З погляду метатеорії, предметна теорія є набором беззмістовних символів, аналогічних, напр., позиціям у шаховій грі. Класичним прикладом застосування цього способу розгляду є теорема двоїстості в проективній геометрії: з кожної теореми знову одержують теорему після взаємної заміни слів «точка» й «пряма».

Гільберт сподівався, що можна буде цілком формалізувати всю математику (або значну її частину) й фінітне доведення несуперечливості знайденої формальної системи. Ці сподівання було спростовано 1931 двома теоремами австр. математика К. Геделя (нар. 1906), які є центр. результатами Д. т.: 1) в будь-якій досить багатій несуперечливій формальній системі знайдеться формально нерозв'язне твердження, тобто ф-ла, яку не можна ні довести, ні спростувати засобами цієї системи; 2) при сильніших твердженнях такою ф-лою є твердження про несуперечливість системи. Зокрема, якщо вважати, що засобами формалізованої арифметики можна здійснити всі фінітні міркування, то несуперечливість арифметики не можна довести фінітними засобами. Слідом за теоремами Геделя знайдено другий важливий результат Д. т.— теорему Черча про існування нерозв'язних систем, тобто таких систем, для яких неможливий єдиний метод (*алгоритм*), який щодо кожної формули в скінченне число кроків розв'язує, чи є вона теоремою розглядуваної системи.

Теореми Геделя виявили, по-перше, що необхідно розглядати ієрархії формальних систем, бо в кожній конкретній формальній системі є нерозв'язні твердження; а по-друге, що різні методи доведення несуперечливості неминучі. Питання, пов'язані з доведеннями несуперечливості, посідають у сучасній Д. т. центр. місце, бо результати, які одержано при вивченні їх, і методи, які використовують при цьому, застосовують і в самій Д. т., і в інших галузях математичної логіки. Зокрема, багато доведень несуперечливості розв'язують задачу приписування смислу деяким ідеальним твердженням. Один з осн. методів доведення несуперечливості полягає в тому, що природну формалізацію розглядуваної системи замінюють штучною (див. *Генцена формальні системи*), яка містить виділене правило (розріз), при цьому вигляд решти правил такий, що виведення суперечливості $0 = 1$, яке не містить розрізу, неможливе. Після цього доводять, що з виведення числових рівностей можна усунути розріз, звідки й випливає несуперечливість. Трансфінітний елемент (він повинен бути внаслідок другої теореми Геделя) з'являється в доведенні усувності розрізу так: кожному виведенню ставлять у відповідність певне трансфінітне порядкове число; визначають операцію, яка зіставляє з будь-яким виведенням числової рівності, що містить розріз, певне виведення тієї самої рівності, яке має менше порядкове число. Після цього усувність розрізу одержують, застосовуючи правило трансфінітної індукції (до фінітного предиката). Доведення несуперечливості якоїсь системи C генценівським методом звичайно виявляє порядкове число α, що характеризує C у такому розумінні: можна так конструктивно визначити цілком-упорядкування R натуральних чисел за типом α, що в C можна довести цілком-упорядковість будь-якого власного відрізка R; несуперечливість C можна довести трансфінітною індукцією за α; ні для якого цілком-упорядковність натуральних чисел за типом $\geqslant \alpha$ в C не довідна цілком-упорядковність. Доведення несуперечливості класичної арифметики, яке запропонував австр. математик Г. Генцен (1936), дає для цієї системи характеристику ε_0; для предикативного аналізу (див. *Предикативність*) характеристичним виявляється $\varkappa_0$ — перше дуже критичне порядкове число. Важливим способом застосування генценівських методів є використання напівформальних систем, що містять т. з. неелементарні правила виведення, напр., правило нескінченної індукції (правило Карнапа): якщо для будь-якого натурального N, вивідні $A(0)$, $A(1)$, ..., $A(N)$, то вивідним є й $\forall x A(x)$. У напівформальних системах розріз часто можна усунути не тільки з виведень числових рівностей, але й з виведень довільних ф-л.

Другий метод доведення несуперечливості, що його сформулював К. Гедель 1941 (опубліковано 1958), вводить трансфінітний елемент не у вигляді трансфінітної індукції, а через застосування конструктивних функціоналів скінченних типів. Функціонали типу 0 — це натуральні числа, функціонали типу $(0 \to 0)$ — це числові ф-ції, а функціонали типу $(0 \to 0) \to 0$ — це відображення числових ф-цій у натуральні числа; взагалі функціонали типу $(\sigma \to \tau)$ переробляють функціонали σ на функціонали типу τ. Гедель описує перевод арифм. формул у ф-ли типу $\exists \varphi \forall \psi M(\varphi, \psi)$ (або простішого виду), де φ, ψ — змінні для функціоналів, і доводить, що для кожної вивідної в арифметиці формули можна вказати такий примітивно рекурсивний функціонал Φ, що формула $M(\Phi, \psi)$ з вільною змінною ψ є вивідною в безкванторній системі T, правилами якої є правила обчислення значень примітивно рекурсивних функціоналів та індукція. Оскільки переводами числових рівностей є вони самі, то звідси випливає несуперечливість арифметики. Амер. математик К. Спектор (1930—61) запропонував доведення несуперечливості класичного аналізу методом Геделя; при цьому використано нове правило визначення функціоналів — правило бар-рекурсії. Але це правило обгрунтовується засобами, прийнятними не для всіх математиків. Метод Геделя було застосовано для обчислення характеристичного числа підсистеми інтуїціоністського аналізу з бар-індукцією типу 0.

Для арифметики результати, аналогічні результатам, що їх одержують методом Геделя, можна одержати гільбертівським методом ε-підстановки. Цей метод дає змогу будувати модель не для всієї теорії загалом, а для кожного окремого доведення якоїсь теорії, розширює сферу застосовності традиційного методу доведення несуперечливості через побудову моделей. Саме гільбертівським методом одержано перше фінітне доведення несуперечливості обмеженої арифметики — арифм. системи, де індукція допускається тільки за безкванторними формулами.

Доведення несуперечливості звичайно дає інтерпретацію деяких класів ф-л розглядуваної системи C у простішій системі C_0, тобто операцію π, що кожній формулі A розглядуваного класу ставить у відповідність «нескінченну диз'юнкцію» (послідовність) ф-л $\pi_n(A)$ системи C_0 таку, що, по-перше фінітні твердження не змінюються; по-друге, для будь-яких A і B за будь-яким виведенням B з A у C і за будь-яким i можна вказати таке j, що $\pi_j(B)$ вивідне з $\pi_i(A)$ в C_0. Друга умова відповідає міркуванню: якщо правильне $\breve{i}A_i \to \breve{j}B_j$, то при будь-якому i правильним є $\breve{A}_i \to \breve{j}B_j$, а тому при кожному i знайдеться таке j, що правильним буде $A_i \to B_j$. Зокрема, якщо за A взяти стандартне вивідне твердження $0 = 0$, одержимо: якщо B вивідне в C, то для якогось j B_j вивідне в C_0. Якщо взяти за стандартне хибне твердження $0 = 1$, то одержимо, що суперечливість C_0 веде до суперечливості C. Якщо формули системи C_0 вважаються дійсними твердженнями, то інтерпретація розв'язує задачу приписування смислу довідним ф-лам системи C. Найхарактерніший приклад інтерпретації — геделівська інтерпретація ф-л арифметики, що відіграє роль C, ф-лами безкванторної системи T, що відіграє роль C_0. Аналогічні інтерпретації дають і інші доведення несуперечливості методом Геделя. Доведення несуперечливості методом Генцена дають інтерпретацію екзистенціальних ф-л у безкванторній арифметиці ординально рекурсивних функцій. Метод ε-підстановок дає інтерпретацію відсутністю контрприкладу, що відрізняється від геделівської інтерпретації використанням функціоналів лише типу $(0 \to 0) \to 0$, які можна визначити за допомогою не тільки примітивних, а й трансфінітних рекурсій. Один з перших прикладів інтерпретації дає теорема Ербрана: кожна ф-ла класичного числення предикатів розкладається, за цією теоремою, у «нескінченну диз'юнкцію» ф-л класичного *числення висловлювань*. Порівнюючи конструктивні (див. *Логіка конструктивна*) і неконструктивні системи, використовують інтерпретацію класичних систем конструктивними, вставляючи подвійне заперечення. Є також інтерпретація конструктивного (інтуїціоністського) числення висловлювань у модальному численні Льюїса $S4$. Для аналізу структури конструктивних систем використовують інтерпретацію реалізовності, яка дає можливість зводити конструктивні системи до класичних. Модифікації цієї інтерпретації дають можливість встановлювати необхідні умови вивідності існування й *диз'юнкції* (якщо в конструктивній арифметиці можна вивести диз'юнкцію замкнутих ф-л, то можна вивести й одну з цих ф-л). Багато метаматем. теорем можна легко довести для систем без розрізу, тому становлять інтерес доведення усувності розрізу та ін. метаматем. результатів, які самі по собі не є метаматематичними. Одним із перших прикладів такого роду було доведення теореми Ербрана, що міститься в доведенні теореми Геделя про повноту. Останнім часом такий підхід було застосовано для аналізу конструктивних, інтуїціоністських і модальних систем та для доведення усувності розрізу з простої теорії типів. У застосуванні до ін. галузей матем. логіки виявилися корисними узагальнення метаматем. результатів на нескінченно довгі ф-ли.

Останнім часом, особливо після досліджень амер. математика П. Коена, який довів (1963) незалежність континуум-гіпотези й аксіоми вибору від решти аксіом *множин теорії*, зріс інтерес до проблеми незалежності аксіом. Методи Д. т. широко застосовують у теор. обгрунтуваннях алгоритмів *доведення теорем на ЕОМ*. Тут істотну роль відіграють теореми про спеціалізацію форми доведення і про перебудови доведень, напр., дедукційна теорема й інтерполяційна теорема.

Літ. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959; Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik, Bd. 1—2. Berlin, 1968—70; Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952; Schütte K. Beweistheorie. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960; Kreisel G. Mathematical logic. В кн.: Lectures on modern mathematics, v. 3. New York, 1965; Математическая теория логического вывода. М., 1967; Kreisel G. A survey of proof theory. «The journal of symbolic logic», 1968, v. 33, N 3; Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. New York—Amsterdam, 1966.

Г. Є. Мінц.

ДОВЖИНА ЧЕРГИ — кількість вимог, що перебувають у даний момент часу на черзі в *масового обслуговування системі*. У ймовірнісних системах і в системах з випадковим вхідним потоком Д. ч. — *випадкова величина*. Приклади Д. ч.: кількість суден, що чекають на обробку біля причалів; кількість заготовок у бункері перед верстатом; обсяг інформації, що підлягає обробці на обчисл. пристрої. Д. ч. — важлива часова характеристика системи, що дає змогу робити висновок про тривалість простоїв транспортних засобів, про залежуваність товарів. На основі розподілу Д. ч. (або моментів цього розподілу) можна розрахувати раціональну місткість складу, об'єм асоціативного запам'ятовувального пристрою тощо. Іноді в Д. ч. включають і вимоги, що перебувають у даний момент на обслуговуванні. Для однолінійної системи обслуговування з пуассонівським вхідним потоком і довільно розподіленим часом обслуговування Д. ч. обчислюють за *Хінчина — Поллачека формулами*. *М. В. Яровицький.*

ДОВІДКОВО-ІНФОРМАЦІЙНИЙ ФОНД (ДІФ) — упорядковане зібрання науково-технічних документів, забезпечене довідковим апаратом і призначене для довідково-інформаційного обслуговування.

З ДІФу підприємства, організації й окремі спеціалісти одержують інформацію про дослідження й розробки, які ведуться тепер, про роботи, заплановані на майбутнє, і про закінчені роботи. Служби ДІФу здійснюють збирання, обробку, зберігання, пошук і видавання як опублікованих матеріалів, так і неопублікованої наук.-тех. документації (звітів, проек-

тів, планів н.-д. і дослідно-конструкторських робіт); видають залежно від характеру запиту бібліографічну (перелік і адреси документів) і фактографічну (фактичні довідки щодо конкретних відомостей) інформацію.

В СРСР ДІФ побудовано за такою ієрархічною схемою: Генеральний (всесоюзний), центральні галузеві, республіканські (територіальні) фонди, ДІФи при н.-д. інститутах, конструкторських бюро, на підприємствах. Генеральний ДІФ з природничих і тех. наук становить собою сукупність фондів всесоюзних і центр. галузевих інформаційних органів. За тим самим принципом будують ДІФи в галузях промисловості: центр. галузевий ДІФ становить собою сукупність фондів центр. галузевого інформаційного органу й фондів головних організацій галузі. У фонді центр. галузевого інформаційного органу збирають усі опубліковані матеріали з тематики галузі. Щодо наук.-тех. інформації, то в центр. орган надходять документи лише загальногалузевого значення, а в ДІФи головних організацій галузі — документи з закріпленої за ними тематики; або в фонді центр. галузевого інформаційного органу нагромаджується вичерпний фонд вітчизняної наук.-тех. документації й закордонних періодичних видань, а в фондах головних організацій — решта матеріалів з певної тематики.

Для координації й забезпечення оптим. діяльності ДІФу розробляють рубрикатор, у якому відображають тематичні розділи й підрозділи галузей науки й техніки, джерела комплектування й центри комплектування. Такий рубрикатор дає будь-якому інформаційному органові змогу визначити, до якої частини системи ДІФу треба звернутися за необхідною інформацією й куди треба посилати створювані інформаційні матеріали.

Основне призначення довідкового апарату (ДА) ДІФу — забезпечувати пошук інформації. ДА складається з комплексу каталогів, картотек, довідників та інформаційних видань (енциклопедії, словники, довідники, реферативні й бібліографічні видання). У комплекс каталогів і картотек ДА входять: головна картотека, бібліотечні каталоги, алфавітно-предметний покажчик, різні спец. картотеки.

У головній картотеці (ГК) зосереджено всі осн. матеріали за профілем організації, при якій створено ДІФ. У неї вміщують картки на книги й статті, на стандарти, наук.-тех. звіти й інформаційні листки, на описи збірників, проспектів і планів видань та реферативних і бібліографічних журналів. Картки в ГК розташовують, як правило, відповідно до універсальної десяткової класифікації (УДК).

За допомогою системи посилань і відсилань ГК може служити засобом координації всіх каталогів і картотек довідкового апарату. Для цього за роздільниками рубрик і підрубрик у ГК ставлять посилкові (відсилкові) картки, які відсилають до відповідних розділів бібліотечного каталога й до спец. картотек, створюваних, щоб відповідати на запити вузько спеціалізованого конкретного характеру. В таких спец. картотеках комплектують довідковий матеріал, який становить інтерес у першу чергу для даної організації: картотека з тих чи інших видів інформаційних матеріалів (звіти, переклади тощо), картотеки характеристик виробу, адреси фірм і заводів-виготовників тощо. В спец. картотеках застосовують різні способи індексування: предметні, дескрипторні, за УДК тощо.

Про вибір пошукових систем і пристроїв для ДІФу див. *Інформаційно-пошуковий пристрій*.

Літ.: Старобинская Н. Г. Участие технических библиотек в создании справочно-информационных фондов. М., 1965; Шестова И. Г. Справочно-информационный фонд (СИФ). В кн.: Теория и практика научно-технической информации. М., 1969.

П. В. Походзіло.

ДОВІРЧА ОБЛАСТЬ — узагальнення поняття *довірчого інтервалу* на випадок багатовимірного параметра. Для k-вимірного параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ Д. о., що відповідає довірчому рівневі ε або коефіцієнтові довіри $1 - \varepsilon$, — випадкова множина D точок k-вимірного простору, яку визначають за ε і спостереженнями *випадкової величини* з залежним від параметра θ розподілом, і така, що D містить значення θ з імовірністю $1 - \varepsilon$ при кожному θ. Найбільший інтерес становлять Д. о., які є опуклими, зв'язними і, в якомусь розумінні, найменшими множинами. Відомі методи наближеної побудови таких Д. о. при великому числі спостережень, а для деяких практично цікавих випадків Д. о. побудовано й при фіксованому числі спостережень.

А. Я. Дороговцев.

ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ для параметра θ, що відповідає довірчому рівневі ε, — інтервал з випадковими кінцями c_1 і c_2, що містить з імовірністю $1 - \varepsilon$ значення параметра θ при кожному θ. c_1 і c_2 — відомі ф-ції ε і спостережень *випадкової величини* з розподілом, що залежить від невідомого параметра θ, і наз. довірчими границями, що відповідають довірчому рівневі ε. Число $1 - \varepsilon$ наз. коеф. довіри. Для побудови Д. і. для параметра θ, як правило, використовують статистики (ф-ції спостережень), які є «добрими» (див. *Статистичні оцінки*) оцінками невідомого параметра θ і мають розподіл, що залежить лише від θ (в тому разі, якщо розподіл випадкової величини залежить і від інших невідомих параметрів). Найкоротші й асимптотично найкоротші Д. і. будують, використовуючи ефективні й асимптотично ефективні оцінки параметра θ. Напр., Д. і. для середнього значення m, побудований за n незалежними спостереженнями нормально розподіленої випадкової величини з невідомим середнім m і невідомою *дисперсією*, має вигляд:

$$\left(\bar{x} - t_\varepsilon \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \quad \bar{x} + t_\varepsilon \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right), \quad (1)$$

де $\bar{x}$ і s^2 — відповідно вибіркові *математичне сподівання* і дисперсія (див. *Емпірична функція розподілу*), а t_ε визначають за n і ε як значення t, для якого

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_{-t}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dx = 1 - \varepsilon, \qquad (2)$$

де
$$s_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

— щільність розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності.

Д. і. (1) будують на тій підставі, що статистика $\sqrt{n-1}\,\frac{\bar{x}-m}{s}$ має щільність розподілу ймовірності $s_{n-1}(x)$. Для визначення t_ε є таблиці. Теорію Д. і. розробив 1934 амер. математик Ю. Нейман. Див. також *Довірча область*.

Літ.: Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. М., 1948; Уилкс С. Математическая статистика. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 601—619].

А. Я. Дороговцев.

ДОВІРЧИЙ РІВЕНЬ — заздалегідь задавана *імовірність*, з урахуванням якої будують *довірчий інтервал* або *довірчу область*.

ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ — обчислювані за вибірковими даними кінці інтервалу, що залежить від результату спостережень, який з наперед заданою ймовірністю містить невідоме значення параметра розподілу *випадкової величини*. Див. також *Довірчий інтервал* для параметра θ, що відповідає довірчому рівневі ε, *Довірча область*.

ДОКУМЕНТ НАУКОВИЙ — різновид матеріального носія закріпленої на ньому *інформації наукової*, що має певну логічну завершеність. Треба, щоб Д. н. обов'язково був співвіднесений з часом і місцем його підготовки, а також з ім'ям його індивідуального чи колективного автора. Сукупність опублікованих Д. н. становить наукову і технічну л-ру, яка є матеріальною формою існування науки. Д. н. — це результат завершення наук. дослідження, засіб поширення наук. інформації у просторі й часі, осн. спосіб реалізації наступності, інтернац. характеру та ін. закономірностей науки, засіб утвердження пріоритету вченого, оцінки продуктивності його праці тощо. Отже, Д. н. є органічною частиною соціального механізму науки. Див. також *Інформатика*, *Інформація документальна*, *Науково-інформаційна діяльність*.

Р. С. Гіляревський, А. І. Чорний.

ДОКУМЕНТАЛЬНА ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА — див. *Інформаційно-пошукова система документальна*.

ДОМІНУВАННЯ в теорії ігор — 1) У *грі антагоністичній* з *виграшу функцією* $H(a, b)$ стратегія a_1 1-го гравця домінує над його стратегією a_2, якщо за будь-якої стратегії b 2-го гравця $H(a_1, b) \geqslant H(a_2, b)$. Симетрично визначається Д. стратегій 2-го гравця. 2) У *грі кооперативній* поділ x домінує над поділом y, якщо знайдеться така коаліція k, що забезпечує своїм членам виграші, які є відповідними компонентами вектора x (правильний смисл цього забезпечення визначається *характеристичною функцією* гри), і кожний член коаліції k в умовах поділу x одержує більше, ніж в умовах поділу y.

М. М. Воробйов.

ДОПОМІЖНОГО ОПЕРАТОРА МЕТОД — метод одержування компонент градієнта показника якості автоматичної системи керування за допомогою перетворювання сигналу системи допоміжним нелінійним (у загальному випадку) оператором. Розгляньмо *систему керування замкнену* (I на мал.), яка складається з об'єкта керування ОК й керуючого пристрою (регулятора) Р, описуваних відповідно операторами $Y_0(p, \alpha)$ та $Y_p(p, \beta)$, де $p = d/dt$ — оператор диференціювання, α — сукупність змінних параметрів α_i об'єкта ($i = 1, 2, \ldots, n$), β — сукупність варійову-

Блок-схема самонастроюваної системи керування з використанням методу допоміжного оператора: *I* — основна система; *II* — контур самонастроювання; *1* — допоміжні оператори; *2* — множильні ланки; *3* і *5* — блоки, які виконують операції N і $\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}$ відповідно; *4* — інтегратори; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — значення настроюваних параметрів.

ваних параметрів настроювання β_j регулятора ($j = 1, 2, \ldots, m$), $x(t)$ і $y(t)$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали системи, $v(t)$ — *керуюче діяння.* Часто *критерій якості систем автоматичного керування* I визначають через *похибку* системи ε

$$I = Nf(\varepsilon), \qquad (1)$$

де N — оператор або функціонал.

Як правило, треба, щоб I набував оптим. значення I_0, тобто

$$I_0 = \underset{\beta_j \in B_j}{\operatorname{extr}} I(\beta_1, \ldots, \beta_m) \qquad (2)$$

або в загальнішому випадку:

$$I_0 = \inf_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \ldots, \beta_m) \text{ або } I_0 = \sup_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \ldots, \beta_m), \qquad (3)$$

де B_j — допустима область зміни параметрів β_j.

При використанні градієнтної процедури пошуку оптимальних значень параметрів (див. *Градієнтний метод*) рівняння настроювання параметрів регулятора мають вигляд:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = A \frac{\partial I(\beta)}{\partial\beta} \qquad (4)$$

де A — числова матриця, β — вектор настроюваних параметрів. З (1) виходить:

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial\beta_j} = N \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_j}. \qquad (5)$$

Враховуючи, що $\varepsilon = x - y$, $y = Y_0(p, \alpha)\, v$, $v = Y_p(p, \beta)\, \varepsilon$ і беручи до уваги, що x не залежить від β, одержимо:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_j} = -\frac{\partial y}{\partial\beta_j}, \qquad (6,а)$$

$$\frac{\partial y}{\partial\beta_j} = Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial\beta_j}\varepsilon + Y_0(p, \alpha)\, Y_p(p, \beta) \frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_j}. \qquad (6,б)$$

Перетворення (6) дає:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_j} = -Y_{д_j}(p, \alpha, \beta)\,\varepsilon, \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (7)$$

де оператор

$$Y_{д_j}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha) Y_p(p, \beta)]^{-1} Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial\beta_j} \qquad (8)$$

наз. **допоміжним оператором.** З (7) і (5) видно, що перетворення похибки системи є цим оператором дає змогу визначити компоненти градієнта I, бо N і $f(\varepsilon)$ (див. (3)) заздалегідь задано (вибрано). Структурну схему контура самонастроювання, основану на використанні Д. о. м. для випадку, коли $A = \lambda I$ (де I — одинична матриця, λ — скалярний множник), наведено на мал. (контур II). Вираз (8) можна записати у вигляді:

$$Y_{д_j}(p, \alpha, \beta) = Y_{д_0}(p, \alpha, \beta)\, Y_{дi_j}(p, \beta), \qquad (9)$$

де $Y_{д_0}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha)\, Y_p(p, \beta)]^{-1} \times Y_0(p, \alpha)$ — спільна для всіх допоміжних операторів частина, а $Y_{дi_j}(p, \beta) = \dfrac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial\beta_j}$ — т. з. **істотні допоміжні оператори.** З (9) видно, що $Y_{д_0}(p, \alpha, \beta)$ залежить від параметрів об'єкта і регулятора, а $Y_{дi_j}(p, \beta)$ — тільки від параметрів регулятора.

Іноді для спрощення контура самонастроювання $Y_{д_j}(p, \alpha, \beta)$ апроксимують простішими ланками, зокрема використовують лише істотні допоміжні оператори для наближеного визначення компонент градієнта:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_y} \approx -Y_{дi_j}(p, \beta)\,\varepsilon. \qquad (10)$$

Д. о. м. використовують у т. з. безпошукових самонастроюваних системах. При цьому для досягнення оптим. значення Y не треба застосовувати спец. пошукові сигнали, проте необхідна значна апріорна інформація про структуру й параметри системи.

Літ.: Казаков И. Е. К статистической теории непрерывных самонастраивающихся систем. «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1962, № 6; Евланов Л. Г. Самонастраивающаяся система с поиском градиента методом вспомогательного оператора. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1963, № 1; Костюк В. И. Беспоисковые градиентные самонастраивающиеся системы. К., 1969 [бібліогр. с. 264—273].
В. І. Костюк, Ю. В. Крементуло.

ДОПУСТИ́МА МНОЖИНА́ — множина *допустимих векторів* у задачах *програмування математичного.* Д. м. буває обмежена або необмежена, відкрита або замкнена, опукла або неопукла. Від перелічених властивостей Д. м. залежить існування, єдиність і характеристичні властивості *екстремуму.*

ДОПУСТИ́МА О́БЛАСТЬ — те саме, що й *допустима множина.*

ДОПУСТИ́МА ТО́ЧКА — те саме, що й *допустимий вектор.*

ДОПУСТИ́МЕ КЕРУВА́ННЯ — значення *керуючого діяння* або керуючого параметра, яке має деякі обмеження, зумовлені конкретними особливостями керованого об'єкта. Фіз. суть і походження цих обмежень можуть бути різноманітними (конструктивні обмеження, експлуатаційні). Напр., одним з параметрів керування рухом автомобіля є кут повороту керма. Конструктивні особливості автомобіля такі, що цей параметр підпорядкований обмеженням виду $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$,

де α і β — двоє крайніх положень керма. Експлуатаційними обмеженнями для автомобіля є, напр., температура води або мастила у двигуні, яка не повинна підніматися вище від певного рівня.

У випадку керованого об'єкта, що має кілька керуючих параметрів $u_1, \ldots, u_r$ вважають, що конструкцією об'єкта й умовами експлуатації в просторі змінних $u_1, \ldots, u_r$ задано якусь множину U. Керуючі параметри в кожний момент часу повинні набувати лише таких значень, щоб точка $u = (u_1, \ldots, u_r)$ належала множині U. Множину U називають **областю керування**. У найпростішому випадку керуючі параметри можуть незалежно один від одного змінюватися в деяких межах: $\alpha_i \leqslant u \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, причому ці нерівності визначають область керування у вигляді r-вимірного паралелепіпеда. У загальному випадку внаслідок конструкції об'єкта між керуючими параметрами $u_1, \ldots, u_r$ можуть бути зв'язки, що виражаються, наприклад рівняннями виду $\varphi(u_1, \ldots, u_r) = 0$ або нерівностями $\psi(u_1, \ldots, u_r) \leqslant 0$. При цьому область керування може мати геометрично складніший характер. Так, напр., якщо параметри u_1 і u_2 зв'язані співвідношенням $(u_1)^2 + (u_2)^2 - 1 \leqslant 0$, то область керування являє собою круг.

Для застосувань особливо важливий випадок замкненої області керування, тобто випадок, коли точка u може бути всередині множини U або на її межі. При визначенні Д. к. враховують і характер зміни керування в часі $u(t)$. При цьому розглядають керування у вигляді і неперервних, і кусково-неперервних функцій часу. Припущення про кусково-неперервні керування зумовлене тим, що оптимальні керування в багатьох випадках виявляються розривними. Це потребує стрибкоподібної, миттєвої зміни керуючих параметрів, що, як правило, не суперечить фіз. властивостям керованого об'єкта. Для математичного описування об'єкта керування треба вказати не тільки на його математичну модель, а й Д. к. Див. також *Оптимального керування теорія*.

Літ.: Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.

В. І. Іваненко.

ДОПУСТИ́МИЙ ВЕ́КТОР — вектор, що задовольняє всі обмеження в задачах математичного програмування. Ітераційні процеси, як правило, починаються з якогось Д. в. Для відшукання Д. в. часто застосовують загальні *оптимізації методи*. Так, вихідний *опорний план* у задачі матем. *програмування лінійного* можна знайти *симплекс-методом*, застосувавши його до якоїсь нової задачі, еквівалентної вихідній. При цьому Д. в. нової задачі очевидний. Пошук Д. в. здебільшого можна звести до якої-небудь задачі *програмування математичного*, для якої за Д. в. беруть довільний вектор у просторі змінних вихідної задачі.

Для відшукання Д. в. множини $\Omega = \{x : f_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, m\}$ досить у задачі відшукування $\min\{\xi : f_j(x) \leqslant \xi \ (j = 1, \ldots, m)\}$ зробити якусь кількість кроків, починаючи від вектора $(x^0, \xi^0) = (x^0; \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} f_j(x^0))$, де x^0 — довільне. Наближення x^k, що відповідає значенню $\xi_k \leqslant 0$, є Д. в. множини Ω.

Методи матем. програмування, що грунтуються на теорії двоїстості, дають змогу будувати послідовність наближень, збіжну до оптим. вектора зовні *допустимої множини.*

Р. А. Поляк, М. Є. Примак.

ДОПУСТИ́МИЙ ШЛЯХ у **теорії графів** — шлях, уздовж якого мають задовольнятися задані обмеження. Нехай дано граф (IU), де I — множина його вершин, а U — множина його дуг. У множині I виділено якусь фіксовану підмножину A. У відповідність кожній вершині i $(i \in I)$ графа поставлено множину Φ_i якогось простору R і ф-цію $f_i(\mu_i)$, що набуває значень з простору R і визначена на множині шляхів μ_i, які виходять з A й заходять в i. Шлях $\mu_{i_m} = (i_0, i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_m) = (\mu_{i_k}, i_{k+1}, \ldots, i_m)$, $i_0 \in A$ наз. допустимим, якщо $f_{i_k}(\mu_{i_k}) \in \Phi_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Нехай у множині I, крім підмножини A, виділено й підмножину B. Кожному Д. ш. μ з A в B поставлено у відповідність число $l(\mu)$, яке наз. довжиною цього шляху. Найкоротшим Д. ш. називають Д. ш. $\mu_{i_m} = (i_0, i_1, \ldots, i_m)$, який має мінім. довжину і для якого $f_{i_m} = (\mu_{i_m}) \in \Phi^*_{i_m}$, $\Phi^*_{i_m} \subseteq \Phi_{i_m}$.

Багато екстрем. задач на графах, теорії розкладів і дискретного програмування зводяться до відшукування найкоротшого Д. ш.

І. М. Мельник.

ДОПУСТИ́МИХ НА́ПРЯМІВ МЕ́ТОД — один з *оптимізації методів*.

ДОСТА́ТНІ СТАТИ́СТИКИ — див. *Статистичні оцінки*.

ДОСТА́ТНІСТЬ ОЗНА́К. У *розпізнаванні образів* набір ознак $x = f(z)$ наз. достатнім щодо набору деяких первісних ознак z, якщо x дає змогу одержати за будь-якої функції втрат, пов'язаних з помилковим розпізнаванням, те саме значення *риску розпізнавання*, що набір ознак z. Це виконується тоді й тільки тоді, коли апостеріорні розподіли класів при перетворенні ознак $x = f(z)$ лишаються незмінними, тобто $P(k/f(z)) = P(k/z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, де k — порядковий номер класу, n — число класів. Термін «Д. о.» запозичено з матем. статистики, де використовують аналогічне поняття «достатньої статистики». Д. о. x означає, зокрема, що, користуючись ознаками x, можна забезпечити ту саму мінім. імовірність помилки розпізнавання, що й при використанні ознак z. Достатніми ознаками, напр., є набір апостеріорних імовірнос-

тей $P(k/z)$, $k = 1, \ldots, n$. Звичайно ознаки $x = f(z)$ простіші за первісні ознаки z. Тому дуже важливо знайти для цих первісних ознак простіші достатні ознаки x і так спростити (здешевити) *розпізнавальну систему*.

Створюючи розпізнавальний пристрій, конструктор досліджує, чи є вибрані ознаки достатніми щодо первісних. Напр., при розпізнаванні зображень неперервна функція яскравості двох змінних перетворюється на набір дискретних величин розкладанням поля зображення на елементи (клітинки) і дискретним вимірюванням середньої яскравості кожного з них. Потрібно вибрати розміри клітинок і кількість рівнів квантування так, щоб дискретний опис був мінім. за обсягом інформації й водночас достатнім. Щоб вибрати достатні ознаки, треба знати розподіли $P(k/z)$ і $P(k/x)$. Вони, як правило, невідомі. Тому в практиці вибирають достатні ознаки експериментально або на основі інтуїції. Здебільшого обмежуються тим, що для різних наборів ознак x визначають мінім. імовірність помилки розпізнавання й вибирають той набір, який забезпечує ту саму помилку розпізнавання, що й первісні ознаки. *Т. К. Вінцюк.*

ДОСТУП ДОВІЛЬНИЙ — спосіб організації звертання до *пам'яті ЦОМ*, при якому час, що затрачується на звертання, не залежить від розміщення інформації, вибраної чи розміщеної раніше.

ДОСТУП ПОСЛІДОВНИЙ — спосіб організації звертання до *пам'яті ЦОМ*, при якому час, що затрачується на звертання, залежить від розміщення інформації, вибраної чи розміщеної раніше.

ДОЦІЛЬНІСТЬ у кібернетиці — загальна характеристика поведінки складних динамічних систем, яка спрямована на досягнення певного кінцевого результату й реалізується на основі механізмів *зворотного зв'язку* й *адаптації*. Поняття доцільної поведінки дає змогу розглянути під єдиним кутом зору і процеси життєдіяльності людини та вищих тварин, і функціонування різних сервосистем у техніці.

Поняття Д. спочатку склалося в класичному природознавстві, де воно означало пристосованість організмів до умов навколишнього середовища, а наукова інтерпретація поняття набула відносної завершеності в рамках рефлекторної теорії. Виникнення *кібернетики* радикально змінило емпіричну базу наукової інтерпретації поняття Д. Це мало свій прояв насамперед у створенні штучних автомат. пристроїв, які реалізують в умовах виробн. функції контролю й керування, які традиційно вважали прерогативою людського розуму. Функціонування кібернетичних пристроїв, що уособлюють своєрідну єдність природи та людського розуму, наділяється рисами доцільної поведінки. Це дало новий імпульс розвиткові наукової інтерпретації поняття Д. і поставило вимогу її експлікації (уточнення) в термінах кібернетики. Перша така експлікація належить амер. математикові Н. Вінеру (1894—1964) та його співробітникам (А. Розенблюту й Дж. Бігелоу). Згідно з цим означенням, поняття доцільного, або телеологічного, означає, що акт або поведінку можна вважати спрямованою на досягнення мети, тобто фінальної умови, за якої система встановлює певне співвідношення в часі чи в просторі з іншою системою, а термін «телеологія» вживається як синонім мети, контрольованої зворотним зв'язком.

Строгіша експлікація поняття Д. в термінах кібернетики, яка розкриває «механізм» доцільної поведінки, стала можливою, коли склалася т. з. фізіологія активності — теоретична концепція, що зародилася на стиках фізіології, психології й кібернетики. У світлі уявлень фізіології активності будь-яка пристосовна реакція, яка конституює ту чи іншу форму доцільної поведінки, складається за такою осн. функціональною схемою: потреба (яка виражає зміну внутр. відношень під впливом «середовища індивіда» або «середовища виду»); настанова; відібраний під впливом настанови стимул; реакція; зворотний зв'язок; звіряння; надання результатові звіряння завдяки впливові настанови функції позитивного або негативного підкріплення; корекція. Інакше кажучи, найрізноманітніші форми пристосовних реакцій, незалежно від того, чи спричинюються ці реакції стимулами, що виходять із зовн. або внутр. середовища організму, реалізуються за тією самою осн. функціональною схемою, тобто спираються безпосередньо не на заздалегідь преформовану (зовн. стимулом), а на активно — під впливом «успіху» (плюс ефект звіряння) або «неуспіху» (мінус ефект звіряння) — кориговану сукупність виконавчих збуджень. Саме в цьому протиставленні принципу мікроетапної коригованості механістичному принципові відправної преформованості полягає те нове розуміння функціональної структури адаптивних актів, що конституюють доцільну поведінку, яка склалася в рамках біокібернетичного підходу.

Деякі вчені виділяють як характерну ознаку доцільної поведінки властивість самозбереження, виживаності системи в умовах несталості зовн. середовища. Так, напр., рад. математик А. М. Колмогоров (н. 1903) вважає, що поняття «діяти доцільно» включає вміння оберігати себе від зовнішніх впливів, здатність сприяти розмноженню особини. В такому розумінні Д. формується історично, у процесі прогресивної еволюції, передумовою якої є природний добір видів. За твердженням рад. фізіолога М. О. Бернштейна, Д., визначувана метою самозбереження, виживання, до якої прагнуть активно, не є необхідною і споконвічною умовою еволюції, оскільки елементарні механізми дарвінівського survival of the fittest (виживання найпристосованішого) здійснюються через флуктуаційні спадкові мутації і не потребують цілеспрямованості, активного передпрограмування.

Конкурентна боротьба флуктуюючих мутантів, яка лежить в основі природного добо-

ру, є тут випадковою. Д. виникає там, де фактори випадковості відіграють другорядну роль порівняно з факторами активного програмування, і життєдіяльність організмів виступає як боротьба за витримування цієї програми, як процес вироблення негентропії (негативної ентропії), яка переважає над деструктивними змінами. Зростання негентропії і пов'язані з ним інформаційні процеси становлять те загальне, що характеризує активну цілеспрямовану поведінку людини та функціонування різних сервомеханізмів абіогенної природи.

Інформаційні процеси, здатність високоорганізованих систем виробляти й здійснювати цілі своєї діяльності становлять фундаментальну характеристику всіх складних форм поведінки. Для позначення й формалізації цієї характеристики англ. кібернетик А.-М. Ендрю запровадив поняття hedony, яке являє собою функцію, що її значення виражає ступінь досягнення цілі. На його думку, hedony відноситься і до біологічних імпульсів тварин, які виражаються в активних діях, і до цілеспрямованого функціонування кібернетичних пристроїв. Поняття hedony пов'язане з вінерівським поняттям «афективного тонусу», який зумовлює процес вироблення умовного рефлексу. Разом з тим уявлення про здатність досить складних автоматів самостійно виробляти цілі своєї роботи, про «свободу волі» автоматів грунтуються на елементарних помилках антропоморфізму.

Цілеположна діяльність людини моделюється (імітується) антиентропійним цілеспрямованим функціонуванням автомата. Якісна своєрідність цих, по суті, відображальних процесів пов'язана з принциповою різницею в способах вироблення (постановки) цілей, із зумовленістю їх законами реальної дійсності. Як указує В. І. Ленін, «... цілі людини породжені об'єктивним світом і передбачають його,— знаходять його як дане, наявне» (Повне зібрання творів, т. 29, с. 159), проте взаємовідношення свідомої діяльності людини і природи не зводиться до простого збігу. Людина виділяє себе з природи. В основі її цілеположної діяльності лежить бажання підкорити світ собі. Тому цілі діяльності видаються людині зовн. відносно навколишньої природи, хоча вони породжені природою. Зміст цих цілей визначається не тільки (й не стільки) біологічними імпульсами, але насамперед соціальними мотивами, бо він складається в процесах суспільного життя людини. Проте зміст цілей функціонування автомат. пристроїв визначає людина. Цілеспрямоване функціонування машини несе на собі відбиток цілеположної діяльності людини, яка супроводжується зростанням організованості в навколишньому середовищі. Машина виступає як знаряддя праці, тоді як мета трудового процесу виходить від людини. Об'єктивна цілеспрямованість функціонування пристроїв, визначувана як внутр. необхідність, як імпульс, узятий поза зв'язком з цілеположною діяльністю людини, не може мати іншої інтерпретації, крім телеологічної, лише вираженої в термінах кібернетики.

Літ.: Бернштейн Н. А. Пути развития физиологии и связанные с ними задачи кибернетики. В кн.: Биологические аспекты кибернетики. М., 1962; Колмогоров А. Н. Автоматы и жизнь. В кн.: Возможное и невозможное в кибернетике. М., 1964; Свинцицкий В. Н. Понятие целесообразности и функционирование кибернетических систем. В кн.: О сущности жизни. М., 1964; Бассин Ф. В. О подлинном значении нейрофизиологических концепций Н. А. Бернштейна. «Вопросы философии», 1967, № 11.

В. М. Свінціцький.

ДРЕЙФ НУЛЬОВОГО РІВНЯ операційного підсилювача — зміна в часі величини вихідної напруги, визначувана за відсутності корисного вхідного сигналу. Д. н. р. є *випадковим процесом*, і тому його найточніше можна охарактеризувати ймовірнісними або статистичними показниками: макс. значенням і найімовірнішим часом досягнення його. Шляхом поділу величини Д. н. р. на коеф. передавання операційного підсилювача (ОП) визначається віднесений до входу Д. н. р. Його можна подавати як неправильний випадковий вхідний сигнал, що накладається на корисний вхідний сигнал і спричинює одну з складових похибки вихідного сигналу. В процесі проектування й експлуатації ОП величину віднесеного Д. н. р. прагнуть звести до мінімуму. Д. н. р. спричинюється флюктуаціями фіз. процесів. Так, в ОП з резистивними зв'язками (без проміжних перетворювачів форми сигналу) осн. причинами Д. н. р. є: нестабільність напруг джерел живлення й контактних напруг між електродами ламп, зміна емісії катода й опорів в анодних колах, нестабільність сіткового струму, температурна залежність параметрів транзисторів, недостатня ізоляція вхідного кола від кіл з високою напругою, неоднаковість параметрів і старіння ламп і транзисторів.

Є такі методи зменшування величини віднесеного Д. н. р.: стабілізація напруг джерел живлення, побудова вхідних каскадів ОП за містковими й балансними схемами, застосування ламп з малим сітковим струмом та «ізоляція землею» вхідних кіл ОП. Ці способи дають змогу на порядок зменшувати величину віднесеного Д. н. р. Використання додаткового каналу підсилювання в ОП з модуляцією та демодуляцією сигналу (МДМ-підсилювачі) дає змогу зменшувати величину віднесеного Д. н. р. до 25—50 *мкв/год*; схеми ОП з паралельними каналами дають зменшення до 10—15 *мкв/год*. У підсилювачах, виконаних за простими схемами, без спец. засобів зменшування Д. н. р. й при істотній величині його, застосовують елементи регулювання рівня вихідної напруги, або т. з. «наладжування нуля», яке виконують періодично в процесі експлуатації аналогового розв'язувального пристрою. Віднесена величина Д. н. р. для деяких аналогових обчисл. машин така: «МПТ-9-3» — 600 *мкв* (8 *год*); «ЛМУ-1» — 3 *мв* (10 *хв*); «МН-7» — 5 *мв* (10 *хв*); «МН-10» — 2 *мв* (8 *год*); «ЭМУ-10» — 30 *мкв* (8 *год*).

А. Ф. Верлань.

ДРОБОВИ́Х КРО́КІВ МЕ́ТОД — один з економічних методів розв'язування задач математичної фізики. Коли вимірність задачі збільшується, кількість операцій для одержання числового розв'язку зростає внаслідок зростання кількості точок і логіч. труднощів складання *програми* розрахунку. Для системи дифер. рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \qquad (1)$$

де $L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифер. оператор, $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, схеми звичайної апроксимації (див. *Скінченнорізницеві методи*)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n, \quad \Lambda_1 + \Lambda_0 \sim L$$

стають неефективними в разі багатовимірних задач. Щоб знайти u^{n+1}, необхідне обернення оператора $E - \tau\Lambda_1$, що потребує const $N^{\alpha(m)}$ операцій, де N — кількість точок на один вимір, m — кількість просторових вимірів, а $\alpha(m)$ дуже зростає зі збільшенням m. Так, напр., для рівняння теплопровідності $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 3$.

Щоб одержати економічні усталені різницеві схеми, запропоновано методи, основані на таких ідеях: а) розщеплення різницевих схем, б) набл. факторизації; в) розщеплення (слабкої апроксимації) дифер. рівнянь.

У випадку рівняння (1) відповідні різницеві схеми мають такий вигляд (для спрощення взято два дробові кроки):

а) схема розщеплення:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{01} u^n,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{12} u^{n+1} + \Lambda_{02} u^{n+1/2}, \qquad (2)$$

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{12} = \Lambda_1, \quad \Lambda_{01} + \Lambda_{02} = \Lambda_2;$$

б) схема наближеної факторизації:

$$(E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12})\, u^{n+1} = (E + \tau\Omega)\, u^n, \qquad (3)$$

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{12} = \Lambda_1, \quad \Omega \sim \Lambda_0;$$

в) схема слабкої апроксимації:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\, u = Lu, \quad L = L_1 + L_2,$$

$$\alpha_1(t, \tau) = 2,$$

$$\alpha_2(t, \tau) = 0 \text{ при } t \in \left| n\tau, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right), \qquad (4)$$

$$\alpha_1(t, \tau) = 0,$$

$$\alpha_2(t, \tau) = 2 \text{ при } t \in [(n + 1/2)\,\tau,\ (n+1)\,\tau).$$

У випадку комутативних операторів схеми (2) і (3) еквівалентні за умови, що $\Omega = \Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \tau\Lambda_{01}\Lambda_{02}$. І в тому, і в іншому випадках обернення оператора $E - \tau\Lambda_1$ заміняється оберненням оператора $(E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12})$, тобто послідовним оберненням операторів $E - \tau\Lambda_{11}$, $E - \tau\Lambda_{12}$, взагалі кажучи, простішої структури. За умови $\Lambda_{11} + \Lambda_{12} \sim \Lambda_1$ має місце співвідношення набл. факторизації

$$E - \tau\Lambda_1 \sim (E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12}).$$

Трактування методу в) дає змогу розглядати схему розщеплення

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2},$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+1}$$

як просту апроксимацію рівняння (4), що слабо апроксимує рівняння (1)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\alpha_1\Lambda_1 + \alpha_2\Lambda_2)\, u^{n+1}.$$

Отже, в основу методу розщеплення покладено представлення складних операторів через простіші, так що інтегрування початкового рівняння зводиться до інтегрування рівнянь простішої структури. При цьому схеми дробових кроків обов'язково повинні відповідати умовам апроксимації і стійкості лише в остаточному підсумку (коли їх записують у «цілих» кроках).

Методом розщеплювання розв'язують багато складних задач матем. фізики. До однієї з модифікацій методу розщеплювання належить метод «частинок у комірках», широко використовуваний при розв'язуванні задач матем. фізики, в якому розщеплювання не пов'язано зі зниженням розмірності операторів.

Існує зв'язок між схемами розщеплювання й теорією *півгруп*, а саме: декомпозиція інфінітезимальних операторів півгрупи безпосередньо стосується схем розщеплення. Однак метод розщеплення є змістовнішим не лише практично (бо він забезпечує побудову економ. різницевих схем), а й теоретично, оскільки декомпозиція операторів у методі розщеплювання відбувається при значно слабших припущеннях.

Великого розвитку набули схеми розщеплення підвищеного порядку точності, і вже досягнуто певного прогресу в ефективній реалізації їх.

Літ.: Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [бібліогр. с. 189—193]; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [бібліогр. с. 538—550]. *М. М. Яненко.*

ДРОБО́ВО-ЛІНІ́ЙНОГО ПРОГРАМУВА́ННЯ ЗАДА́ЧА — задача мінімізації (максимізації) дробово-лінійної ф-ції

$$R(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{d_1 + (c_1, x)}{d_2 + (c_2, x)} \qquad (1)$$

при лінійних обмеженнях

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0, \qquad (2)$$

де A — матриця $m \times n$; c_1 і c_2 — n-вимірні вектори; b — m-вимірний вектор, d_1 і d_2 — дійсні числа, $x \geqslant 0$ означає невід'ємність усіх компонент вектора x. Один з можливих підходів до дослідження Д.-л. п. з. полягає ось у чому. Нехай X — множина, яку визначають обмеженнями (2). Д.-л. п. з. наз. допустимою, якщо X не пусте і $L_2(x)$ відмінне від нуля хоч би в одній точці цієї мн-ни. Розв'язуючи задачу мінімізації, розглядають дві допоміжні задачі *програмування лінійного*:

$$\min \{d_1 z_0 + (c_1, z)\ \left|\ \begin{array}{l} Az = bz_0; \\ d_2 z_0 + (c_2, z) = 1; \\ z_0 \geqslant 0; \quad z \geqslant 0; \end{array}\right.$$

і

$$\min \{-d_1 z_0 - (c_1, z)\ \left|\ \begin{array}{l} Az = bz_0; \\ d_2 z_0 + (c_2, z) = -1; \\ z_0 \geqslant 0, \quad z \geqslant 0. \end{array}\right.$$

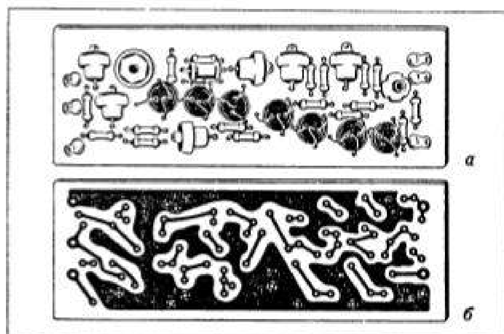
Доведено, що для того, щоб Д.-л. п. з. була допустимою, необхідно і достатньо, щоб принаймні в одній з цих задач — у 1-ї чи 2-ї — був допустимий план з $z_0 > 0$; при цьому, коли допустимий план у задачі 1-ї чи 2-ї існує, то у відповідної задачі існує і допустимий план з $z_0 > 0$; коли Д.-л. п. з. допустима, а мн-на допустимих планів однієї з задач — 1-ї чи 2-ї — пуста, то $\inf\limits_X \left\{\frac{L_1(x)}{L_2(x)}\right\}$ збігається з оптим. значенням цільової ф-ції 2-ї задачі. Якщо Д.-л. п. з. допустима, а задача 1-а і 2-а мають допустимі плани, то $\inf\limits_X \left\{\frac{L_1(x)}{L_2(x)}\right\}$ збігається з мінімумом серед оптим. значень цільових ф-цій, обох задач 1-ї і 2-ї. Ці твердження зводять Д.-л. п. з. до розв'язування задач лінійного програмування. Перехід від змінних z_0, z до змінних x здійснюють за ф-лами:

$$z_0 = \frac{-1}{|L_2(x)|}; \quad z = \frac{x}{|L_2(x)|}.$$

Д.-л. п. з. часто виникають в економ. задачах, коли за цільову ф-цію беруть «відносну ефективність» (напр., прибуток, віднесений до одиниці витрат). *Н. З. Шор.*

ДРУКО́ВАНА СХЕ́МА — монтажний вузол електронної апаратури, в якому з'єднання між елементами схеми виконано у вигляді плоских провідників, нанесених на ізоляційну основу. Друкованим способом виготовляють конденсатори, опори, індуктивності й контакти перемикачів, а найчастіше — електр. з'єднання між елементами схеми, а самі елементи встановлюють на платах (див. мал.), пропускаючи їхні виводи в отвори, просвердлені в точках з'єднання, або накладаючи планарні виводи елементів на контактні площини плат. Ідеї створення Д. с. висловлювали в Росії ще 1904, але практично здійснити їх стало можливим після того, як було створено нові матеріали, малогабаритні деталі й розроблено спец. технологію Д. с.

Відомо понад 40 різних технологічних методів виготовляння Д. с.: травлення, гальванічний, переносу, вакуумного напилення та ін. Всі ці способи можна поділити на 2 класи: за способами 1-го класу суцільний металевий шар наносять на ізоляційну основу, потім ті місця, в яких мають залишитися провідники, покривають захисним шаром, решту металевої плівки видаляють; за способами 2-го класу метал наносять лише на ті ділянки ізоляційної основи, які мають стати провідниками. При виготовленні Д. с. способом трав-



Друкована схема: *а* — вигляд з боку начіпних деталей; *б* — вигляд з боку друкованого монтажу.

лення вихідним матеріалом є фольговані діелектр. пластини. Ті ділянки металевої фольги, які мають виконувати роль провідників, покривають хімічно стійким шаром, а незахищені ділянки видаляють у травильній ванні. При гальванічному методі вихідним матеріалом є ізоляційна плата з отворами, всю поверхню якої покрито тонким хімічно осадженим провідним шаром. Ділянки плати, де не повинно бути провідників, покривають захисною маскою, а на ділянки, що відповідають майбутнім провідникам, у гальванічній ванні нарощують металевий шар, потім тонкий первинний шар провідника витравлюють. Виготовляючи Д. с. методом переносу, провідники одержують на відполірованій металевій поверхні осаджуванням в електролітичній ванні, потім їх переносять на ізоляційну основу. Щоб нанести рисунок, застосовують метод шовкографії, фотометод, офсетний, електроннопроменевої літографії, напилення крізь трафарет тощо. Фотоспосіб забезпечує точне відтворення рисунка схеми, його застосовують у малосерійному виробництві. Для масового виробництва застосовують шовкографію — нанесення захисного шару за допомогою еластичної лопаточки крізь отвори дрібної шовкової чи металевої сітки на ділянки, що підлягають захистові. Перспективною є електронно- й світлопроменева технологія одержування рисунка друкованого монтажу з використанням електронних керуючих обчисл. машин. Як струмопровідні матеріали використовують мідну, нікелеву або алюмінієву фольгу. Матеріал основи повинен мати добрі ізоляційні властивості,

малу діелектр. проникність, добру вологостійкість і достатню термостійкість. Ці вимоги задовольняють гетинакс, поліетилен, фторопласт, лавсан та ін. Начіпні деталі встановлюють на друковану плату вручну або на автоматичній лінії. Друковані плати дають змогу автоматизувати паяння, якщо всі начіпні деталі розміщено з одного боку, а виводи — з другого. Групове паяння провадять кількома способами: занурюванням у розплавлений припій, вибірковим паянням через фільєри, хвилею припою, що створюється за допомогою електромагнітного нагнітача, та ін. При паянні хвилею припою на поверхні припою не буває окисної плівки, він увесь час переміщується і добре змочує місця паяння. Припій вибирають з температурою плавлення, яка дає змогу провадити групове паяння без відшаровування провідників і не порушуючи структури ізоляційної основи. Можливість автомат. складання Д. с. передбачають, розробляючи друкований монтаж. Деталі розміщують у взаємно перпендикулярних напрямах, їхні виводи вміщують у вузлах координатної сітки, крок якої вибирають залежно від кроку автомат. лінії. Товщину й ширину друкованих провідників і віддалі між ними вибирають залежно від матеріалу, густини струму, допустимого спаду напруги, паразитної ємності та індуктивності, потрібної мех. міцності з'єднання з ізоляційною основою й технології нанесення провідників. Внаслідок доброго тепловідводу плоскі друковані провідники допускають більшу густину струму, ніж круглі такого самого перерізу. Щоб зменшити паразитні ємності, використовують плоскі друковані екрани. Залежно від ширини плоского екрана, відстані від екрана до провідників і ширини провідників паразитна ємність зменшується в 2—10 раз, і це має істотне значення у високочастотних схемах. Провідники, які перебувають під потенціалом «землі», роблять широкими, щоб зменшити паразитні зв'язки за рахунок зрівнювальних струмів. Щоб запобігти здиманню та відшаровуванню провідників під час групового паяння, на ділянках фольги завширшки понад 4 *мм* роблять щілиноподібні розриви або вікна. Застосування *інтегральних схем* висуває нові вимоги до друкованого монтажу. Корпуси елементів займають значно меншу площу, ніж потрібно для розміщення друкованих провідників при звичайному методі одно- або двошарового монтажу, тому з'єднувальні провідники стають довгими, зростають розподілені індуктивності та ємності. Застосування багатошарового друкованого монтажу дає змогу значно вкоротити провідники, бо монтаж стає об'ємним. Внаслідок цього краще використовується простір, значно полегшується конструювання схеми, підвищується заг. надійність пристрою. Для виготовлення багатошарових друкованих плат основними є методи пошарового нарощування, наскрізної металізації та «відкритих контактних площинок».

Д. с. мають кілька істотних переваг перед схемами з начіпним монтажем: підвищується мех. міцність блоків (бо елементи схеми міцно зв'язані з ізоляційною основою), ступінь стабільності та ідентичності паразитних електр. параметрів монтажу, спрощується настроювання й регулювання, зменшуються габарити блоків. Методи машинного проектування Д. с. дають змогу автоматизувати проектування й виробництво їх.

Літ.: Майоров С. А. Технология производства вычислительных машин. М.— Л., 1965 [бібліогр. с. 406—408]; Фадеев Н. И. Технология производства узлов электронных вычислительных машин. М., 1967 [бібліогр. с. 305—306]. *І. В. Медведєв.*

ДУА́ЛЬНЕ КЕРУВА́ННЯ — керування, в якому керуючі діяння мають двоїстий характер; їх використовують для вивчення керованого об'єкта (КО) і для доведення його до потрібного стану. Д. к. застосовують у *системі автоматичного керування* (САК) у тому випадку, коли апріорна інформація про КО в керуючому пристрої (КП) не достатня і вивчення поведінки КО може дати додаткові відомості про його властивості. При цьому КП розв'язує дві задачі: на основі інформації, що надходить, з'ясовує властивості й стан КО і за даними про КО визначає, які дії необхідні для керування. В заг. випадку в САК процеси вивчення КО та керування ним пов'язані й становлять складний двоїстий, або дуальний, процес, розвиток якого характеризує якість роботи системи.

Завдання синтезу оптим. алгоритму керування в теорії Д. к. для окремого випадку зводиться ось до чого. Припустимо, що відомою є *модель математична* КО, яка в дискретному часі має вигляд:

$$x_k = f(u_k, z_k), \qquad (1)$$

де x_k — регульована величина, скінченна й однозначна функція $f(\cdot)$ — оператор КО, u_k — керуюче діяння, а $k = \frac{t}{\Delta t}$, Δt — інтервал *квантування* часу t. *Збурювальне діяння* z_k, яке не можна виміряти КП, вважатимемо невідомим сталим у часі параметром z із заданою апріорною щільністю *розподілу ймовірностей* $p_0(z)$. У k-й момент часу в КП відомим є бажане значення регульованої величини x_k^*. Додаткова інформація про величину z міститься у векторі спостережень $(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_0) = \mathbf{y}_{k-1}$ величини x у попередні моменти часу й у векторі керувань $(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_0) = \mathbf{u}_{k-1}$, які можуть зберігатися в пам'яті КП і являють собою спостережувану передісторію керованого процесу. Для практики значний інтерес становить випадок, коли $y_i = x_i + h_i$, $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, де h_i — випадкова похибка вимірювання величини x_i з відомою щільністю розподілу ймовірностей $p(h_i)$.

Відхилення регульованої величини x_k від її бажаного значення x_k^* призводить до втрат

у системі, які можна оцінити питомою функцією втрат $W_k = W(x_k, x_k^*)$. Система функціонує протягом заданого часу n і загальна функція втрат має вигляд

$$W = \sum_{k=0}^{n} W(x_k, x_k^*).$$

Назвемо оптимальною систему, для якої повний риск R — *математичне сподівання* ф-ції втрат

$$R = M\{W\} = \sum_{k=0}^{n} M\{W_k\} = \sum_{k=0}^{n} R_k \qquad (2)$$

— мінімальний. Тут R_k — питомий риск, який визначають як

$$R_k = \int\limits_{\omega(\mathbf{y}_{k-1},\, \mathbf{u}_{k-1})} r_k \cdot p(\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})\, d\omega. \qquad (3)$$

Функціонал r_k в (3), який наз. умовним питомим риском, являє собою матем. сподівання питомих втрат W_k при фіксованих значеннях векторів $\mathbf{y}_{k-1}$ та $\mathbf{u}_{k-1}$. Його визначають у вигляді

$$r_k = \int\limits_{\omega(z,\, uk)} W[x_k(u_k, z)\, x_k^*] \times$$

$$\times\, p(z/\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})\, \Gamma_k\, d\omega, \qquad (4)$$

де $\Gamma_k = p(u_k/\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ — умовна щільність розподілу u_k, яку наз. питомою стратегією керування. У (3) й (4) символом $\omega(\cdot)$ позначено область інтегрування. Вираз $p(z/\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ являє собою апостеріорну щільність розподілу невідомого параметра z і при заданих апріорних щільностях $p_0(z)$ і $p(h_i)$ його знаходять за формулою Байєса

$$p(z/\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) =$$

$$= \frac{p_0(z) \prod\limits_{i=0}^{k-1} p(y_i/z, u_i) \prod\limits_{i=0}^{k-1} \Gamma_i}{p(\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}. \qquad (5)$$

Умовну щільність розподілу $p(y_i/z, u_i)$ визначають з урахуванням (1) за відомою щільністю розподілу $p(h_i)$. Послідовність ф-цій $\delta = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ прийнято називати стратегією керування. Залежність риску R від стратегії δ позначимо через R^δ. Стратегію, яка мінімізує риск R, наз. оптимальною. Цю стратегію шукають у класі допустимих стратегій Δ. З (3 — 5) випливає, що кожний доданок R_k у (2) залежить від вибору послідовності $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$. При цьому вибір питомої стратегії Γ_k впливає не лише на риск R_k у k-й момент часу, а й на значення всіх майбутніх питомих рисків $R_{k+1}, \ldots, R_n$. Цей вплив виявляється, як випливає з (5), в апостеріорній щільності розподілу невідомого параметра і становить суть дуальності керування: вибір керування визначає не лише поведінку величини x, а й темп нагромадження інформації про збурення z.

У 1961 в працях рад. вченого О. А. Фельдбаума, які поклали початок теорії Д. к., узагальнено постановку задачі на марковські КО, коли збурення z являє собою випадковий *марковський процес*, і на багатовимірні КО з урахуванням їхньої динаміки. Для практики важливе значення має випадок, коли неспостережуване збурення z являє собою стаціонарний випадковий процес. При цьому розумна ідеалізація задачі полягає в припущенні, що час функціонування системи $n \to \infty$. Щоб оцінити якість такої системи, замість (2) слід використати функціонал середніх очікуваних втрат за одиницю часу

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} R_k. \qquad (6)$$

Функціонал (6) записано в припущенні, що існує границя.

Строгу матем. постановку задачі Д. к. здійснюють методами *керування випадковими процесами теорії* за неповними даними. В заг. випадку, щоб відшукати оптим. стратегію Д. к., використовують методи *програмування динамічного*. Для функціоналу (2) питомі стратегії знаходять послідовно, починаючи з скінченного моменту n. Оскільки розглядають задачу Байєса (див. *Байєсівський метод*), то *стратегія оптимальна* в будь-який момент часу $n - s$ ($s = 0, 1, \ldots, n$) виявляється детермінованою і при фіксованій спостережуваній передісторії $(\mathbf{u}_{n-s-1}, \mathbf{y}_{n-s-1})$ має вигляд

$$u_{n-s}^* = u_{n-s}^*(\mathbf{u}_{n-s-1}, \mathbf{y}_{n-s-1}). \qquad (7)$$

Ця стратегія визначається з мінімізації функції

$$\gamma_{n-s} = \alpha_{n-s} + \int\limits_{\omega(y_{n-s})} \gamma_{n-s+1}(u_{n-s+1},$$

$$\mathbf{u}_{n-s}, \mathbf{y}_{n-s})\, d\omega. \qquad (8)$$

де $$\alpha_{n-s} = \alpha_{n-s}(\mathbf{u}_{n-s}, \mathbf{y}_{n-s-1}) =$$

$$= \int\limits_{\omega(z)} W_{n-s} p_0(z) \left[\prod_{i=0}^{n-s-1} p(y_i/zu_i)\right] d\omega. \qquad (9)$$

Для великих n і особливо для функціоналу (6) серйозні труднощі в розв'язанні задачі Д. к. пов'язані зі зростанням розмірності векторів $\mathbf{u}_{n-s-1}$ та $\mathbf{y}_{n-s-1}$ в (7). Тут істотно допомагає впровадження т. з. марковських достатніх статистик незростаючої вимірності. Визначимо в просторі векторів $\mathbf{u}_{n-s-1}$, $\mathbf{y}_{n-s-1}$ ф-цію σ_{n-s-1}. Позначимо Δ^σ підклас класу допустимих стратегій Δ, які залежать від

$\mathbf{u}_{n-s-1}$, $\mathbf{y}_{n-s-1}$ тільки через σ_{n-s-1}. Функцію σ_{n-s-1}, $s = 0, 1, \ldots, n$ наз. достатньою статистикою, коли

$$\min_{\delta \in \Delta} R^{\delta} = \min_{\delta \in \Delta^{\delta}} R^{\delta}. \qquad (10)$$

При цьому вираз (7) можна записати у вигляді

$$u^*_{n-s} = u^*_{n-s}(\sigma_{n-s-1}). \qquad (11)$$

Статистику σ_{n-s-1}, $s = 0, 1, \ldots, n$ наз. марковською достатньою статистикою, якщо справджується рівність (10) і статистику σ_{n-s} можна обчислити за σ_{n-s-1} та u_{n-s}, y_{n-s}. В розглянутому вище прикладі цю умову задовольняє апостеріорна щільність розподілу збурення z, яку можна записати у вигляді рекурентного співвідношення, еквівалентного (5).

Цікавим є випадок, коли марковську достатню статистику можна задати скінченновимірним вектором параметрів $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$. Проте строго це можливе тільки в окремих задачах. На практиці для такої «параметризації» задачі використовують наближено достатні статистики.

Коли збурення z являє собою марковський процес, впровадження марковських достатніх статистик дає змогу звести задачу Д. к. до дослідження якогось керованого марковського процесу. Оптим. стратегія Д. к. в цьому разі виявляється стаціонарною, або регулярною, тобто $u^*_{n-s} = u^*(\sigma_{n-s-1})$. Для відшукання такої стратегії застосовують ітераційні методи пошуку в просторі стратегій. Розглянуті вище заг. методи розв'язування задачі Д. к. пов'язані зі значними труднощами при обчислюванні. Тому на практиці часто обмежуються відшукуванням субоптимальних стратегій Д. к., спрощуючи постановку задачі або звужуючи клас допустимих стратегій.

Найпростішим методом синтезу субоптимального керування можна вважати визначення стратегії з мінімізації питомих рисків R_k в (2). Визначена таким способом стратегія є в заг. випадку дуже грубим наближенням до оптим. стратегії Д. к.: вона спрямована в кожний момент часу лише на доведення об'єкта до потрібного стану й не містить у собі спец. функцій по вивченню об'єкта. Але для деяких об'єктів така стратегія виявляється строго оптимальною. Зрозуміло, що коли об'єкт безінерційний, це має місце за умови, що темп нагромадження інформації про об'єкт не залежить від вибору керуючих діянь. Такого роду системи Д. к. прийнято називати нейтральними. З матем. точки зору це відповідає випадкові, коли

$$\min_{\delta \in \Delta} R^{\delta} = \sum_{k=1}^{n} \min_{\Gamma_k} R(\Gamma_k). \qquad (12)$$

Істотне значення має визначення умов, за яких має місце (12), напр., умови звідності *систем керування замкнених* до розімкнених.

Теорію Д. к. застосовують у задачах самонавчання, екстрем. регулювання, побудови оптим. самонастроюваних моделей тощо.

Літ.: Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [бібліогр. с. 594—618]; Живоглядов В. П. Автоматические системы с накоплением информации. Фрунзе, 1966 [бібліогр. с. 154—160]; Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. В кн.: Transactions of the fourth Prague conference in information theory, statistical decision functions, random processes. Prague, 1967.

В. І. Іваненко, Д. В. Караченець.

ДУГА́ графа — напрямлене ребро, яке сполучає дві вершини *графа*.

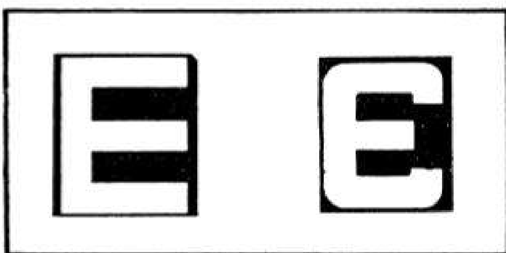
ДУЕ́ЛЬ у теорії ігор — *гра антагоністична*, в якій гравці, що мають обмежені ресурси («боєприпаси»), призначені для витрати, вибирають моменти пострілів або щільності стрільби на якомусь інтервалі часу. Ці вибори є стратегіями гравців. *Виграшу функцію* визначають як матем. сподівання якоїсь випадкової величини, що відповідає можливим наслідкам Д. Залежно від інформації про дії суперника розрізняють Д. шумові, безшумні й мішані.

Теорію Д. застосовують у військовій справі та в економіці (конкурентна боротьба за ринки, рекламна кампанія тощо).

Приклад мішаної Д. Кожен з дуелянтів має право на один постріл. У 1-го гравця — безшумна зброя (якщо 1-й гравець вистрілив, але не влучив, то 2-й гравець не знає про постріл, що відбувся), а у 2-го гравця — шумова (факт пострілу негайно стає відомий суперникові). Якщо 1-й гравець влучає у 2-го гравця, то його виграш дорівнює 1, якщо 2-й влучає в 1-го гравця, то 1-й гравець одержує —1, у решті випадків виграш 1-го гравця дорівнює 0. *Стратегія оптимальна* 1-го гравця описується щільністю розподілу на якомусь інтервалі [a, 1], 2-го гравця — щільністю на тому самому інтервалі й стрибком на правому кінці інтервалу (2-му гравцеві рекомендується зберігати загрозу пострілу до самого кінця).

Літ.. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798—819].

А. С. Михайлова.



ЕВРИСТИКА — в широкому розумінні слова — розділ психології, що розкриває природу розумових операцій людини під час розв'язування різних задач незалежно від їхнього конкретного змісту. У вужчому розумінні Е.— це здогади, що базуються на заг. досвіді розв'язування споріднених задач. Спроби систематизувати Е. робили Р. Декарт, Г.-В. Лейбніц, Б. Больцано та ін. У більшості випадків Е.— прийом, що дає змогу зменшувати кількість варіантів, які переглядають, розв'язуючи задачу, причому цей прийом здебільшого не гарантує якнайкращого розв'язку. Напр., людина, граючи в шахи, користується евристичними прийомами вироблення рішень, бо продумати весь хід з початку й до кінця практично неможливо, оскільки є надто багато варіантів гри (треба обдумати бл. 10^{120} варіантів). Методи Е. широко застосовують у кібернетиці (див. *Евристичні методи в розпізнаванні*, *Програмування евристичне*).

О. Г. Івахненко.

ЕВРИСТИЧНІ МЕТОДИ В РОЗПІЗНАВАННІ — методи розв'язування задач розпізнавання, навчання або самонавчання розпізнавати, побудовані на інтуїтивних міркуваннях, що спираються на попередній досвід. Цим Е. м. в р. відрізняються від формальних методів, які логічно виводять з певних гіпотез про множини розпізнаваних сигналів, про клас, до якого належить вирішувальна функція, тощо. Евристичні методи можуть привести до швидкого й успішного розв'язання тієї чи іншої проблеми в тих випадках, коли є досвід розв'язування схожих у чомусь проблем. У подібних випадках рішення вдається знайти без великих затрат зусиль і часу на вивчення закономірностей, специфічних для даної конкретної проблеми. Рішення знаходять на основі *аналогій* і не цілком усвідомлених асоціацій з вирішеннями інших схожих проблем.

Цілеспрямована діяльність людини є переважно евристичною, бо формальні правила для найкращих у якомусь розумінні дій майже завжди невідомі. Як типовий приклад можна навести гру в шахи, для якої стратегія, що приводить до виграшу, невідома. А проте, людина, використовуючи нагромаджений досвід і різні інтуїтивні міркування, може грати в шахи настільки успішно, що обчислювальна машина, яка має колосальні переваги в швидкості перегляду варіантів продовження гри, не може змагатися з сильним шахістом. Найяскравіший приклад Е. м. в р. являє собою *персептрон.* Амер. нейрофізіолог Ф. Розенблатт запропонував принцип дії персептрона за аналогією до відомих з фізіології схем зв'язків між нервовими клітинами в живому мозку. Ф. Розенблатт прийшов до дуже ефективного методу навчання *розпізнавальної системи.* З формального погляду цей метод становить збіжний ітераційний *алгоритм* відшукування гіперплощини, яка розділяє дві точкові множини в n-вимірному просторі ознак (див. *Розпізнавання образів*). Персептрон можна успішно використовувати для розв'язування задач навчання в тих випадках, коли в обраному просторі ознак така роздільна гіперплощина існує.

Осн. вадою Е. м. в р. є те, що вони не гарантують успішного розв'язання задачі. У разі невдалої спроби застосувати інтуїтивні міркування шляхи просування до розв'язання поставленої задачі залишаються невизначеними. В подібних випадках доводиться вдаватися до детального експериментального й теоретичного вивчення закономірностей, специфічних для даної проблеми. В результаті такого вивчення можуть або виникнути нові евристичні міркування, або буде знайдено достатню кількість даних для формальної постановки задачі і її матем. розв'язання. Так, напр., спроба застосувати найпростіший тришаровий персептрон для розпізнавання зображень, коли зображення, які відрізняються лише переносом у полі зору, слід віднести до одного класу, виявилася невдалою. Вивчення проблеми показало, що для успішного розв'язання її необхідно ввести додаткове обмеження: треба, щоб ваги асоціативних елементів, які відрізняються переносом, були однакові.

Часто ефективними є комбіновані методи, які грунтуються на одночасному використанні двох критеріїв вибору рішень: формального й евристичного. Напр., у випадку, коли експериментальних даних мало, а рівняння матем. моделі має багато коефіцієнтів, тільки довизначення розв'язку задачі за другим, евристичним критерієм дає змогу знайти єдину оптим. оцінку всіх коефіцієнтів. При одному критерії задача не має єдиного (регулярного) розв'язку.

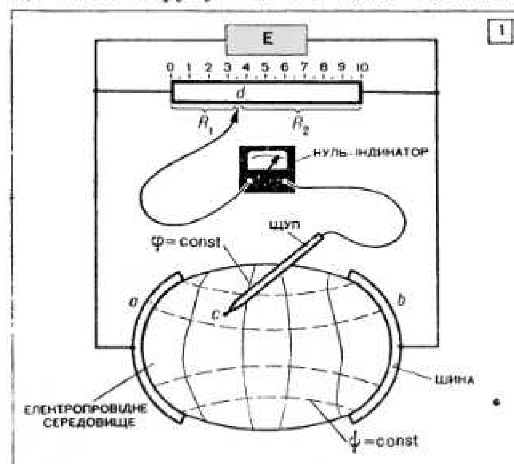
Літ.: Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. К., 1971 [бібліогр. с. 364—367]; Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 468—473]; Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 220—228].

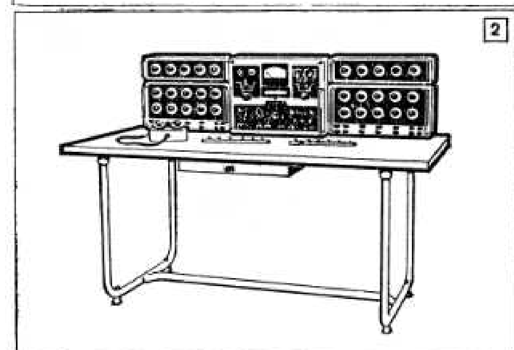
О. Г. Івахненко.

«ЭГДА», інтегратор ЕГДА — аналогова математична машина для розв'язування технічних задач і для одержання інтегральних характеристик поля. Робота інтегратора грунтується на використанні методу ЕГДА — електрогідродинамічної аналогії (див. *Моделювання на суцільних середовищах*).

Електр. схема інтегратора (мал. 1) являє собою електр. міст, який складається з градуйованого потенціометра R_1 і R_2 й власне мо-

делі з електропровідного матеріалу (металевої фольги, електроліту чи електропровідного паперу), виготовленої згідно з правилами геом. подібності. До металевих шин a і b підмикають джерело напруги E, величину якої, щоб було зручно відлічувати, вважають за 100%, тоді потенціали на шинах будуть $\varphi_a = 0$ $\varphi_b = 1 = 100\%$. На зрізаних краях моделі між шинами a та b значення потенціалів змінюється від 0 до 100%. Отже, потенціал φ_d у точці d на потенціометрі визначають за рівнянням $(\varphi_d - \varphi_a)/(\varphi_b - \varphi_a) = R_1/(R_1 + R_2)$. Плечі потенціометра R_1 і R_2 можна вибрати так, щоб φ_d набирало будь-якого значення між φ_a і φ_b, тобто між 0 і 100%. Співвідношення, що визначає величину потенціалу φ_d, встановлюють на потенціометрі на градуйованій шкалі. Щуп пересувають по моделі доти, поки нуль-індикатор не покаже, що немає струму — в цій точці потенціал





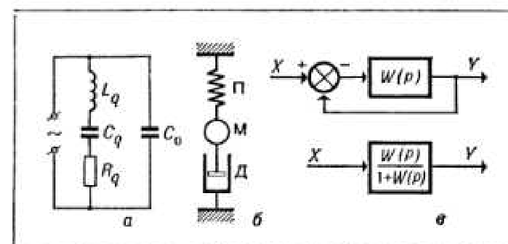
1. Схема інтегратора ЕГДА
2. Інтегратор «ЭГДА-9/60»

дорівнює φ_d. Визначивши ряд точок із заданим потенціалом і з'єднавши їх між собою, одержують лінію рівного потенціалу — еквіпотенціаль. Лінії струму можна побудувати за тим самим методом, обернувши задачу. В інтеграторі ЕГДА при моделюванні на електропровідному папері джерелом живлення є випрямляч постійного струму з напругою 12—30 *в*, а нуль-індикатором — гальванометр. Для електролітичної ванни використовують змінний струм частотою 50—1000 *гц*, а гальванометр підмикають через вектор-вимірний пристрій. Щоб розширити клас розв'язуваних задач і підвищити точність розв'язування, схему інтегратора поповнюють потенціометричними подільниками напруги й струму (для реалізації граничних умов 1, 2 і 3-го роду), автомат. вимірювальним пристроєм з цифровим відліком, автомат. графопобудовником, стабілізованим джерелом живлення тощо. Є й інтегратори унікальних конструкцій, призначені для розв'язування певного класу задач, і універсальні інтегратори. В СРСР серійно випускають універсальний інтегратор «ЭГДА-9/60» (мал. 2), що його широко використовують для розв'язування різних задач гідро- й аеромеханіки, фільтрації, електро- й радіотехніки, буд. механіки, побудування ф-цій, що здійснюють конформне відображення, тощо.

Літ.: Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. К., 1961 [бібліогр. с. 157—165]; Математическое моделирование на интеграторах ЭГДА-9/60. К., 1968. *В. Г. Панчишин.*

ЕЙЛЕРА ЛАНЦЮГ — *ланцюг*, який містить усі ребра *графа*. Знаходження Е. л. у графі — це такий неперервний обхід усіх його ребер, при якому жодне з ребер не проходять двічі.

ЕКВІВАЛЕ́НТНА СХЕ́МА — 1) Схема заміщення — комбінація найпростіших елементів електричного кола (опорів, ємностей та індуктивностей), яка за своїми властивостями еквівалентна якомусь реальному пристроєві й наочно відображає суть процесів у ньому. Існує багато реальних пристроїв, у яких взагалі немає котушок індуктивності, резисторів і конденсаторів, проте для спрощення аналізу ці пристрої замінюють електр. Е. с. Напр., кварцовий резонатор роблять у вигляді пластинки, вирізаної з кристала кварцу і вміщеної між двома електро-



Еквівалентні схеми

дами. У радіотех. пристроях такий прилад діє як коливальний контур, що складається з котушки індуктивності L_q, двох конденсаторів C_q та C_0 й резистора R_q (мал., *а*). Багато процесів у мех., теплових, хім. та інших системах описують тими самими диф. рівняння-

ми, що й процеси у відповідних електр. схемах. Це дає змогу при аналізі реального процесу замінити його відповідною Е. с. Так, мех. системі, що складається з зосередженої маси М, пружини П і демпфера Д (мал., *б*), можна поставити у відповідність Е. с., аналогічну зображеній на мал., *а* (без конденсатора C_0). Електричні й електронні Е. с. лежать в основі аналогового моделювання відповідних процесів (див. *Аналогова модель*).

2) У теорії автоматичного керування — схема, одержана з первісної через еквівалентне структурне перетворення її. Так, дві схеми, зображені на мал., *в* ($W(p)$ — *передавальна функція* ланки), еквівалентні одна одній у згаданому розумінні.

А. А. Тунік.

ЕКВІВАЛЕ́НТНИХ ЗБУ́РЕНЬ МЕ́ТОД — наближений метод визначання моментів розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь за заданими характеристиками випадкових параметрів, які входять у рівняння; полягає в обробці результатів багатократного інтегрування початкових рівнянь за різних, певним чином вибраних невипадкових початкових умов і невипадкових еквівалентних збурень. Е. з. м. застосовують для досліджування точності функціонування динамічних систем за випадкових збурень. Нехай динамічну систему описано системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n, V_1, V_2, \ldots, V_m, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

які задовольняють умови існування та єдиності в області $D(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0, t)$, де $f_1, \ldots, f_n$ — невипадкові функції, $V_1, V_2, \ldots, V_m$ — випадкові параметри, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — шукані випадкові функції. Припускають, що для параметрів V_r задано матем. сподівання, які дорівнюють нулеві, й моменти зв'язку μ до q-го порядку включно:

$$M[V_r] = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m); \qquad (2)$$

$$\mu_{r_1 r_2 \ldots r_k} = M[V_{r_1} V_{r_2} \ldots V_{r_k}]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q; \quad r_1, r_2, \ldots, r_k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (3)$$

а розв'язок системи (1) можна розвинути в ряд Маклорена за параметрами V_r.

Нехай розв'язок системи (1) має вигляд

$$X_i = \varphi_i(t, V_1, V_2, \ldots, V_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Тоді, розвиваючи (4) в ряд Маклорена q-го степеня за величинами V_r і діючи на обидві частини цього розвинення оператором матем. сподівання з урахуванням (3), одержимо:

$$\nu_1 = M[X] = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=1}^{m} \cdots \sum_{r_k=1}^{m} \left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \cdots \partial V_{r_k}} \right)_0 \mu_{r_1 r_2 \ldots r_k}, \qquad (5)$$

де $\varphi_0 = \varphi(t, 0, 0, \ldots, 0)$. Для обчислення матем. сподівання координат реальних систем використати безпосередньо формулу (5) практично неможливо, бо для цього треба мати значення похідних, які входять під знак сум. Через те суму (5) обчислюють інакше: у розвиненні розв'язку (4) в ряд Маклорена замість V_r підставляють деякі їхні окремі значення ξ_{rs}. Усього беруть N різних комбінацій параметрів $\xi_{r_k s}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$, і цьому відповідають N рівностей. Потім вводять невизначені коефіцієнти α_s, множать на них праві й ліві частини цих рівностей, а після цього їх почленно додають. В результаті виходить співвідношення

$$S = \sum_{s=1}^{N} \alpha_s x_s = \sum_{s=1}^{N} \alpha_s \varphi_0 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=1}^{m} \cdots \sum_{r_k=1}^{m} \left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \cdots \partial V_{r_k}} \right)_0 \sum_{s=1}^{N} \alpha_s \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} \cdots \xi_{r_k s}. \qquad (6)$$

З порівняння (5) і (6) випливає, що сума S являтиме собою наближене значення матем. сподівання змінної X

$$S = \sum_{s=1}^{N} \alpha_s x_s = M[X], \qquad (7)$$

якщо величини α_s і $\xi_{r_k s}$ задовольняють систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s = 1,$$

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s \xi_{r_1 s} \cdot \xi_{r_2 s} \cdots \xi_{r_k s} = \mu_{r_1 r_2 \ldots r_k}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q; \quad r_1, r_2, \ldots, r_k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (8)$$

Величини x_s, що входять в (7), є результатом інтегрування системи (1) при конкретних ξ_{rs}.

Щоб алгебр. система (8) була сумісною, кількість пробних комбінацій N беруть рівною кількості рівнянь системи (8): $N = C_{m+q}^{q}$. Знайшовши α_s із системи (8), можна визначити не тільки матем. сподівання, а й центр. моменти довільного (p-го) порядку $\nu_p = M[X^p] = \sum_{s=1}^{N} \alpha_s x_s^p$, де x_s^p — p-й степінь розв'язку x_s системи (1).

Аналогічно можна знайти будь-які моменти зв'язку для ф-цій $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Так, напр., момент зв'язку $\nu_p = M[X_{k_1} X_{k_2} \ldots X_{k_p}]$. $(k_1, k_2, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, n)$ визначають за формулою $\nu = \sum_{s=1}^{N} \alpha_s x_{k_1 s} x_{k_2 s} \ldots x_{k_p s}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, n)$, де $x_{k_1 s}, x_{k_2 s}, \ldots, x_{k_p s}$ є розв'язки системи (1), одержані при окремих значеннях параметрів V_r, що дорівнюють $\xi_{r_k s}$.

Е. о. м. пов'язується з виконанням простих, але дуже громіздких обчислень, його, як правило, реалізують за допомогою ЦОМ.

Літ.: Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., 1962 [бібліогр. с. 325—328].

В. Г. Грищутін, О. М. Плашенко.

ЕКВІВАЛЕ́НТНІ ПЕРЕТВО́РЮВАННЯ — побудова за заданими об'єктами еквівалентних об'єктів у тому чи іншому розумінні. Типовими прикладами об'єктів, до яких застосовують Е. п., є алгебричні вирази, *алгоритми, автомати, схеми контактні, алгоритмів схеми* та ін. Е. п. відіграють важливу роль у задачі мінімізації; повні системи Е. п. є однією з форм аксіоматизації алгебр. та інших систем.

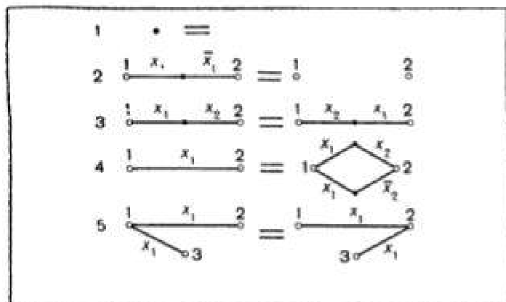
З погляду загальної проблеми суть Е. п.— одержати ефективну процедуру, яка породжує *еквівалентності відношення* (е. в.), тобто всі пари еквівалентних об'єктів. У тому разі, коли клас об'єктів рекурсивно перелічний, загальна проблема Е. п. рівносильна задачі одержання ефективної процедури, яка породжує для кожного об'єкта α всі об'єкти, йому еквівалентні й тільки їх, тобто клас еквівалентності, що вміщує α. Звичайно проблему Е. п. ставлять у посиленій формі: на множинах пар об'єктів задаються певні операції замикання і потрібно знайти їхню скінченну або рекурсивну підмножину розглядуваного е. в., замикання якого збігалося б з цим е. в. Як правило, розглядаються такі операції. Нехай для об'єктів визначено поняття підоб'єкта, тобто такої частини об'єкта, яка сама є об'єктом розглядуваного виду. Операцією заміни за допомогою пари (α, β) наз. операцію, що дає по об'єкту γ об'єкт γ', який одержуємо з γ заміною будь-якого входження підоб'єкта α об'єктом β (якщо α не входить до γ, то вважають, що γ' збігається з γ). Замиканням відносно замін множини R пар об'єктів наз. найменшу множину $\overline{R}$ таку, що: 1) $R \subseteq \overline{R}$, 2) якщо $(\alpha, \beta) \in \overline{R}$, то $(\beta, \alpha) \in \overline{R}$ і 3) якщо $(\alpha, \beta) \in \overline{R}$ і $(\gamma, \delta) \in \overline{R}$, то $(\gamma, \delta') \in \overline{R}$, де δ' одержуємо з δ операцією заміни за допомогою пари (α, β). Поряд з операцією заміни звичайно розглядають ще операцію підстановки (над парами об'єктів), яка полягає в тому, що всі входження певного елементарного підоб'єкта до обох елементів пари (α, β), замінюються одним і тим самим об'єктом γ. Підмножина $R \subseteq E$ наз. повною для E або повною системою правил Е. п., якщо її замикання відносно замін і підстановок збігається з E. Відношення еквівалентності, замкнене відносно замін, наз. к о н г р у е н ц і є ю. Очевидно, повна підмножина існує тільки для конгруенцій, причому підмножина R є повною для конгруенцій E тоді й тільки тоді, коли будь-який об'єкт γ можна перевести на будь-який E-еквівалентний йому об'єкт δ тільки операціями заміни за допомогою пар з $\tilde{R}$, де $\tilde{R}$ — замикання R відносно підстановок. Саме тому пари (α, β) з конгруенції E наз. правилами Е. п., а операція заміни за допомогою пари (α, β) наз. застосуванням правила (α, β). Типовим прикладом описаної підстановки є Е. п. в алгебрах. Для алгебри $\mathfrak{A} = (A, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ довільної сигнатури $\Phi = (\varphi^{(n_1)}, \ldots, \varphi_m^{(n_m)})$ проблема Е. п. збігається з задачею алгебричної аксіоматизації й полягає ось у чому. На множині всіх термів сигнатури Φ розглядається природна конгруенція, тобто таке е. в. E, що $(\alpha, \beta) \in E$ тоді й тільки тоді, коли терми α і β представляють одну й ту саму ф-цію алгебри $\mathfrak{A}$. Пари (α, β) із E наз. рівностями або тотожностями і замість $(\alpha, \beta) \in E$ звичайно пишуть $\alpha = \beta$. Операція підстановки полягає в заміні всіх входжень певної змінної довільним термом. Треба знайти скінченну повну для E множину рівностей. Напр., для *булевої алгебри* $(A, \bar{x}, x \vee y, x \wedge y)$ скінченну повну систему утворюють такі 10 рівностей:

1) $x \vee y = y \vee x$;
2) $x \wedge y = y \wedge x$;
3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
6) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
7) $(x \wedge y) \vee y = y$;
8) $(x \vee y) \wedge y = y$;
9) $(x \wedge \bar{x}) \vee y = y$;
10) $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$.

За такої постановки проблема Е. п. має позитивне вирішення далеко не для всіх алгебр. Відомо, що вона вирішується позитивно для всіх двоелементних алгебр, а також для всіх скінченних груп. Водночас для будь-якого $n \geqslant 3$ існують алгебри (групоїди) з n елементами, для яких ця задача не має позитивного розв'язку. Існують також нескінченні групи й нескінченні півгрупи, для яких зазначена задача розв'язується негативно. Вона розв'язується негативно і для алгебри регулярних подій (див. *Алгебри подій*), що виникає в процесі вивчення *автоматів скінченних*. В останньому випадку розглянуто деякі модифікації описаної постановки проблеми Е. п., що допускають позитивне вирішення її.

Іншим типовим прикладом такої постановки проблеми Е. п. є Е. п. контактних схем. Дві контактні схеми вважають еквівалентними, якщо існує така взаємно однозначна від-

повідність між їхніми полюсами, що парами відповідних полюсів обидві схеми реалізують одну й ту саму ф-цію. Підсхеми визначаються як підграфи зі збереженням букв, приписаних ребрам. Полюсами підсхем слід вважати вершини, що є полюсами схеми, й ті вершини, які інцидентні ребрам схеми, які не входять до підсхеми. Наступна множина, що складається з п'яти пар еквівалентних схем, є повною (полюси позначено кружками й занумеровано так, що відповідним полюсам приписано однакові номери, див. мал.),



Повна система правил для контактних схем.

причому, перше правило означає, що схема, яка складається з однієї вершини, що не є полюсом, еквівалентна пустій схемі.

Правила (α, β), що належать конгруенції E, наз. локальними, оскільки застосування їх зберігає E (тобто переводить об'єкти в E-еквівалентні їм) незалежно від об'єкта, в якому відбувається заміна підоб'єкта α об'єктом β. Іноді відсутність повної системи таких правил змушує розширювати допустимі засоби Е. п. за рахунок нелокальних правил (α, β), що їх застосування (тобто зберігання е. в.) може залежати від околу підоб'єкта α і, зокрема, від усього об'єкта. Змістовні приклади нелокальних правил виникають за Е. п. схем алгоритмів. Не існує скінченних повних систем локальних правил Е. п. для автоматів. У зв'язку з задачею мінімізації особливого інтересу набувають т. з. спрямлені Е. п., коли під час кожного застосування правил Е. п. не збільшується складність (у будь-якому розумінні) перетворюваного об'єкта.

В тому разі, коли доповнення до е. в. рекурсивно перелічне (що буває, напр., із природною е. в. на множинах алгоритмів або програм, які обчислюють всюди визначені функції), загальна проблема Е. п. рівносильна проблемі еквівалентності, тобто проблемі розв'язання відношення еквівалентності.

Літ.: Мурский В. Л. Об эквивалентных преобразованиях контактных схем. «Проблемы кибернетики», 1961, в. 5; Янов Ю. И. О системах тождеств для алгебр. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Мурский В. Л. О преобразованиях конечных автоматов. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15; Янов Ю. И. О локальных преобразованиях схем алгоритмов. «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20; Янов Ю. И. О направленных преобразованиях формул. «Математические заметки», 1969, т. 6, № 6.

Ю. І. Янов.

ЕКВІВАЛЕНТНІ СТАНИ АВТОМАТА — стани автомата, які індукують один і той самий *оператор автоматний*. У процесі *мінімізації числа станів автомата* Е. с. а. ототожнюються.

ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ВІДНОШЕННЯ (еквівалентність, еквіваленція) на множині A — рефлексивне, симетричне й транзитивне бінарне відношення, тобто таке відношення, яке повністю визначається підмножиною E прямого добутку $A \times A$, яка задовольняє такі три умови: для будь-якого a з A $(a, a) \in E$; якщо $(a, b) \in E$, то $(b, a) \in E$; якщо $(a, b) \in E$ і $(b, c) \in E$, то $(a, c) \in E$. Найпростішими прикладами Е. в. є відношення рівності, яке складається з усіх пар виду (a, a), й Е. в., яке збігається з множиною $A \times A$. Будь-яке Е. в. E на множині A визначає розбиття A на попарно неперетинні класи еквівалентності або E-класи: $Ea = \{b : (a, b) \in E\}$ і, навпаки, кожне розбиття множини A однозначно визначає Е. в. на A. Потужність множини всіх E-класів (тобто фактор-множини за E) наз. рангом $r(E)$ Е. в. E.

Перетин будь-якої множини Е. в. (на одній і тій самій множині A) є знову Е. в. Сумою $E_1 + E_2$ двох Е. в. E_1 та E_2 наз. транзитивне замикання об'єднання $E_1 \cup E_2$. Очевидними є такі нерівності:

$$\max(r(E_1), \quad r(E_2)) \leqslant r(E_1 \cap E_2) \leqslant r(E_1) \cdot r(E_2)$$

й $$1 \leqslant r(E_1 + E_2) \leqslant \min(r(E_1), \quad r(E_2)).$$

Будь-яке Е. в. E на множині A поширюється, природно, й на множину функцій, які відображають A в A:

$$(f, g) \in E \rightleftarrows \forall x\, ((f(x), \quad g(x)) \in E).$$

Щоб поширити E на множину ф-цій від кількох аргументів, спочатку поширюють E на множину кортежів елементів з A покомпонентно:

$$((x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n)) \in E \rightleftarrows \forall_{1 \leqslant i \leqslant n} ((x_i, y_i) \in E).$$

Будь-яка ф-ція f, що відображає A в B, породжує Е. в. $E_f = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$ на A, яке іноді наз. ядром ф-ції f. Для кожного класу A синтаксичних об'єктів з ф-цією значення f (яка приписує кожному a з A якесь значення fa) Е. в. E_f можна вважати природним Е. в. на A. Напр., терми довільної алгебри є еквівалентними, якщо вони зображають однакові функції; автомати є еквівалентними, якщо їхня поведінка однакова; програми є еквівалентними, якщо вони обчислюють однакові ф-ції; номери еквівалентні, коли вони є номерами одного й того самого об'єкта. Найважливішими задачами в таких випадках є проблема еквівалентності (тобто проблема розв'язності Е. в., її інколи наз. ще проблемою тотожності, й полягає вона в побудові *алгоритму*, який для будь-яких двох об'єктів дає відповідь на запитання, еквівалентні вони чи ні) і проблема еквівалентних перетво-

рень. Проблема еквівалентності є (алгоритмічно) нерозв'язною для багатьох природних класів об'єктів, які виникають у різних галузях математики, напр. для класів обчисленних ф-цій, *Тьюрінга машин* та ін. алгоритмів, для деяких груп тощо. Разом з тим її позитивно можна розв'язувати для *автоматів скінченних* з поведінкою будь-якого загальноприйнятого типу.

Літ.: Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. «Доклады АН СССР», 1952, т. 85; Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 [бібліогр. с. 375—381]; Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970 [бібліогр. с. 384—387]. *Ю. І. Янов.*

ЕКВІФІНА́ЛЬНІСТЬ СИСТЕ́МИ КЕРУВА́ННЯ — динамічна властивість системи, яка здійснює рух (перехід) різними шляхами з різних початкових станів в один і той самий фінальний стан. Еквіфінальність властива біол., економ. і багатьом складним тех. системам, у яких порядок зміни станів не задано єдиним способом.

Автомати скінченні як матем. моделі деяких систем керування теж мають властивість еквіфінальності, оскільки в законі їхнього функціонування є скінченна кількість шляхів переходів із множини початкових станів A_0 у заданий (фінальний) стан a_f. Шляхом у автоматі A є скінченна послідовність попарно проміжних внутр. станів a_{i_s}, $i = 0, 1, \ldots, f$, $s = 1, 2, \ldots, k$ і входів x_{i_s}, тобто $l = a_{i_0}x_{i_1}a_{i_1}x_{i_2} \ldots a_{i_{k-1}}x_{i_k}a_{f_k}$, де k є довжиною шляху. Еквіфінальність не може бути властивою неперервним автомат. системам, моделі яких задовольняють аксіому єдиності виходу $\overline{y}_{(t_0, t_1]}$ при заданому початковому стані $\overline{x}(t_0)$ для даного входу $\overline{u}_{(t_0, t_1]}$. У зв'язку з цим оптим. керування такими системами за заданим критерієм (швидкодія, мінімум витрати палива тощо), здійснене за умови єдиності виходу, є достатньо простою якістю функціонування їх, яка не задовольняє умов еквіфінальності. Е. с. к. визначається умовами існування скінченної, загалом невпорядкованої множини L шляхів переходів l_i системи з певної множини початкових станів A_0 у фінальний стан $a \in A_f$. Умови Е. с. к. представлені в матем. формі, є необхідними при описуванні законів функціонування складних систем. Ці умови є одним з універсальних елементів аналізу біол., економ. та ін. систем керування при вивченні законів їхнього функціонування. Так, *спостережуваності й керованості умови* основуються на властивостях системи, які визначають єдиним способом вихід системи. Умови еквіфінальності, які виключають у загальному випадку єдиність виходу системи, дають змогу глибше й строгіше визначити поняття закону функціонування складних систем. Це дає принципову можливість перенести методику синтезу оптим. керування узагальнених систем на задачі керування складними, напр., логіко-динамічними системами тощо. Використовування формальних умов Е. с. к. в апараті досліджень *складних систем керування* розширює поняття оптимальності якості керування до багатокритеріальної оптимізації, даючи змогу виділяти певні групи критеріїв для різних шляхів переходів з початкових станів у фінальний стан. Така модель оптимізації закону функціонування систем керування в обчисл. плані дуже близька до моделі оптимізації багатокритеріальних сіток, для яких розроблено ефективні методи дискретного програмування.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Бир С. Кибернетика и управление производством. Пер. с англ. М., 1965. *К. Д. Жук.*

ЕКОНОМЕ́ТРІЯ — напрям в економіці, що ґрунтується на застосуванні математичних моделей для аналізу й прогнозування економічних явищ і пов'язаний з визначенням і оцінкою адекватності реальних явищ математичним уявленням про них. Тепер важко розрізнити матем. економіку й Е., з одного боку, Е. й економ. статистику — з другого. Можна лише підкреслити зв'язок матем. економіки й Е. Побудова математичної моделі економіки завжди підтверджується оцінками адекватності такої моделі реальній дійсності. Економ. статистика має справу з усталеними й відносно нескладними економ. обчисленнями. Поява Е. пов'язана з твердженнями про недостатність таких економіко-статистичних обчислень для економ. аналізу й прогнозування. Найбільшого розвитку набули в Е. методи множинної кореляції. Висновки, що їх одержують за допомогою економетричних побудов, мають обмежене значення, в усякому разі, довіряти одержаним оцінкам можна лише при незначних змінах параметрів. Досвід свідчить про те, що досить точне прогнозування економ. характеристик і показників потребує внесення в моделі факторів соціального значення. Е. набуває дедалі ширшого застосування: матем. моделі та оцінки запропоновано для вимірювання економ. розвитку, економ. циклів, величини попиту й пропозиції, еластичності попиту, витрат виробництва й темпів нагромадження, міжгалузевих виробничих зв'язків тощо (див. *Моделі економіки, Моделі зростання*).

Літ.: Шляпентох В. Э. Эконометрика и проблемы экономического роста. М., 1966; Ланге О. Введение в эконометрию. Пер. с польск. М., 1964; Тинтнер Г. Введение в эконометрию. Пер. с нем. М., 1965 [бібліогр. с. 338—353].

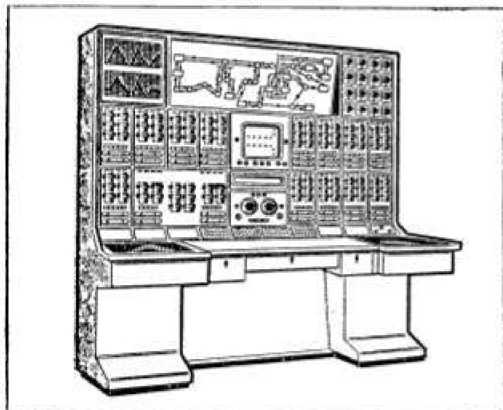
В. В. Шкурба.

ЕКОНО́МІКО-МАТЕМАТИ́ЧНІ МЕ́ТОДИ в управлінні народним господарством країни — див. *Кібернетика економічна.*

«ЭКРА́Н» — серія спеціалізованих обчислювальних пристроїв для розподілу активного навантаження між електростанціями в енергосистемах. Першим в СРСР пристроєм цього призначення був «Э.», розроблений 1945—47 в Уральському політех. ін-ті. В 1959—62 в Ін-ті автоматики (Київ) розроблено й випущено малу серію пристроїв «ЭКРАН-4» (на електронних лампах з діодними функціональними перетворювачами), призначених для пер-

спективного й оперативного розрахунку найвигіднішого режиму складних гідро-теплових енергосистем, у т. ч. електростанцій із заданою витратою енергоносія. «ЭКРАН-4» розв'язує систему нелінійних алгебричних рівнянь, виведених на основі методу невизначених множників Лагранжа з урахуванням рівнянь зв'язку (включаючи ізопериметричні умови).

«ЭКРАН-7» (мал.) виготовлено повністю на напівпровідниках із застосуванням імпульсних *перетворювачів функціональних*. Вхідна



Спеціалізований обчислювальний пристрій «ЭКРАН-7».

інформація: характеристики відносних приростів витрати палива й витратні характеристики станцій при заданих денному й нічному складі працюючого устаткування, параметри та оперативна схема осн. електр. мережі, графіки навантаження ліній міжсистемних зв'язків енергосистеми та ціни палива й витрати енергоносія, задані на розрахунковий період. У пристрій можна вводити інформацію про фактичне навантаження електростанцій і через систему телевимірювання, він може запам'ятовувати цю інформацію й порівнювати її з інформацією оптим. режиму. Для характеристик відносних приростів витрати палива використовується кусково-лінійна апроксимація з довільно розміщеними точками зламу. Характеристики гідроелектростанцій, що працюють при змінних напорах, відтворюються імпульсними функціональними перетворювачами двох незалежних змінних з автономним наладжуванням вузлів інтерполяції. Виводиться інформація (оптимальних навантажень і витрати палива) на автомат. цифродрукувальну машину й за викликом — на цифрові вимірювальні прилади з автомат. масштабуванням. Електроннопроменевий індикатор з тривалим післясвіченням дає змогу спостерігати (за викликом) задані графіки, введені характеристики, оптим. графіки навантаження станцій, зміну рівнів води у водосховищах тощо. Використовується в кількох енергосистемах.

Літ.: Синьков В. М. [та ін.]. Вычислительное устройство для распределения активной нагрузки при заданном расходе топлива. «Электричество», 1960, № 8; Богословский А. В., Закидальский А. И., Шукайло Е. М. Специализированное вычислительное устройство для распределения активных нагрузок. В кн.: Системы и средства автоматизации производств и управления. К., 1968.

В. М. Синьков.

ЕКРА́ННИЙ ПУЛЬТ — *пристрій введення та виведення інформації* в цифровій обчислювальній машині, що складається з об'єднаних в одну систему телевізійного екрана, *світлового олівця* та електрифікованої друкарської машинки. Е. п. дає змогу візуально контролювати інформацію, яка вводиться з клавіатури, та вносити поправки за допомогою світлового олівця. На екран можна виводити й графічну інформацію (графіки, креслення), в яку також можна вносити виправлення за допомогою світлового олівця. Е. п. дає змогу здійснювати *діалога режим* роботи людини й машини (див. *Взаємодія людини з обчислювальною машиною*).

ЕКСПЕРИМЕ́НТ БЕЗУМО́ВНИЙ — експеримент, у якому вхідну послідовність, що подається на автомат, повністю визначено до початку експерименту. Див. *Експерименти з автоматами.*

ЕКСПЕРИМЕ́НТ КРА́ТНИЙ — експеримент, що провадиться над кількома копіями *автомата*. Див. *Експерименти з автоматами.*

ЕКСПЕРИМЕ́НТ ПРОСТИ́Й — експеримент, що провадиться над одним *автоматом*. Див. *Експерименти з автоматами.*

ЕКСПЕРИМЕ́НТ УМО́ВНИЙ — експеримент, у якому символи, що подаються на вхід автомата, залежать від символів, що на його виході. Див. *Експерименти з автоматами.*

ЕКСПЕРИМЕНТА́ЛЬНИХ ДА́НИХ СПО́СОБИ СТАТИСТИ́ЧНОЇ ОБРО́БКИ — один з найважливіших етапів досліджування в різних галузях природознавства й техніки. Для обробки даних звичайно застосовують методи *імовірностей теорії* й *математичної статистики*. В основі цих методів лежить *великих чисел закон*, згідно з яким при великій кількості незалежних дослідів *імовірність* подій наближено замінюють відповідними частотами, а *математичне сподівання* (м. с.) *випадкових величин* — їхніми середніми арифм. значеннями. Проте на практиці часто доводиться обмежуватися порівняно невеликою кількістю дослідів. Звідси виникає додаткова задача оцінювання точності характеристик, одержуваних з досліду.

Домовимося позначати через X_ν випадкове значення випадкової величини X, якого вона набуває внаслідок ν-го досліду, а через x_ν — конкретне значення випадкової величини X, одержане внаслідок ν-го досліду. Щоб визначити повні похибки (див. *Похибка*) оцінок м. с. m_x^*, *дисперсії* d_x^*, функцій розподілу, щільності ймовірності випадкових величин, кореляційних моментів R_{xy}^* і коеф. *кореляції* r_{xy}^* випадкових величин X і Y (див. *Статистичні оцінки, Емпірична функція розподілу*), крім оцінок похибок методу, належить додат-

ково зробити аналіз спадкових похибок і *заокруглення похибок*. Виконаємо це на прикладі оцінки $m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$. Припустимо, що замість x_ν ми маємо справу з $x_{\nu,\varepsilon}$, причому для дисперсії випадкової величини $E_\nu = x_\nu - X_{\nu,\varepsilon}$ виконується співвідношення $D(E_\nu) = \sigma^2$. Тоді замість m_x^* одержимо $m_{x,\varepsilon}^* = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,\varepsilon}$. Припускаючи, що E_ν попарно незалежні, у відповідності з нерівністю Чебишова з імовірністю 0,96 справджується така оцінка спадкової похибки $|m_x^* - m_{x,\varepsilon}^*| \leqslant 5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. В разі, коли E_ν — попарно незалежні й нормально розподілені випадкові величини з нульовими м. с. і дисперсією $D(E_\nu) = \sigma^2$,

$$p(|m_x^* - M_{x,\varepsilon}^*| \leqslant \delta) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

де $$M_{x,\varepsilon}^* = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,\varepsilon},\quad \Phi(u) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а p — ймовірність того, що $|m_x^* - M_{x,\varepsilon}^*| \leqslant \delta$. Для останнього інтеграла складено таблиці, якими можна скористатися в практичних розрахунках. За умови $(n + 1) \cdot 2^{-\tau} < 0,1$ для похибки заокруглення обчислення m_x^* на ЦОМ у режимі з плаваючою комою справджується оцінка

$$|m_{x,\varepsilon}^* - m_{x,\varepsilon,\tau}^*| \leqslant$$

$$\leqslant 1,06 \max_\nu |x_{\nu,\varepsilon}| \frac{(n+2)(n-1)}{2n} 2^{-\tau},$$

де τ — кількість розрядів у мантисі числа. При великому n ця похибка може виявитися досить значною. Щоб уникнути цього, необхідно виконувати додавання на ЦОМ по можливості без заокруглювань. Відомо, що $X_{\nu,\varepsilon,\tau}$ є асимптотично по τ рівномірно розподіленими на $\left(-\frac{1}{2} 2^{-\tau}, \frac{1}{2} 2^{-\tau}\right)$ випадковими величинами. В разі, коли $X_{\nu,\varepsilon,\tau}$ попарно незалежні, з імовірністю 0,96 справджується оцінка $|m_{x,\varepsilon}^* - m_{x,\varepsilon,\tau}^*| \leqslant \frac{5 \cdot 2^{-\tau}}{2\sqrt{3n}}$, де $m_{x,\varepsilon,\tau}^* = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,\varepsilon,\tau}$. Беручи до уваги, що закон розподілу величини $M_{x,\varepsilon,\tau}^*$ близький до нормального, можна одержати ще точнішу оцінку для похибки заокруглення.

Сукупність n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можна розглядати як коорд. випадкової точки в n-вимірному просторі, або як складові n-вимірного випадкового вектора. М. с. довільної ф-ції n випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ визначається ф-лою

$$M[\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times$$

$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — щільність імовірностей n-вимірного випадкового вектора, визначувана співвідношенням

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{P(x_k \leqslant \underset{k=1,2,\ldots,n}{X_k} < x_k + \Delta x_k)}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \ldots \Delta x_n},$$

де $p(x_k \leqslant \underset{k=1,2,\ldots,n}{X} < x_k + \Delta x_k)$ — імовірність сумісного справдження подвійної нерівності $x_k \leqslant \underset{k=1,2,\ldots,n}{X_k} < x_k + \Delta x_k$. Беручи $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{r_1} \ldots X_n^{r_n}$, одержимо момент n-вимірного вектора $X(X_1, \ldots, X_n)$ порядку $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$. Якщо по черзі взяти один з індексів $r_1, \ldots, r_n$ рівним 1, а інші — 0, одержимо м. с. випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$. М. с. $m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}$ складових $X_1, \ldots, X_n$ випадкового вектора X і визначають n-вимірний вектор m_x, який природно назвати м. с. випадкового вектора X. Беручи по черзі один з індексів $r_1, \ldots, r_n$ рівним 2, а інші рівними 0, одержимо дисперсії випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$. Нарешті, беручи два з індексів $r_1, \ldots, r_n$ рівними 1, а інші — рівними 0, одержимо кореляційні моменти випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$: $K_{\nu\mu} = M[(X_\nu - m_{x_\nu})(X_\mu - m_{x_\mu})]$, $\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n$ ($K_{\nu\nu} = D_{x_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$; $K_{\nu\mu} = K_{\mu\nu}$). Сукупність $K_{\nu\mu}$ складових випадкового вектора утворює симетричну кореляційну матрицю випадкового вектора $K = \|K_{\nu\mu}\|$. В багатьох практично важливих випадках m_x і K цілком визначають числ. характеристики випадкового вектора. Дійсно, щільність імовірності багатовимірного нормального закону розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n |K|}} \times e^{-\frac{1}{2}(K^{-1}u, u)}$ $u = x - m_x$. Метод максимуму правдоподібності

для цього випадку зводиться до *найменших квадратів методу* (див. *Апроксимація функції середньоквадратична*). Щоб обчислити елементи матриці K й дати оцінку їхній точності, можна скористатися з відповідних співвідношень для випадкових величин.

Випадковою функцією наз. ф-цію, значення якої для кожного даного значення аргументу (або кількох аргументів) є випадковою величиною. М. с. випадкової ф-ції $X(t)$ наз. ф-цію $m_x(t)$, значення якої при кожному даному значенні аргументу дорівнює м. с. випадкової ф-ції при цьому $t \cdot m_x(t) = M[X(t)]$. $m_x(t)$ становить собою якусь середню ф-цію, біля якої групуються й відносно якої коливаються всілякі реалізації $x(t)$. Дисперсія ф-ції $X(t)$ — така ф-ція, значення якої при кожному даному значенні аргументу дорівнює дисперсії значення ф-ції $X(t)$ при цьому значенні аргументу. Як і в разі випадкового вектора, для характеристики розкиду ф-ції $X(t)$ недосить знати дисперсію. Щоб врахувати зв'язок між значеннями випадкової ф-ції для різних значень аргументу, необхідно задати, крім дисперсії, *кореляційну функцію* $K_x(t, t') \cdot m_x(t)$ і $K_x(t, t')$ є менш повними характеристиками $X(t)$, ніж її скінченновимірні закони розподілу. Проте в багатьох практично важливих випадках вони цілком визначають закон розподілу ф-ції $X(t)$ як, напр., це має місце для нормально розподіленої випадкової ф-ції.

Загальною обчисл. ф-лою для оцінки $m_x(t)$ є

$$m_x(t) \approx m^*_{n,u} = \frac{1}{2nu} \sum_{s=1}^{n} \int_{t-u}^{t+u} x_s(u)\,du \approx m^*_{n,P,\Delta} = \frac{1}{2nP} \sum_{s=1}^{n} \sum_{\nu=-P+Q}^{P+Q-1} x_s(\nu \cdot \Delta\tau), \qquad (1)$$

де $x_1, \ldots, x_n$ — n реалізацій $X(t)$; u — оцінка знизу такого макс. числа u^*, що на відрізку $[t-u, t+u]$ $m_x(t)$ з заданою точністю не відрізняється від прямої $(-P+Q)\Delta\tau = -u + t$, $P \cdot \Delta\tau = u$. Зміст набл. рівностей $\approx$ і $\approx$ істотно різний. У першому випадку — це оцінка для $m_x(t)$, яка за будь-якого n може значно відрізнятися від самої $m_x(t)$, проте ймовірність цього факту як завгодно мала, коли n достатньо велике. В другому випадку — це звичайна набл. рівність, причому $|m^*_{n,u} - m^*_{n,P,\Delta}| \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \omega_{x_s}(\Delta\tau)$, де ω_{x_s} — модуль неперервності реалізації $x_s(t)$. Якщо $X(t)$ — стаціонарна ергодична випадкова ф-ція, то $u^* = \infty$ і замість (1) можна записати

$$m_x(t) \approx m^*_P = \frac{1}{P} \sum_{\nu=1}^{P} x(\nu \cdot \Delta\tau). \qquad (2)$$

На основі нерівності Чебишова $p(|X - m_x| \geqslant \varepsilon) \leqslant Dx/\varepsilon^2$ і відомого виразу $D(m^*_P) = \frac{1}{P}\left[R_x(0) + 2\sum_{r=1}^{P}\left(1 - \frac{r}{P}\right)R_x(r\Delta\tau)\right]$, де R_x — *автокореляційна функція* випадкової ф-ції $X(t)$, одержуємо

$$p(|M^*_P - m_x| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 P}\left[R_x(0) + 2\sum_{r=1}^{P}\left(1 - \frac{r}{P}\right)R_x(r\Delta\tau)\right].$$

Якщо $X(r\Delta\tau + l\Delta\tau)$ і $X(l\Delta\tau)$ для $r \geqslant \widetilde{P}$, $l = 1, 2, \ldots$ незалежні, то, беручи до уваги відому нерівність $R_x(l\Delta\tau) \leqslant R_x(0) = D_x$, одержимо $p(|m^*_P - m_x| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2\widetilde{P} - 1}{\varepsilon^2 P} D_x$.

Істотно припустити, що $X_1 = M^*_P - m_x$ має нормальний закон розподілу, щільність якого

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M^*_P}}} e^{\frac{-x_1^2}{2D_{M^*_P}}}.$$

Тоді

$$p(|X_1| \leqslant \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M^*_P}}} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{-x_1}{\sqrt{2D_{M^*_P}}}} dx_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2D_{M^*_P}}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2D_{M^*_P}}}} e^{-u^2} du,$$

звідки

$$p(|X_1| \leqslant \varepsilon) \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}} e^{-u^2} du,$$

$$d = \frac{2\widetilde{P} - 1}{P} D_x.$$

При автомат. визначанні оцінки м. с. на ЦОМ з метою економії пам'яті машини вигідно обчислювати m_P за рекурентною ф-лою $m^*_P = (P-1)/P m^*_{P-1} + x(P\Delta\tau)/P$. Оскільки зі зростанням P число $x(P\Delta\tau)/P$ може швидко вийти з розрядної сітки машини, вигідніше застосовувати ф-лу:

$$m^*_{kP_0} = \frac{k-1}{k} m^*_{(k-1)P_0} + \frac{m_{P_0}(k)}{k};$$

$$m^*_{P_\wedge}(\nu) = \frac{\begin{array}{c} x[(\nu-1)P_0\cdot\Delta\tau+\Delta\tau]+ \\ +x[(\nu-1)P_0\Delta\tau+2\Delta\tau]+\cdots+ \\ +x[\nu\cdot P_0\cdot\Delta\tau]\end{array}}{P_0}.$$

Якщо у ф-лах (1) і (2) покласти $x = (m_\eta - \eta)^2$, то матимемо оцінку дисперсії D_η випадкової ф-ції $\eta(t)$. Якщо $x = [\eta(t) - m_\eta][\xi(t+\theta) - m_\xi]$, де $\eta(t)$ і $\xi(t)$ — випадкові ф-ції, то матимемо оцінку взаємної кореляційної ф-ції $R_{\eta\xi}(\theta)$; зокрема, для $\eta = \xi$ одержимо автокореляційну ф-цію $R_{\eta\eta}(\theta)$.

Досить важливою характеристикою стаціонарної випадкової ф-ції є її спектральна щільність $S(\omega)$, яка становить собою перетворення Фур'є від кореляційної ф-ції. Є два способи побудови оцінок спектральної щільності. Перший з них полягає у визначенні оцінок кореляційної ф-ції і в обчислюванні її перетворення Фур'є (див. *Фур'є інтегралів способи обчислювання*). Другий спосіб полягає в побудові оцінки спектральної щільності згідно з співвідношенням $S(\omega) = \lim_{L\to\infty} \frac{L}{4\pi} m\{X_L(i\omega)|^2\}$, де $X_L(i\omega) = \int_{-L}^{L} x(t)e^{-i\omega t}dt$. Для першого й другого способів при обчислюванні перетворення Фур'є доцільно використовувати *алгоритм* швидкого перетворення Фур'є. Щоб одержати докладну оцінку, можна застосувати згладжування $S(\omega)$ і відповідної оцінки за допомогою перетворення Стеклова $S_h(\omega) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} S(\omega + u)\,du$ або загальнішого перетворення виду

$$\overline{S}_h(\omega) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} W_h(u)\,S(\omega+u)\,du,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{h}^{-h} W_h(u)\,du = 1, \quad W_h(u) \geqslant 0.$$

Зараз не зменшується інтерес до створювання спеціалізованих обчисл. пристроїв як неперервної, так і дискретної дії для цілей кореляційного аналізу. Такі пристрої використовують для реалізації порівняно простих і однотипних *обчислювальних алгоритмів* кореляційної обробки великих масивів початкових даних. Крім того, є *корелятори*, призначені вимірювати характеристики стаціонарних випадкових ф-цій. Вони дають змогу обчислювати оцінки m_x, $R_{\eta\xi}$ і $R_{\eta\eta}$ за методом осереднювання однієї або багатьох реалізацій і поточні оцінки m_x, $R_{\eta\xi}$ і $R_{\eta\eta}$ у масштабі часу вхідного сигналу за будь-якої тривалості спостерігання його.

Однією з характерних задач обробки експериментальних даних є задача виявлення прихованих періодичностей, тобто задача розпізнавання спектральної структури реальних процесів $X(t)$ за результатами вимірювань їх, яку можна сформулювати так. Припускають, що на $[-L, L]$ $X(t) = \sum_{j=1}^{n}(A_j\cos\omega_j t + B_j\sin\omega_j t) + n(t)$, де $n(t)$ — випадковий залишок. Задача зводиться до визначення ω_j, A_j, B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ і статистичних характеристик залишку. Щоб обчислювати статистичні характеристики $n(t)$, використовують наведені вище алгоритми.

Для обробки статистичних даних методами теорії ймовірності й матем. статистики створено спеціалізовані автоматизовані системи. Одну з них розроблено в Ін-ті кібернетики АН УРСР на базі ЕОМ «М—220». Вона здійснює автомат. побудову робочих програм для розв'язування вказаних споживачем задач. У системі є засоби для автомат. поповнювання її матем. забезпечення (див. *Математичне забезпечення ЦОМ*). В ОЦ Московського держ. ун-ту на базі ЕОМ «Сетунь» створено автоматизовану систему статист. обробки результатів вимірювання хвильових коливань рівня моря й деяких інших океанологічних параметрів, її можна застосовувати й для обробки матеріалів інших вимірювань.

Літ.: Васманов В. В. Вычислительные математические приборы. М., 1958 [бібліогр. с. 200—204]; Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 [бібліогр. с. 873—878]; Дрейер А. А., Черепенникова Ю. Н. Автоматизированная система статистической обработки материалов измерений на ЭЦВМ «Сетунь». М., 1968 [бібліогр. с. 171—172]; Иванов В. В. Алгоритмы автоматической оценки вероятностных характеристик производственных процессов. В кн.: Труды I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике. М., 1970; Сергиенко И. В. [та ін.]. Некоторые вопросы построения автоматизированной системы обработки статистических данных. «Кибернетика», 1970, № 2; Задирака В. К. Оценка преобразования Фурье. «Кибернетика», 1971, № 4.

В. К. Задирака, В. В. Іванов, І. В. Сергієнко.

ЕКСПЕРИМЕ́НТИ З АВТОМА́ТАМИ — процес подавання вхідних послідовностей в автомати, спостерігання одержуваних вихідних послідовностей і побудова висновків, відповідно до цих спостережень. Автомат, над яким проводять експеримент, звичайно вважається *«чорним ящиком»*, у якому доступні спостереженню тільки вхідні й вихідні полюси, а внутрішня будова і процеси в ньому — невідомі. Висновки слід робити лише на основі введеної інформації, одержаних реакцій та апріорної інформації про автомат, наявної при розв'язуванні даної задачі (це може бути, напр., таблиця переходів, верхня оцінка числа станів автомата тощо).

Точніше, поняття експерименту по суті збігається з поняттям обчисленного функціоналу. Нехай зафіксовано якийсь клас $\mathfrak{A}$ *автоматів ініціальних* із вхідним алфавітом X і вихідним алфавітом Y. Введемо такі позначення: $\{X\}$ — сукупність усіх скінченних множин слів в алфавіті X; $\{X, Y\}$ — су-

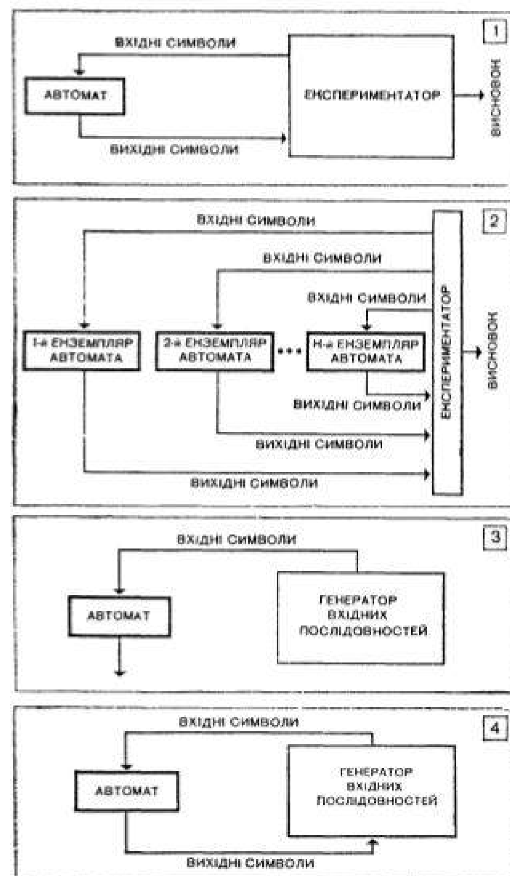
купність усіх скінченних множин пар слів виду (x, y), де x — слово в алфавіті X, а y — слово в алфавіті Y. Якщо $\alpha \in \{X\}$ і $A \in \mathfrak{A}$, то $[\alpha, A]$ — елемент з $\{X, Y\}$, який складається з усіх тих пар виду (x, y), що й $x \in \alpha$, а y — слово, в яке A переробляє x. Формальне визначення експерименту таке: це трійка (Δ, Ω, F), де Δ — множина конструктивних об'єктів, яку називають множиною апріорних інформацій (елементами Δ можуть бути, напр., таблиці переходів автоматів, множини таких таблиць тощо), Ω — множина конструктивних об'єктів, яку наз. множиною висновків (елементами Ω можуть бути, напр., таблиці переходів з відміченим початковим станом), F — ефективна функція від двох аргументів δ і η, де $\delta \in \Delta$, $\eta \in \{X, Y\}$, яка набуває значення і з $\{X\}$, і з Ω (припускають, що $\{X\} \cap \Omega = \varnothing$).

Нехай A — автомат, з яким зіставлено якийсь елемент δ' множини Δ апріорних інформацій. Тоді результат $E(A)$ експерименту $E = (\Delta, \Omega, F)$ з автоматом A визначають так. Крок 0. Знаходять $\alpha_0 = F(\delta', \Lambda)$, де Λ — пустий елемент. Якщо $\alpha_0 \in \Omega$, то $E(A) = \alpha_0$ і процес припиняється. Якщо $\alpha_0 \in \{X\}$, то знаходять $\eta_0 = [\alpha_0, A]$ і здійснюють крок 1. Крок i $(i = 1, 2, \ldots)$. Знаходять $\alpha_i = F(\delta', \eta_{i-1})$. Якщо $\alpha_i \in \Omega$, то $E(A) = \alpha_i$ і процес припиняється. Якщо $\alpha_i \in \{X\}$, то знаходять $\eta_i = [\alpha_i, A]$ і здійснюється крок $i + 1$.

Класифікація експериментів. Експерименти можна класифікувати за числом потрібних для проведення їх екземплярів (копій) досліджуваного автомата (один автомат наз. копією іншого, якщо обидва автомати мають однакові таблиці переходів і перебувають в однаковому стані перед початком експерименту), а саме: 1) прості експерименти (мал. 1), коли потрібен єдиний екземпляр автомата (тобто слова з $\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots$ продовжують одне одного); 2) кратні експерименти, коли потрібно більше як один екземпляр автомата (мал. 2). Різновидом кратного експерименту можна вважати експеримент з одним автоматом, який має «зворотну кнопку», тобто пристрій, який після подання в автомат вхідної послідовності дає змогу експериментаторові повертати автомати у первісний стан. Така ситуація буває, напр., коли «замовник» задумав якийсь оператор T й неспроможний описати його мовою, доступною «виконавцеві», зате може відповісти на будь-які запитання типу: «На що T переробляє вхідну послідовність $x(1), \ldots, x(t)$?». У цьому разі «замовник» виступає в ролі власника уявного «чорного ящика», з яким можна провадити кратні експерименти.

Експерименти можна класифікувати й за видом залежності від передісторії процесу на: 1) безумовні (нерозгалужені) експерименти (мал. 3), коли застосовувану вхідну послідовність (або послідовності в разі кратного експерименту) цілком визначено заздалегідь (тобто функція F залежить лише від 1-го аргументу δ), і 2) умовні (розгалужені) експерименти (мал. 4), коли кожний наступний символ вхідної послідовності (або послідовностей у разі кратного експерименту) експериментатор вибирає залежно від поданих раніше вхідних послідовностей і одержаних вихідних послідовностей (тобто функція F істотно залежить від 2-го аргументу η).

Міри «вартості» експерименту. Довжина експерименту E з автоматом A — це заг. число вхідних символів, що їх подають в автомат A в процесі проведення експерименту.



1. Схема простого експерименту.
2. Схема кратного експерименту.
3. Схема безумовного експерименту.
4. Схема умовного експерименту.

Висота експерименту E (кратного) з автоматом A — це число букв у найдовшому простому експерименті, що входить у цей кратний експеримент. У разі простого експерименту поняття довжини й висоти збігаються. Іноді розглядають і ін. міри «вартості» експериментів. Кратність експерименту з автоматом A — це число копій автомата A, необхідних для проведення експерименту (простий експеримент — це експеримент кратності 1, а крат-

ним, звичайно наз. експеримент кратності 2 і більше). Порядок експерименту з автоматом A — це число частин цього експерименту, поділених операціями прийняття рішень (безумовний експеримент — це експеримент порядку 1, а умовний — порядку 2 і більше).

Основні задачі. 1. Д і а г н о с т и ч н а з а д а ч а. Відомо, що даний автомат A, таблиця переходів якого в нас є, перебуває в одному із станів $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots q_{i_r}$. Знайти цей стан. 2. У с т а н о в н а з а д а ч а. Відомо, що автомат A, таблиця переходів якого в нас є, перебуває в одному із станів $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots q_{i_r}$. Встановити A у відомий стан. Множина станів $\{q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots q_{i_r}\}$, один з яких, як відомо експериментаторові, є початковим, наз. множиною допустимих станів. Діагностична задача, отже, є задачею визначення початкового стану A, а установна — полягає у визначенні кінцевого стану A. Експеримент, який розв'язує діагн. задачу, наз. д і а г н о с т и ч н и м, а експеримент, що розв'язує установну задачу,— установним. Діагн. задачу ставлять і для простих і для кратних експериментів; установна ж має смисл тільки для простих експериментів. 3. З а д а ч а р о з ш и ф р о в у в а н н я (розпізнавання) автоматів має кілька варіантів. Розглянемо основні з них. а) Задача розпізнавання автоматів із заданого класу. Відомо, що автомат A, як неініціальний, належить заданому скінченному класові M неініціальних автоматів. Треба визначити цей автомат (тобто серед автоматів класу M виявити той, що збігається з A). б) Задача ініціального розшифровування автоматів, що мають не більше як k станів. Відомо, що ініціальний автомат A з заданими вхідним і вихідним алфавітами має не більше як k станів. Треба визначити цей автомат (напр., у вигляді таблиці переходів з відміченим початковим станом), у якому реалізовано той самий оператор, що й в автоматі A. в) Задача залишкового розшифровування автоматів, що мають не більше як k станів, полягає в тому, щоб за допомогою підходящого простого експерименту E визначити ініціальний автомат, у якому реалізовано той самий оператор, що й в автоматі A з початковим станом, у який він перейшов після експерименту E. Якщо A є дуже зв'язним зведеним автоматом, то залишкове розшифровування для A є не що інше, як визначення його таблиці переходів (з точністю до нумерації станів) за допомогою простого експерименту. г) Заг. задача залишкового (ініціального) розшифровування автоматів відрізняється від попередніх задач тим, що заздалегідь не відома верхня оцінка числа станів автомата A, а задано лише вхідний і вихідний алфавіти.

Деякі результати. Основи теорії Е. з а. заклав амер. математик Е.-Ф. Мур. Він одержав і перші результати в цьому напрямі. Зокрема, він показав, що діагн. задачу для зведеного автомата з k станами, два з яких є допустимими, завжди можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини l, де $l \leqslant k-1$. Цей результат рівнозначний такому: якщо які-небудь два стани автомата A з k станами не можна відрізнити один від одного вхідними словами довжини $k-1$, то їх не можна відрізнити й ніякими вхідними словами більшої довжини. Якщо діагн. задачу для автомата з k станами, r з яких є допустимими, взагалі можна розв'язати, провівши простий безумовний (умовний) експеримент, то її можна розв'язати й простим безумовним (умовним) експериментом довжини l, де $l \leqslant (r-1)\, k^r$. Установну задачу для автомата з k станами, з яких r є допустимими, завжди можна розв'язати за допомогою простого безумовного експерименту довжини l, де $l \leqslant \frac{1}{2}(r-1)(2k-r)$. У класі всіх автоматів з k станами цю оцінку не можна знизити.

Клас автоматів $\{A_1, \ldots, A_N\}$ наз. виключним, якщо жодний стан будь-якого автомата A_i не еквівалентний жодному станові автомата A_j. Якщо відомо, що автомат A належить до виключного класу автоматів $\{A_1, \ldots, A_N\}$, де A_i має k_i станів, а $k_{i+1} \leqslant k_i$, то автомат A можна розшифрувати простим безумовним експериментом довжини l, де $l \leqslant (k_1 + k_2 - 1)\left[\left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right) - 1\right]$. Задачу ініціального розшифровування автоматів не більше як з k станами можна розв'язати кратним безумовним експериментом висоти h, де $h \leqslant 2k-1$. У класі всіх автоматів з k станами цю оцінку не можна знизити. Задачу залишкового розшифровування автоматів не більше як з k станами можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини l, де $e \leqslant 4mkm^{2k} \ln nk$ (m — число букв вхідного, а n — вихідного алфавітів).

Нехай для будь-яких m, n і k $\mathfrak{A}(m, n, k)$ означає якусь множину (можливо множину всіх) автоматів з фіксованим m-буквеним вхідним і n-буквеним вихідним алфавітами й k станами і $\mathfrak{A}_E(m, n, k)$ — множину тих автоматів з $\mathfrak{A}(m, n, k)$, які мають задану властивість E. Твердять, що майже всі автомати з $\mathfrak{A}(m, n, k)$ мають властивість E, якщо $|\mathfrak{A}_E(m, n, k)| \,/\, |\mathfrak{A}(m, n, k)| \to 1$ при $k \to \infty$. Виявляється, що зазначені вище оцінки довжин експериментів, як правило, справджуються лише для невеликої частини автоматів. Це явище виявлено після того, як було встановлено такі результати. Нехай $\mathfrak{A}(m, n, k)$ — множина всіх зведених автоматів з заданими m, n і k. Тоді діагн. задачу для майже всіх автоматів з $\mathfrak{A}(m, n, k)$ з двома допустимими станами можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини l, де $l \leqslant \log_m \times \log_n k + 4$; установну задачу для майже всіх автоматів з $\mathfrak{A}(m, n, k)$ з $r \leqslant k$ допустимими

станами можна розв'язати за допомогою простого безумовного експерименту довжини l, де $l < 5 \log_n k$. Нехай $\mathfrak{A}(m, n, k)$ — множина всіх автоматів з заданими m, n і k. Тоді задачу ініціального розшифровування для майже всіх автоматів з $\mathfrak{A}(m, n, k)$ можна розв'язати кратним безумовним експериментом висоти $c \log_m k$ й задачу залишкового розшифровування — простим безумовним експериментом довжини $k^{c'}$, де c і c' — незалежні від k константи.

Легко побачити, що не може бути такого експерименту, який би для всіх (чи принаймні для майже всіх) автоматів розв'язав заг. задачу ініціального (залишкового) розшифровування. Проте буває й от що. Нехай $\mathfrak{A}(m, n, k)$, як і вище,— множина всіх автоматів із заданими m, n і k. Твердять, що з частотою $1 - \varepsilon$ автомати мають задані властивості E, якщо $|\mathfrak{A}_E(m, n, k)| / |\mathfrak{A}(m, n, k,)| \geqslant 1 - \varepsilon$ для всіх k. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує кратний (простий) експеримент, який з частотою $1 - \varepsilon$ розв'язує заг. задачу ініціального (залишкового) розшифровування. При цьому висота (довжина) відповідного кратного (простого) експерименту виявляється відносно невеликою — порядку $\log k$ (порядку k^c), де k — число станів того «чорного ящика», до якого застосовують цей експеримент.

Літ.: Бардинь Я. М. О расшифровке автоматов при отсутствии верхней оценки числа состояний. «Доклады АН СССР», 1970, т. 190, № 5; Трахтенброт Б. А., Бардинь Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [бібліогр. с. 389—395]; Коршунов А. Д. О верхней оценке длин кратчайших однородных экспериментов по распознаванию заключительного состояния для почти всех автоматов. «Доклады АН СССР», 1969, т. 184, № 1; Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В кн.: Автоматы. Пер. с англ. М., 1956; Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 265—268]; Хиббард Т. Н. Точные верхние границы длин минимальных экспериментов, определяющих заключительное состояние, для двух классов последовательных машин. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966.

Я. М. Бардінь.

ЕКСПЕ́РТНИХ ОЦІ́НОК МЕ́ТОДИ в прогнозуванні — один із трьох основних класів методів науково-технічного прогнозування, який грунтується на припущенні, що на основі думок експертів можна збудувати адекватну модель майбутнього розвитку об'єкта прогнозування. Відправною інформацією при цьому є думки спеціалістів, які займаються дослідженнями й розробками в прогнозованій галузі. Е. о. м. поділяють на індивідуальні та колективні, залежно від того, на основі чого розробляють прогноз: на основі суджень одного експерта чи групи їх. Індивідуальні експертні оцінки бувають двох типів: оцінки типу «інтерв'ю» та аналітичні. Серед методів колективних експертних оцінок розрізняють метод комісії, метод віднесеної оцінки й дельфійський метод.

Оцінка типу «інтерв'ю» — це бесіда прогнозиста з експертом, у ході якої прогнозист, відповідно до наперед розробленої програми, ставить перед експертом запитання відносно перспектив розвитку прогнозованого об'єкта. Процес аналітичної експертної оцінки полягає в самостійній роботі експерта, спрямованій на аналіз тенденцій і на оцінку майбутнього стану й шляхів розвитку прогнозовуваного об'єкта. З методів аналітичної експертної оцінки найпоширеніші морфологічний метод і метод складання аналітичних оглядів. В основу морфологічного методу покладено наперед розроблену схему розгляду прогнозовуваних об'єктів, призначену виявляти можливі варіанти розв'язувань якоїсь багатоаспектної проблеми. При цьому виділяють різні типи характеристик аналізовуваних об'єктів і їхні різні властивості, зазначаючи елементи кожного типу. Перебравши всі можливі поєднання характеристик кожного типу, формулюють різні варіанти розвитку аналізовуваних об'єктів. У процесі аналізу кожного з виділених варіантів експерт визначає перспективні з погляду досягнення певної мети в майбутньому.

Застосування методів колективної експертної оцінки іноді дає змогу підвищити точність і ступінь конкретизації прогнозу. Метод комісії — це проведення групою експертів дискусії, щоб виробити заг. позицію в питаннях майбутнього розвитку прогнозовуваних об'єктів. Коли використовують цей метод, даються взнаки взаємний вплив експертів і певна інерційність у відмові від колись уже висловленої публічно думки, нерідко впливають і ін. фактори, й усе це може призвести до небажаних наслідків. Цих вад можна частково позбутися за допомогою методу віднесеної оцінки, або методу *«мозкового штурму»*.

Дальшим розвитком методів колективної оцінки стало розроблення дельфійського методу (за назвою давньогрец. міста Дельф, де в храмі Аполлона, за переказами, дельфійський оракул передвіщав майбутнє). Дельфійський метод припускає відмову від прямих колективних обговорень. Дебати замінюють ретельно розробленою програмою послідовних індивідуальних опитів, які проводять здебільшого у формі таблиць експертної оцінки. Відповіді експертів узагальнюють і разом з новою додатковою інформацією та узагальненими аргументами передають їм назад, а вони після цього уточнюють свої попередні відповіді. Таку процедуру повторюють кілька разів, поки не досягнуть прийнятної збіжності всіх висловлених думок.

Дуже важливими завданнями колективної експертизи є оцінити деякі аспекти розвитку прогнозовуваного об'єкта, чого не можна досягти ін. методами (напр., аналітичним розрахунком, у результаті експерименту тощо), а також визначити ступінь узгодженості думок експертів по конкретних перспективах розвитку, сформульованих перед цим окремими спеціалістами. Тому в процесі колективної експертизи потрібно забезпечити взаємну незалежність суджень експертів; оцінки, як правило, перетворюють на

кількісну форму; експерт зазначає структуру аргументів, що стали йому основою для тієї чи ін. оцінки, і ступінь своєї обізнаності з галуззю, до якої стосується певна оцінка. Успіхові колективної експертизи багато в чому сприяє заінтересованість експертів.

Новим етапом розвитку методики експертних оцінок у прогнозуванні є **метод «прогнозного графа»**. Суть його полягає в побудові (на основі експертних оцінок) і наступному аналізі моделі складної мережі взаємозв'язків, які виникають під час розв'язування перспективних науково-тех. проблем. При цьому забезпечується можливість формування багатьох різних варіантів науково-тех. розвитку, кожний з яких веде в перспективі до досягнення мети розвитку прогнозованої галузі. Наступний аналіз моделі дає змогу визначити оптим. (за рядом критеріїв) шляхи досягнення мети. За такого підходу до розробляння прогнозів збільшується обгрунтованість рішень, які приймають у галузі планування та керування процесами науково-тех. і економ. розвитку.

Літ.: Глушков В. М. О прогнозировании на основе экспертных оценок. «Кибернетика», 1969, № 2; Добров Г. М. Прогнозирование науки и техники. М., 1969 [бібліогр. с. 198—206]; Ершов Ю. В. Анализ согласованности мнений при коллективной экспертной оценке перспектив развития конкретной отрасли техники. В кн.: Материалы по науковедению, в. 5. К., 1970; Kendall M. G. Rank correlation methods. New York, 1955 [бібліогр. с. 166—170]; Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 487—563].

В. М. Глушков, Г. М. Добров.

ЕКСТРАПОЛЯ́ЦІЯ ВИПАДКО́ВОГО ПРОЦЕ́СУ — одна з задач *завбачення випадкових процесів теорії*. Е. в. п. полягає в побудові оцінки $\hat{\xi}(t_0)$ значення *випадкового процесу* в точці t_0, що не належить до множини E, за результатами спостереження процесу $\xi(t)$ на E. Інакше кажучи, потрібно вказати такий функціонал $\hat{\xi}(t_0) = f\{\xi(t),\ t \in E\}$ від результатів спостереження, який можна було б з якнайбільшою підставою прирівняти до значення $\xi(t_0)$. Здебільшого за міру точності екстраполювання беруть середньоквадратичну похибку $\sigma^2 = M[\xi(t_0) - \hat{\xi}(t_0)]^2$. Оцінка, для якої середньоквадратична похибка є мінімальною, має вигляд:

$$\hat{\xi}(t_0) = M\{\xi(t_0)/\xi(t),\ t \in E\}. \qquad (1)$$

Ф-ла (1) визначає умовне *математичне сподівання* $\xi(t_0)$ при відомих $\xi(t)$, $t \in E$. Але побудова за допомогою співвідношення (1) явних екстраполяційних ф-л можлива лише у виняткових випадках: або коли є явний вираз для умовного розподілу $\xi(t_0)$ при відомих $\xi(t)$, $t \in E$, або при деяких спец. припущеннях щодо процесу $\xi(t)$ (напр., $\xi(t)$ — *марковський процес;* $\xi(t)$ — компонента багатовимірного марковського процесу). У практично важливому випадку *гауссівського випадкового процесу* $\xi(t)$ оптим. екстраполювання $\hat{\xi}(t_0)$ лінійно виражається через результати спостереження. Тому при вивченні задач екстраполювання часто обмежуються розглядом **лінійних функціоналів** (див. *Оператор*) від результатів спостереження (задача лінійної е. в. п.). Якщо обмежуються самими лише лінійними функціоналами, точність екстраполювання зменшується, але це компенсується істотним спрощенням задачі й зручністю практичного використання одержуваних результатів. Якщо найкращу лінійну оцінку $\tilde{\xi}(t_0)$ значення $\xi(t_0)$ шукати у вигляді $\tilde{\xi}(t_0) = \int\limits_E c(t)\,\xi(t)\,dt$, де $c(t)$ — невідома *вагова функція*, то з умови мінімуму середньоквадратичної похибки $M[\tilde{\xi}(t_0) - \xi(t_0)]^2$ для ф-ції $c(t)$ одержують *інтегральне рівняння*:

$$\int\limits_E B_\xi(t, s)\, c(t)\, dt = B_\xi(t_0, s), \quad (s \in E). \qquad (2)$$

Тут $B_\xi(t, s) = M\,\xi(t)\,\xi(s)$ — *кореляційна функція* процесу $\xi(t)$, при цьому припускають, що вона є відомою. У ряді випадків (при спец. припущеннях щодо E та процесу $\xi(t)$) можна одержати явний розв'язок інтегр. рівняння (2). Зокрема, явні розв'язки задачі Е. в. п. одержано для стаціонарних випадкових процесів з дробово-раціональною *спектральною щільністю*. Характер одержуваних при цьому результатів можна проілюструвати такими прикладами:

Приклад 1. Якщо $\xi(t)$ — стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю $f(\lambda) = \dfrac{A}{|\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots a_n|^2}$, а $E = (-\infty, 0)$ (спостерігається все минуле процесу $\xi(t)$), то $\tilde{\xi}(t_0) = c_0\,\xi(0) + c_1\xi'(0) + \ldots + c_{n-1}\xi^{(n-1)}(0)$, де $c_0, \ldots, c_{n-1}$ — деякі константи, $\xi^{(i)}(0)$ — похідна порядку i процесу $\xi(t)$ в точці 0.

Приклад 2. Якщо $\xi(t)$ — стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю $f(\lambda) = A\,\dfrac{\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda^4 + \alpha^4}$ і $E = (-\infty, 0)$, то $\tilde{\xi}(t_0) = c_0\xi(0) + c_1\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\xi(t)\,dt$. А якщо той самий процес спостерігають на $E = (-T, 0)$, то

$$\tilde{\xi}(t_0) = c_0\xi(0) + c_0'\xi(-T) + \int\limits_{-T}^{0}[c_1e^{\alpha t} + c_1^1e^{-\alpha t}]\,\xi(t)\,dt.$$

Тут c_p, c_p^1, c_1, c_1^1 — константи, що залежать від t_0 та α.

Методи Е. в. п. широко використовують в *автоматичного керування теорії*, теорії зв'язку, радіофізиці, в *розпізнаванні образів*.

М. Й. Ядренко.

ЕКСТРАПОЛЯ́ЦІЯ У НАВЧА́ННІ РОЗПІЗНАВА́ТИ О́БРАЗИ — визначення результату розпізнавання для довільного сигналу на основі заданих результатів розпізнавання для окремих сигналів, які утворюють *навчальну вибірку*.

Розпізнавальна система (або розпізнавальний алгоритм) служить для того, щоб на основі спостережуваного сигналу, який характеризує якийсь об'єкт, вибирати одне з можливих рішень. Мета навчання розпізнавальної системи полягає в тому, щоб за відомими правильними рішеннями, вказаними вчителем для якоїсь вибірки сигналів, визначити рішення для сигналів, що не увійшли до вибірки. Цей процес, з одного боку, подібний до навчання людини на прикладах, з другого, його можна розглядати як відновлення якоїсь функції за її значеннями в окремих точках, тобто як *екстраполяцію функцій* (або їх інтерполяцію). Очевидно, що екстраполяція функцій або *інтерполяція функцій* має сенс тільки в тому разі, коли на шукану функцію з самого початку накладено певні обмеження, тобто вказано клас, до якого явно належить шукана функція. Клас функцій можна або чітко окреслити, або задати не цілком точно, вказавши перевагу тих чи інших функцій. Перевага характеризується певним функціоналом, заданим на множині функцій. Прикладом такого функціоналу може бути якась оцінка складності функції. Якщо ніяких обмежень немає, то екстраполяція втрачає сенс, бо в цьому разі функцію можна продовжити цілком довільно.

У найпростішому і звичному випадку функцій одновимірного аргументу (тобто функцій однієї змінної) достатньо накласти на функції досить загальні й порівняно слабкі обмеження, для того, щоб екстраполяція з прийнятою точністю була можлива. Напр., досить припустити існування та обмеженість похідної, щоб екстраполяція (в даному разі — інтерполяція) була можлива з *похибкою*, обернено пропорційною до числа рівномірно розподілених точок, у яких значення функцій задано.

Проте в загальному випадку функцій багатовимірного аргументу при таких самих заг. припущеннях про функції екстраполяція нездійсненна. Випадок багатовимірного аргументу, характерний для більшості практично важливих задач розпізнавання, має ту особливість, що точки, в яких необхідно задати значення функції, утворюють багатовимірну сітку. Число точок у ній зростає зі зростанням розмірності N аргументу як m^N, де m — число значень, що їх набуває кожна компонента аргументу. Навіть при мінімальному значенні $m=2$ (компонента є змінною величиною, якщо вона набуває, принаймні, двох різних значень) число точок, що дорівнює 2^N, збільшується зі зростанням розмірності N так швидко, що вже при N порядку кількох десятків задати 2^N точок практично неможливо. Тому у випадку екстраполяції функцій багатовимірного аргументу необхідно накладати значно строгіші обмеження на клас функцій. З цими «труднощами багатовимірності» дослідники мають справу, розв'язуючи задачі навчання в тих випадках, коли розпізнавані об'єкти характеризуються великим числом ознак. У таких задачах аргументом вирішувальної функції є набір ознак. Вимірність N такого аргументу дорівнює числу ознак. Тому при розпізнаванні об'єктів, що характеризуються кількома десятками ознак, щоб подолати труднощі багатовимірності, необхідно заздалегідь знати достатньо вузький клас, до якого належить вирішувальна функція.

Достатньо вузьким класом функцій слід вважати клас, який характеризується порівняно невеликим значенням *епсилон-ентропії*, так що *інформації кількість*, що міститься в навчальній вибірці, має бути не меншою за ε-ентропію класу. Звичайно, якщо клас функцій задано у параметричній формі, цю вимогу можна грубіше сформулювати так: треба, щоб число невідомих параметрів функції було того самого порядку, що й довжина навчальної вибірки. Звичайно, треба, щоб клас функцій, який вибирають, був адекватним даній конкретній задачі, бо в противному разі може виявитися, що шукана вирішувальна функція не належатиме вибраному класові функцій і тому її й не буде знайдено. Вибір класу вирішувальних функцій можна здійснити, вивчивши закономірності, яким підпорядковуються спостережувані сигнали в конкретному випадку розв'язуваної задачі (див. *Моделі об'єктів розпізнавання*).

В. А. Ковалевський.

ЕКСТРАПОЛЯ́ЦІЯ ФУ́НКЦІЙ — наближене визначення значень якоїсь функції в точках, які лежать поза відрізком, що належить області визначення функції, за її значеннями у внутрішніх точках цього відрізка. Іншими словами, якщо відомі значення ф-ції $y = f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$, то за цими значеннями в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(x_0 < \ldots < x_n)$ можна визначити значення ф-ції в точках, які лежать поза відрізком $[x_0, x_n]$. Апаратом для цього служить, напр., Е. ф. за допомогою інтерполяційних многочленів (див. *Інтерполяція функцій*), коли за значення $f(x)$ у точці x беруть значення многочлена $P_n(x)$ степеня n, який набуває в $n+1$ точці x_i заданих значень $y_i = f(x_i)$.

Д. К. Лісенбарт.

ЕКСТРЕМА́ЛЬ (від лат. extremus — крайній) — така функція одного чи кількох аргументів, яка дає екстремум (максимум чи мінімум) якійсь змінній величині, залежній від функцій, і яку називають функціоналом. Напр., функціоналом є кількість тепла, яке виділяється в обмотці якоря електродвигуна за час пуску, причому функція, від якої залежить цей функціонал, є залежність струму якоря від часу. Е. в цьому разі є така залежність струму електродвигуна від часу, при якій досягається мінімум втрат тепла під час

пуску. Е. використовують для складання оптим. програм роботи й синтезу структур систем автомат. керування. *Л. М. Бойчук.*

ЕКСТРЕМА́ЛЬНЕ РЕГУЛЮВА́ННЯ — спосіб автоматичного керування, що полягає у встановленні такого режиму роботи об'єкта, за якого безпосередньо вимірюваний показник якості (якийсь функціонал координат системи) має максимальне (мінімальне) значення. Е.р.— окремий випадок оптимального керування, для якого показник якості є безпосередньо вимірюваним. За Е. р. розв'язують задачі: 1) знаходження градієнта *цільової функції*, який визначає напрям руху до екстремуму в просторі регульованих координат за наявності завад, збурень та інерційності об'єкта оптимізації; 2) організації стійкого руху системи в напрямі точки екстремуму за мінімально можливий час або за мінімізації ін. показників (напр., функціоналу, що характеризує середньоквадратичне відхилення від точки екстремуму).

Задачу Е. р. можна розв'язати, використавши розімкнений або замкнений принцип керування (див. *Система екстремального регулювання*).

Е. р. є одним із способів керування виробничими процесами (див. *Регулятор екстремальний*, *Оптимізатор автоматичний*).

В. М. Кунцевич, А. А. Тунік.

ЕКСТРЕМА́ЛЬНІ ЗАДА́ЧІ в теорії графів — задачі на відшукання мінімуму (максимуму) якої-небудь числової характеристики *графа*, який належить якомусь виділеному класу. Прикладом можуть бути задача про знаходження точних верхніх і нижніх границь для хроматичного числа графа із заданими кількостями вершин та ребер, задача про визначення найбільшої кількості ребер графа з фіксованими кількостями вершин і радіусом тощо. Найчастіше такі задачі вкладаються в схему: задано якісь графи $F_1, \ldots, F_l$; треба знайти найбільшу кількість $m(n;\ F_1, \ldots, F_l)$ ребер, яку може містити n-вершинний граф L^n, у якому не вкладається принаймні один з первісних (граф K вкладається в L, якщо в L існує частина, ізоморфна K); крім того, треба описати множину всіх графів, екстремальних для $F_1, \ldots, F_l$.

Найбільший внесок у розробку методів розв'язування задач зазначеного типу зробили угорські математики. Першу таку задачу поставив і розв'язав 1940 П. Туран. Він довів, що при будь-якому натуральному n єдиним екстремальним n-вершинним графом для повного $p+1$-вершинного графа є граф $T^{n,p}$, описуваний так: нехай r — остача від ділення n на p; розіб'ємо n вершин графа на p неперетинних підмножин, з яких r містять по $\left[\frac{n}{p}\right]+1$ вершин, а решта $p-r$ підмножин — по $\left[\frac{n}{p}\right]$ вершин; дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли вони належать різним підмножинам. Підраховано, що кількість ребер графа $T^{n,p}$ дорівнює $\frac{p-1}{2p}(n^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2}$.

Як правило, визначити екстремальний граф L^n і кількість його ребер вдається лише при достатньо великих значеннях n. У зв'язку з цим багато авторів дослідили граничні властивості екстремальних графів. Доведено, що, коли $p+1$ — мінім. з хроматичних чисел графів $F_1, \ldots, F_l$ і L^n — екстремальний граф для цих графів, то $m(L^n)=m(T^{n,p})+O(n^{2-c})$. Тут $m(K)$ — кількість ребер графа K, c — додатна константа, залежна від $F_1, \ldots, F_l$.

Цей результат значно підсилює така теорема. Нехай граф L^n — екстремальний для графів $F_1, \ldots, F_l$. Коли для всіх $i=1, \ldots, l$ хроматичне число $\chi(F_i)\geqslant p+1$ і $\chi(F_1)=p+1$, причому для якогось розфарбовування графа F_1 за допомогою кольорів «1», ..., «$p+1$» кольором «1» забарвлено r вершин, то $m(L^n)=m(T^{n,p})+O\left(n^{2-\frac{1}{r}}\right)$ і вершини L^n можна розбити на p неперетинних підмножин $A_1, \ldots, A_p$ так, щоб здійснювались умови: а) будь-яке A_i містить $\frac{n}{p}+O\left(n^{1-\frac{1}{2r}}\right)$ вершин; б) кількість ребер, що з'єднують вершини з A_i, не перебільшує $O\left(n^{2-\frac{1}{r}}\right)$ $(i=1, \ldots, p)$; в) степінь кожної вершини графа дорівнює $\frac{n}{p}(p-1)+O\left(n^{1-\frac{1}{r}}\right)$; г) за винятком не більш як $O\left(n^{2-\frac{1}{r}}\right)$ пари $\langle x, y\rangle$ виду $x\in A_i$, $y\in A_j$ $(i\neq j)$ утворені суміжними вершинами.

Мінім. інформацію граничні теореми дають при $p=1$. В цьому разі ключовою, але ще не розв'язаною задачею є задача відшукання екстремального графа для повного дводольного графа з кількістю вершин у кожній долі t. Встановлено, що кількість ребер такого графа не перебільшує $cn^{2-\frac{1}{t}}$ (c — якась константа), проте добрі нижні оцінки при довільному t невідомі.

Для розв'язування деяких екстремальних задач при великих значеннях n існує т. з. метод прогресивної індукції, що грунтується на використовуванні граничних теорем. Зокрема, доведено таку теорему. Для того щоб граф $T^{n,p}$ $(p>1)$ був екстремальним для графів $F_1, \ldots, F_l$, починаючи з якогось n, необхідно й достатньо, щоб $\chi(F_i)\geqslant p+1$ $(i=1, \ldots, l)$ і для якогось i_0 у графі F_{i_0} існувало ребро, видалення якого зменшувало б хроматичне число графа. За цих умов граф $T^{n,p}$

при достатньо великому n є єдиним екстремальним графом.

Літ.: Зыков А. А. О некоторых свойствах линейных комплексов. «Математический сборник. Новая серия», 1949, т. 24, № 2; Ершов А. П., Кожухин Г. И. Об оценках хроматического числа связных графов. «Доклады АН СССР», 1962, т. 142, № 2; Визинг В. Г. О числе ребер в графе с данным радиусом. «Доклады АН СССР», 1967, т. 173, № 6; Turán P. On the theory of graphs. «Colloquium mathematicum», 1954, v. 3, № 1; Simonovits M. A method for solving extremal problems in grapps theory, stability problems. В кн.: Theory craphs. Budapest, 1968.
М. К. Гольдберг.

ЕКСТРЕМА́ЛЬНІ ЗАДА́ЧІ НА ГРА́ФАХ — задачі, які полягають у відшукуванні найбільшого або найменшого значення якоїсь числової функції, визначеної на сітці, заданій певним *графом*. До таких задач належать *задача про найкоротший шлях*, задача про *критичний шлях*, задача про відшукування *допустимого шляху*, *сіткова задача*, *сіткова задача неоднорідна* тощо.

ЕКСТРЕ́МУМ (лат. extremum — крайній) — значення якоїсь величини або функції $f(x)$, що є її максимумом або мінімумом. Розрізняють *екстремум локальний* — Е. в деякому довільно малому околі даної точки, і *екстремум глобальний* — Е. в усій розглядуваній області значень x. Локальним максимумом або мінімумом неперервної ф-ції $f(x)$ є таке значення $f(x_0)$, для якого справджується відповідно нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$ або $f(x) \geqslant f(x_0)$ для всіх x, що містяться всередині інтервалу $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ — якесь достатньо мале число. Для диференційовних ф-цій, заданих у явному вигляді, Е. досягається тільки в тих точках x_0, де $f'(x_0) = 0$ (необхідна умова існування Е). Щоб знайти точки Е., розв'язують рівняння $f'(x) = 0$ і кожний з одержаних коренів $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ досліджують одним з таких 2 способів (які дають достатні умови існування Е). 1) Знаходять знаки $f'(x)$ у точках ξ_k і ξ_{k+1} $(x_{k-1} < \xi_k < x_k < \xi_{k+1} < x_{k+1})$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Якщо $f'(\xi_k)$ і $f'(\xi_{k+1})$ мають однакові знаки, то Е. нема; якщо $f'(\xi_k) > 0$, а $f'(\xi_{k+1}) < 0$, то маємо точку мінімуму; якщо $f'(\xi_k) < 0$, а $f'(\xi_{k+1}) > 0$, то маємо точку максимуму. 2) Знаходять $f''(x_k), f'''(x_k), f^{IV}(x_k), \ldots$. Якщо порядок першої відмінної від 0 похідної з цього ряду — парний, то ф-ція $f(x)$ має або максимум (коли похідна від'ємна), або мінімум (коли похідна додатна). А якщо порядок цієї похідної непарний, то ф-ція не має Е.

Якщо ф-цію $y = f(x)$ задано неявно (за допомогою рівняння $F(x, y) = 0$), то розв'язують систему $F(x,\ y) = 0$, $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0$ й одержані розв'язки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, ..., $(x_n,\ y_n)$ підставляють у $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}$. Якщо в точці $(x_i,\ y_i)$ ці частинні похідні мають різні знаки, то при даному x_i ф-ція має мінімум; а якщо вони мають однакові знаки, то ф-ція має максимум. Якщо одна з цих похідних дорівнює 0, аналітичні методи стають складнішими. Див. також *Мінімізації функцій методи*, *Оптимізації методи* чисельні.
О. Т. Хавро.

ЕКСТРЕ́МУМ АБСОЛЮ́ТНИЙ — найменше (найбільше) значення функціоналу в усій області його визначення. Якщо аргумент обмежено якимись умовами, що описують допустиму область змін, то Е. а. — це найменше (найбільше) значення функціоналу в цій області.

ЕКСТРЕ́МУМ ГЛОБА́ЛЬНИЙ — крайнє (найбільше або найменше) значення числової функції на всій множині значень, яких ця функція набуває, тобто її глобальний максимум або глобальний мінімум.

Задача відшукування точок, у яких досягається Е. г., є задачею *програмування математичного*. Якщо ці точки відшукують в усьому просторі незалежних змінних, то задачу наз. задачею на безумовний екстремум. А якщо її відшукують при якихось обмеженнях на незалежні змінні, то задачу наз. задачею на умовний екстремум. Див. також *Глобального пошуку методи*.
В. П. Гуленко.

ЕКСТРЕ́МУМ ЛОКА́ЛЬНИЙ — значення функціоналу в точці, в якій виконується слідуюча умова: існує такий окіл цієї точки, що найменшого значення в цьому околі функціонал досягає саме в розглядуваній точці.

ЕКСТРЕ́МУМУ ДРЕЙФ — змінювання координат точки екстремуму статичної характеристики об'єкта керування внаслідок дії на нього зовнішніх збурень. В об'єктах з одним регулюючим діянням розрізняють такі два типи Е. д.: горизонтальний (дрейф уздовж осі регулюючого діяння) і вертикальний (уздовж осі покажчика екстремуму). В об'єктах з n регулюючими діяннями Е. д. відбувається в $(n + 1)$-вимірному просторі, який утворюється n осями регулюючого діяння і $(n + 1)$ віссю покажчика екстремуму. При аналізі й синтезі ектремальних систем задають гіпотези щодо характеру Е. д. Найчастіше Е. д. приймають у вигляді одиничного стрибка, лінійно зростаючого збурення та випадкового процесу, як правило, з нормальним розподілом. Горизонтальним типом Е. д. задаються для аналізу перехідних процесів в екстремальних системах (див. *Екстремальне регулювання*). При наявності Е. д. вертикального типу екстремальні системи (див. *Система екстремального регулювання*) втрачають працездатність при швидкості Е. д., більшій за деяку критичну, тому визначити її — це має велике значення для оцінки граничних можливостей і швидкодії екстремальної системи. Розрахунок екстремальних систем при випадковому Е. д. дає змогу визначити точність підтримування екстремуму й критичну дисперсію випадкового збурення, за якої екстремальна система зберігає працездатність.

Літ. див. до ст. *Система екстремального регулювання.*
А. А. Тунік.

ЕЛЕКТРИ́ЧНИХ КІЛ ТЕО́РІЯ — сукупність знань про властивості електричних та магнітних кіл, про закономірності й методи аналізу процесів, що перебігають у них, про методи синтезу таких кіл за прийнятими критеріями якості. Галуззю дослідження Е. к. т. є пристрої й сигнали в колах, характеристики й умови спостереження яких такі, що в якійсь обмеженій області простору істотно проявляється лише один бік електромагнітного процесу. Ця обставина дає змогу перейти від розподілених у просторі векторних величин складових напруженості електр. поля, вектора електр. зміщення, вектора густини електр. струму, вектора напруженості магн. поля і вектора магн. індукції до таких інтегральних понять, як ерс, напруга, електричний заряд, струм, магнітний потік, і від реальних електр. та магн. кіл (РК) — до графо-аналітичної абстракції, яка виражається у зображенні РК в різній формі через набір ідеальних електр. і магн. елементів (електр. і магн. опорів, ємностей, індуктивностей, джерел напруг, струмів і потоків та ін.), що відбиває осн. явища, які перебігають у реальному пристрої.

Сукупність електр. елементів, призначену для інтерпретації реального пристрою, електромагн. процеси в якому можна описувати за допомогою понять про ерс, струм та напругу, наз. ідеальним електричним колом (ЕК). Аналогічно сукупність магн. елементів, призначену для інтерпретації реального пристрою з феромагнітними тілами, що утворюють замкнені контури, де за наявності магніторушійних сил утворюються магн. потоки, наз. ідеальним магн. колом (МК). За наявності в реальному електр. пристрої електронних ламп, транзисторів, фоторезисторів, напівпровідникових діодів та інших електронних елементів інтерпретуючий набір елементів наз. електронним колом.

Представлення реального кола через ідеальне виконують, враховуючи характеристики використовуваних сигналів, оскільки вони істотно впливають на ступінь абстракції перебігаючих фіз. процесів. Напр., для певного типу дротяного резистора найістотнішим параметром на низьких частотах є активний опір, а на високих — ємнісний. Разом з тим для середнього діапазону частот не можна нехтувати ні активною, ні реактивною складовою опору, і в цьому разі даний резистор доцільно розглядати як складне *RLC*-коло. Отже, інтерпретація реального резистора ідеальними електр. елементами повинна бути різною залежно від спектра частот робочих сигналів кола. А якщо розглядати ЕК й МК, то для них можливі формальні визначення й формальні перетворення, основані на сукупності певних понять, не пов'язаних з сигналами. Абстрагування кола до рівня об'єкта дослідження, не залежного від сигналу, дає змогу локалізувати власні властивості кіл безвідносно до характеристик сигналів, а тим самим і виконати важливі узагальнення в рамках єдиної теорії абстрактних кіл. У зв'язку з цим сучас. підхід в Е. к. т. пов'язується з застосуванням фундаментальної теорії простору станів (фазового простору), згідно з якою кола розглядають з позиції теорії систем і відповідних їй понять: об'єкт, стан, вхід, вихід, еквівалентність, стійкість систем і станів тощо. Суттю теорії систем є відшукання не фіз. *аналогій* в осн. властивостях досліджуваної системи, а матем. зв'язків між ними, внаслідок чого вивчення систем, у тому числі й кіл, супроводжується розв'язуванням у тому або іншому вигляді таких проблем: а) з'ясування осн. властивостей об'єктів, які входять у склад системи; б) визначення співвідношень між цими властивостями; в) представлення взаємодії між різними об'єктами у вигляді співвідношень між їхніми властивостями; г) складання повної сукупності співвідношень між властивостями системи; д) складання рівнянь зв'язку між властивостями, які змінює експериментатор (входи), і властивостями, що їх спостерігають, але не піддають безпосередній зміні (виходи).

Е. к. т. включає в себе дві осн. області дослідження — аналіз і синтез ЕК і МК. Аналіз кіл пов'язаний з розв'язуванням задач знаходження станів, напр., розрахунку розподілу струмів, напруг, зарядів і потокозчеплень в елементах кола, задач стійкості електр. і магн. кіл як систем, задач по визначенню чутливості до змін характеристик тощо. При цьому число незалежних рівнянь, які звичайно можна скласти, дорівнює числу невідомих, завдяки чому задачі аналізу супроводжуються розв'язуванням певних систем рівнянь. Задачі синтезу кіл складніші й полягають у розробці методів побудови кіл із заданими властивостями, напр., для електронних кіл однією з важливих задач синтезу є задача побудови кіл, описуваних бажаними матем. рівняннями. В задачах синтезу кіл число рівнянь, яке можна скласти, звичайно менше за число невідомих, тому і їхній розв'язок практично завжди неоднозначний.

Реальне електр. коло — це об'єкт, який складається з сукупності провідних тіл і середовищ, які утворюють замкнені шляхи для електр. струму. А оскільки ЕК, що його інтерпретує, є абстрактним образом, то залежно від призначення й форма представлення ЕК різна: схема сполучення, геом. образ, матрична форма представлення тощо. Важливе практ. значення має матеріальне втілення абстрактного ЕК в набір реально сполучених фіз. елементів, характеристики яких максимально наближені до ідеальних. Це дає змогу створювати моделюючі пристрої для аналізу й дослідження складних РК і ЕК й конструювати нові прилади з наперед заданими характеристиками.

В основі більшості методів аналізу ЕК лежить ідея розчленування їх на складові частини — елементи кола. Елементи поділяються на пасивні (резистори, котушки індуктивності, конденсатори тощо) й активні (джерела струму, джерела напруги, електронні лампи, транзистори та ін.). Сукупність взаємо-

зв'язків між елементами утворює схему сполучення. Схему сполучення ЕК без зазначення характеру елементів наз. її геом. образом. Ті елементи ЕК, які можна з'єднувати з рештою тільки двома полюсами (затискачами), наз. двополюсниками. Аналогічно вводять поняття про триполюсники, чотириполюсники і взагалі багатополюсники. Точки, в яких з'єднуються три і більше полюсів, наз. вузлами ЕК; частини, які з'єднують два будь-які вузли,— його гілками, а будь-який замкнений шлях, який проходить по кількох гілках — контуром ЕК. Процеси, які відбуваються в ЕК, поділяють на усталені (стаціонарні) й перехідні (нестаціонарні), а самі ЕК, залежно від реакції на процеси,— на лінійні й нелінійні, і залежно від співвідношень між довжиною хвилі змінного сигналу й фазового розподілу вздовж кожної гілки — на ЕК з зосередженими й ЕК з розподіленими параметрами.

Залежно від мети аналізу властивості ЕК можна виражати різними способами, напр., за допомогою алгебр. чи дифер. рівнянь або визначаючи реакцію кола на вплив на входи певних елементарних ф-цій. Якщо відома реакція кола на елементарну ф-цію, то для лінійних ЕК реакцію на довільний вхідний сигнал можна визначити на основі принципу суперпозиції (принципу накладання, див. *Розрахунку електричних кіл методи*).

Як елементарні ф-ції часто використовують синусоїдні сигнали і відповідні їм розвинення вхідних сигналів у ряд або інтеграл Фур'є (методи перетворення Фур'є). Проте методам перетворення Фур'є притаманний істотний недолік — за допомогою їх можна одержати лише складові усталеного режиму, тому в заг. випадку не можна одержувати вихідний сигнал як функцію часу.

Труднощі перетворення значною мірою усуває перехід в область комплексного змінного з виконанням інтегрування в комплексній площині. Відповідне перетворення, яке є узагальненням інтеграла Фур'є, наз. перетворенням Лапласа. Його використовують, щоб розв'язувати дифер. рівняння, визначати реакції кіл на безперервні сигнали, а також щоб розв'язувати різницеві рівняння й визначати реакції на дискретні сигнали. Однак у двох останніх випадках найзручнішим виявляється застосування спеціально розробленого методу z-перетворення.

Позитивним у методах перетворення є те, що вони дають змогу дослідникові оперувати не з дифер. рівняннями, а з алгебричними. Така сама позитивна якість властива й методові передавальних ф-цій, які для кіл з постійними параметрами можна визначити як відношення перетворення Лапласа вихідної величини до відповідного перетворення вхідної, коли є нульові початкові умови.

Цей метод має ще й те позитивне, що вимірність передавальної ф-ції часто виявляється нижчою за вимірність відповідної системи алгебр. або дифер. рівнянь. Оскільки ЕК через неєдиність кількості входів і виходів звичайно належать до класу багатозв'язних систем, то для них часто застосовують поняття передавальної матричної ф-ції. Регулярне застосування передавальні ф-ції знаходять при розрахунку процесів в ЕК і при аналізі їхньої стійкості.

Застосовуючи до аналізу ЕК метод простору станів, рівняння кола записують у вигляді рівняння стану, яке для лінійного випадку ЕК в матрично-векторній формі має вигляд

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+B(t)V,$$

$$Y=C(t)X+D(t)V,$$

де X — вектор змінних станів, визначуваний в n-вимірному просторі координатами x_1, x_2, ..., x_n; V — вектор вхідних ф-цій, визначений в m-вимірному просторі; Y — вектор вихідних ф-цій, визначуваний в p-вимірному просторі; $A(t)$ — основна матриця ЕК; $B(t)$, $C(t)$ та $D(t)$ — матриці зв'язку ЕК.

При цьому поняття стану ЕК можна схематично охарактеризувати як мінім. інформацію про ЕК, необхідну для визначення при відомій вхідній ф-ції, її виходу і її стану в майбутньому. Отже, стан кола в момент t_1 містить усю ту інформацію про минуле ($t \leqslant t_1$) кола, яка необхідна для того, щоб визначити реакцію на довільний вхідний сигнал у майбутньому ($t \geqslant t_1$). З цієї причини стан кола зв'язується з його пам'яттю, тому для RLC-кіл компонентами вектора повинні бути струми в індуктивностях L і напруги на конденсаторах C.

Традиційні методи аналізу стаціонарних і нестаціонарних процесів в ЕК пов'язані з використанням трьох груп рівнянь. Перша група утворюється з рівнянь, складених для окремих елементів кола з застосуванням узагальненого закону Ома. Друга — шляхом застосування першого правила Кірхгофа. Третю групу рівнянь складають на основі застосування другого правила Кірхгофа. Для аналізу динамічних процесів в ЕК використовують різні форми представляння сигналів і параметрів ЕК — комплексну, операторну, точкову та ін. Метод рівнянь Кірхгофа й Ома через громіздкість застосовують рідко, бо є методи, для яких кількість потрібних обчислень можна істотно скоротити, застосовуючи ряд прийомів і принципів. Розрізняють методи аналізу, для яких ефекту зменшення кількості обчислень досягають, застосовуючи методи формального перетворення власне ЕК (методи трансфігурацій, інакше, перетворення, підсхем), і методи, загальна ідея яких полягає в особливому виборі групи сигналів, що характеризують окремі процеси в складному ЕК, для котрої можна скласти й розв'язати незалежну систему рівнянь і через яку за допомогою досить простих залежностей можна виразити решту невідомих сигналів. Крім того, є окрема група методів розрахунку (прямі методи), яка дає змогу в разі потреби знаходити простіше лише шукані складові процесу в ЕК.

Методи трансфігурації грунтуються на можливості заміни за певними правилами ЕК в цілому і окремих його частин (підсхем) простішими колами. В результаті такої заміни система струмів і напруг не зміниться (еквівалентні перетворення) або буде одержано нове ЕК з іншими сигналами, геом. образом та кількістю вузлів і контурів, але таке, що між системою струмів, напруг, ерс і системою вихідного ЕК буде збережено заданий взаємозв'язок (нееквівалентні перетворення).

До другої групи методів — методів визначальних координат (невідомих) — належать: метод контурних струмів, метод вузлових напруг і загальний метод визначальних координат.

Другим осн. напрямом дослідження Е. к. т. є синтез кіл за заданою реакцією на вхідний сигнал. Стосовно до лінійних ЕК (наприклад, для фільтрів) синтезом часто наз. визначення структури кола й числових значень його складових елементів за відомими операторними виразами цього кола або часовими характеристиками при впливі на вхід сигналу певної форми. Практичне розв'язання цієї задачі пов'язане, по-перше, із з'ясуванням можливості фіз. реалізації ЕК з реакцією, відповідною заданій, за допомогою звичайних елементів (конденсаторів, індуктивностей, резисторів), оскільки конкретне розв'язання задачі синтезу за допомогою лінійних пасивних ЕК може не існувати (напр., коли потрібний негативний опір), і, по-друге, з розробкою методу конкретної реалізації кола з заданою реакцією у вигляді схеми з'єднання, а потім у вигляді фіз. ЕК, оскільки розв'язок може бути багатозначним. Практично відповідність реакції ЕК заданій реакції можлива лише для обмеженої області визначення аргументу. Відповідність при цьому є наближеною, тому в задачах синтезу ЕК вводять параметр, який характеризує ступінь близькості одержуваної реакції до бажаної. Ширші можливості відкриває синтез кіл з нелінійних елементів, якими є більшість електронних пристроїв. Синтез електронних кіл є основою електронного матем. моделювання. При цьому моделюванні використовують властивості електричних та електронних кіл (а іноді й магнітних), а також *подібності теорію, автоматичного керування теорію* і багато галузей математики. Електронне моделювання займається синтезом кіл, що є моделями різних об'єктів (див. *Аналогова модель, Квазіаналогова модель, Модель змінної структури, Модель фізична*) і матем. операцій, теор. питаннями побудови відповідних обчисл. та керуючих електронних установок, машин і пристроїв (див. *Аналогова обчислювальна машина*) і методами розв'язування за їхньою допомогою різноманітних задач (див. *Електричні моделюючі сітки*). В цьому разі задачі синтезу можна сформулювати інакше. Так, для однієї з груп моделюючих кіл під синтезом розуміють визначення для заданого набору елементів, що утворюють моделі різних матем. операцій (підсумовування, множення, інтегрування, функціонального перетворення та ін.), структури кола й числових значень масштабних коефіцієнтів за заданими рівняннями модельованого об'єкта. Для квазіаналогових моделюючих кіл (див. *Квазіаналогове моделювання)* задача синтезу полягає у використанні принципу утворення потенціально-нульових вузлів (див. *Потенціально-нульова точка*) і принципу утворення вузлів з нульовими власними провідностями (див. *Нульових власних провідностей вузлів метод*) при створенні моделей.

В Е. к. т. виник новий напрям — застосування електронних цифрових обчислювальних машин для аналізу й синтезу електронних, електр. і магн. кіл (див. *Машинне проектування інтегральних схем*). Для цього напряму характерне створення чисельних методів розрахунку алгебр. і дифер. рівнянь, строга формалізація осн. понять Е. к. т., зокрема, поняття синтезу кіл, розробка формальних мов для описування кіл тощо. Застосування ЕЦОМ накладає свій відбиток на вибір зручної системи параметрів і на критерій оптимальності методів аналізу та синтезу кіл.

Літ.: Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. М., 1951 [бібліогр. с. 325—332]; Нейман Л. Р., Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники, ч. 1—3. М.—Л., 1959; Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. М., 1960 [бібліогр. с. 696—699]; Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М., 1973 [бібліогр. с. 733—735]; Максимович Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. М.—Л., 1961 [бібліогр. с. 261—264]; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564]; Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники, т. 1—2. Л., 1967; Ланнэ А. А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. М., 1969 [бібліогр. с. 279—292]; Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Пер. с англ. М., 1952; Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. Пер. с англ. М., 1963.

В. В. Арістов.

ЕЛЕКТРИ́ЧНІ МОДЕЛЮ́ЮЧІ СІ́ТКИ — моделюючі пристрої, *машинні змінні* в яких відповідають з точністю до постійних масштабів шуканим невідомим із скінченнорізницевих рівнянь, що апроксимують початкові диференціальні; призначені для розв'язування диференціальних рівнянь. Існує два методи побудови Е. м. с.: фізичний і математичний. Фіз. метод полягає в тому, що досліджуваний об'єкт будь-якої фіз. природи розбивається на велику скінченну кількість осередків, кожний з яких заміщується електр. схемою, що складається з резисторів, індуктивностей, ємностей тощо, які моделюють певні фіз. властивості осередків. Електр. моделі осередків з'єднуються між собою, утворюючи Е. м. с. Матем. метод грунтується на апроксимації початкового дифер. рівняння в частинних похідних системою алгебр. чи звичайних дифер. рівнянь (похідні за часом залишають іноді в дифер. формі), для розв'язання якої будують модель, що її також наз. Е. м. с. Якщо клас можливих Е. м. с., побудованих за фіз. методом, обмежений суто аналоговими пристроями, що грунтуються на принципі подібності між об'єктом і модел-

лю, то матем. підхід часто приводить до квазіаналогових Е. м. с., в основу яких покладено загальніший принцип — принцип еквівалентності рівнянь об'єкта і моделі щодо одержуваних результатів (див. *Подібності теорія*).

Е. м. с. можна побудувати лише на омічних опорах, якщо коеф. системи алгебр. рівнянь задовольняють умови: а) матриця коеф. симетрична; б) діагональні коеф. матриці за модулем більші або дорівнюють сумі побічних коеф. того самого рядка; в) усі побічні коеф. мають знак, протилежний знакові діагональних коеф. Якщо цих умов не виконано, то будують або Е. м. с. на реактивних елементах, або квазіаналогові Е. м. с. з ручним чи автомат. зрівноважуванням. Тоді до складу Е. м. с. входять електронні блоки: підсилювачі постійного струму, *перетворювачі функціональні* тощо. До складу обладнання Е. м. с., крім власне сітки, входять ще й пристрій для задавання крайових умов, вимірювальний пристрій, блок живлення тощо.

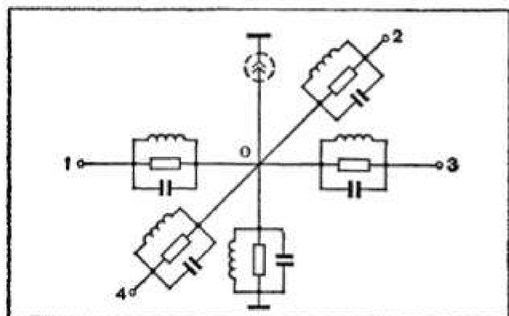


Схема вузла електричної моделюючої сітки.

Е. м. с. широко використовують у теплофізиці, електродинаміці, гідро- й аеромеханіці, буд. механіці тощо для розв'язування дифер. рівнянь з крайовими умовами. На мал. показано вузол Е. м. с. для розв'язування двовимірних дифер. рівнянь у частинних похідних 2-го порядку (О — центр. вузол, 1—4 — сусідні вузли). Відповідним добором параметрів елементів можна моделювати рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

Вади описаних Е. м. с. (громіздкість схем, труднощі при автоматизації введення й виведення даних, вузький клас розв'язуваних задач) можна усунути, перейшовши до алгоритм. Е. м. с. зі змінною структурою. Обчислювання в таких Е. м. с. здійснюються послідовно за допомогою аналогового арифм. пристрою відповідно до обраного *алгоритму* розв'язування задачі, а проміжні й остаточні результати зберігаються або в *запам'ятовувальному пристрої АОМ*, або оператор записує їх на папері. Останнім часом Е. м. с. використовують для побудови гібридних систем типу «сітка — ЦОМ», осн. достоїнства яких — великі точність обчислювання та швидкодія.

Літ.: Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., 1959 [бібліогр. с. 318—319]; Вольский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., 1960 [бібліогр. с. 447]; Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. К., 1964; Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Пер. с англ. М., 1962. *В. В. Крамськой.*

«ЭЛЕКТРÓН» — аналогова обчислювальна машина для інтегрування систем звичайних лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь до 55-го порядку зі сталими й змінними коефіцієнтами. Її можна використати й для розв'язування деяких алгебр., трансцендентних та інтегр. рівнянь. Машина забезпечує одночасне виконання до 205 лінійних операцій (підсумовування, множення на сталий коефіцієнт і інвертування знака) і до 165 нелінійних операцій різної складності (зокрема, множення й ділення двох змінних). Вона може виконувати й деякі логічні операції, напр., до 30 функціональних перемикань залежно від певних співвідношень між змінними або за заданою в часі програмою. Як аргумент при інтегруванні рівнянь використовують час. Усі змінні, що входять до системи, яку треба розв'язати, відтворюються в машині напругами постійного струму, що змінюються в діапазоні $-100 \div +100$ *в*.

«Э.» побудовано за структурно-секційним принципом, ця АОМ складається з 5 ідентичних секцій, у кожній з яких є шафа лічильно-розв'язувальних блоків, шафа живлення і стабілізатор напруги живлення. До складу машини входять і центр. пульт керування, два переносні пульти керування та апаратура для перевіряння й наладжування всіх лічильно-розв'язувальних блоків. Кожна з 5 секцій може працювати автономно чи в поєднанні з іншими. Якщо секція працює автономно, то керування нею здійснюють за допомогою центр. або переносного пульта керування або пульта керування секцією. Можливості кожної секції визначають лічильно-розв'язувальні блоки. Розв'язувальні підсилювачі — лампові. Макс. час інтегрування — 1000 *сек*. Інтегрувальні ємності (полістиролові): 1 *мкф* ± 0,1% і 0,1 *мкф* ± ± 2%. Операційні опори й потенціометри — мікродротяні. Точність виконання окремих матем. операцій, якщо вхідні сигнали постійні або поволі змінюються, характеризують середньоквадратичні зведені похибки таких порядків: для операції інтегрування, якщо стала часу 1 *сек*, і час інтегрування до 300 *сек* — 0,3%; для операції масштабного підсилювання — 0,1%; для операції множення (ділення) електронними схемами — 0,5%; для виконання аналогічних операцій електромех. схемами — 0,1%. Споживана потужність — не більша як 25 *квт*.

Літ.: Александров Б. П. [та ін.]. Опыт использования аналоговой вычислительной машины «Электрон». В кн.: Передовой научно-технический производственный опыт, № 30—63—490/13. М., 1963. *В. С. Годлевський.*

ЕЛЕКТРÓННА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНА МАШИ́НА (ЕОМ) — обчислювальна машина, основними елементами якої є електронні прилади (електронні лампи, транзистори, інте-

гральні елементи), параметрони, магнітні елементи тощо.

Першу ЕЦОМ «ENIAC» було створено в Пенсільванському ун-ті (США) 1946. Це була спеціалізована обчисл. машина, призначена для балістичних розрахунків при стрільбі. Машина працювала в десятковій системі числення, вона складалася з 18 000 ламп, швидкодія її — 200 *мксек* для операції додавання і 2300 *мксек* при множенні. В 1948 у США випущено першу серійну універсальну ЕЦОМ «IBM—603», що складалася з 1400 ламп і працювала з тактовою частотою 50 *кгц*. Першу вітчизняну ЕЦОМ «МЭСМ» було розроблено в 1950 в Ін-ті електротехніки АН УРСР.

ЕОМ принципово відрізнялися від обчисл. машин інших типів (мех., електр., електромеханічних та ін.) як компонентами, так і формою утворювання й подавання сигналу. ЕОМ мають ряд переваг: вони компактніші, надійніші, споживають менше енергії, дужче швидкодіючі, зручніше стикуються з зовн. джерелами інформації, в зручному вигляді видають результати обробки інформації. ЕОМ можна об'єднувати в комплекси обчисл. машин для переробки інформації на різних рівнях або в *обчислювальні системи* для переробки великих масивів інформації при спільній роботі.

За способом обробки представлюваної інформації ЕОМ поділяють на *цифрові обчислювальні машини*, що оперують з інформацією, поданою в цифровій (дискретній) формі, *аналогові обчислювальні машини*, які обробляють дані, подані в аналоговій (неперервній) формі, й *гібридні обчислювальні машини*, в яких перероблювана інформація подається частково в дискретній, частково в неперервній формі. Див. також *Обчислювальна машина*, *Обчислювальна техніка*. *П. В. Походзіло.*

ЕЛЕКТРО́ННЕ МОДЕЛЮВА́ННЯ — дослідження процесів різної фізичної природи шляхом синтезу моделюючих (електричних або електронних) кіл, у яких розподіл струмів, напруг чи інших величин відповідає певним чином математичним залежностям, які описують процеси в досліджуваному об'єкті. Моделюючі кола будують, встановлюючи аналогії між рівняннями об'єкта й рівняннями самого кола (див. *Квазіаналогове моделювання*). Однією з перших було використано аналогію між перебігом процесів у різних електр. колах. Моделюючі кола такого типу будували для дослідження систем електропередач. Ці кола наз. розрахунковими столами змінного струму. Така модель являє собою зменшену копію досліджуваної лінії електропередачі, яка відрізняється від модельованого об'єкта тим, що до її складу замість елементів з розподіленими по довжині параметрами входять котушки індуктивностей, конденсатори та резистори.

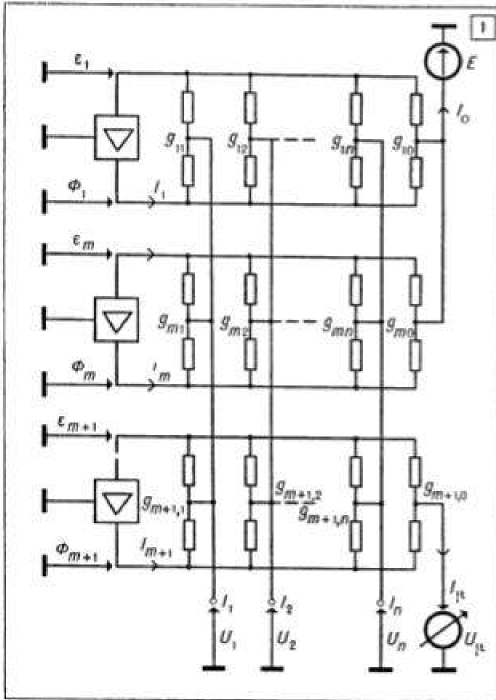
Інший великий клас електронних моделей — це моделі для розв'язування дифер. рівнянь у частинних похідних. Цими рівняннями описують процеси фільтрації вологи крізь грунт, деформації товстих балок і стрижнів, поширення радіохвиль тощо. І дотепер ще, по суті, не розроблено досить ефективних методів розв'язування цих рівнянь на ЦОМ. Тому в задачах такого роду моделюючі кола часто є практично єдиним засобом, що дає змогу одержати розв'язок у прийнятні строки. Синтезуючи подібні моделі, використовують два осн. принципи. Перший з них полягає в тому, що суцільне середовище, в якому відбувається процес, умовно розглядають як таке, що складається з окремих осередків. Процес у кожному такому осередку відтворює спец. електр. схема, яка складається з опорів або з опорів та конденсаторів. Ці окремі схеми з'єднуються між собою так само, як і осередки в досліджуваній схемі. Умови на межах зони, яка становить інтерес, моделюють, підмикаючи джерела електр. напруги чи струму до вільних виводів відповідних схем, розміщених на межі. В результаті цього одержують одно-, дво- або тривимірну електр. сітку, в якій розподіл струмів чи напруг між точками з'єднання окремих деталей схем аналогічний розподілові відповідних величин у досліджуваній системі (див. *Електричні моделюючі сітки*). Чим більша кількість осередків, на які поділено модельовану систему, тим аналогія точніша. Тому при конструюванні електр. сіток часто користуються т. з. методом «електричної лупи». Суть цього методу полягає в тому, що зону найцікавішого простору поділяють на дрібніші комірки. Це дає змогу докладніше досліджувати процеси в цій зоні. Спец. пристрій, який складається зі схем, які відповідають дрібнішим осередкам, можна підмикати до різних точок сітки. Це відповідає переміщенню лупи уздовж досліджуваного простору. Оскільки сіткові моделі для розв'язування дифер. рівнянь у частинних похідних дуже складні й мають великі габарити, їх, як правило, не випускають серійно. В США будували машини, які складалися тільки з однієї електр. схеми, яка одночасно може відтворювати процес лише в одному осередку. Після того як процес розв'язування для одного осередка повністю завершено, результати цього розв'язування запам'ятовуються, а схема перемикається на відтворювання процесу в сусідньому осередку і т. д. Хоч такі машини й дають змогу значно зменшити кількість використовуваного обладнання, але вони не набули великого поширення, бо при цьому різко збільшується час розв'язування задачі. Інший підхід до розв'язування цієї самої проблеми полягає у використанні суцільних середовищ (див. *Моделювання на суцільних середовищах*). Найпоширенішими є т. з. електролітичні ванни. При цьому розподілові величин у досліджуваній системі ставлять у відповідність розподіл електр. струмів і потенціалів в електропровідній рідині. Виготовляючи посудини з фігурним дном і вміщуючи в електропровідну рідину спец. фігурні електроди, можна з великою точністю моделювати межі досліджуваної зони. В СРСР, США та інших країнах будували моделі, в яких за електропровідне

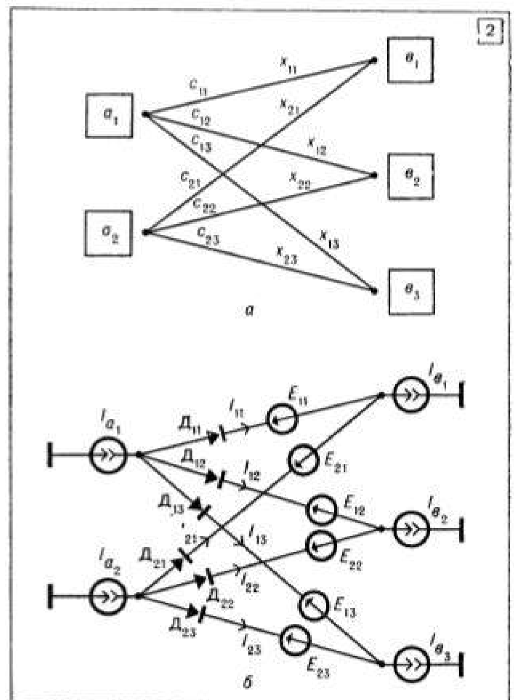
середовище правили спец. електропровідний папір або інші «тверді» середовища. Моделі на твердих середовищах компактніші й зручніші в експлуатації, ніж моделі, створювані за допомогою електролітичних ванн. Найчисленнішим є сімейство електронних моделюючих машин, призначених для відтворювання процесів у системах, що описуються звичайними дифер. рівняннями. Ці машини складаються з набору електронних функціональних блоків, кожен з яких призначено для виконання однієї з таких матем. операцій, як множення, додавання, відтворювання нелінійних ф-цій, інтегрування за часом. Їх часто наз. електронними дифер. аналізаторами.

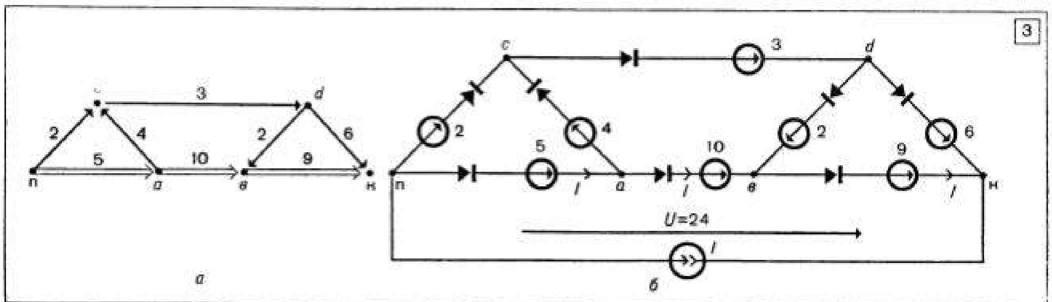
Літ. див. до ст. *Аналогова обчислювальна машина.*

Г. П. Галузинський.

ЕЛЕКТРО́ННЕ МОДЕЛЮВА́ННЯ ЗАДА́Ч МАТЕМАТИ́ЧНОГО ПРОГРАМУВА́ННЯ — розв'язування задач *програмування математичного* за допомогою аналогових пристроїв. Застосовують його поряд з використанням цифрової техніки для задач порівняно невеликих розмірів. На електронних моделюючих пристроях можна досить ефективно розв'язувати, напр., загальні задачі *програмування лінійного*, коли невідомих і обмежень не більше як по 20—30, класичні *транспортні задачі* з числом комунікацій до 1000—1500, задачі сіткового планування і керування з числом гілок до 1000 та ін. задачі. Завдяки







1. Схема моделювання загальної задачі лінійного програмування.
2. Модель транспортної задачі лінійного програмування: *а* — схематичне зображення; *б* — електрична схема.
3. Модель задачі сіткового планування та управління: *а* — сітковий графік; *б* — електрична модель сіткового графіка.

простоті й наочності одержування розв'язку за допомогою Е. м. з. м. п. та можливості швидко змінювати умови задачі й отже оперативно оцінювати різні варіанти її це моделювання широко використовують у дослідній і розрахунковій практиці планування.

Відомі *градієнтні методи* моделювання, характерною особливістю яких є те, що оптим. розв'язок задачі програмування шукають як усталений розв'язок системи диф. рівнянь, що описує положення точки в багатовимірному просторі з координатами, пропорційними шуканим невідомим. Так, розроблено схему для розв'язування задачі програмування з лінійними обмеженнями у вигляді нерівностей і з *цільовою функцією*

$$F(x) = c_1x_1 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n. \quad (1)$$

Обмеження $f_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - в_i \geqslant 0$ моделюються за допомогою *підсилювача операційного* з діодом у колі *зворотного зв'язку*. Напруга на виході підсилювача дорівнює або нулеві (при дотриманні нерівності), або граничній величині, якщо $f_i(x) < 0$. Ця напруга визначає процес мінімізації, бо вона разом з напругою $\frac{dF}{dx_j}$ подається на інтегруючий підсилювач. Діод у зворотному зв'язку інтегратора моделює обмеження $x_j \geqslant 0$. Коли мінімум функції мети досягається на межі області, а це, зокрема, завжди відбувається в задачах лінійного планування, розв'язок являє собою коливальний режим в області точки мінімуму. Градієнтні методи можна використовувати й для розв'язування деяких задач *програмування нелінійного*. В Ін-ті кібернетики АН УРСР розроблено теорію *квазіаналогового моделювання*, яку успішно застосовують для Е. м. з. м. п. Характерною особливістю квазіаналогових методів і схем моделювання задач матем. програмування є підхід до цих задач як до алгебричних об'єктів. Це допомагає будувати простіші моделі й розв'язувати більшість задач, не вдаючись до ітераційних методів.

На мал. 1 наведено одну з можливих схем моделювання загальної задачі лінійного програмування за допомогою *перетворювача лінійного оборотного*. Функція мети реалізується разом із системою лінійних обмежень задачі. За реалізації цього способу на моделі на 1-му кроці одержують допустимий розв'язок і відповідне цьому розв'язкові значення ф-ції мети. Величину цієї ф-ції тепер можна перевести в розряд задаваних величин і змінювати в потрібний бік, починаючи зі значення, одержаного на 1-му кроці. Ця операція є суттю 2-го й останнього кроку, на якому одержують оптим. розв'язок. Як тільки величина ф-ції мети починає перевищувати оптим. значення, система, яка складається з обмежень і цієї ф-ції, стає несумісною, й це проявляється в різкому виході операційних підсилювачів з нормального лінійного режиму і збільшенні вихідних напруг до 100 і більше *в*.

Є й інший підхід до моделювання задач матем. програмування: досліджують аналогію між розв'язками, одержаними за допомогою електричного кола, яке складається з джерел напруги, джерел струму, діодів, опорів і трансформаторів, та оптим. векторами задач. Потужність, споживана в електричному колі, уподібнюється до ф-ції мети. Оскільки ця потужність мінімальна, струми й напруги, які моделюють змінні, є *аналогами* оптим. розв'язку задачі матем. програмування. Ці ідеї широко використовують під час моделювання сіткових задач. Схематичне зображення транспортної мережі, яка складається з двох пунктів виробництва і трьох пунктів споживання та шістьох гілок, що зв'язують їх один з одним, показано на мал. 2, *а*. Рівняння цієї задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2, \\ x_{11} + x_{21} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} &= b_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min, \ x_{ij} \geqslant 0.$$

Електр. схему, яка моделює рівняння (2), наведено на мал. 2, *б*. Іншою задачею, яка часто трапляється в практиці планування, є задача про знаходження найдовшого (критичного) шляху на графі. Подібні задачі виникають у системах сіткового планування і керування. Найпростіша електр. модель сіткового графіка складається з діодів, джерел напруги та джерел струму — аналогічно до схеми моделі Денніса для визначення найкоротшого шляху, однак на відміну від неї діод і джерело напруги ввімкнено послідовно. На мал. 3, *б* наведено електричну модель сіткового графіка мал. 3, *а*. Величини ерс на мал. 3, *б* позначено цифрами в умовних одиницях. Критичний шлях на графі між первісною (п) і кінцевою (к) подіями зображатиметься шляхом протікання струму від зовнішнього джерела. Описані схеми стали основою для створення машин «АСОР-1» та «Оптимум-2».

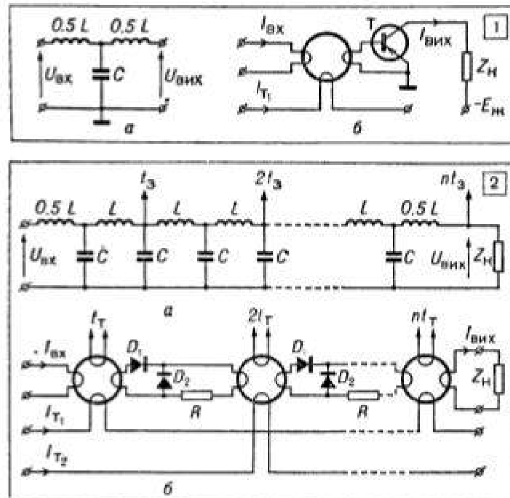
Для моделювання сіткових задач матем. програмування дуже ефективним є й цифро-аналоговий метод, де аналогами гілок і вузлів сітки є дискретні елементи, але з'єднуються вони між собою аналогічно до конфігурації мережі. Існують цифро-аналогові схеми для моделювання задач сіткового планування та керування, задач про екстрем. потоки в мережі, про оптимальну зв'язуючу мережу та ін. Цифро-аналогові пристрої порівняно з аналоговими мають кілька переваг, головною з яких є можливість автоматично вводити й виводити інформацію та спрягати ці пристрої з ЦОМ для спільної роботи.

Літ.: Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. К., 1964; Васильев В. В., Клепикова А. Н., Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. К., 1966 [бібліогр. с. 161—164]; Рыбашов М. В., Дудников Е. Е. Градиент-

ные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на аналоговых вычислительных машинах. М., 1970 [бібліогр. с. 141—142]; Pyne I. B. Linear programming on an electronic analogue computer. «Communication and electronics», 1956, № 24; Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. Пер. с англ. М., 1961 [бібліогр. с. 212—214].

А. М. Клепикова.

ЕЛЕМЕ́НТ ЗАТРИ́МКИ — електрична схема з одним входом і одним або кількома виходами, яка застосовується для часової затримки імпульсних сигналів. Залежно від способу передавання інформації в цифровій обчислювальній машині (ЦОМ) Е. з. бувають двох типів: асинхронні та синхронні. В Е. з. асинхронного типу в міру надходження сигналів на їхній вхід на виході виникає сигнал через проміжок часу, що дорівнює тривалості затримки $t_з$, величина якого визначається параметрами схеми Е. з. В Е. з. синхронного типу інформація передається примусово за допомогою синхронізуючих імпульсів, і, коли на вхід Е. з. надходить інформаційний імпульс, на виході він з'являється через проміжок часу, що дорівнює тривалості одного такту $t_т$. Серед Е. з. розрізняють пасивні (мал. 1, *а*), що не мають підсилювальних властивостей, і активні, що підсилюють сигнал (мал. 1, *б*). Як підсилювальний елемент використовують електронну лампу або транзистор. Осн. параметром Е. з. асинхронного типу є час затримки сигналу, який у схем із зосередженими параметрами здебільшого залежить від величини активного опору R, індуктивності L (або взаємоіндуктивності M) і ємності C, а в схемах з розподіленими параметрами — від довжини лінії l, діелектричної проникності ε та магнітної проникності μ середовища між провідниками лінії. Тривалість затримки, напр., у ланці з пасивних елементів $L - C$, визначають за формулою $t_з = \sqrt{LC}$, а час затримки в лінії з розподіленими параметрами $t_{зл} = 0{,}33 \cdot 10^{-10}\, l \sqrt{\varepsilon\mu}$. Тривалість затримки пасивних Е. з. може становити одиниці мікросекунд із стабільністю порядку 1% від величини $t_з$. Активні Е. з. часто використовують для побудови різних схем одновібраторів (чекаючих мультивібраторів), які виконують функцію затримки й формування сигналу. Ці схеми дають змогу одержати час затримки до кількох секунд і досить просто регулювати його в широких межах. Їх використовують здебільшого тоді, коли до стабільності часу затримки не ставлять особливо високих вимог. Щоб збільшити тривалість затримки, Е. з. включають у вигляді ланцюжка, що складається з n ланок і утворює лінію затримки в схемах асинхронного типу (мал. 2, *а*) і т. з. тактову лінію в схемах синхронного типу (мал. 2, *б*). Заг. час затримки для лінії затримки визначають за співвідношенням $t_{лз} = nt_з$, а для тактової лінії — $t_{тлз} = nt_т$. Лінії затримки забезпечують час затримки від часток мікросекунди до 10 *сек.* Е. з. використовують у вузлах ЦОМ, побудованих на основі *потенціально-імпульсної елементної структури* або *імпульсної елементної структури* та на основі елементних структур, у яких використовують магнітні або параметричні елементи, напр., у *суматорах нагромаджувальних* з послідовним перенесенням — для затримки сигналів перенесення, в динамічних *тригерах* — для організації динамічної пам'яті, в схемах на ферит-діодних і ферит-транзисторних комірках і *параметронах* — для узгодження за часом сигналів, в електр. схемах розподільників



1. Схеми елемента затримки: *а* — синхронна пасивна $L - C$ схема, де $U_{вх}$ й $U_{вих}$ — напруги на вході й виході елемента затримки, L і C — індуктивність і ємність його; *б* — синхронна активна схема ферит-транзисторного елемента, де $I_{вх}$ й $I_{вих}$ — сила струму на вході й виході його, $I_т$ — сила струму у тактовій обмотці, $E_ж$ — напруга джерела живлення, Т — транзистор, $Z_н$ — опір навантаження.
2. Ланцюжкові схеми сполучення n елементів затримки синхронного й асинхронного типу: *а* — лінія затримки на пасивних елементах $L - C$, де $U_{вх}$ і $U_{вих}$ — напруги на вході й виході схеми, $t_з$ — час затримки однієї ланки; *б* — тактова лінія затримки на ферит-діодних елементах, де $I_{вх}$ й $I_{вих}$ — сила струму на вході й виході схеми; $I_{т_1}$ й $I_{т_2}$ — сила струму в тактових обмотках; $t_т$ — час одного такту; D_1 і D_2 — діоди; R — опір.

(комутаційних пристроїв) — для створення сигналів, зсунутих у часі, тощо.

Літ.: Васильева Н. П., Гашковец И. С. Логические элементы в промышленной автоматике. М.— Л., 1962 [бібліогр. с. 156—157]; Гиршберг В. В. [та ін.]. Единая серия полупроводниковых логических и функциональных элементов (ЭТ). М.— Л., 1966 [бібліогр. с. 112].

Л. Я. Нагорний.

ЕЛЕМЕНТА́РНА СИСТЕ́МА — максимально спрощена для зручності досліджування, розглядувана як єдине ціле, формалізація якоїсь реально існуючої або проектованої системи. Сам вибір формалізації реальної системи як Е. с. виключає для дослідника можливість членувати цю систему на складові частини, ланки, вузли тощо й розглядати внутрішній взаємозв'язок між ними. Вивчаючи досить

складні системи, дуже часто буває зручно вибирати таку формалізацію, коли розглядувану систему подають у вигляді впорядкованої сукупності Е. с. з певною структурою і внутрішніми зв'язками. Е. с. має такі особливості, властиві системам: 1) у кожний момент часу стан Е. с. можна охарактеризувати кількісно за допомогою певної величини, яку наз. її миттьовою характеристикою; 2) миттьова характеристика Е. с. змінюється з часом за певними законами функціонування; 3) Е. с. може зазнавати впливу зовнішніх діянь середовища (вхідні діяння); 4) Е. с. може сама впливати на середовище (вихідні діяння); 5) характер зміни миттьових характеристик і формування вихідних діянь може мати ймовірнісне значення. Відмітною особливістю Е. с. є сталість її елементарної структури, яка полягає в наявності стану, вхідного й вихідного діянь. Формалізуючи реальні процеси, рішення про вибір об'єктів, що їх беруть як Е. с., ухвалюють залежно від рівня дроблення, на якому проводять дослідження в кожному окремому випадку.

Так, виробниче підприємство іноді можна розглядати як Е. с. При цьому за миттьові характеристики правлять такі величини, як наявність виробничих потужностей, введених у даний момент часу, показники виконання плану, наявність матеріалів і напівфабрикатів на всіх етапах виробництва тощо. Вхідними діяннями є надходження матеріалів, інформація про зміни планових завдань тощо. Вихідні діяння — це продукція, яку випускають, та інформація про хід виконання плану. В інших випадках, вивчаючи функціонування того самого підприємства, за Е. с. можна вибирати цехи, бригади і навіть окремі верстати. Для дослідження Е. с. застосовують різноманітні матем. методи: марковські й напівмарковські процеси, методи *програмування математичного*, *моделювання математичного* та *автоматів теорію*.

М. В. Яровицький.

ЕЛЕМЕНТА́РНИХ ФУ́НКЦІЙ СПО́СОБИ ОБЧИ́СЛЮВАННЯ. Обчислювання елементарних ф-цій (е. ф.) на ЕЦОМ є однією з найпоширеніших матем. операцій і має велике практичне значення. Під е. ф. розуміють ф-цію $y = f(x)$, яка містить скінченне число обчисл. операцій, що виконуються над аргументом, залежною змінною і деякими сталими. Під обчисл. операціями розуміють чотири арифм. дії, піднесення до цілого степеня, добування кореня, взяття тригонометричних і обернених їм ф-цій, логарифмування й потенціювання.

Е. ф. поділяють здебільшого на алгебричні й трансцендентні. Найпростішою алгебр. ф-цією є степенева ф-ція $y = x^n$, де n — дійсне число. Найпростішими трансцендентними ф-ціями є: показникова ф-ція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$; логарифмічна ф-ція $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$; тригонометричні ф-ції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ тощо; обернені тригонометричні ф-ції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ та ін. Крім перелічених, на практиці часто використовують і складніші е. ф., такі, як прямі й обернені гіперболічні ф-ції, цілі алгебр. многочлени й дробово-раціональні алгебр. ф-ції. Обчислюючи е. ф. за допомогою ЕЦОМ, використовують різні *чисельні методи*. Вибір методу обчислювання залежить передусім від таких важливих характеристик ЕЦОМ, як швидкодія, розрядність, форма представлення чисел, ємність запам'ятовувальних пристроїв тощо. Осн. методами обчислювання е. ф. є такі: степеневі розкладання, многочленні наближення, розкладання в ланцюгові дроби, раціональні наближення, ітераційні процеси. Іноді е. ф. знаходять як розв'язки дифер. рівнянь. Зупинимося на деяких із цих методів.

Найпростіше степеневі ряди (розвинення) одержують, розвиваючи е. ф. $y = f(x)$ у ряд Тейлора — Маклорена

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Так, напр., степеневе розвинення ф-ції $y = \sin x$ можна записати в такому рекурентному вигляді:

$$y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$; $y_0 = x$. Оскільки розвинення в ряд Тейлора — Маклорена є найкращим тільки в околі точки $x = 0$, то, природно, воно не може задовольнити потреб практики для обчислення е. ф. на заданому проміжку. Так, напр., для одержання 10 вірних цифр при обчислюванні ф-ції $y = \ln(1 + x)$, коли $x \in [0, 1]$, треба мати 10^{10} членів розвинення в ряд Тейлора і всього 14 членів при розкладанні за поліномами Чебишова.

Одним з найпростіших методів одержання розкладу за поліномами Чебишова є метод економізації степеневих рядів. Суть його полягає в зменшуванні кількості членів степеневого ряду замінюванням членів ряду з високими степенями відповідними поліномами Чебишова. Використовуючи властивість ортогональності поліномів Чебишова, можна безпосередньо одержати розклад е. ф. за ними (для $x \in [-1,1]$) у вигляді $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$, де $T_n(x)$ — поліноми Чебишова 1-го роду, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x)\, T_n(x)\, dx, \; n \neq 0.$$

Так, напр., $e^{kx} = I_0(k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(k)\, T_n(x)$, де $I_n(x)$ — ф-ція Бесселя 1-го роду порядку n уявного аргументу. Проміжним між розвиненням у ряд Тейлора — Маклорена і розкладанням за поліномами Чебишова є роз-

винення е. ф. в ряди нев'язок, що мають вигляд $y = \Psi(y_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, де $z_0 = F(x, y_0)$, y_0 — наближене значення шуканої е. ф. При цьому неявна ф-ція $F(x, y(x)) = 0$, якщо $y(x)$ точно збігається зі значенням е. ф. у точці x. У випадках, коли за рівнянням $z_0 = F(x, y_0)$ можна знайти $x = \varphi(y_0, z_0)$ і розвинути ф-цію $y(x) = y[\varphi(y_0, z_0)]$ у ряд Тейлора — Маклорена за степенями z_0, одержимо шукане розвинення в ряд нев'язок. Так, для ф-ції $y = e^x$, взявши $z_0 = x - \ln y_0$, одержимо $x = z_0 + \ln y_0$, звідки $e^x = e^{z_0 + \ln y_0} = y_0 e^{z_0} = y_0\left[1 + \frac{z_0}{1!} + \frac{z_0^2}{2!} + \frac{z_0^3}{3!} + \cdots\right]$. При $y_0 = 1$ одержимо розвинення ф-ції $y = e^x$ у ряд Тейлора — Маклорена. За наближення y_0 вигідно брати найкращі наближення е. ф. на заданому проміжку зміни аргументу: ряд нев'язок має швидшу збіжність на заданому проміжку, ніж розвинення е. ф. у ряд Тейлора, але повільнішу, ніж розклад за поліномами Чебишова. Так, для ф-ції $y = e^x$ при $x \in [0, 1]$ для одержання 10 вірних цифр необхідно взяти 14 членів розвинення в ряд Тейлора, 11 членів розвинення в ряд нев'язок з найкращим постійним наближенням і 9 членів при розкладі за поліномами Чебишова. Перевагою розвинення в ряд нев'язок є те, що вони мають легко обчислювані коефіцієнти.

Важливу роль при обчислюванні е. ф. відіграють **ітераційні процеси**. Ітераційні ф-ли по четвертий порядок включно можна одержати на основі модифікованого методу Чебишова

$$y_{i+1} = y_i - \frac{z(x, y_i)}{z_y^{(1)}(x, y_i)} - \frac{z_y^{(2)}(x, y_i)\, z^2(x, y_i)}{2!\,[z_y^{(1)}(x, y_i)]^3} - \frac{3[z_y^{(2)}(x, y_i)]^2 - z_y^{(1)}(x, y_i)\, z_y^{(3)}(x, y_i)}{3!\,[z_y^{(1)}(x, y_i)]^5} z^3(x, y_i),$$

де $z = F(x, y) = 0$, x — аргумент, $y = f(x)$ — шукана е. ф. Залишивши в ф-лі два члени, одержимо відомий метод Ньютона, тобто ітераційний метод другого порядку. Ітераційні ф-ли по четвертий порядок включно для обчислювання е. ф. $y = \sqrt[n]{x}$ можна одержати з рівняння $z = \frac{y_i^n}{x} - 1$ у вигляді

$$y_{i+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1) y_i + \frac{x}{y_i^{n-1}}\right] - \frac{n-1}{2n^2} \times \frac{(y_i^n - x)^2}{y_i^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \frac{(y_i^n - x)^3}{y_i^{3n-1}}.$$

Підставивши в цю ф-лу вираз $y_i = \sqrt[n]{x}(1 + \delta_i)$, одержимо відповідно вирази відносних *похибок* для ітераційних ф-л 2-го, 3-го і 4-го порядків у вигляді

$$\delta_{i+1} = \frac{n-1}{2!}\delta_i^2 - \frac{(n-1)(n+1)}{3!}\delta_i^3 + \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4!}\delta_i^4 - \cdots;$$

$$\delta_{i+1} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\delta_i^3 - \frac{(n-1)(2n^2+n-1)}{8}\delta_i^4;$$

$$\delta_{i+1} = \frac{(n-1)(6n^2-5n+1)}{24}\delta_i^4.$$

За початкові наближення для ітераційних ф-л беруть здебільшого початкові наближення у вигляді поліномів нульового і першого степеня, що мають мінім. величину або абсолютної, або відносної похибки. Найкращі початкові наближення опуклої (увігнутої) ф-ції $y = f(x)$ на $x \in [a, b]$ для $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$, що мають мінім. величину абс. похибки, визначають за ф-лами:

$$y_0 = \frac{m+M}{2},$$

де $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, a]} f(x)$;

$$y_0 = Ax + B,$$

де

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad B = \frac{f(a) + f(c)}{2} - A\frac{a+c}{2};$$

значення c знаходять з рівняння $f'(c) = A$. Найкращі початкові наближення опуклої (увігнутої) е. ф., що мають мінім. величину відносної похибки, визначають за ф-лами:

$$y_0 = \frac{2mM}{m+M},$$

де $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$;

$$y_0 = A(x + p),$$

де

$$p = \frac{by(a) - ay(b)}{y(b) - y(a)},$$

$$A = \frac{2y(c)\, y(b)}{y(b)(c+p) + y(c)(b+p)},$$

величину c знаходять із рівняння $(c + p) \times y'(c) = y(c)$. Важливу роль для обчислювання на ЕЦОМ, які працюють з довільною значністю, відіграють рекурентні ф-ли, одержані на основі виразів вигляду: $z\left(\frac{x_m}{n}\right) = f[z(x_m)]$, або $z(nx_m) = f[z(x_m)]$ шляхом

заміни $x_m = \frac{x}{n^m}$ при прийнятому позначенні $z_m = z(x_m)$.

На основі оцінок похибок одержаних рекурентних ф-л у ці ф-ли в разі необхідності вводять нормувальний множник, який зменшує їхню похибку. Прикладом такого типу ф-ли може бути вираз для обчислювання $z = \mathrm{ctg}\, x$, що має вигляд $z_{i-1} = \frac{1}{2}\left(z_i - \frac{1}{z_i}\right)$, $i = n, n-1, \ldots, 0$, де $z_n = \frac{2^n}{x}$, звідки $z_0 = \mathrm{ctg}\, x$.

Літ.: Линский В. С. Вычисление элементарных функций на автоматических цифровых машинах. В кн.: Вычислительная математика, сб. 2. М., 1957; Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Ямпольский А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М., 1963 [бібліогр. с. 240—245]; Теслер Г. С. Вычисление некоторых элементарных функций на ЦВМ. В кн.: Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса, в. 2. К., 1967; Благовещенский Ю. В., Дородницына А. А. Вычисление элементарных трансцендентных функций на ЭВМ с произвольной значностью. В кн.: Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса, в. 1. К., 1967.

Ю. В. Благовещенський, Г. С. Теслер.

ЕЛЕМЕНТА́РНІ ОПЕРА́ЦІЇ НАД СЛОВА́МИ — операції над словами, кожна з яких є сукупністю операцій над цифрами (символами), що складають дані слова. Е. о. над с. є компонентами операцій вищих рівнів — машинних операцій, вбудованих процедур тощо. Набір Е. о. над с. повинен забезпечувати алгоритми виконання будь-якої заданої системи операцій ЦОМ. З міркувань ефективності система *операцій машинних* ЦОМ істотно надмірна, відповідно до цього і набір Е. о. над с. не можна обмежувати операціями, які необхідні для забезпечення алгоритм. повноти системи операцій машини.

Хоч видів Е. о. над с. є багато, виділяють типові елементарні операції, до яких належать такі: зсування слова, дешифрування слова, додавання до слова одиниці (або «—1»), елементарне додавання двох слів, порівнювання слів, передавання слів, порозрядне додавання слів за модулем m, порозрядне доповнювання слів, порозрядне логічне додавання слів і порозрядне логічне множення слів. Для переробки нечислової інформації система елементарних операцій включає дії посимвольної обробки слів, а саме: посимвольне зсування слова, посимвольне порівнювання слів, дешифрування символів, лічба символів. Е. о. над с., у яких результати дій над цифрами кожного розряду не залежать від цифр суміжних розрядів початкових слів, належать до порозрядних операцій (передавання слова, логічні операції додавання і множення, порозрядне додавання за модулем m, порозрядне доповнювання). Елементарне підсумовування слів, додавання до *коду* слова одиниці, дешифрування і зсування слова, а також елементарні дії посимвольної обробки слів не є порозрядними операціями, бо розряди слова внаслідок цих операцій формуються не тільки залежно від відповідних розрядів початкових слів, але можуть бути й ф-цією попередніх розрядів (операції підсумовування і лічби) або залежати від частини чи всього значення початкового слова (операції зсування і дешифрування).

Операція з с у в а н н я полягає у зміщенні цифр (символів) слова, що зберігається в *регістрі*, ліворуч або праворуч на задане число розрядів (символів). Так, при зсуванні праворуч на k розрядів стан 1-го розряду регістра переміститься в $(k+1)$-й розряд, 2-го — в $k+2)$-й і т. д., при зсуванні ліворуч на $к$ розрядів стан n-го розряду переміститься в $(n-k)$-й розряд і т. д. За способом запам'ятовування цифр, що виходять з регістра, зсуви поділяють на лінійні й циклічні. Під час лінійного зсування цифри, що виходять з регістра, або губляться, або надходять у другий регістр; під час циклічних зсувань висунуті цифри надходять у звільнювані розряди того самого регістра, а при лінійному зсуві у звільнені розряди регістра можуть записуватися нулі, одиниці, символи «пусто», або надходити нова інформація з іншого регістра. Якщо змістом регістра є послідовність k-розрядних символів, операція зсування на один символ полягає у зсуванні на k-розрядів, що здійснюється звичайно для підвищення швидкодії, одночасно.

Операція д е ш и ф р у в а н н я полягає в перетворюванні значень слів на сигнали. Кожному значенню слова у двійковому алфавіті (діапазонові значень) відповідає одиничний сигнал, що виникає і зберігається тільки при даному значенні слова (діапазоні значень). До типових належать операції дешифрування значення слова та дешифрування діапазону значень слова, що реалізуються за допомогою *дешифраторів* 1-го і 2-го роду; одержувані сигнали використовуються як керуючі.

Операція д о д а в а н н я д о с л о в а о д и н и ц і (або «—1») перетворює дане значення слова на одно з суміжних його значень. Операція лічби, разом з перевіркою, чи дорівнює нулеві вміст регістра з оброблюваним словом, забезпечує виконання *арифметичних операцій*. У деяких випадках доцільно будувати спеціалізовані обчисл. пристрої для виконування арифм. дій на базі операцій лічби одиниць. За допомогою операції лічби й посимвольного зсування можна реалізувати операцію лічби символів. При цьому кожне посимвольне зсування супроводиться додаванням одиниці в *лічильник*, де формується результат операції. Аналогічно можна організувати відлічування потрібної кількості символів від даної послідовності, напр., для передавання в інший пристрій; при цьому в лічильнику запам'ятовується число, що вказує на кількість відлічуваних символів, а при зсуванні символів у лічильник засилається «—1». Операцію лічби широко використовують у керуванні для утворення послідовностей адрес команд, лічби кількості циклів під час виконування різних операцій, для фор-

мування часових тактів різної тривалості та ін.

Операція **елементарного підсумовування** полягає в утворюванні арифм. суми двох чисел, представлених в однаковій *системі числення*, з природною вагою розрядів, з однаковою кількістю розрядів і з комою, що міститься перед одним і тим самим розрядом. Операція підсумовування є осн. змістом операції додавання, яку порівняно з підсумовуванням ускладнено за рахунок можливого представлення чисел у системі з плаваючою комою, різних знаків доданків, прийнятим способом представлення від'ємних чисел тощо. Особливістю операції підсумовування є залежність значення i-го розряду результату операції (суми) не тільки від i-х розрядів початкових слів, а й від перенесення p_{i+1}, що утворюється під час підсумовування молодших $(i+1)$-х розрядів, що є в свою чергу ф-цією перенесення p_{i+2} з $(i+2)$-х розрядів. При послідовному підсумовуванні порозрядно обробляють початкові слова, починаючи з молодших розрядів; при паралельному — всі розряди обробляють одночасно. Осн. блоком, що його використовують для реалізації будь-яких модифікацій підсумовування, є *суматор однорозрядний*, призначений для утворювання суми за модулем m трьох цифр (двох цифр доданків і цифри перенесення з молодших розрядів) та формування перенесення, що виникає при додаванні їх.

Операцією **порівнювання слів** визначають відношення старшинства двох слів, вона є осн. змістом машинної операції умовного переходу, яка обов'язково є в системі операцій універсальних ЦОМ. Здебільшого під порівнюванням розуміють операцію, що її виконують над повними числами з урахуванням їхніх знаків, тобто алгебр. порівнювання. Модифікацією цієї операції є порівнювання абс. величин або порівнювання за модулем, яке часто застосовують під час обчислювань, напр., визначаючи закінчення ітераційного процесу за заданою точністю та ін. Особливо слід відзначити модифікацію операції порівнювання для виявлення рівності значень двох величин, за допомогою якої реалізують умовний перехід за точним збігом слів, визначають збіг символів при обробці нечислової інформації та ін. Операцію порівнювання виконують здебільшого в блоках *арифметичного пристрою*, призначеного для додавання — віднімання з доданням деяких елементів, які визначають, враховуючи реалізовувану модифікацію операції порівнювання. Порівнювання на рівність, на відміну від інших модифікацій, доцільно виконувати схемно, об'єднуючи порівнювані величини порозрядно на елементах збігу. Елементарна операція порівнювання на рівність у схемній реалізації має велике значення при організації операції посимвольної обробки нечислової інформації. Порівнювання символів на рівність, що є осн. змістом операції посимвольного перегляду рядків, виконується при цьому з макс. швидкодією, а апаратурні затрати при цьому незначні. Елементарні операції порівнювання символів і посимвольних зсувань забезпечують розпізнавання символів та впорядкування послідовностей їх, тобто ці операції є необхідними для універсальної обробки нечислової інформації.

Передавання слова полягає у зчитуванні слова з однієї комірки пам'яті, пересилання його і записуванні в іншій комірці. Використовується ця операція при обміні інформацією між пристроями ЦОМ, а також у процесі переробляння інформації в пристроях. Якщо в даних пристроях інформація подається однаково, обмін інформацією між ними полягає в операції передавання слів. У пристроях, що перетворюють інформацію, напр., в операційному пристрої, застосовують і пряме, й інверсне передавання слів. Напр., якщо від'ємне число задано зворотним кодом внаслідок інверсного передавання слова, якому відповідає це число, одержують додатне число, що подається прямим кодом, і навпаки. З одного регістра в інший можна передавати не все слово, а якусь його частину — так можна виділяти абсолютне значення, знак, порядок, дріб або цілу частину числа і т. д. Отже, інформація при передаванні може перетворюватися.

Порозрядне додавання слів за модулем m полягає в додаванні за модулем m цифр відповідних розрядів слів. Ця операція є частиною операції додавання чисел і, отже, входить до складу арифм. операцій. Порозрядне додавання слів за модулем належить до числа елементарних операцій, що є функціональною частиною відповідної машинної операції.

Порозрядне доповнювання слова перетворює код кожного розряду слова на зворотний. При двійковому кодуванні послідовність розрядів слова $x_0x_1x_2 \ldots x_n$ перетворюється на послідовність $\overline{x}_0\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$, де $\overline{x}_k = 1 - x_k$, тобто виконується інвертування слова; операція порозрядного доповнювання може бути функціональною частиною машинної операції інвертування. Порозрядне доповнювання всіх цифр числа (без розряду знака) перетворює прямий код від'ємного числа на зворотний і, навпаки, є частиною операції додавання в машинах з представленням чисел у прямому коді. Модифікації операцій інвертування використовують, щоб змінити знак числа; для цього при представленні чисел у прямому коді виконують інвертування знаків; для чисел, представлених у зворотному коді, інвертують усі розряди слова.

Порозрядне логічне додавання двох слів полягає в диз'юнкції відповідних розрядів цих слів. Логічне додавання входить до числа елементарних операцій, що є функціональною частиною

відповідної машинної операції. Логічне додавання можна використовувати для модифікації кодів *команд* і чисел. Напр., за допомогою логіч. додавання можна записати нову *адресу* на очищене адресне поле команди. Для цього виконують логічне додавання слова команди з очищеним адресним полем і слова, що містить нову адресу в частині, яка відповідає очищеному полю команди, і нулі — в решті розрядів слова.

Порозрядне логічне множення двох слів полягає в кон'юнкції відповідних розрядів цих слів. Логічне множення є функціональною частиною відповідної машинної операції. Користуючись логіч. множенням, можна виділити будь-яку частину слова. Напр., можна виділити порядок або мантису числа, будь-яку адресу або код операції в слові команди тощо. Для виділення будь-якої частини слова використовують набір з одиницями у тих розрядах, які має бути виділено, і з нулями — в решті розрядів.

Типові Е. о. над с. реалізують у *блоках ЦОМ типових*.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301].

І. П. Окулова.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ТЕОРІЇ. Е. т. $Th(K)$ класу K алгебричних систем сигнатури Ω наз. сукупність усіх замкнених формул логіки предикатів першого ступеня сигнатури Ω, істинних на всіх системах з класу K. Якщо клас K складається з однієї системи $\mathfrak{A}$, Е. т. цього класу наз. Е. т. системи $\mathfrak{A}$. Дві алгебр. системи однієї сигнатури наз. елементарно еквівалентними, якщо їхні Е. т. однакові. Е. т. класу K наз. повною, якщо будь-які дві K-системи елементарно еквівалентні. Під Е. т. сигнатури Ω розуміють Е. т. якогось класу алгебр. систем сигнатури Ω. Рівносильне означення: Е. т. сигнатури Ω — це несуперечлива сукупність замкнених ф-л сигнатури Ω логіки предикатів 1-го ступеня, замкнена щодо висновків. Е. т. T сигнатури Ω наз. рекурсивно (скінченно) аксіоматизовною, якщо існує така рекурсивна (скінченна) сукупність $T_1 \subseteq T$, що T є множина всіх висновків з T_1, які являють собою ф-ли логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури Ω. Якщо Σ — сукупність замкнених ф-л логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури Ω, то $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ позначають клас усіх моделей для Σ, тобто всіх алгебр. систем сигнатури Ω, на яких справджуються всі ф-ли з Σ. Клас K алгебр. систем сигнатури Ω наз. аксіоматизовним, якщо існує така сукупність Σ замкнених ф-л сигнатури Ω, що $K = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. В цьому разі Σ наз. сукупністю аксіом для K. Клас K тоді й тільки тоді можна аксіоматизувати, коли $K = \mathrm{Mod}(Th(K))$. Е. т. T сигнатури Ω наз. розв'язною, якщо існує *алгоритм*, який за довільною замкненою ф-лою логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури Ω визначає, чи належить ця формула теорії T, чи ні. Наприклад, клас щільно лінійно впорядкованих множин без найменшого й найбільшого елементів аксіоматизовний, його Е. т. розв'язна, будь-які дві системи з цього класу елементарно еквівалентні, отже, Е. т. цього класу повна; крім цього, Е. т. розглядуваного класу скінченно аксіоматизовна. Клас скінченних циклічних груп не є аксіоматизовним, але його Е. т. розв'язна і, значить, рекурсивно аксіоматизовна. Є приклади скінченно аксіоматизовних нерозв'язних Е. т. Це Е. т. *груп*, кілець, полів тощо. Проте повна рекурсивно аксіоматизовна теорія обов'язково є розв'язною. Тому, щоб довести розв'язність її, досить довести, що ця теорія повна. Існує кілька методів доведення повноти.

Метод категоричності зводиться до зауваження, що Е. т., яка є категоричною в певній нескінченній потужності й не має скінченних моделей, обов'язково повна. Теорію наз. категоричною в потужності α, якщо всі її моделі потужності α ізоморфні. Напр., Е. т. алгебр. замкнених полів фіксованої характеристики рекурсивно аксіоматизовна й категорична в кожній нелічбовій потужності, а скінченних моделей не має. Тому ця теорія повна й розв'язна. Зокрема, розв'язною є Е. т. поля комплексних чисел. Було одержано необхідні й достатні умови для того, щоб повна теорія, яка має нескінченну модель, була категорична в лічбовій потужності. Кажуть, що дві ф-ли тієї самої сигнатури, що й сигнатура теорії T, еквівалентні в теорії T, якщо ці ф-ли мають однакові вільні змінні й для будь-якої моделі $\mathfrak{A}$ теорії T і будь-якого способу приписування як значень цих вільних змінних елементів моделі $\mathfrak{A}$ обидві ці формули або водночас справджуються при цих значеннях невідомих, або обидві вони хибні. Умови лічбової категоричності: для кожного n існує скінченна кількість ф-л з n вільними змінними $x_1, \ldots, x_n$ така, що кожна ф-ла відповідної сигнатури з вільними змінними $x_1, \ldots, x_n$ еквівалентна в теорії T одній із цих ф-л. Але найвагоміший результат, що його одержано досі при вивченні категоричних теорій,— це така теорема: повна теорія скінченної чи лічбової сигнатури, категорична в одній нелічбовій потужності, категорична і в будь-якій іншій нелічбовій потужності.

Для доведення повноти Е. т. використовують і метод модельної повноти. Систему $\mathfrak{A}$ сигнатури Ω наз. елементарною підсистемою системи $\mathfrak{B}$ тієї самої сигнатури, якщо $\mathfrak{A}$ є підсистемою системи $\mathfrak{B}$ і для будь-якої ф-ли $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури Ω (з вільними змінними $x_1, \ldots, x_n$) та будь-яких $a_1, \ldots, a_n$ з $\mathfrak{A}$ з істинності $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{A}$ випливає істинність $\Phi(a_1, \ldots \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{B}$. Е. т. наз. модельно повною, якщо для будь-яких $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(T)$ з того, що $\mathfrak{A}$ є підсистемою $\mathfrak{B}$, випливає, що $\mathfrak{A}$ є елементарною підсистемою $\mathfrak{B}$. Виявляється, що модельно повна теорія, яка має мінім.

модель, є повною. Мінімальною наз. таку модель Е. т., яка ізоморфно вкладається в будь-яку іншу модель цієї Е. т. Повною є й така модельно повна теорія, всі моделі якої універсально еквівалентні. Універсально еквівалентними наз. алгебр. системи сигнатури Ω, на яких справджуються одні й ті ж самі універсальні ф-ли, а універсальною наз. формулу у випередженій формі, що не містить кванторів існування. Використовуючи техніку модельної повноти, можна довести повноту й розв'язність теорії дійсно замкнених полів, зокрема поля дійсних чисел і деяких інших Е. т. Проте до 1965 майже не було відомо інших прикладів розв'язних Е. т. класів полів, крім наведених вище. В 1965 було відкрито серії класів полів з розв'язною Е. т., зокрема, було доведено розв'язність Е. т. поля p-адичних чисел. Але найважливішим є результат про розв'язність Е. т. скінченних полів і полів лишків. З результатів, що не стосуються полів, слід згадати теорему про розв'язність Е. т. впорядкованих абелевих груп і теорему про розв'язність Е. т. абелевих груп.

З розвитком теорії складності алгоритмів з'явилася можливість оцінювати складність алгоритмів і для розв'язних Е. т. З цього погляду алгоритми, що їх одержують за допомогою теоретико-множинних методів, неефективні. Ефективнішими є алгоритми, які одержують, безпосередньо перетворюючи ф-ли (метод елімінації кванторів). Такі алгоритми, напр., виявляються здебільшого примітивно рекурсивними. Перші доведення розв'язності Е. т. (для теорії натуральних чисел, для Е. т. алгебрично замкнених полів фіксованої характеристики і для дійсно замкнених полів тощо) одержано саме методом елімінації кванторів. Цим методом будують алгоритм і для Е. т. поля p-адичних чисел.

Теорію нерозв'язних Е. т. розробив амер. математик А. Тарський у 40-х роках, хоч нерозв'язність логіки предикатів 1-го ступеня й нерозв'язність арифметики натуральних чисел доведено ще раніше. Осн. знаряддя в теорії Тарського — метод інтерпретацій. Е. т. T наз. істотно нерозв'язною, якщо нерозв'язною є кожна теорія $T_1 \supseteq T$ тієї самої сигнатури. Теорію T сигнатури $\langle P^{(2)} \rangle$ наз. відносно елементарно визначуваною або відносно інтерпретовною в теорії T_1 сигнатури Ω, коли існують такі ф-ли $\Phi(x, z_1, \ldots, z_s)$, $\Psi(x, y; z_1, \ldots, z_s)$ сигнатури Ω, що для кожної або відповідно для якоїсь моделі $\mathfrak{A}$ теорії T можна знайти таку модель $\mathfrak{B}$ теорії T_1, яка має таку властивість. Можна знайти такі $h_1, \ldots, h_s \in \mathfrak{B}$, що множина $A = \{b \in \mathfrak{B} | \Phi(b, h_1, \ldots, h_s)$ істинна в $L\}$ разом з так визначеним на A *предикатом* P, що $P(x, y)$ істинне тоді й тільки тоді, коли $\Psi(x, y; h_1, \ldots, h_s)$ істинне в $\mathfrak{B}$, утворює алгебр. систему, ізоморфну системі $\mathfrak{A}$. Це визначення поширюється й на теорії T довільної скінченної сигнатури. Виявляється, що коли істотно нерозв'язна скінченно аксіоматизовна теорія T відносно інтерпретовна в теорії T_1, то T_1 теж нерозв'язна. Можливість ефективного застосування цієї теореми Тарського пов'язана з існуванням скінченно аксіоматизовної істотно нерозв'язної підтеорії арифметики натуральних чисел. Цим методом доведено нерозв'язність Е. т. багатьох класів кілець, поля раціональних чисел та інших класів полів.

Великий інтерес викликали теорії класів скінченних систем. Перший результат — нерозв'язність Е. т. класу скінченних моделей. Важливим є результат рад. математика А. І. Мальцева (1909—68) про нерозв'язність Е. т. скінченних груп. Для вивчення Е. т. класів скінченних систем і в деяких інших випадках теорема Тарського навряд чи може бути корисною. Було запропоновано новий метод. Теорія T сигнатури Ω невідокремна, якщо не існує рекурсивної множини ф-л сигнатури Ω, яка містить усі тотожні істинні замкнені ф-ли сигнатури Ω і сама міститься в T. Виявляється, що коли невідокремна теорія T відносно елементарно визначувана в теорії T_1, то теорія T_1 теж невідокремна. Це зауваження дало змогу довести невідокремність багатьох теорій. Як T при цьому зручно брати Е. т. всіх скінченних бінарних предикатів, Е. т. скінченних симетричних бінарних предикатів і подібні Е. т.

Літ.: Ершов Ю. Л. [та ін.]. Элементарные теории. «Успехи математических наук», 1965, т. 20, № 4.

М. А. Тайцлін.

ЕЛЕМЕ́НТНА СТРУКТУ́РА ЦОМ — сукупність принципів побудови елементарних компонент цифрової обчислювальної машини, що переробляють інформацію на рівнях операцій над цифрами (в елементах машини), і *елементарних операцій над словами* як систем операцій над цифрами (в блоках машини).

До осн. понять Е. с. ЦОМ звичайно належать такі: 1) представлення цифр в елементах і з'єднувальних колах; 2) система зв'язків між елементами; 3) система елементарних операторів; 4) функціонально-схемні особливості елементів системи; 5) способи виконання елементарних операцій над словами (в типових блоках і *автоматах керуючих*); 6) гол. конструктивно-технологічні риси елементної бази. Ці поняття належать лише до елементів заг. призначення, з яких будують *комбінаційні схеми* й *нагромаджувальні схеми;* на елементи спец. призначення, напр. такі, що формують елементи в *запам'ятовувальному пристрої*, ці поняття не поширюються. Зазначені поняття поділяють на дві осн. групи: перша (об'єднує перші троє понять) визначає особливості виконання операції над окремими цифрами, друга — над упорядкованими послідовностями цифр. При цьому способи виконання елементарних операцій над словами істотно залежать від виконання операцій над окремими цифрами.

За способом представляння цифр розрізняють елементи без запам'ятовування й елементи з запам'ятовуванням. В елементах без запам'ятовування знімання інформації зі входу елемента призво-

дить до відновлення початкового стану носія, в елементах з запам'ятовуванням такого відновлення не стається. До елементів без запам'ятовування належать, напр., елементи з застосуванням транзисторів (транзисторно-діодні елементи), а до елементів з запам'ятовуванням — елементи з застосовуванням феритів як носіїв інформації (феритно-діодні та феритно-транзисторні елементи). Тут мають на увазі запам'ятовування інформації внаслідок змінювання стану носія без штучного затримування його в зміненому стані за допомогою позитивного зворотного зв'язку, коли відмикають вхідний сигнал. Тобто — мають на увазі запам'ятовування інформації в комбінаційних елементах або в комбінаційних частинах *тригерів* (застосовуючи їх як окремі запам'ятовувальні елементи). На відміну від елементів з носієм без запам'ятовування, елементи з запам'ятовувальним носієм, що їх наз. *логічними затримувальними елементами* (ЛЗЕ), потребують примусового переведення носія в первісний стан після чи під час кожного такту знімання інформації. А це потребує фіксованого часового поділу між тактами записування та знімання. Зазначена класифікація має дуже істотне значення для побудови логічних схем. Усередині цих класів визначають підкласи способів фіз. представлення цифр в елементах, які визначають електронно-тех. особливості побудови схем.

Представлення цифр у з'єднувальних колах здійснюється інформаційними сигналами. Розрізняють інформаційні сигнали імпульсні й потенціальні. В основу такої класифікації покладено різницю в причині утворення фронту (спаду) сигналу. Якщо спад сигналу настає без зовн. діяння на елемент, який утворює цей сигнал, то сигнал вважають імпульсним (напр., вихідні сигнали динамічних тригерів); якщо ж спад сигналу виникає внаслідок зовн. діяння на елемент, який утворює його, то сигнал вважають потенціальним (напр., вихідні сигнали статичних тригерів). Залежно від того, носіями яких типів вихідних сигналів є елементи, їх класифікують на потенціальні, імпульсні й потенціально-імпульсні, причому елементи ЛЗЕ, як правило, є імпульсними, а серед решти елементів трапляються елементи всіх трьох зазначених типів.

Система зв'язків між елементами визначає принципи передавання й переробляння інформації в комбінаційних і нагромаджувальних схемах. У комбінаційних схемах є два способи передавання інформації від елемента до елемента — асинхронний і синхронний (і відповідні цим способам класи комбінаційних систем). Використовуючи асинхронний спосіб, інформацію передають природним шляхом, тобто без спец. зовн. діяння. В синхронному передаванні інформацію між будь-якими елементами передають спец. синхронізуючими сигналами. Якщо уявити, що процес перетворення інформації в комбінаційній схемі поділено на окремі дискретні такти, то асинхронний спосіб передавання зумовлює однотактний процес перетворення, а синхронний — багатотактний (як правило, дво- або тритактний процес стосовно до одного каскаду схеми). Для ЛЗЕ єдино можливим способом передавання є синхронний (див. *Елементні структури на логічних затримувальних елементах*). У нагромаджувальних схемах у кожному елементарному циклі переробляння інформації відбувається знімання інформації з тригерів, перетворення її комбінаційними елементами й запам'ятовування перетвореної інформації на тригерах. Для задоволення умов правильного обміну інформацією між запам'ятовувальними й перетворювальними елементами потрібно, щоб перемикання тригерів відбувалися тільки після перших двох (здебільшого суміщуваних) дій. У зв'язку з цим у нагромаджувальних схемах існують два осн. способи обміну інформацією між тригерами й комбінаційними елементами — однотактний і двотактний. В однотактному способі обміну інформацією рознесення в часі несумісних дій елементарного циклу здійснюється, як правило, за допомогою радіотех. затримок перемикання тригерів, при двотактному — введенням проміжних стійких станів схеми за допомогою додаткових тригерів і синхронізуючих сигналів. Вибір тих чи ін. способів передавання інформації здійснюється залежно від способу представляння цифр, і відповідно до цього визначають три типові системи зв'язків і відповідно до них — осн. класи Е. с. ЦОМ: а) потенціальну систему зв'язків, основану на використанні виключно потенціальних інформаційних сигналів; як правило, в ній реалізують асинхронний спосіб передавання та двотактний обмін інформацією відповідно в комбінаційних і нагромаджувальних схемах; б) потенціально-імпульсну систему зв'язків, основану на використанні потенціальних та імпульсних інформаційних сигналів, причому тут, як правило, на виходах тригерів утворюються лише потенціальні сигнали, але перемикаються тригери лише імпульсними сигналами; на відміну від попередньої системи, тут застосовують (завдяки використанню затримок імпульсних сигналів) однотактний обмін інформацією в нагромаджувальних схемах; в) імпульсну систему зв'язків, основану на використанні лише імпульсних інформаційних сигналів; на відміну від обох попередніх, у ній використовують переважно синхронний спосіб передавання, а в модифікації цієї структури на ЛЗЕ — лише синхронний.

Система елементарних операторів характеризує принципові якісні особливості логіч. ф-цій, реалізовуваних системою елементів. Кожний елементарний оператор можна одержати з елементного комбінаційного оператора (логіч. ф-ції, що її реалізують комбінаційним елементом чи комбінаційною частиною запам'ятовувального елемента), якщо виконати спеціальну процедуру, в результаті якої кількість аргументів ф-ції змен-

шується до мінімуму, зберігаючи всі її властивості. Напр., елементному операторові $\overline{x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee x_7x_8x_9}$ відповідає елементний оператор $\overline{y_1y_2 \vee y_3\, y_4}$. Збереження в елементарних операторах лише принципових функціональних властивостей елементних операторів дає змогу виділити відносно невелику кількість типових (функціонально повних або надлишкових) систем елементарних операторів, яким відповідає дуже багато систем елементних операторів, застосовуваних у більшості відомих ЦОМ. Здебільшого це такі системи елементарних операторів:

1) $x \vee y,\ xy,\ \bar{x}$; 2) $x \vee y,\ xy,\ \bar{x}y$;

3) $x \vee y,\ \bar{x}y$; 4) $x \vee y,\ \overline{x \vee y}$;

5) $\overline{xy}$;

6) $\overline{xy \vee zu}$; 7) $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$.

Характерно, що зазначені системи можна використовувати в елементних структурах, які істотно відрізняються за фіз. принципами побудови елементів, але найкраще пристосовані для якого-небудь певного принципу реалізації. Разом з тим використання однієї системи елементарних операторів у фізично різних системах елементів зумовлює аналогічну побудову логіч. схем на базі цих систем.

Функціональні особливості системи елементів визначаються системою елементних операторів і способами реалізації їх, у т. ч. способами побудови тригерів і відновлення інформаційних сигналів.

Оператори елементні, що являють собою логіч. ф-ції, реалізовувані елементами, поділяють на елементні комбінаційні оператори й елементні запам'ятовувальні оператори як твердо визначені композиції комбінаційних операторів. Перші з них являють собою базисні *перемикальні функції*, суперпозиціями яких є будь-які перемикальні ф-ції, реалізовувані в машині в процесі переробляння інформації; основою елементних комбінаційних операторів є вибрані *оператори елементарні*. Другі являють собою ф-ції, виконувані тригерами (незалежно від способу реалізації їх). Ці оператори виражаються у вигляді суперпозицій елементних комбінаційних операторів, тобто у відповідних операторних формах з урахуванням виду інформаційних сигналів. Проте незалежно від операторних форм є два види елементних запам'ятовувальних операторів — з роздільними входами та з лічбовим входом. Виражені вони в скороченій диз'юнктивній нормальній формі відповідно так: $\delta_{t+1} = \delta_t \cdot \bar{y}_0 \vee y_1 \cdot \bar{y}_0$; $\delta_{t+1} = \bar{\delta}_t \cdot y \vee \vee\, \delta_t \cdot \bar{y}$, де δ_t і δ_{t+1} — стани (одиничний вихід) тригера в момент часу t й наступний обчислюваний момент дискретного часу $(t + 1)$, y_1, y_0 і y — вхідні сигнали (одиничний, нульовий і загальний) тригерів з роздільними входами та з лічбовим входом відповідно. Логічні вирази для реальних тригерів одержують на основі наведених виразів внаслідок перекладу їх на операторну форму з урахуванням характеристик інформаційних сигналів і часових співвідношень між ними. Способи реалізації елементних операторів залежать від обраного способу представлення цифр в елементах і колах зв'язку. Як правило, тригери реалізуються на основі тих самих принципів представлення цифр, що й комбінаційні елементи.

Система елементів реалізує функціонально повний набір елементних операторів, має в своєму складі підсилювальні елементи, щоб підтримувати потрібні характеристики (відновлення) інформаційних сигналів, що разом забезпечує її тех. повноту (в розумінні можливості реалізувати будь-яку схему). Залежно від того, є чи немає підсилення вихідного сигналу, комбінаційні елементи відповідно поділяють на елементи з пасивним і активним виходами (тригери обов'язково мають активний вихід); останнім часом більше застосовують комбінаційні елементи з підсилюванням вихідного сигналу. Проте підсилення вихідного сигналу не виключає доцільності використання спец. елементів з особливо потужним підсиленням.

Згідно з наведеними характеристиками, є такі класи типових Е. с. ЦОМ та ін. пристроїв для переробки інформації: *потенціальна елементна структура ЦОМ* на напівпровідниках і *інтегральних схемах; потенціально-імпульсна елементна структура* на напівпровідниках; *імпульсна елементна структура* на напівпровідниках; Е. с. ЦОМ на феритах; Е. с. ЦОМ на параметронах. В обчисл. машинах найпоширеніші три перші класи Е. с. ЦОМ, з яких тепер надають перевагу потенціальним Е. с. ЦОМ як найнадійнішим, найоднорідніщим і найтехнологічнішим (особливо Е. с. ЦОМ на інтегральних схемах).

Способи виконання елементарних операцій над словами поділяють на осн. підгрупи характеристик операцій у *дешифраторах, регістрах, лічильниках* і *суматорах* різних функціональних типів. Нижче перелічено лише осн. характеристики типових блоків ЦОМ (див. *Блоки ЦОМ типові*). Дешифратори 1-го роду (з виведенням усіх конституент) за способами побудови поділяють на лінійні, прямокутні й пірамідальні, з яких обширнішим багатоваріантним класом є прямокутні дешифратори. Дешифратори 2-го роду, що визначають діапазони числових значень дешифровуваного слова, поділяють в основному на дешифратори, які реалізують дужкову та бездужкову форми запису утворюваних функцій. Регістри як блоки, що виконують операції проміжного оперативного зберігання, передавання та зсування слів, поділяють за способами приймання й видавання та за видами й способами перетворювання (зсування) інформації. Лічильники як регістри, що виконують операції лічби одиниць інформації (прості, реверсивні однобічні та реверсивні двобічні), за способами представлення станів поділяють на лічильники з позиційним, з не-

позиційним, з одиничним і з комбінованим кодуванням. Усередині їх також є відповідна деталізація на варіанти. Суматори як блоки, що виконують елементарну операцію додавання (утворення суми числових значень двох слів), розрізняють за способами побудови на послідовні й паралельні. Серед послідовних суматорів виділяють суматори з затримкою та запам'ятовуванням переносу й з різними модифікаціями комбінаційної частини. За способом побудови паралельні суматори поділяють на підкласи: нагромаджувальні, комбінаційні та комбінаційно-нагромаджувальні, а всередині їх, як і в лічильниках,— суматори з наскрізними, груповими й частково-груповими переносами. З порозрядних логіч. операцій гол. можна вважати логіч. додавання та логіч. множення. Реалізація їх здійснюється на спец. комбінаційних схемах, з занесенням результатів у регістри обчисл. пристрою, або цілком на його компонентах, використовуваних для арифм. операцій (див. *Операції над числами*).

Відповідно до типів і наведених характеристик способів виконання елементарних операцій над словами проводять і класифікацію типових блоків обчисл. машин, причому кожний варіант якого-небудь типу блока визначається комбінацією значень даних характеристик. Вибір цієї комбінації здійснюють виходячи з вимог, що їх ставлять до блока й параметрів системи елементів, на основі якої він реалізується.

Гол. коструктивно-технологічні риси елементної бази саме й є тією характеристикою Е. с. ЦОМ, за якою можна класифікувати покоління електронних *обчислювальних машин*: елементи на електронних лампах (1-е покоління), на напівпровідниках як окремих деталях (2-е покоління), на таких самих компонентах, але в мікромініатюрному виконанні (проміжне між 2-м і 3-м поколіннями), на інтегральних напівпровідникових елементарних схемах (3-є покоління), на таких самих схемах, але з середнім рівнем інтеграції (проміжне між 3-м і 4-м поколіннями), на такого ж роду схемах, але з високим рівнем інтеграції (великих інтегральних схемах — ВІСах, 4-е покоління), на оптико-електронних ВІСах з використанням світлових (а не електр.) інформаційних сигналів (5-е покоління). Три останні типи елементів є перспективними (щодо стану на 1970 р.). Кожному з них властиві специфічні особливості конструктивної реалізації схем і технології виготовлення їх. Покоління обчисл. машин, що їх класифікують за характеристикою їхніх елементних структур, разом з тим істотно різняться не лише за елементними, а й алгоритм. структурами.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. М., 1963 [бібліогр. с.437—438]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [бібліогр. с. 324—328]; Ричардс Р. К. Элементы и схемы цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1961.

З. Л. Рабинович.

ЕЛЕМЕ́НТНИЙ СИ́НТЕЗ ЦОМ — структурний синтез автоматів і їхніх композицій у базисі заданої системи елементів. На етапі Е. с. ЦОМ із заданих елементів створюють працездатні схеми *суматорів, дешифраторів, регістрів, лічильників*, схеми *автоматів керуючих* та ін. Е. с. ЦОМ, який задовольняє задані вимоги швидкодії та надійності при мінім. структурних витратах, поділяють на такі етапи: 1) вибір варіанта структури з урахуванням особливостей елементної бази; 2) одержання аналітичних функцій, які описують роботу заданої схеми в якійсь стандартній (канонічній) формі; 3) записування аналітичних виразів у заданій системі *операторів елементних*; 4) забезпечення потрібної якості фіз. характеристик схеми; 5) порівнювання різних варіантів схеми.

Вибір канонічної форми зображення функцій визначається наявністю досить ефективних методів її одержання, а також наявністю добре вивчених і простих методів мінімізації відповідно до обраних критеріїв. Істотно впливає на вибір канонічної форми, а також на методи її мінімізації задана функціонально повна система елементних операторів. У зв'язку з цим у кожному конкретному випадку застосування тієї чи іншої функціонально повної системи елементів виникає задача мінім. представлення логіч. рівнянь, які описують роботу заданої схеми, за допомогою заданої системи елементних операторів. Можливі два способи розв'язування цієї задачі. Перший полягає в довільному способі переведення якогось стандартного (зокрема, булевого) запису в опорний операторний і мінімізації цього запису. При цьому приймають за відомі алгоритми мінімізації функцій, зображених в операторному вигляді. Другий спосіб передбачає використання відомих (напр., у *булевій алгебрі*) методів мінімізації функцій і наступного переведення їх в операторний запис. Тепер використовують обидва способи переведення, але загального алгоритму мінімізації для довільних систем операторів не сформульовано і, загалом кажучи, невідомо, чи є він.

Існуючі методи мінімізації *блоків ЦОМ типових* порівняно прості і зручні для формалізації, проте методи синтезу довільних схем з пам'яттю, які містять звичайно ще й істотну комбінаційну частину, розроблено значно меншою мірою. Виділення для складної схеми її комбінаційної й запам'ятовувальної частини дає змогу відповідно використати при Е. с. ЦОМ можливості розвиненого апарату синтезу *комбінаційних схем*. При цьому задачу мінімізації витрат апаратури розв'язують шляхом роздільної мінімізації для комбінаційної та запам'ятовувальної частини.

У зв'язку з розвитком елементно-технологічної бази ЦОМ, який веде до дальшого укрупнення модулів елементів, вирівнювання вартості елементів пам'яті (тригерів) та комбінаційних схем, підвищення ролі стандартизації, методи Е. с. ЦОМ із зазначеним вище поділом на комбінаційні й запам'ятовувальні частини стають неефективними. В цих умовах

мінімізація елементів пам'яті вже не відіграє домінуючої ролі і, дещо надмірно збільшуючи кількість елементів пам'яті при кодуванні, можна настільки спростити комбінаційну частину, що загальні витрати апаратури, виражені умовними одиницями (напр., вартістю реалізації входу логіч. схеми), будуть мінімальні (з урахуванням перерозподілу навантажень, зменшення потрібної кількості входів та ін.). Т. ч., треба розв'язувати задачу оптимізації схеми в цілому, а не задачу мінімізації її складових частин. При цьому оптимізації для типових блоків ЦОМ досягають одержанням чисельних формул, які виражають витрати апаратури і швидкодію залежно від заданих вимог, що їх ставлять до вузла й параметрів його елементної структури, і вибором оптим. варіанта після зіставлення всіх одержаних варіантів. Щодо оптимізації схем довільних автоматів, то в цьому разі використовують методики, які полягають у зображенні автомата у вигляді композиції простіших автоматів (компонент композиції), які вибирають, виходячи з властивостей кодованого автомата. Як такі компоненти часто використовують регістрові структури (див. *Автомат регістровий*), які (з поступовим збільшенням розрядності) переходять у роль стандартних моделей на основі сучас. технології. Макс. технологічності реалізації схем ЦОМ досягають, мінімізуючи кількість типів вузлів, а також забезпечуючи повторюваність і однорідність структури. В цьому аспекті дуже перспективний Е. с. ЦОМ на основі однорідних структур (див. *Обчислювальні середовища*).

Практичне виконання Е. с. ЦОМ схем на 3-му і 4-му етапах грунтується на використанні ідеї надання логіч. операторам спрощених фіз. залежностей, які дають можливість враховувати якість фіз. характеристик схем. У цьому разі крім логіч. характеристики, кожному елементному операторові надають якісної й вагової характеристики. Якісна характеристика включає в себе набл. залежність між фіз. значеннями вхідних сигналів і сигналів на виході оператора, а також різницю між часом встановлення вхідного та вихідного сигналів. Вагова характеристика є функцією вартості, габаритів, строку служби й інших, подібних цим, факторів. Усі ці характеристики використовують для забезпечування потрібної якості схем, а також для порівнювання схем з погляду заданого критерію. На 3-му етапі Е. с. ЦОМ потрібне узгодження роботи елементів та вузлів у часі. Оскільки асинхронні схеми в ЦОМ використовують порівняно мало, нижче розглянемо приклади побудови синхронних структур.

Характерна проблема, що постає при реалізації схеми сучас. елементами,— це усунення можливих порушень роботи через явища риску й гонок. Явище риску (*риску проблема*) полягає в можливості неправильного спрацювання схеми через неодночасність виникнення сигналів на прямому й інверсному виходах *запам'ятовувального елемента* під час його перемикання з одного стану в інший. Риск за змінною x_i буває, якщо при зміні значення аргумента x_i ф-ція f не змінює свого значення, але при підстановці в конкретне зображення цієї функції як для аргумента, так і для інверсії одного й того самого значення, вона змінює своє значення. Якщо є риск за відповідним аргументом при зміні значення ф-ції з «0» на «1», то кажуть про риск у нулі, а при зміні з «1» на «0» — про риск в одиниці.

Коли булеву ф-цію зображено довільною *диз'юнктивною нормальною формою*, немає риску в нулі, а коли її зображено довільною кон'юнктивною нормальною формою,— тоді є риск в одиниці. Зображення булевих ф-цій у вигляді скорочених диз'юнктивних нормальних форм і скорочених кон'юнктивних нормальних форм вільні від риску по всіх змінних. Щоб усунути небезпеку риску, необхідно, щоб елемент, на входах якого він відбувається, мав більше як два входи, причому сигнал хоча б на одному з них при перемиканні лишався незмінним, дорівнюючи нулеві для елементів «І» та дорівнюючи одиниці для елементів «АБО».

Виникнення явища гонок (*гонок проблема*) пов'язане з тим, що зміна стану реальних елементів пам'яті відбувається неодночасно або через випадковий розкид часу їх перемикання, або через неоднаковість комутаційних затримок і довжини ланцюжків елементів на входах елементів пам'яті. Елемент, який виграв ці гонки, раніше за інші змінить свій стан і через коло *зворотного зв'язку* змінить сигнали на входах інших елементів, а це порушить потрібну послідовність функціонування автомата. Усунути такі небажані наслідки можна не лише підраховуючи й точно узгоджуючи час проходження сигналів з часом перекидання запам'ятовувальних елементів, а й за допомогою протигонкового *кодування станів автомата*.

Розв'язання питань часового узгодження значно спрощується при введенні спец. тактувального генератора, який забезпечує примусове тактування; при цьому автомат стає автоматом синхронним. Відносно просто розв'язується проблема гонок і проблема узгодження переходів автомата з одного стану в інший при використанні примусового багатофазного (зокрема, двофазного) тактування й подвоєння кількості запам'ятовувальних елементів (див. *Елементна структура ЦОМ*, *Потенціальна елементна структура ЦОМ*).

Для правильного функціонування пристрою необхідно, щоб автомат, потрапивши в заданий стан під впливом вхідного сигналу x_1 з достатньо великою тривалістю, лишався у ньому, доки надійде наступний сигнал x_2, а не продовжував переходити з цього стану в новий доти, доки не скінчиться дія сигналу. Таку незалежність функціонування пристроїв забезпечує використання двофазного тактування, бо перехід у будь-які два сусідні стани тактують різні фази синхронізації, а ці фази є відповідно рознесеними в часі. Розроблено

кілька варіантів використання двофазного тактування для схем автоматів на потенціальних елементах, зокрема, деякі такі методи вимагають подвоєння не кількості запам'ятовувальних елементів, а числа станів, а це можна забезпечити, додавши один *тригер*. Щоб не допустити гонок у менш наочних конструкціях, ніж варіант з подвоєнням числа тригерів, необхідно виконати таку умову: для будь-яких двох «зв'язаних» пар станів $a - b$ і $c - d$ («зв'язаність» пар станів $a - b$ і $c - d$ виконується за умови $a \neq b \neq c \neq d$, причому a, b, c, d — стани автомата, відповідні умові, що існує, принаймні, один вхідний сигнал x автомата, за якого $ax = b$, $cx = d$) достатньо, щоб коди цих станів A, B, C, D були такі, щоб у них була хоча б одна змінна кодування, яка набуває в кодах A та B значення, протилежного її значенню в кодах C та D. Отже, небезпеки гонок немає, коли набори A й B, C й D не зв'язані хоча б за однією двійковою змінною.

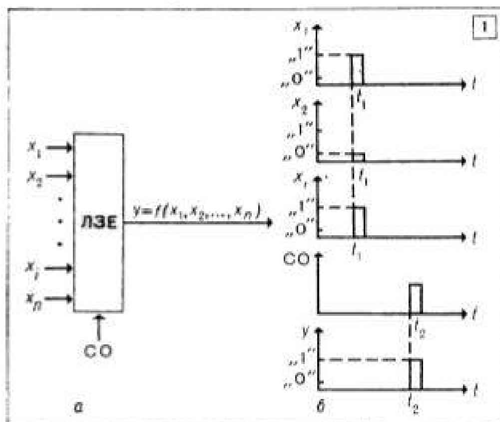
Раціональне часове узгодження служить не тільки забезпеченню надійності, а й часто дає змогу істотно скоротити витрати апаратури. Напр., якщо можлива частота роботи елементів істотно більша за потрібну частоту зсуву *коду* в n-розрядному зсувному регістрі на потенціальних елементах, то послідовно за кілька тактів можна виконати зсув коду і зменшити потрібну кількість допоміжних тригерів a відповідно до формули $a = \frac{n}{b-1}$, де b — число тактувальних фаз. Характерно, що тут схема регістра не змінюється, а змінюється лише підмикання зовнішніх шин.

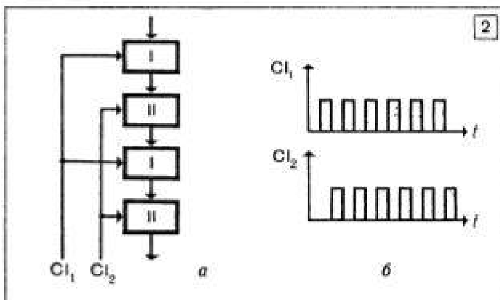
В цілому задача часового узгодження схем ЦОМ досить широка й складна, розв'язування її фактично починається ще на етапі об'єднання *мікропрограм*, а завершується на етапі тех. синтезу з урахуванням монтажних з'єднань тощо. Щоб поліпшити й прискорити перевірку виконання часового узгодження схем ЦОМ, розробляють спец. мови та програми для ЦОМ (див. *Автоматизація проектування ЦОМ*, *Інженерні методи синтезу дискретних автоматів*).

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л., Капитонова Ю. В. Общие принципы синтеза комбинационных схем. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. 3, № 4; Мацевитый Л. В., Денисенко Е. Л. О кодировании внутренних состояний некоторых многотактных устройств. «Кибернетика», 1966, № 1; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Рабинович З. Л., Капитонова Ю. В., Комухаев Э. И. Методика кодирования состояний конечных автоматов с точки зрения минимизации аппаратурных затрат. В кн.: Теория дискретных автоматов. Рига, 1967.

В. М. Коваль, Е. Г. Комухаєв.

ЕЛЕМЕ́НТНІ СТРУКТУ́РИ НА ЛОГІ́ЧНИХ ЗАТРИ́МУВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕ́НТАХ — система елементів цифрової обчислювальної машини, в якій кожний елемент, крім логічних функцій, виконує й функцію запам'ятовування. Сигнал на виході *логічного затримувального елемента* (ЛЗЕ) в момент подавання вхідних сигналів не виникає. Для формування вихідного сигналу на спец. вхід ЛЗЕ подається сигнал опитування (СО). На мал. 1 показано умовне позначення ЛЗЕ і часову діаграму його роботи. Значення вихідного сигналу («0» або «1») в момент часу t_2 залежить від значень величин вхідних сигналів у момент часу t_1 та виду *булевої функції* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що її реалізує ЛЗЕ. Отже, у функціональному відношенні ЛЗЕ схожий на логічні елементи без запам'ятовування.





1. Умовне позначення логічного затримуючого елемента (*а*) та часова діаграма його роботи (*б*).
2. Двотактна схема передавання інформації логічним елементом (*а*) та часова діаграма його роботи (*б*).

При передаванні інформації в схемах, виконаних на ЛЗЕ, виникає необхідність жорсткої синхронізації сигналів. Найчастіше така синхронізація здійснюється за двотактною схемою. При цьому всі ЛЗЕ поділяють на дві групи, кожною з яких керують синхронізуючі імпульси (СІ) з проміжком у часі на півперіоду (мал. 2). У першому такті інформація в моменти надходження CI_1 передається від елементів 1-ї групи до елементів 2-ї групи, а в моменти надходження імпульсів CI_2 — від елементів 2-ї групи до елементів 1-ї групи. Аналогічно будують тритактні схеми передавання інформації: елементи поділяють на три групи, кожною з яких керують синхронізуючі імпульси, з проміжком у часі на 1/3 періоду. Двотактні схеми передавання інформації найчастіше застосовують в *елементних*

структурах ЦОМ на феритах, а тритактні — на параметронах. Однотактних схем передавання інформації практично не застосовують, бо при побудові їх треба вживати спец. заходів для селективного (односпрямованого) передавання сигналів. Крім того, між кожною парою з'єднаних між собою ЛЗЕ потрібно включити спец. схеми затримки, які забезпечують розподіл у часі інформаційних і опитувальних (синхронізуючих) сигналів.

В елементних структурах на феритах застосовуються логічні елементи таких типів: елемент «АБО», який реалізує булеву ф-цію $f(x, y) = x \vee y$, елемент заборони, що реалізує булеву ф-цію $f(x, y) = \bar{x}y$, та елемент, що реалізує константу «1» (генератор одиниць). Одиниця («1») в елементних структурах на феритах звичайно подана імпульсом певної полярності, а нуль («0») — відсутністю імпульсу. В елементній структурі на параметронах «0» та «1» кодуються гармонічними коливаннями, що відрізняються за фазою на π радіан. При такому кодуванні цифр ф-ція «інверсія» реалізується переключанням вихідних клем ЛЗЕ. Основним ЛЗЕ в елементній структурі на параметронах є *мажоритарний елемент*, що реалізує булеву функцію $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. Крім того, в цій системі елементів широко застосовують універсальні ЛЗЕ, які реалізують операції Пірса і Шеффера.

Літ.: Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. М., 1963 [бібліогр. с. 437—438]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301].

Ю. А. Бузунов, Є. М. Вавилов.

ЕЛІО́НІКА — розділ електроніки, що вивчає явища, пов'язані зі взаємодією електронних та іонних пучків з речовиною і застосуванням цих пучків у технологічних процесах виробництва електронних приладів. Е. розвивається в двох осн. напрямах — фізичному й технологічному. Предметом її фіз. напряму є теор. й експериментальні дослідження механізму проникнення прискорених електронів та іонів у речовину, ефективності перетворення їхньої кінетичної енергії на тепло, розподілу потужності, яка виділяється в об'ємі, кінетики теплових процесів у зоні взаємодії пучків з речовиною і дуже близько від цієї зони, фіз.-хім. змін в опромінених ділянках матеріалу тощо. Завданнями технологічного напряму є теоретична і практична розробка методів дослідження електронно- та іонно-променевих процесів для обробки матеріалів — локального випаровування їх, легування напівпровідників, мікрозварювання та мікроспаювання, полімеризації мономерів тощо.

Перші відомості про спроби використати гостросфокусовані електронні та іонні пучки як знаряддя для мікрообробки матеріалів з'явились у 1950-х роках. Систематичному глибокому й інтенсивному вивченню можливостей такого застосування в електронній пром-сті в усіх розвинених країнах великою мірою сприяв прогрес у галузі мікроелектроніки (див. *Мікроелектронна елементна база обчислювальної техніки*) на початку 1960-х років.

Цінними особливостями електронного променя є те, що в ньому можна одержати високу й легко регульовану густину енергії й що його практично вмить можна спрямувати в будь-яку точку оброблюваної поверхні. Стикаючись з речовиною, електрони, що швидко летять, віддають їй більшу частину своєї кінетичної енергії, спричинюючи в ній різноманітні зміни. Найменший переріз електронного пучка в зоні взаємодії з опромінюваним матеріалом — порядку мікрометра і навіть його часток, а густина потужності в них досягає 10^9 *вт/см²*. Електроннопроменеві технологічні операції виконуються у високому й надвисокому вакуумі. В сучасній мікроелектронній техніці електронний промінь використовують при виготовленні $p—n$ переходів, резисторів, тунельних діодів, транзисторів деяких типів, для з'єднання компонент мікросхем тощо. Виготовляючи $p—n$ переходи, монокристалічні ділянки платівки з попередньо нанесеним на них шаром легуючої речовини опромінюють так, щоб у місці електронного бомбардування напівпровідник розплавлявся на задану глибину і щоб з нього в розплав проникала легуюча домішка. Після вимкнення пучка розплавлена зона остигає й кристалізується, в напівпровіднику утворюється мікрозона іншого типу провідності, а на межі цієї зони — $p — n$ перехід. На одній платівці можна виготовити сотні й тисячі таких компонент. Відтворюваність характеристик таких мікродіодів, розташованих на всій поверхні, дуже висока. Щоб одержати резистори, на діелектричний чи напівпровідниковий підклад з ізолюючим шаром спочатку у вакуумі наносять провідну плівку, а потім «гравірують» її променем, роблячи смужки потрібних розмірів. За допомогою електронного променя зручно виготовляти й мініатюрні плівкові конденсатори у вигляді, напр., введених один в один «гребінців» тощо.

Особливе місце в Е. посідає електронна літографія, яка характеризується високою роздільною здатністю. Використання електронного пучка замість пучка світла для експонування фоторезистивних матеріалів дає змогу створювати моноблокові функціональні вузли, які складаються з тисяч ідентичних логіч. елементів, геом. розміри яких становлять частки мікрометра. При цьому відпадає потреба у трудомісткому процесі виготовляння масок, полегшується завдання автоматизації процесів електр. з'єднання окремих мікросхем у функціональні вузли. Іоннопроменеві способи обробки застосовують для очищення поверхонь, травлення плівок, селективного нанесення тонких шарів матеріалу на потрібні ділянки підкладу, легування напівпровідників тощо. Легування здійснюється, напр., не нагріванням, а шляхом прямого заглиблення розігнаних полем іонів домішки в кристалічні гратки. Завдяки цьому можна значно точніше регулювати кількість введених домішок, глибину їхнього залягання та розмі-

ри зони легування. Через те, що в зоні опромінювання немає високих т-р, різко зменшується кількість небажаних сторонніх домішок, які звичайно дифундують у нагріту зону напівпровідника; з іонного пучка непотрібні домішки видаляє фокусуюча система.

Методи Е. тепер активно вивчають, застосування їх у технології розширюють. Практичне здійснення цих методів тісно пов'язане з успіхами в розробці електроннопроменевого та іоннопроменевого обладнання і з досягненнями в побудові сучасних кіберн. засобів керування. Для цілей Е. створено чимало пром. пристроїв і автоматизованих агрегатів. В СРСР розроблено еліонні пристрої кількох типів (напр., «ЭЛУРО») і високоефективні керуючі системи (див. «*Київ-67*»).

Літ.: Кабанов А. Н. Современное состояние и перспективы развития электроннолучевого метода микрообработки. «Физика и химия обработки материалов», 1967, № 4; Введение в технологию электронно-лучевых процессов. Пер. с англ. М., 1965; Symposium on electron beam techniques for microelectronics. «Microelectronics and reliability», 1965, v. 4, № 1.

В. П. Деркач.

ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ. Говорячи про методи розв'язування тих чи інших диференціальних рівнянь у частинних похідних, звичайно мають на увазі наближені методи, бо точні розв'язки вдається знайти дуже зрідка, та й до того ж частіше не в замкненому вигляді, а у вигляді рядів, які треба ще підсумовувати. Одними з найпоширеніших методів наближеного розв'язування *крайових задач* для дифер. рівнянь є різницеві методи. Широке застосування цих методів зумовлюється їхньою універсальністю і порівняно простою реалізацією на ЕОМ (див. *Скінченнорізницеві методи*).

Суть різницевих методів полягає ось у чому: ділянку неперервної зміни аргументів замінюють дискретною множиною точок (вузлів), яку наз. сіткою; замість ф-цій неперервного аргументу розглядають ф-ції дискретного аргументу, що їх визначають у вузлах сітки і наз. сітковими функціями. Похідні, які входять у дифер. рівняння, і граничні умови апроксимують різницевими відношеннями; при цьому крайову задачу для дифер. рівняння замінює система алгебр. рівнянь (різницева схема). Якщо початкова задача лінійна, то різницева схема є системою лінійних алгебр. рівнянь. Якщо так одержана різницева крайова задача розв'язна (може, лише на достатньо дрібній сітці, тобто сітці з густо розміщеними вузлами) і її розв'язок за безмежного здрібнювання сітки наближається (збігається) до розв'язку початкової задачі для диференціального рівняння, то одержаний на будь-якій фіксованій сітці розв'язок різницевої задачі й беруть за наближений розв'язок початкової задачі.

Класичними представниками еліптичних рівнянь (див. *Диференціальних лінійних рівнянь з частинними похідними класифікація*) 2-го порядку є: 1) рівняння Пуассона (Лапласа, коли $f = 0$)

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f;$$

2) рівняння з самоспряженим оператором і змінними коеф.

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f.$$

Тут $u \equiv u(x_1, x_2)$ — шуканий розв'язок, $f \equiv f(x_1, x_2)$ — задані ф-ції (праві частини), $k_1(x_1, x_2) > 0$, $k_2(x_1, x_2) > 0$ — задані коеф. рівняння. Типовими крайовими задачами для еліптичних рівнянь 2-го порядку в обмеженій області G з границею Γ є: 1) перша крайова задача (задача з крайовими умовами Діріхле), коли на границі Γ задано шуканий розв'язок $u(x_1, x_2)|\Gamma = g(x_1, x_2)$; 2) третя крайова задача, коли на границі Γ задано лінійну комбінацію похідної шуканого розв'язку по конормалі і самого розв'язку $\left(\frac{\partial u}{\partial N} - \varkappa u\right)|\Gamma = -g$, де оператор похідної по конормалі задано співвідношенням $\frac{\partial}{\partial N} = k_1 \cos(n, x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + k_2 \cos(n, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, а n — напрям внутр. нормалі до Γ, $\varkappa(x_1, x_2)$ — заданий коеф. Якщо $k_1 \equiv k_2 \equiv 1$, то похідна по конормалі збігається з похідною по нормалі. Коли $\varkappa = 0$, то граничні умови наз. умовами 2-го роду (умовами Неймана), а саму задачу — другою крайовою задачею.

Якщо область G, в якій треба знайти розв'язок рівняння, є прямокутником із сторонами, паралельними координатним осям, то як сітку на G найприродніше взяти множину точок перетину двох сімей прямих $x_1 = x_1^{(i_1)}$ і $x_2 = x_2^{(i_2)}$, де i_1 набуває всіх цілочисельних значень від 0 до N_1, а i_2 — від 0 до N_2. Числа $x_\alpha^{(i_\alpha)}$ підпорядковані умові $x_\alpha^{(i_\alpha)} < x_\alpha^{(j_\alpha)}$ при $i_\alpha < j_\alpha$, $x_\alpha^{(0)} = 0$ і $x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha$ (вважаємо, що прямокутник обмежено прямими $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$. Множину точок перетину зазначених прямих, розташованих всередині прямокутника G, наз. множиною внутр. вузлів і позначають через ω. Множину точок перетину, розміщених на границі Γ прямокутника G, наз. множиною граничних вузлів і позначають через γ. Об'єднання ω й γ позначають $\bar{\omega}$. Якщо в області G границя Γ криволінійна, то сітку на ній можна ввести тим самим способом, але поділ множини вузлів на внутрішні й граничні стає менш очевидним і залежить від наступних способів апроксимації рівняння й граничних умов. Як сітку на G можна взяти й довільну скінченну множину точок в G, але тоді в подальшому при

апроксимації рівняння й граничних умов виникнуть додаткові труднощі. У випадку описаної вище прямокутної сітки ω сіткову ф-цію $h_{\alpha}^{(i_\alpha)} = h_\alpha (x_{\alpha}^{(i_\alpha)})$, задану співвідношенням $h_{\alpha}^{(i_\alpha)} = x_{\alpha}^{(i_\alpha)} - x_{\alpha}^{(i_\alpha - 1)}$, наз. **кроком сітки** ω **в напрямі** x_α в точці $x_{\alpha}^{(i_\alpha)}$. Ф-ція $\hbar_{\alpha}^{(i_\alpha)} = \dfrac{h_{\alpha}^{(i_\alpha)} + h_{\alpha}^{(i_\alpha + 1)}}{2}$ задає середній крок сітки в напрямі x_α. Якщо $h_1^{(i_1)} \equiv h_1$ і $h_2^{(i_2)} \equiv h_2$, тобто якщо кроки сітки не залежать від координат, то сітку наз. рівномірною.

Найуживанішою апроксимацією рівняння Пуассона на рівномірній сітці є п'ятиточкова апроксимація виду $\Delta_h y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f (x_1, x_2)$, де $y_{\bar{x}_1} = [y (x_1, x_2) - y (x_1 - h_1, x_2)]/h_1$ — ліве різницеве відношення в напрямі x_1, $y_{x_1} = [y (x_1 + h_1, x_2) - y (x_1, x_2)]/h_1$ — праве різницеве відношення в напрямі x_1, а $y_{\bar{x}_1 x_1} = (y_{\bar{x}_1})_{x_1}$ — 2-е симетричне різницеве відношення в напрямі x_1; $y_{\bar{x}_2}$, y_{x_2}, $y_{\bar{x}_2 x_2}$ визначаються аналогічно. При такій апроксимації кожне рівняння містить значення шуканого розв'язку в п'яти вузлах сітки ω. Коли шуканий розв'язок рівняння Пуассона має неперервні частинні похідні по x_1 і x_2 до 4-го порядку, то *похибкою* зазначеної апроксимації $\psi = \Delta_h u + f$ є величина $O (h_1^2 + h_2^2)$. Для рівняння Пуассона на рівномірній сітці часто використовують дев'ятиточкову апроксимацію виду $\Delta'_h y = \Delta_h y + \dfrac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi$, де $\varphi (x_1, x_2) = f (x_1, x_2) + \dfrac{h_1^2}{12} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{h_2^2}{12} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$. Якщо шуканий розв'язок має неперервні похідні до 6-го порядку, то похибка апроксимації цієї схеми на розв'язках рівняння Пуассона $\psi' = \Delta_h u + \varphi$ є величина $O (h_1^4 + h_2^4)$. Коли до того ж сітка ω квадратна, тобто $h_1 = h_2 = h$, і шуканий розв'язок має неперервні похідні до 8-го порядку, то схема $\Delta'_h y = -\varphi'$, де $\varphi' (x_1, x_2) = \varphi (x_1, x_2) + h^4 \times (\Delta^2 f + 2\partial^4 f/\partial x_1^2 \partial x_2^2)/360$ має похибку апроксимації $O (h^6)$. На нерівномірній сітці ω апроксимація рівняння Пуассона має вигляд $\tilde{\Delta}_h y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f$, де $y_{\hat{x}_1} = [y (x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}) - y (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})]/\hbar_1^{(i_1)}$ є правим різницевим відношенням у напрямі x_1 з поділом на середній крок. Рівняння зі змінними коеф. зазначеного вище виду на нерівномірній сітці ω апроксимують так: $\Lambda y \equiv (a_1 y_{\bar{x}_1})_{\hat{x}_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{\hat{x}_2} = -f$, де коеф. a_1 і a_2 різницевої схеми виражено через відповідні коеф. диф. рівняння за ф-лами $a_1 (x_1, x_2) = k_1 \left(x_1 - \dfrac{h_1 (x_1)}{2}, x_2\right)$, $a_2 (x_1, x_2) = k_2 \left(x_1, x_2 - \dfrac{h_2 (x_2)}{2}\right)$.

Граничні умови 1-го роду в розгляданому випадку прямокутної області, коли границя γ сітки належить границі Γ відправної області G, можна апроксимувати точно: $y (x_1, x_2) = g (x_1, x_2)$. Апроксимація граничних умов 3-го роду для рівнянь Пуассона у випадку рівномірної сітки ω виглядає так: а) якщо гранична точка (x_1, x_2) сітки не кутова й міститься на лівій границі прямокутника, то $y_{x_1} + \dfrac{h_1 y_{\bar{x}_2 x_2}}{2} - \varkappa y = -g - \dfrac{h_1 f}{2}$; б) якщо гранична точка міститься на верхній границі прямокутника, то $-y_{\bar{x}_2} + \dfrac{h_2 y_{\bar{x}_1 x_1}}{2} - \varkappa y = -g + \dfrac{h_2 f}{2}$; в) якщо гранична точка міститься в лівому верхньому куті прямокутника, то $(h_2 y_{x_1} - h_1 y_{\bar{x}_2})/(h_1 + h_2) - \varkappa y = -g - \dfrac{h_1 h_2 f}{2 (h_1 + h_2)}$. На решті ділянок границі γ граничні умови записують аналогічно. Відзначимо, що вказана апроксимація граничних умов 3-го роду узгоджена з п'ятиточковою апроксимацією рівняння Пуассона, тобто має похибку $O (h_1^2 + h_2^2)$. Можна побудувати апроксимації зазначених граничних умов, узгоджені з дев'ятиточковими апроксимаціями рівняння Пуассона.

Для того, щоб записати різницеву апроксимацію 3-ї крайової задачі для рівняння Пуассона на нерівномірній сітці, використаємо оператори Λ_α, які задає співвідношення

$$\bar{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} & \text{у внутр. вузлах сітки в напрямі } x_\alpha; \\ 2 y_{x_\alpha} / h_\alpha^{(1)} & \text{при } x_\alpha = 0; \\ -2 y_{x_\alpha} / h_\alpha^{(N_\alpha)} & \text{при } x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Зазначена апроксимація має вигляд $\bar{\Lambda} y = (\Lambda_1 + \Lambda_2) y = -F$ для всіх точок сітки $\bar{\omega}$. При цьому $F = f$, коли точка внутр., $F = f + 2g/h_1^{(1)}$, коли точка не кутова і міститься на лівій границі прямокутника і т. д.

Як уже відзначалося, різницеві схеми являють собою не що інше, як системи лінійних алгебр. рівнянь. Порядок системи тим вищий, чим дрібніша (густіша) сітка. Але точність схем залежить від величини кроків сітки, і вона тим більша, чим дрібніші кроки. Тому одержувані алгебр. системи звичайно

мають досить високий порядок. Для знаходження розв'язку цих систем, як правило, використовують *ітераційні методи*. Щоб успішно застосовувати їх, корисно знати мінім. й макс. власні значення *матриці* системи (див. *Власних значень і власних векторів матриць способи обчислювання*) або оцінки їх знизу (δ) й зверху (Δ) відповідно. Наведемо зазначені оцінки для деяких задач, причому $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. В задачі на власні значення $\Lambda_1 \mu(x_1) + \lambda\mu(x_1) = 0$, $\mu(0) = \mu(l_1) = 0$, де Λ_1 — зазначений вище *оператор* зі змінним коеф. a_1, при будь-якому фіксованому x_2 мінім. власне значення не менше від $\delta = 8c_1/l_1^2$, а макс. власне значення — не більше від $\Delta_1 = 4C_1/\min\limits_{x_1} h_1^2(x_1)$. Тут c_1 — мінім. значення коеф. a_1, а C_1 — макс. значення цього коеф. Аналогічні оцінки правильні і для власних значень оператора Λ_2. Якщо, зокрема, $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, то $\delta_1 = 8/l_1^2$, $\Delta_1 = 4(\min\limits_{x_1} h_1^2(x_1))$. Якщо до того ж сітка за x_1 рівномірна, то $\Delta_1 = 4\cos^2\left(\frac{\pi h_1}{2l_1}\right)/h_1^2$.

Оцінки для власних значень у випадку 3-ї крайової задачі виглядають істотно громіздкішими й тут їх не наведено.

Найпростішим ітераційним методом розв'язування задачі $\Lambda y = -f$, $y|\Gamma = g$ є **метод простої ітерації**. Він полягає ось у чому: беручи довільне початкове наближення y^0, яке задовольняє граничні умови $y^0|\Gamma = g$, наступні наближення знаходять за ф-лою $(y^{j+1} - y^j)/\tau = \Lambda y^j + f$, $y^{j+1}|\gamma = g$, де $\tau = \frac{2}{\delta+\Delta}$ — ітераційний параметр. Щоб за допомогою цього методу зменшити початкову похибку в $1/\varepsilon$ раз, досить виконати $j(\varepsilon) = \ln(1/\varepsilon)/\ln[(\Delta+\delta)\,(\Delta-\delta)]$ ітерацій. Коли в задачі $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $h_1 = h_2 = h$, то $\tau = \frac{h_1^2}{4}$, $j(\varepsilon) \approx \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\ln 1/\varepsilon}{h^2}$. Для задачі $\overline{\Lambda} y = -f$ метод — аналогічний. Швидкість збіжності цього методу дуже мала й зі зменшенням кроку сітки h швидко зменшується.

Узагальненням методу простої ітерації, який збільшує швидкість збіжності його, є **ітераційний метод Річардсона** (метод простої ітерації з чебишовським набором параметрів). Цей метод відрізняється від методу простої ітерації лише тим, що ітераційний параметр залежить від номера ітерації $(y^{j+1} - y^j)/\tau_j = \Lambda y^j + f$, $y^{j+1}|\gamma = g$. Кількість ітерацій заздалегідь фіксована й дорівнює n. Ітераційний параметр $\tau_j = 2/[\Delta + \delta + (\Delta - \delta)\lambda_j]$, де $\lambda_j = \cos\frac{2j+1}{2n}\pi$. Щоб зменшити початкову похибку в $1/\varepsilon$ раз, досить виконати $n \geqslant n_0(\varepsilon) = \ln(2/\varepsilon)/\ln(\sqrt{\Delta} + \sqrt{\delta})\,(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})$ ітерацій. Коли $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$. $l_1 = l_2 = 1$, $h_1 = h_2 = h$, то $n_0(\varepsilon) \approx 2\ln(2/\varepsilon)/\pi h$. Щоб обчислення були стійкими, необхідно змінити природний порядок використання ітераційних параметрів на такий ($n = 2^p$, p — ціле);

а) $n = 8$: 0, 7, 3, 4, 1, 6, 2, 5;

б) $n = 16$: 0, 15, 7, 8, 3, 12, 4, 11, 1, 14, 6, 9, 2, 13, 5, 10;

в) $n = 32$: 0, 31, 15, 16, 7, 24, 8, 23, 3, 28, 12, 19, 4, 27, 11, 20, 1, 30, 14, 17, 6, 25, 9, 22, 2, 29, 13, 18, 5, 26, 10, 21 (порядок використовування ітераційних параметрів при інших n див. бібліографію).

Коли оператор $(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ задачі $(\Lambda_1 + \Lambda_2)\,y = -f$ припускає поділ змінних, то ще більшу швидкість збіжності має **метод змінних напрямів**. Обчислення за цим методом виконують за ф-лами $[y^{j+\frac{1}{2}} - y^j]/\tau_{j+1} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j$, $y^{j+1}|\gamma = g$, $[y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}]/\tau_{j+1} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j y^{j+1}|\gamma = g$, де y^0 — задане початкове наближення, $y^{j+\frac{1}{2}}$ — допоміжне (проміжне) значення, $\tau_{j+1} > 0$ — ітераційні параметри, від добору яких істотно залежить швидкість збіжності. Коли, напр., нижні й верхні оцінки власних значень операторів Λ_1 і Λ_2 збігаються, тобто $\delta_1 = \delta_2$, $\Delta_1 = \Delta_2$, то ітераційні параметри τ_j належить обчислювати за ф-лами $\tau_j = 1/[\sqrt{\delta_1\Delta_1}\,\omega_j]$, де при $j = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ $\omega_j = q^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}}\,[1 + q^{\sigma} + q^{2-\sigma}]/[1 + q^{1-\sigma} + q^{1+\sigma}]$, а при $j > [(n+1)/2]$ $\omega_j = \delta_1/\Delta_1$.

Параметри σ і q, які входять у ф-ли, задаються співвідношеннями $\sigma = (2j-1)/2n$, $q = [1 - \sqrt[4]{1 - \delta_1^2/\Delta_1^2}]/2[1 + \sqrt[4]{1 - \delta_1^2/\Delta_1^2}]$. Для зменшення початкової похибки в $1/\varepsilon$ раз за допомогою цього методу достатньо виконати $n \geqslant n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{4\Delta_1}{\delta_1}$ ітерацій. Коли, напр., $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $h_1 = h_2 = h$, то $\frac{\delta_1}{\Delta_1} = \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi h}{2}$. Метод змінних напрямів в описаному вигляді є одним з найшвидше збіжних ітераційних методів.

Щоб розв'язувати алгебр. системи, які одержують при застосуванні методу сіток, використовують і інші ітераційні методи, такі, як метод послідовної верхньої релаксації, двоступінчастий ітераційний метод, метод мінім. поправок у тій чи ін. формі тощо.

Літ.: Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1962 [бібліогр. с. 698—708]; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [бібліогр. с. 538—550]; Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 456—470].

В. Б. Андреєв.

«ЭМИК-1» (електронна машина для вимірювання та обліковування твердих шкір) — перша в СРСР спеціалізована машина-автомат для вимірювання площі й товщини шкір. Створив її 1954 Укр. н.-д. ін-т шкіряно-взуттєвої пром-сті разом з Київським держ. ун-том. У ній дискретні елементи Δs і Δd вимірюваних величин площі s і товщини d перетворюються на електр. імпульси за допомогою електромагнітного генератора й мех. щупів, які взаємодіють з контактами. Машина складається з електромех. і лічильно-електронної частин, з'єднаних між собою кабелем. Вимірювання шкіри провадиться в процесі переміщення її транспортувальним механізмом, що складається з валів і роликів, які обертаються. «Э.-1» виконує такі операції: вимірює площу й середню товщину шкір, підраховує кількість і суму площ виміряних шкір, друкує на кожній шкірі й контрольній паперовій стрічці наслідки вимірювання й показники обліку (порядковий номер, площу, середню товщину, сорт, заводську марку, дату випуску та ін. дані).

Електронну частину машини побудовано на типових комірках цифрової обчисл. машини *«Урал»*. Осн. характеристики машини: ширина робочого проходу — 1800 *мм*, швидкість транспортування шкіри — 350 *мм/сек*, межі вимірювання площі — 30 ÷ 300 *дм²*, межі вимірювання товщини — 1 ÷ 6 *мм*, похибка вимірювання товщини — ±0,1 *мм*, продуктивність — 2500 шкір за 8 годин, споживана потужність — 1,5 *квт*. Серійно випускаються площевимірювальні машини ПВМ, які є варіантом «ЭМИК-1».

Літ.: Павленко Ю. С., Танцюра Н. А. Автомат для измерения площади и толщины кож. «Легкая промышленность», 1957, № 3.

М. А. Танцюра, Ю. С. Павленко.

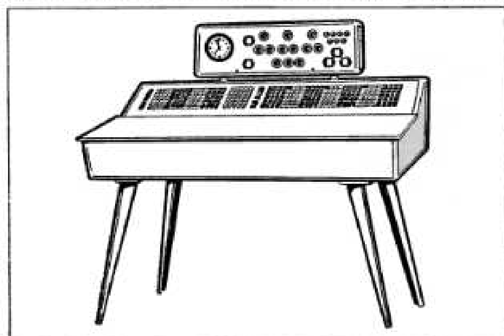
ЕМПІРИЧНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ — наближене представлення функції розподілу ймовірностей випадкової величини, побудоване на основі вибірки скінченного обсягу. Е. ф. р.— це ф-ція розподілу $F_n(x)$, що визначається за допомогою *варіаційного ряду* $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ незалежних спостережень випадкової величини з ф-цією розподілу $F(x)$, як

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1^*; \\ k/n & \text{при } x_k^* < x \leqslant x_{k+1}^* \\ 1 & \text{при } x > x_n^*. \end{cases}$$

Е. ф. р. — проста оцінка ф-ції $F(x)$, вона має такі важливі властивості. Величина $\Delta_n = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \{|F_n(x) - F(x)|\}$ з імовірністю 1 збігається до 0 при $n \to \infty$ (теорема Гливенка). Якщо $F(x)$ неперервна, то при відповідному нормуванні граничний розподіл величини Δ_n має певний вигляд, не залежний від ф-ції $F(x)$, точніше $P\left\{\sqrt{n}\Delta_n < x\right\} \to \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \times e^{-2k^2x^2} = K(x)$, $x > 0$ при $n \to \infty$ (теорема А. М. Колмогорова). Незалежність граничного розподілу від невідомої ф-ції $F(x)$ дає змогу використовувати результат А. М. Колмогорова, перевіряючи гіпотези про те, що спостереження $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — це спостереження *випадкової величини* з ф-цією розподілу $F(x)$ (див. *Статистична перевірка гіпотез*). Моменти Е. ф. р. $F_n(x)$ наз. **вибірковими моментами**. Вони є незміщеними або асимптотично незміщеними й асимптотично нормальними оцінками відповідних моментів розподілу $F(x)$. Вибіркове *математичне сподівання* і *дисперсія* відповідно дорівнюють $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Величини $\bar{x}$ і s^2 є часто використовуваними оцінками матем. сподівання і дисперсії розподілу $F(x)$.

А. Я. Дороговцев.

«ЭМРТ» (електронна машина для розрахунку тканин) — спеціалізована обчислювальна машина для визначення оптимального варіанту розкрою тканини на полотнини заданої довжини. Її створили Обчислювальний центр Київського держ. ун-ту й дослідно-конструкторське бюро Київського тресту швейної пром-сті. На базі експериментального зразка «ЭМРТ-1» в 1963 Київський з-д обчислювальних керуючих машин розробив серійний зразок «ЭМРТ-2» на напівпровідникових елементах (див. мал.). Особливістю *алгоритму*, що його реалізує машина, є те, що всю обчислювальну роботу зведено до алгебричного складання чисел у нагромаджувальному *суматорі* без запам'ятовування проміжних результатів і одержаних раніше розв'язків. Розрахунок кусків тканини на полотнини заданої довжини для настилів описує система діофантових рівнянь, які розв'язуються методом спрямованого перебирання. В кожне рівняння підставляють усі величини й перевіряють, чи задовольняють вони рівняння. Машина автоматично відшукує найраціональніше поєднан-



Спеціалізована обчислювальна машина «ЭМРТ-2».

ня довжин полотнин настилів, які вкладаються ціле число разів у довжині куска, який треба розкроїти. Розрахунок можна провадити одночасно на 8 осн. і 3 додаткові настили. Кожний кусок тканини можна розрахувати не більше як на 3 осн. настили, 1 додатковий, що вводиться до розрахунку автоматично, й 3 додаткові, що їх вводить людина-оператор. Макс. довжина куска тканини, який треба розкроїти — 199,99 *м*, осн. настилів — 19,99 *м*, додаткових — 9,99 *м*. Введення й запам'ятовування вихідних даних здійснюється за допомогою повноклавішної клавіатури. Результати розрахунку виводяться на панель сигналізації й фіксуються лампами цифрової індикації. Швидкодія машини — 100 000 *опер./сек* (операцій додавання), продуктивність під час розрахунку тканини на полотнини (настили) — не менш як 1000 *м/год*. Споживана потужність — 170 *вт*. Економічна ефективність однієї машини становить 8—20 тис. крб. на рік.

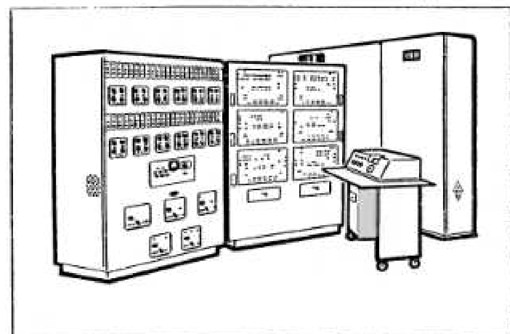
Літ.: Павленко Ю. С. Электронная вычислительная машина ЭМРТ-2 для расчета тканей в настилы. «Швейная промышленность», 1964, № 4.
М. А. Танцюра, Ю. С. Павленко.

«ЭМСС» — електрична або електронна модель стрижневих систем, струми й напруги, в якій розподіляються подібно до того, як розподіляються зусилля та переміщення в первісній механічній системі. Першу модель «ЭМСС-1» створено в СРСР 1956. У 1961—62 розроблено квазіаналогові електр. моделі «ЭМСС-7» та «ЭМСС-7М», які виготовляли серійно, а в 1964—65 — електронну модель «ЭМСС-8» («Альфа»), в якій використано метод моделювання по ділянках. Як схему-аналог ділянки з «ЭМСС-8» використано найпростішу й найекономічнішу альфа-аналогову модель стрижня з автомат. зрівноважуванням. При цьому частину невідомих моделюють струмами, завдяки чому істотно економляться підсилювачі. «ЭМСС-8» побудовано за функціонально-блоковою ознакою. Складається вона із стояка модельованих стрижнів, стояка операційних підсилювачів та вимірювального блока (мал.).

Блоки й технічні характеристики	«ЭМСС-7»	«ЭМСС-7М»	«ЭМСС-8»
Схем-аналогів стрижнів	50	75	85
Джерел струму	50	50	108
Джерел ерс	—	25	24
Операційних підсилювачів	—	—	48
Похибка відносно повної шкали виміру, %	5	5	[illegible]
Діапазон змінювання:			
а) струмів, *ма*	±1	±1	±1
б) напруг, *в*	±10	±10	±100
Споживана потужність, *квт*	0,4	0,4	2,8

«ЭМСС-8» призначено для розв'язування задач статики, стійкості й динаміки рамних конструкцій; її можна застосовувати й для розв'язування систем три- і п'ятичленних рівнянь буд. механіки та систем алгебр. рівнянь з довільною неособливою матрицею коеф. рівнянь Лапласа і Пуассона в скінченнорізницевій постановці. Короткі тех. характеристики моделей «ЭМСС» дано в табл.

Літ.: Пухов Г. Е. [та ін.]. Электрическое моделирование задач строительной механики. К., 1963 [бібліогр. с. 265—271]; Степанов А. Е., Токарева О. Н. Специализированная электронная вычислительная машина «Альфа» (ЭМСС-8). В кн.: Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника, в. 2. М., 1968.
В. В. Крамськой.



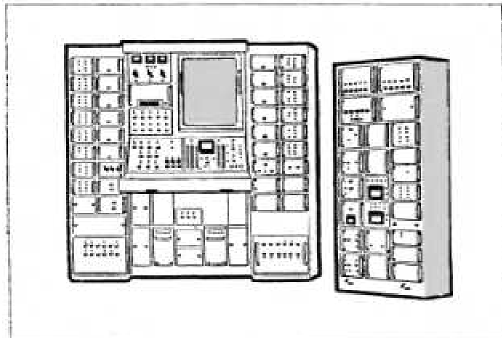
Спеціалізована аналогова обчислювальна машина «ЭМСС-8».

«ЭМУ», електронні моделюючі установки — сімейство установок, які призначено для розв'язування звичайних лінійних («ЭМУ-2», «ЭМУ-3») і нелінійних («ЭМУ-4», «ЭМУ-5», «ЭМУ-6», «ЭМУ-8», «ЭМУ-8а», «ЭМУ-10») диференціальних рівнянь до 24-го порядку, що описують процеси, які відбуваються в різних системах автоматичного регулювання й керування. Розроблено їх в Ін-ті автоматики й телемеханіки (Ін-т проблем керування) АН СРСР. «ЭМУ» — установки структурного типу, конструктивно оформлені у вигляді стендів або настільних портативних приладів (крім «ЭМУ-8» та «ЭМУ-8а», виконаних у вигляді окремих базових блоків, призначених для розв'язування дифер. рівнянь 2-го порядку). Перші 5 моделей «ЭМУ» можуть розв'язувати дифер. рівняння невисоких порядків, допускають спряження з апаратурою автомат. регулювання, живлення їх здійснюється від стабілізованих джерел. Допустима тривалість інтегрування для «ЭМУ-2» — 150 *сек*, «ЭМУ-8, -8а, -10» — 2000 *сек*. Споживана потужність становить відповідно 1,5 і 3,5 *ква* на один блок.

В «ЭМУ-8» та «ЭМУ-8а» лінійні розв'язуючі підсилювачі мають і нелінійні кола зворотного зв'язку для виконання нелінійних операцій. Така конструкція установок дає змогу при найменшій кількості типорозмірів блоків задовольняти різноманітні вимоги, не фіксуючи жорстко весь склад розв'язуючих елементів моделі. Комбінуючи кілька блоків, можна розв'язувати складні задачі з будь-яким співвідношенням лінійних і нелінійних розв'язуючих елементів. В установ-

ках використано розв'язуючі підсилювачі, які не потребують стабілізованого живлення, і напівпровідникові елементи (германієві діоди й тиритові опори).

«ЭМУ-10» (див. мал.) — багатосекційна установка, призначена для розв'язування задач, що трапляються при дослідженні складних систем автоматич. керування, в тому числі ядерних енергетичних установок, літаючих об'єктів та виробничих процесів. У ній є пристрій, який дає змогу розв'язувати задачі



Електронний моделюючий пристрій «ЭМУ-10».

з широким діапазоном зміни величин і виконувати розв'язування в двох різних масштабах часу. В універсальному стояку є 48 розв'язуючих підсилювачів, електронні функціональні перетворювачі, електромеханічні множники, еталони напруг і часу, вузли контролю й керування, змінне *набірне поле* й необхідні блоки живлення. В спеціалізованому стояку, крім розв'язуючих підсилювачів, є ще блоки керуючого запізнювання, оптимізатор, блоки керування й блоки живлення. Встановлювання коефіцієнтів здійснюється автоматично. Коли вмикається спеціалізований стояк, «ЭМУ-10» розв'язує задачі з змінним і постійним запізнюючим аргументом та задачі оптимізації. «ЭМУ-10» має широкий діапазон допусків основних розв'язуючих елементів. У ній є розв'язуючі підсилювачі з трьома паралельними каналами підсилювання з малим *дрейфом нульового рівня* й смугою пропускання в межах 50 *кгц*.

Літ.: Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [бібліогр. с. 494—505]; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 179—181]. *В. І. Грубов, В. С. Кирдан.*

ЕНТРОПІЯ (грец. εν — в і τροπη — перетворення) — кількісна міра невизначеності ситуації. Термін і поняття Е. по-різному вводять і використовують у фізиці (термодинаміка) й кібернетиці (теорія інформації). У фізику поняття Е. ввів Р. Клаузіус (1822—88). В подальшому поняття Е. широко використовували в термодинаміці, зокрема для відкритих систем. Протікання реальних процесів завжди відбувається в бік збільшення Е. системи. Р. Больцман (1844—1906) дав, відповідно до статистичного трактування фізичних явищ, вираз для Е. ідеального газу через імовірності p_i знаходження молекул в i-й комірці фазового простору (H — функція Больцмана, k — стала Больцмана):

$$H = -k\sum p_i \log p_i; \quad \sum p_i = 1. \qquad (1)$$

В *інформації теорію* поняття Е. ввів американський математик-інженер К. Шеннон (н. 1916). Тут Е. розглядають як міру невизначеності *випадкової величини*. Якщо задано скінченну множину символів $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — значень випадкової величини ξ (повідомлень) з *розподілом імовірностей* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, то Е. ξ (або Е. розподілу (p_i), або Е. стаціонарного джерела повідомлень ξ на символ наз. величину:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i. \qquad (2)$$

Основа логарифму визначає одиницю вимірювання величини H. У теорії інформації прийнято одиницю *біт*, що відповідає величині H при $n = 2$ і $p_1 = p_2 = {}^1/_2$ (рівноймовірний вибір з двох символів); це відповідає основі логарифму 2 в (2). В разі, коли $n = 2$, Е. $H(\xi) = H(p, \ 1 - p) = -p \ \log \ p - (1 - p) \log (1 - p)$, де p — ймовірність одного з двох значень випадкової величини ξ. Поведінку $H(p, 1 - p)$ як ф-ції p показано на мал. Величина $H(p, \ 1 - p)$ набуває макс. значення, що дорівнює одному бітові при $p = 1 - p = 0{,}5$. Крива $H(p, 1 - p)$ симетрична відносно $p = 0{,}5$.

Е. має такі властивості: 1) H — величина дійсна, невід'ємна; 2) H — величина, яка залежить від розподілу (p_i) і не залежить від алфавіту $\{x_i\}$ (змісту повідомлень); 3) H — величина мінім. й дорівнює нулеві, якщо $\xi = \text{const}$, тобто всі значення p_i дорівнюють нулеві, крім одного, що дорівнює 1; 4) H — величина макс. й дорівнює $\log n$, якщо всі $p_i = {}^1/n$; 5) для двох випадкових величин ξ і η H випадкової пари (ξ, η)

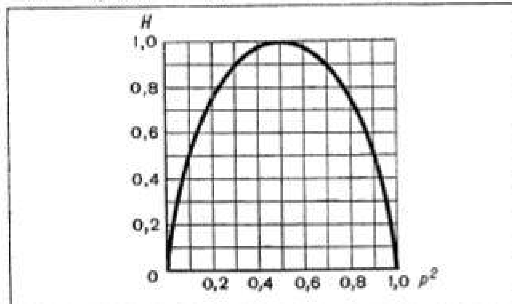
$$H(\xi, \eta) = H(\eta) + MH(\xi|\eta) = \\ = H(\xi) + MH(\eta|\xi) \leqslant H(\xi) + H(\eta), \qquad (3)$$

де M — матем. сподівання; $H(\alpha|\beta)$ — умовна Е.; $H(\alpha|\beta) = -\sum_i p_{i|j} \log p_{i|j}$; $(p_{i|j})$ — умовний розподіл α при фіксованому β. Рівності в (3) досягають лише в разі статистичної незалежності ξ і η.

Поняття умовної Е. використовують у теорії інформації, щоб визначати міру кількості інформації (або реальної швидкості передавання на символ). При цьому умовну ймовірність $p_{i|j}$ визначають як імовірність того, що було передано символ i, якщо прийнято символ j. Умовна Е. $H(\xi|\eta)$ виявляється при цьому мірою залишкової невизначеності після одержання повідомлення η відносно значення переданого символу ξ. Різниця

$R = H(\xi) - H(\xi|\eta)$ (зменшення Е. за рахунок передавання, тобто від'ємна Е. або негентропія) є мірою кількості інформації на символ під час передавання повідомлення.

Для поняття Е. немає прямого аналога у випадку недискретних випадкових величин. Справді, для будь-якої недискретної випадкової величини ξ легко побудувати при будь-якому цілому n дискретну величину $\varphi(\xi)$, яка є ф-цією від ξ так, щоб $\varphi(\xi)$ набувала n різних значень з однаковими ймовірностями, а тоді $H(\varphi(\xi)) = \log n$. Якщо тепер визначити



Ентропія у випадку двох можливостей з імовірностями p і $(1-p)$.

Е. недискретної випадкової величини ξ так, щоб вона мала осн. властивості Е. дискретних випадкових величин (і навіть лише одну властивість q), то з цього випливає, що $H(\xi) = +\infty$, бо при будь-якому n повинна виконуватися вимога $H(\xi) \geqslant H(\varphi(\xi))$. А при формальному узагальненні ф-ли (2) для неперервної випадкової величини ξ, яка має щільність $p(x)$ і набуває значення у вимірному просторі X, приходять до величини $h(\xi) = -\int_X p(x)\log p(x)\,dx$, що її наз. диференціальною Е. ξ (у зарубіжній літературі величину $h(\xi)$ часто наз. Е. неперервної величини ξ). Поняття диференціальної Е. необхідне при обчислюванні різних інформаційних характеристик (напр., таких, як *інформації кількість, каналів зв'язку пропускна здатність, передавання інформації швидкість*). Проте формальна подібність виразів Е. у дискретному випадку й диференціальної Е. у неперервному випадку часто призводить до того, що поняттю дифер. Е. приписують фіз. зміст невизначеності випадкової величини, розподіл якої задається щільністю. Таке автоматичне перенесення властивостей неправомірне, це видно хоч би з того, що дифер. Е. деяких випадкових величин може бути від'ємною і навіть набувати значення як $+\infty$, так і $-\infty$ (напр., $h(\xi) = \log(b-a)$ для величини ξ, рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$, і тому $h(\xi) < 0$, якщо $b - a < 1$). Кількість інформації та Е. мають ту властивість, що вони не змінюються при взаємно однозначному відображенні просторів значень випадкових величин на деякі інші простори, бо ці величини є мірами невизначеності випадкових величин, які не залежать від конкретної природи значень випадкових величин. Для дифер. Е. це не так. Можна показати, що коли ф-ція $\varphi(\cdot)$ задає взаємно однозначне відображення простору X значень випадкової величини ξ у якийсь простір Z, то

$$h(\varphi(\xi)) = h(\xi) + \int_X p(x)\log D(x)\,dx,$$

де $p(x)$ — щільність розподілу ξ, а $D(x)$ — якобіан перетворення. Зокрема, якщо перетворення $\varphi(\cdot)$ є лінійним, то $D(x) = D = \text{const}$ і $h(\varphi(\xi)) = h(\xi) + \log D$. Використання дифер. Е. для обчислення зазначених вище інформаційних характеристик грунтується на тому, що всі вони є різницею диференціальних Е. відповідних величин, а ця різниця вже не змінюється при взаємно однозначних відображеннях просторів. Якщо ξ є n-вимірна випадкова величина певної щільності розподілу, а $\varphi(\xi)$ — її дискретизація з кроком Δx, то $H(\varphi(\xi)) = -n\log\Delta x + h(\xi) + o(1)$ при $|\Delta x| \to 0$. Отже, величина $H(\varphi(\xi))$ при $|\Delta x| \to 0$ прямує до нескінченності. Це цілком узгоджується з тим, що $H(\xi) = +\infty$, однак $H(\varphi(\xi)) \to \infty$ поволі і лише логарифмічно. Гол. член асимптотичного розвинення залежить від розмірності простору n. Дифер. Е. задає наступний по порядку член асимптотичного розвинення, що не залежить від Δx, причому тільки в цьому члені виявляється залежність від конкретного виду розподілу випадкової величини ξ. Тільки в цьому досить обмеженому значенні дифер. Е. можна трактувати як міру невизначеності випадкової величини ξ.

З інших властивостей диференціальної Е. можна відзначити те, що коли щільність $p(x)$ величини ξ відрізняється від нуля в якійсь області обмеженого об'єму V, то $h(\xi)$ буде максимальною і дорівнюватиме $\log V$, якщо $p(x)$ дорівнюватиме константі $\frac{1}{V}$ у цій області. Дифер. Е. n-вимірного гауссівського розподілу з матрицею коваріації $\|a_{ij}\|$ дорівнює

$$h(\xi) = \log(2\pi e)^{n/2}|a_{ij}|^{-1/2};$$

в одновимірному випадку $h(\xi) = \log\sqrt{2\pi e}\,\sigma$, де σ^2 — *дисперсія*. При цьому з усіх розподілів з фіксованими моментами другого порядку гауссівський розподіл має максимальну дифер. ентропію.

Поняття Е. відіграє фундаментальну роль у теоремах Шеннона, які встановлюють осн. закономірності оптим. кодування інформації реальних повідомлень під час передавання їх *каналами зв'язку*.

Літ.: Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. «Успехи математических наук», 1953, т. 8, в. 3; Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М. Количество информации и энтропия для непрерывных распределений. В кн.: Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3. М., 1958; Шеннон К. Математическая теория связи. В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963; Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии. Пер. с франц. М., 1967.

Р. Л. Добрушин, Л. І. Ожиганов, В. В. Прєлов, О. М. Рякін.

ЕНТРОПІ́Я ЖИВИ́Х СИСТЕ́М — міра невизначеності розподілу станів біологічної системи, що визначається як

$$H = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i),$$

де H — ентропія, $p(x_i)$—ймовірність прийняття системою i-го стану з області x, n — кількість станів системи. Е. ж. с. можна визначити відносно розподілу за будь-якими структурними чи функціональними показниками. Е. ж. с. використовують для розрахунку *біологічних систем організації*. Важливою характеристикою живої системи є умовна ентропія, що характеризує невизначеність розподілу станів *біологічної системи* відносно відомого розподілу:

$$H(x/y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log \left[\frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)} \right],$$

де $p(x_i, y_j)$ — ймовірність прийняття системою стану з області x за умови, що еталонна система, відносно якої вимірюється невизначеність, приймає стан з області y, а m — кількість станів еталонної системи. За параметри еталонних систем для біосистеми можуть правити найрізноманітніші чинники й насамперед система змінних зовнішнього середовища (речовинних, енергетичних чи організаційних умов). Міру умовної ентропії, так само, як і міру організації біосистеми, можна застосовувати для оцінювання еволюції живої системи в часі. В цьому разі еталонним є розподіл імовірностей прийняття системою своїх станів у деякі попередні моменти часу. І якщо кількість станів системи при цьому лишатиметься незмінною, то умовна ентропія поточного розподілу p_1 відносно еталонного розподілу p_2 визначається так:

$$H(p_1/p_2) = \sum_{i=1}^{n} p_1(x_i) \log \frac{p_1(x_i)}{p_2(x_i)}.$$

Е. ж. с., так само, як і ентропія термодинамічних процесів, тісно пов'язана з енергетичним станом елементів. У разі біосистеми цей зв'язок є багатостороннім і важковизначуваним. Загалом зміни ентропії супроводять усі процеси життєдіяльності і є однією з характеристик при аналізі біолог. закономірностей. *Ю. Г. Антомонов, П. І. Белобров.*

ЕНТРОПІ́Я ПОВІДО́МЛЕННЯ за заданих умов точності — числова міра складності передавання повідомлення за заданих умов щодо якості його відтворення. Е. п. $H_W(\xi)$ за заданих умов *точності відтворення повідомлення* W наз. число

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}), \qquad (1)$$

де $\xi \in X$ — повідомлення, яке виробляє *джерело повідомлень*, $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ — відтворюване повідомлення, $I(\xi, \tilde{\xi})$ — *інформації кількість*, що міститься в $\tilde{\xi}$ відносно ξ. Нижню грань у ф-лі (1) беруть за всіма можливими парами *випадкових величин* ξ та $\tilde{\xi}$, що задовольняють задані умови точності W відтворення повідомлення. В найважливішому окремому випадку, коли умови точності W задають за допомогою ф-ції втрат $\rho(x, \tilde{x})$ і вони полягають у вимозі, щоб *математичне сподівання* максимальної або середньої втрати не перевищувало якоїсь константи $\varepsilon > 0$, Е. п. $H_W(\xi)$ позначають $H_\varepsilon(\xi)$ і називають ε-ентропією (або епсилон-ентропією) повідомлення (в американській літературі ε-ентропію часто наз. швидкістю створення повідомлення за заданої точності ε). Обчислювання Е. п. $H_W(\xi)$ за заданих умов точності W є складною матем. задачею, явний розв'язок якої в заг. випадку одержати не вдається. Для деяких окремих джерел повідомлень (при деяких спец. способах задавання ф-ції втрат $\rho(x, \tilde{x})$) вдається точно обчислити ε-ентропію. Напр., для дискретних джерел, що виробляють повідомлення раз за одиницю часу, ε-ентропію H_ε за одиницю часу визначають як $H_\varepsilon = \inf \bar{I}(\xi, \tilde{\xi})$, де $\bar{I}(\xi, \tilde{\xi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ та $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots)$ — відповідно повідомлення, що його виробляє джерело, та відтворюване повідомлення, а нижню грань беруть за всіма можливими парами $(\xi, \tilde{\xi})$ при всіх k, що задовольняють нерівності $P\{\xi_k \neq \tilde{\xi}_k\} \leqslant \varepsilon$.

Для дискретного стаціонарного джерела з незалежними компонентами $\xi_1, \xi_2, \ldots$ й однаково ймовірними значеннями (тобто для випадку, коли кожна компонента повідомлення ξ_k може набувати будь-якого з M можливих значень з однаковими ймовірностями $\frac{1}{M}$) епсилон-ентропія

$$H_\varepsilon = \begin{cases} \log M + \\ + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon \log \frac{\varepsilon}{M-1}; \\ \text{якщо } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{M-1}{M}; \\ 0, \text{ якщо } \varepsilon > \frac{M-1}{M}. \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ ф-ція H_ε набуває макс. значення $\log M$ (що збігається з звичайною *ентропією* будь-якої з випадкових величин ξ_k) та, монотонно спадаючи зі зростанням ε, перетворюється на нуль при $\varepsilon = \frac{M-1}{M}$. Для дискретного стаціонарного гауссівського джерела $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ при середньоквадратичному критерії точності $\sup_k M(\xi_k - \tilde{\xi}_k)^2 \leqslant \varepsilon$

епсилон-ентропія

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \log\max\{\mu/f_\xi(\lambda),\ 1\}\,d\lambda,$$

де $f_\xi(\lambda)$ — спектральна щільність стаціонарної гауссівської послідовності $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, а μ — корінь рівняння $\int_{-1/2}^{1/2} \min\left\{\frac{1}{\mu},\ f_\xi(\lambda)\right\} d\lambda = \varepsilon$.

Оскільки точно обчислити ε-ентропію досить важко, істотний інтерес становить і одержання асимптотичних ф-л для неї при $\varepsilon \to 0$, бо випадок малого ε відповідає більшій точності відтворення. Напр., рад. математик А. М. Колмогоров (н. 1903) запропонував ф-лу для ε-ентропії $H_\varepsilon(\xi)$ n-вимірної випадкової величини ξ з досить гладенькою щільністю розподілу $p_\xi(x)$ при середньоквадратичному критерії точності $M\left\{\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}|\xi_k - \tilde{\xi}_k|^2\right\} \leqslant \varepsilon$. Ця ф-ла має вигляд

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{n}{2}\log\frac{1}{\varepsilon} + [h(\xi) - n\log\sqrt{2\pi e}] + o(1),$$

де $h(\xi)$ — дифер. ентропія ξ, а $o(1) \to 0$ при $\xi \to 0$. Для пуассонівського процесу на відрізку $[0, T)$ з параметром λ епсилон-ентропію $H_\varepsilon(\xi)$ при $\varepsilon \to 0$ задають виразом $H_\varepsilon(\xi) = \lambda T\log\frac{T}{2\varepsilon} + o(1)$, де $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, при цьому умови точності задають вимогою $M\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant \varepsilon$, де

$$\rho(\xi, \tilde{\xi}) = \int_0^T f(\xi_t, \tilde{\xi}_t)\,dt,\ \text{а}\ f(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & x = \tilde{x} \\ 1, & x \neq \tilde{x}. \end{cases}$$

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ЕПСИЛО́Н — машинно-орієнтована мова програмування, призначена для обробки символьної інформації. Розроблено її 1967. Мову Е. найчастіше використовують у системному програмуванні, формульних перетвореннях, а також розв'язуючи завдання, пов'язані з компактним зберіганням і обробкою великої кількості даних. Мова Е. дає змогу обробляти окремі одиниці інформації (с к а л я р и) та їхні с п и с к и. Розрядність елементів кожного списку задають його описом; елементи щільно укладаються в комірках пам'яті. Розміри списків визначають динамічно; є змога керувати не тільки автомат. розміщуванням списків у пам'яті, а й розміщенням їх один щодо одного і суміщувати їх. Скаляр можна описувати як слово зі складовою структурою, це дає змогу працювати й з окремими частинами його. Істотною особливістю мови Е. є механізм *кодів*, за допомогою якого можна задавати для об'єктів мови довільне двійкове кодування, класифікувати об'єкти відповідно до відображених у кодуванні ознак і розгалужувати процес залежно від належності того чи іншого значення до якогось із заданих класів. Мова Е. допускає в кожній реалізації використання відповідних машинних *команд*, у ній є засоби для динамічної модифікації їх. У реалізаціях мови Е. для машин типу «М-220», «БЭСМ-6» і «Минск-22» передбачено певний наладжувальний механізм. Відомості про *пам'яті розподіл* доступні програмістові, і він може певною мірою впливати на цей розподіл.

Літ.: К а т к о в В. Л., Р а р А. Ф. Программирование на языке ЭПСИЛОН. Новосибирск, 1972; ЭПСИЛОН — система автоматизации программирования задач символьной обработки. Новосибирск, 1972. [бібліогр. с. 128]. *О. Ф. Рар.*

ЕПСИЛО́Н-ЕНТРОПІ́Я — міра невизначеності неперервного розподілу. Нехай, напр., $p(x)$ — щільність імовірності *випадкової величини* ξ, яка набуває значення на [0,1]. Розіб'ємо [0,1] на відрізки Δ_i завдовжки ε і визначимо $p_i = \int_{\Delta_i} p(x)\,dx$. Тоді Е.-е. визначають як $H_\varepsilon = \sum p_i \log p_i$. З наближеного представлення інтеграла видно, що $H_\varepsilon \approx \approx -\int_0^1 p(x)\log p(x)\,dx - \log\varepsilon$. Це визначення легко можна перенести на розподіл величин на метричних просторах, які можна розбити на скінченну кількість підмножин діаметром ε (скінченні ε-сітки). Становить інтерес асимптотика Е.-е. при $\varepsilon \to 0$ (див. також *Ентропія повідомлення* за заданих умов точності). *Ю. А. Шрейдер.*

ЕРГАТИ́ЧНА СИСТЕ́МА (від грец. ἐργάτης — робочий) — система, складовим елементом якої є *людина-оператор* (або кілька людей-операторів). Залежно від того, скільки людей входить до Е. с., ці системи поділяють на м о н о- й п о л і е р г а т и ч н і. У заг. випадку Е. с.— це складні *ієрархічні системи керування*, в яких людина може брати участь на будь-якому рівні. Е. с. є, напр., ручне керування автомобілем і літаком, диспетчерська служба вокзалів, аеропортів і заводів. Досліджуючи Е. с., процеси їхнього функціонування описують на різних рівнях абстракції, залежно від типу елементів, з яких складається система, зручності описування й дослідження процесів на даному рівні й від суто суб'єктивних факторів, пов'язаних зі специфічними особливостями групи людей, які проводять це дослідження. Рівні абстракції бувають, напр., такі: інформаційний, логічний, абстрактно-алгебричний, динамічний та евристичний (див. *Систем загальна теорія*). Оскільки людина-оператор є невід'ємним елементом Е. с., її характеристики при дослідженні системи доцільно описувати на рівні абстракції, який прийнято для описування всієї Е. с. в цілому. Якщо необхідні характеристики людини-оператора вже одержано,

аналіз і синтез Е. с. можна виконувати звичайними для теорії систем методами. А коли необхідних характеристик людини-оператора нема зовсім або частково, Е. с. доцільно досліджувати ін. методами, бо внаслідок специфіки людських факторів (різноманітність і мінливість динамічних особливостей, фізіол. обмеження тощо) теор. підхід до дослідження Е. с. буде надзвичайно утруднений. Використання аналітичних методів приводить до правильних результатів, як правило, тільки в тривіальних випадках. Одним з адекватних методів дослідження Е. с. є метод, який названо **теоретико-експериментальним.** Цей метод передбачає таке поєднання теор. і експериментальних процедур, коли в завданні синтезу Е. с. виділяють два осн. етапи. На 1-му етапі теоретично визначають функціональну структуру, яка забезпечує виконання поставленого завдання, не враховуючи конкретних засобів її реалізації. Одночасно здійснюють попередній розподіл функцій між людиною-оператором і тех. пристроями. На 2-му етапі здійснюють експериментальну оптимізацію, щоб уточнити місце й функціональні обов'язки людини-оператора в синтезованій структурі й визначити оптим. значення параметрів тех. пристроїв.

А. М. Воронін, А. М. Мелешев, В. В. Павлов.

ЕРГОДИЧНА ТЕОРІЯ — теорія, що виражає певну регулярність граничної (при $t \to \infty$) поведінки траєкторій $y(t)$ механічних систем і деяких випадкових процесів. Е. т. належить до області граничних теорем, що їх вивчають в *імовірностей теорії*, функціональному аналізі й теорії дифер. рівнянь; має застосування в статистичній фізиці та ін.

Так, для консервативної механіч. системи у фазовому просторі S (див. *Фазового простору метод*), розгляданої в моменти часу $t = 0, 1, 2 \ldots$, для довільної множини E (вимірної за Лебегом, тобто $E \in \sigma(S)$) серед точок $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$ частка тих, які опинилися в E, при $n \to \infty$ має границю майже для кожного початкового стану $y(0)$. Точкам простору S можна приписати різну (інтегровну в S) додатну вагу $f(x)$ (інакше кажучи, розглядають якусь числову величину $f(x)$, визначувану миттєвим положенням системи). В цьому разі є границя відповідних зважених середніх: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(y(k))$. Цікавим є випадок, коли границя не залежить від початкового стану $y(0)$. В цьому (ергодичному) випадку зазначена границя дорівнює фазовому середньому $\frac{1}{\mu(S)} \int\limits_S f(x)\,\mu(dx)$ (μ — Лебегова міра в S).

Для *марковських процесів* $\xi(t)$ ергодична теорема визначає умови існування гранич. розподілу $\lim\limits_{t\to\infty} P\,\{\xi(t) < x / \xi(0) = x_0\}$. Процес наз. ергодичним, якщо ця границя існує й не залежить від початкового стану x_0.

Відправним моментом в Е. т. є напівгрупова властивість траєкторій $y(t) = \varphi_t(y(0))$ консервативної мех. системи: $\varphi_t \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x)$ для всіх $x \in S$ і всіх моментів часу t, S; і теорема Ліувілля, яка стверджує, що міра μ такої системи інваріантна: $\mu(\varphi_t^{-1}(E)) = \mu(E)$ для всіх $E \in \sigma(S)$ ($t \in (0, \infty)$ або дискретно: $t = 0, 1, 2 \ldots$). Отже, проблема зводиться до вивчення напівгруп перетворень φ_t простору $(S, \sigma(S))$ на себе, що зберігають міру (або груп, якщо задача допускає обернення в часі).

Множину $E \in \sigma(S)$ наз. **інваріантною**, коли для будь-якого t $\varphi_t^{-1}(E)$ майже всюди збігається з E. Сукупність інваріантних множин утворює σ-алгебру $\mathfrak{A}$. Перетворення φ_t наз. **метрично транзитивним**, якщо σ-алгебра $\mathfrak{A}$ тривіальна.

Перший осн. результат (теорема Біркгофа — Хінчина) стверджує, що у фазовому просторі S зі скінченною мірою μ для довільної інтегровної $f(x)$ для майже всіх x існує $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\varphi_t(x))\,dx = f^*(x)$ (відповідно $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum\limits_{k=0}^{T-1} f(\varphi_k(x)) = f^*(x)$ для дискретного T) й $\int\limits_S f^*(x)\,dx = \int\limits_S f(x)\,dx$. Для метрично транзитивних перетворень φ_t (і лише для них) $f^*(x) = \text{const} = \frac{1}{\mu(S)} \int\limits_S f(x)\,\mu(dx)$. Якщо міру $\mu(E)$ нормовано (тобто $\mu(S) = 1$), то в імовірнісному просторі $(S, \sigma(S), \mu)$ півгрупа φ_t породжує *стаціонарний випадковий процес* у вузькому розумінні $y(t) = \varphi_t(x)$, для якого наведена теорема належить до класу підсилених *великих чисел законів*. Границя цієї величини є умовне *математичне сподівання* $M(x/\mathfrak{A})$ або Mx — фазове середнє, якщо σ-алгебра $\mathfrak{A}$ тривіальна. В останньому випадку процес наз. **ергодичним**, або метрично транзитивним. Ергодичність стаціонарного процесу еквівалентна тому, що $\lim\limits_{T\to\pm\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \mu((\varphi_t^{-1} E_1) E_2)\,dt = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$. Це співвідношення здійснюється, якщо процесові властиве перемішування $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \mu((\varphi_t^{-1} E_1) E_2) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$. Якщо процес не є ергодичним, але міра μ досконала й $\sigma(S)$ сепарабельна, то існує розбиття S на неперетинні інваріантні множини $E_\alpha \in \sigma(S) : S = \bigcup\limits_\alpha E_\alpha$, і таке сімейство імовірнісних мір μ_α, що $\mu_\alpha(E_\alpha) = 1$, $\mu(E) = \int\limits_S \mu_{\alpha(x)}(E)\,\mu(dx)$ для будь-якого $E \in \sigma(S)$ ($\alpha(x) = \{\alpha; x \in E_\alpha\}$) і $y(t)$ по відношенню до кожної з імовірнісних мір μ_α являє собою стаціонарний ергодичний процес.

Характерно, що якщо випадковий процес $y(t)$ є ергодичним, то будь-яка ф-ція від цього процесу теж має властивість ергодичності, тобто має рівні часове й фазове середні. Зокрема, $My(t)^k = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T y^k(t)\,dt$. Якщо за всіх t визначити лінійне перетворення U_t рівністю $(U_tf)(x) = f(\varphi_t(x))$ і $f \in L_p(S, \sigma(S), \mu)$, то U_t є (пів) група унітарних (що зберігають норму) перетворень у L_p, і границя часових середніх у термінах операторів U_t виражається так:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T U_t f dt\right\}(x).$$

Другий осн. результат (теорема Неймана): для $f \in L_2(S, \sigma(S), \mu)$ $\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T U_tfdt\right\}(x) = f^*(x)$ існує і f^* є проекція f на підпростір інваріантних ф-цій (пів) групи U_t. Для $f \in L_p$ має місце збіжність у просторі L_p. В термінах *випадкових процесів теорії* теорема Неймана означає, що для стаціонарного в широкому розумінні процесу $y(t)$ існує $\underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{T}\int\limits_0^T y(t)\,dt$, що дорівнює приросту в нулі *спектральної функції* процесу $y(t)$.

За природне узагальнення поняття півгрупи перетворень $\varphi_t(x)$, що зберігають міру, у випадку марковського процесу з перехідною ф-цією $P(t, x, E)$, править півгрупа *операторів лінійних* $(\Phi_tf)(x) = \int\limits_S f(y)P(t, x, dy)$, якщо припустити, що для цього процесу існує інваріантна міра

$$Q(dx) : Q(E) = \int\limits_S Q(dx)\,P(t, x, E).$$

Для таких перетворень Φ_t справджуються обидві ергодичні теореми в дискретному формулюванні, а також у неперервному випадку за додаткової умови сильної неперервності Φ_t по t. Щоб існувала інваріантна міра $Q(dx)$ для процесу з дискретним часом і перехідною ф-цією $P(1, x, E)$, абсолютно неперервна відносно якоїсь міри $m(E)$, необхідно й достатньо, щоб при кожному B, $m(B) > 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n P(k, x, B) > 0$ для всіх $x \in B_0$, $m(B_0) > 0$. При цьому, якщо $m(S) = 1$, то

$$Q(E) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int\limits_S P(k, x, E)\,m(dx).$$

Якщо для певної скінченної міри $m(E)$, цілого $n \geqslant 1$ і $\varepsilon > 0$ $P(n, x, E) \leqslant 1 - \varepsilon$ тільки-но $m(E) \leqslant \varepsilon$ (умова Дебліна), то інваріантна міра $Q(x, E) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum\limits_{k=1}^t P(k, x, E)$ існує для будь-якого $x \in E$. Множину $E \in \sigma(S)$ наз. інваріантною, якщо $P(1, x, E) = 1$ для всіх $x \in E$. Для марковського процесу $y(t)$, для якого виконано умову Дебліна, існує не більше як $m(S)/\varepsilon$ різних мінім. інваріантних множин фазового простору S. Якщо $E_1, E_2, \ldots, E_N$ — система неперетинних інваріантних множин простору S, то для будь-якого $x \in S$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(n, x, \bigcup\limits_1^N E_k) = 1$, тобто виходячи з будь-якої точки $x \in S$, блукаюча частинка з імовірністю 1 через скінченне число кроків потрапить до однієї з інваріантних множин і залишиться там. Граничний стаціонарний розподіл $Q(x, E)$ однаковий для всіх x, що належать до однієї інваріантної множини E_k ($Q(x, E) = Q_k(E)$, $x \in E_k$). Будь-яка інваріантна міра $Q(E)$ у фазовому просторі $(S, \sigma(S))$ являє собою лінійну комбінацію взаємно перпендикулярних стаціонарних імовірностей $Q_k(E)$.

Для певного класу *Маркова ланцюгів* $\xi(t)$ з неперервним часом, дискретною множиною станів і перехідною ф-цією $p_{ij}(t)$ (що задає ймовірності переходу із стану E_i в стан E_j за час t) існують $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$ — фінальні ймовірності перебувати в стані E_j. При цьому $p_j = \frac{1}{R_j}$, де R_j — середній час повернення до стану E_j і для часу T_A перебування в множині станів A за проміжок часу T з імовірністю 1 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{T_A}{T} = \sum\limits_{i\in A} p_i$ (див. також *Ергодичний стан*). Приклад. Для системи, стан якої визначається числом частинок у певній області простору, і за одиничний проміжок часу з імовірністю q кожна з частинок якої може покинути область, а r нових частинок з'являються з імовірністю $e^{-\lambda}\lambda^r/r!$, перехідна ймовірність $p_{ik}(t)$, коли $t \to \infty$, збігається до $\frac{1}{k!}e^{-\lambda/q}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^k$.

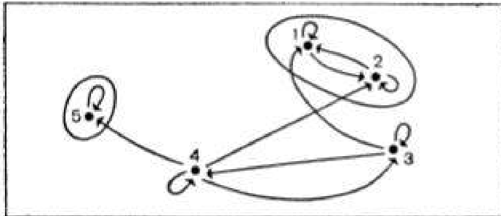
Якщо $\xi(t)$ — зворотний *дифузійний процес* у відкритому інтервалі (r_1, r_2) (обидві граничні точки якого є відштовхуючими) і для τ — часу повернення процесу до вихідної точки x $M\tau < \infty$, то існує стаціонарний розподіл $P(B) = \lim\limits_{t\to\infty} P(t, x, B)$.

Літ.. Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. М.—Л., 1943; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [бібліогр. с. 481—487]; Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ. М.—Л., 1956 [бібліогр. с. 589—598]; Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. Пер. с англ. М., 1959 [бібліогр. с. 145]; Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Пер. с англ., ч. 1. М., 1962; Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. Пер. с англ. М., 1962 [бібліогр.

с. 787—804]; Морен К. Методы гильбертова пространства. Пер. с польс. М., 1965 [бібліогр. с. 556—563]; Иосида К. Функциональный анализ. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 597—612]. *Г. М. Сита.*

ЕРГОДИЧНИЙ СТАН — неперіодичний стан *Маркова ланцюга*, для якого ймовірність повернення в цей самий стан дорівнює 1 й середній час цього повернення є скінченним.

Сукупність усіх Е. с. ланцюга Маркова розбивають на класи еквівалентностей, що їх наз. ергодичними класами. Для будь-якої пари станів, що належать до того самого



Ергодичні класи станів.

ергодичного класу, існує позитивна ймовірність переходу з одного стану в інший за якесь число кроків; вихід з ергодичного класу неможливий. Якщо неперіодичний стан не належить до жодного ергодичного класу, його наз. нестійким. З імовірністю 1 система залишається в нестійких станах лише протягом скінченного числа кроків. Розглянемо скінченний ланцюг Маркова з матрицею ймовірностей переходів:

$$p = \begin{Vmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 3/5 & 9/35 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Множина станів цього ланцюга включає два ергодичні класи, один з яких складається з 1-го й 2-го станів, а другий — із самого лише 5-го стану. 3-й і 4-й стани — нестійкі (мал.). Стан, який сам утворює ергодичний клас, наз. поглинаючим (5 стан).

Якщо стани j та k належать до того самого ергодичного класу, то $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = u_k > 0$, де $p_{jk}^{(n)}$ — ймовірність переходу з j-го в k-й стан за n кроків, u_k — величина, яка є оберненою середньому часові повернення в k-й стан. Див. також *Ергодична теорія*. *Т. І. Фурсова.*

ЕРЛАНГА ФОРМУЛИ — формули, що виражають для систем зі втратами стаціонарну ймовірність того, що з n обслуговуючих приладів обслуговуванням зайнято лише k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Докладніше про це див. *Масового обслуговування теорія*.

ЕТАЛОН у розпізнаванні образів — ідеалізований сигнал, з яким так чи інакше порівнюють розпізнаваний сигнал для класифікації його. Таким чином, Е. використовують як один з можливих засобів для задавання інформації про клас сигналів (див. *Моделі об'єктів розпізнавання*). Термін «Е.» застосовують у різних значеннях, тому можуть бути різні шляхи формалізації цього поняття. Один з них грунтується на статистичному підході до *розпізнавання образів*. При цьому підході множина сигналів одного класу описується відповідним розподілом імовірностей, а Е. є найімовірнішим значенням сигналу. Отже, Е. можна розглядати як багатовимірний параметр зазначеного розподілу, що залежить, у свою чергу, від шуканого параметра t, зокрема, від номера класу. Проте Е. може залежати не лише від номера класу, а й від інших параметрів; у цьому разі клас характеризується не одним Е., а множиною їх (або областю Е.). Процес порівнювання поданого сигналу з даним Е. полягає в обчислюванні величини, яка характеризує їхню схожість. Множину Е. даного класу описують аналітично або шляхом зазначення правил складання Е. з елементарних частин.

У розпізнавальних системах і *читаючих автоматах* Е. використовують як форму зберігання інформації про клас зображень або про різні пари класів. В останньому випадку до Е. включають лише ті елементи (ознаки), якими один клас відрізняється від іншого. Цей спосіб підвищує завадостійкість апаратури при розпізнаванні дуже схожих класів (таких, напр., як букви «Ш» і «Щ», «О» і «*Q*» тощо). Е. технічно реалізується у вигляді фотографічної маски чи набору резисторів або ж записується на *стрічці магнітній* чи на інших *носіях запису інформації*. *Л. О. Святогор.*

ЕТАЛОННА НАПРУГА — напруга, використовувана як зразкова величина для порівнювання при вимірюваннях або як задавальна напруга для формування робочих напруг електр. і електронних кіл. При вимірюваннях треба, щоб величина Е. н. була відома з необхідною точністю й лишалася певною мірою незмінною в часі (стабільною). В цьому разі за джерела Е. н. правлять звичайно батареї акумуляторів чи сухих елементів, перевірені за допомогою первинного еталона. При використанні Е. н. як задавальної напруги точне значення її може бути невідоме, потрібна лише стабільність. У цьому разі за джерела Е. н. можуть правити стабілітрони. *І. Є. Єфімов.*

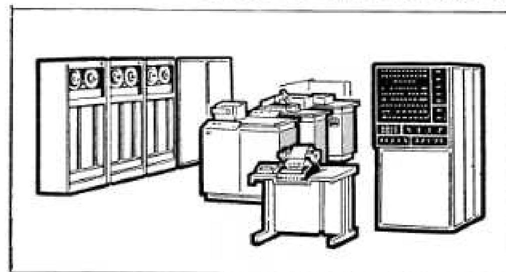
ЕФЕКТИВНІСТЬ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПОШУКУ технічна — оцінка якості інформаційного пошуку в інформаційно-пошуковій системі. Е. і. п. характеризується здебільшого *коефіцієнтом повноти пошуку* й *коефіцієнтом точності пошуку* або коефіцієнтами *втрат інформації* під час пошуку й *шуму пошукового*. Найпоширеніший спосіб оцінки Е. і. п. грунтується на зіставленні автомат. видавання *інформаційно-пошукової системи* (ІПС) з результатами визначення *релевантності документа*, яке провадить спеціаліст. Незважаючи на неоднозначність результатів визначення релевантності, пов'язаної з елементами суб'єктивності при такій

експертній оцінці, більшість відомих методів оцінки втрат інформації при пошуку й пошукового шуму аналогічні згаданому вище. Ідеальною вважають ІПС, що характеризується нульовими значеннями коеф. втрат інформації при пошуку й пошукового шуму. В реальних ІПС таких показників не можна досягти, зокрема коеф. втрат інформації при пошуку звичайно коливається в межах 10—30%, а коеф. пошукового шуму — в дуже широких межах (до 90%). Величини коефіцієнтів втрат інформації при пошуку й пошукового шуму в ІПС залежать від властивостей застосовуваної в ній *мови інформаційно-пошукової*, при цьому осн. способом зменшення втрат інформації при пошуку є введення *відношень парадигматичних* між термінами мови, осн. способом зменшення пошукового шуму є введення *відношень синтагматичних* між термінами мови в *пошукових образах документів* і *пошукових приписах* з урахуванням зазначених типів відношень у *критерії семантичної відповідності*. Оскільки зменшення втрат інформації в ІПС здебільшого зв'язане зі збільшенням пошукового шуму, застосовують інформаційно-пошукові мови з різними засобами вираження, щоб досягти прийнятих з точки зору споживачів ІПС значень коеф. втрат інформації при пошуку й пошукового шуму. *Н. О. Стоколова.*

ЕШБІ ГОМЕОСТАТ — самонастроювана кібернетична система, яка моделює *гомеостазис* — властивість живих організмів зберігати свій стан у допустимих межах при значних змінах умов їхнього існування. Див. *Гомеостатична система.*

ЄДИНА СИСТЕМА ЕЛЕКТРОННИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МАШИН (ЄС ЕОМ) — сімейство цифрових обчислювальних машин, що має широкий діапазон продуктивності й характеризується програмною сумісністю машин сімейства знизу вгору (тобто програми, складені для машин з меншою продуктивністю, можна виконувати на машинах з більшою продуктивністю). За конструктивно-технологічним виконанням, логічною структурою, номенклатурою пристроїв введення-виведення й рівнем програмного забезпечення ЄС ЕОМ належить до 3-го покоління обчисл. машин. ЄС ЕОМ створив колектив спеціалістів н.-д. установ і підприємств країн-учасниць РЕВ — Болгарії, Угорщини, НДР, Польщі, СРСР і Чехословаччини. Промисловий випуск перших машин «ЕС-1020» і «ЕС-1030» розпочато 1972 (мал.).

Ядром Єдиної системи є 7 *процесорів*, які охоплюють діапазон швидкостей обчислювань від кількох тисяч до 2 млн. операцій за 1 *сек.* В процесорі реалізуються операції з фіксованою і плаваючою комами й операції над десятковими числами. Для *даних* та інструкцій прийнято кілька форматів, в основі яких лежить *байт* і слово з 4 байт. Операції можна виконувати над половинними, цілими й подвійними словами, а також над полями змінної довжини. Система адресації в ЄС ЕОМ забезпечує формування прямої адреси для звертання до *оперативного запам'ятовувального пристрою* (ОЗП) ємністю до 16 *Мбайт.* Із ЗП дані також можна вибирати різними форматами: півсловом, словом, подвійним словом і полем змінної довжини в межах $1 \div 256$ байт. Для зручності складання програм зі зміною адреси за двома параметрами передбачено інструкції з подвійною модифікацією адреси. Пам'ять усіх машин має захист пам'яті по записуванню і зчитуванню, організований перевіркою належності кожного з блоків по 2048 байт до одного з 16 можливих ключів захисту, які можна міняти за допомогою програми.



Цифрова обчислювальна машина «ЕС-1020».

В процесорах є розвинена система переривань, яка забезпечує зв'язок між апаратними засобами й керуючою програмою, швидкий перехід від однієї програми до іншої й ефективну суміщену роботу зовн. пристроїв. Структура процесора теж має деякі особливості, які дають змогу будувати багатомашинні комплекси, взаємодіяти з зовн. об'єктами й працювати в *реальному масштабі часу*. Одноманітність структури (архітектури) ЄС ЕОМ, зокрема складу інструкцій (команд) і системи кодування даних, забезпечує програмну сумісність; це дає змогу розробляти програми, незалежні від конкретної моделі й, отже, мати спільну (для більшості машин) *операційну систему* і прикладні програми. Внутрішня логічна структура й тех. реалізація машин сімейства різна, а це призводить до відмінності у продуктивності й вартості їх. В машинах з малою продуктивністю ф-ції кількох блоків зовн. структури, як правило, реалізує один апаратний блок. Напр., формування адреси виконується в блоці операцій з фіксованою комою, функції блоків для операцій з фіксованою й плаваючою комами і для операцій над полями змінної довжини об'єднуються в одному апаратному блоці.

В ЄС ЕОМ використовують ще й паралельно-послідовний принцип виконування операцій, напр., однобайтову обробку даних при двобайтовому вибиранні їх з ОЗП в машині «ЕС-1020». У всіх випадках, коли це допускають вимоги швидкості, використовують мікропрограмне керування. При побайтовому виконуванні простих мікрооперацій, набір яких невеликий, процесор спрощується, одночасно забезпечується повна програмна сумісність завдяки мікропрограмній інтер-

претації повного набору операцій, визначуваних складом інструкцій. *Мікропрограми* постійно записані в спец. швидкодіючому ЗП, з якого можна лише зчитувати дані. У найменшій за продуктивністю моделі «ЕС-1010» застосовано програмну інтерпретацію складних операцій.

Обмін даними між процесором і зовнішніми пристроями здійснюється через канали й систему стандартного спряження з зовн. пристроями. Ця система містить логіч. й апаратні засоби, які забезпечують стандартну систему зв'язків з чітко сформульованими функціями й сигналами з уніфікованими електр. параметрами. Після одержання від процесора команди початку обміну канали виконують основний обсяг робіт по керуванню обміном між зовн. пристроями і процесором: прийом команд процесора й адресацію зовн. пристроїв, вибір, розшифровування й перевірку керуючої інформації, посилання керуючих і приймання підтверджувальних сигналів, забезпечення активних зовн. пристроїв буферною пам'яттю, перевірку правильності передачі, керування запитами на переривання тощо. Існуючі два типи каналів — селекторний (СК) і мультиплексний (МПК)— відрізняються внутрішньою структурою, режимами роботи та призначенням (див. *Пристрій обміну*). СК здійснює обмін даними процесора почергово лише з одним із підключених до нього зовн. пристроїв, який працює з відносно високою швидкістю передавання даних (магн. стрічки, диски або барабани), МПК забезпечує одночасний обмін даними з кількома зовн. пристроями (орієнтовно бл. 200), які працюють з відносно малою або середньою швидкістю (напр., перфокарткові, перфострічкові й друкувальні пристрої).

Технічні характеристики ЄС ЕОМ.

Модель	Час виконання основних операцій, *мксек*				Особливості складу інструкцій	Принцип керування	Ємність основного ОЗП, *кбайт*	Канали			Тип інтегральних схем
								мультиплексний	селекторні		
	короткі операції	додавання (віднімання) з плаваючою комою	множення	множення для подвійних слів				швидкість передавання, *кбайт/сек*	кількість	швидкість передавання, *кбайт/сек*	
«ЕС-1010»	Програмна і мікропрограмна інтерпретація операцій інших моделей Час додавання для півслів 2,6÷3,6 *мксек*				спец склад простих команд	мікропрограмне керування	8 (з можливістю розширення)	160	1	240	TTL
«ЕС-1020»	20÷30	50÷70	400	1200	повна програмна сумісність	мікропрограмне керування	64÷256	25	2	200	TTL
«ЕС-1030»	5÷8	7÷10	30	60			128÷512	40	3	600	TTL
«ЕС-1040»	0,9÷1,8	2,5÷3,5	7	12			128÷1024	50÷200	6	1200	TTL
«ЕС-1050»	0,65	1,4	2	3,2		жорстке керування	128÷1024	100÷450	6	1300	ECL
«ЕС-1060»	0,5	0,5	1	1,5			256÷2048	100÷450	6	1300	ECL

Обчисл. машини Єдиної системи побудовано на уніфікованій конструктивно-технологічній базі з широким застосуванням монолітних *інтегральних схем*, які розміщуються на типових елементах заміни (ТЕЗах), що являють собою друковані плати стандартних розмірів. Рівні уніфікованої конструкції — панелі, які несуть до 40 ТЕЗів, рами й, нарешті, стояки з трьома рамами; рама може містити бл. 50 тис. інтегральних схем, тобто забезпечується дуже велика щільність конструкції.

До складу зовн. пристроїв ЄС ЕОМ входить комплект нагромаджувачів на магн. стрічках, дисках і барабанах, комплект перфокарткового й перфострічкового обладнання введення — виведення, пристрої порядкового друкування, друкарські машинки, *екранні пульти* й графопобудовники різного типу. Передбачено й засоби передавання даних з різною швидкістю по телефонних і телеграфних лініях зв'язку (див. *Пристрої введення та виведення інформації*).

Операційні системи ЄС ЕОМ, які забезпечують автоматизацію підготовки й виконання програм, велику продуктивність праці програмістів, операторів і обслуговуючого персоналу, складаються з керуючих і обслуговуючих програм, *трансляторів* з *мов програмування* і засобів генерації системи для конкретного комплекту тех. засобів, встановлених у споживача. *Керуючі програми* здійснюють початкове завантаження основного ОЗП й керування обчисл. процесом, включно й обробку переривань, розподіл каналів, завантаження програм з бібліотеки, паралельне ви-

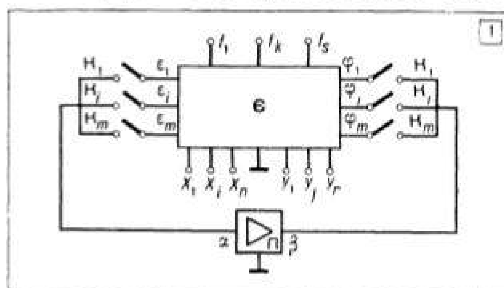
конання програм і зв'язок з оператором, а також надають користувачеві широкі можливості в керуванні масивами даних. Обслуговуючі програми здійснюють об'єднання окремо трансльованих модулів в одну або кілька програм, складання перекривних програмних фаз і роботу з бібліотеками програм (копіювання, обновлювання, стискування й поповнювання). Як вхідні мови ЄС ЕОМ прийнято *автокод* (мова *асемблера*), АЛГОЛ і *ФОРТРАН*. Системам програмування надано засоби відлагоджування й редагування програм. Програмне забезпечення містить і пакети різних прикладних програм.

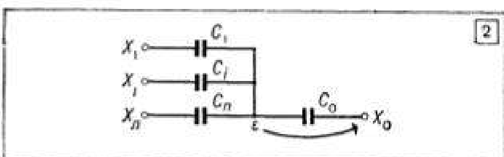
Осн. технічні характеристики ЄС ЕОМ подано в таблиці.

О. М. Ларіонов, В. К. Левін, Ю. П. Селіванов.

ЄМНІСНА МОДЕЛЬ — пристрій, що складається з ємнісного багатополюсника, елементами якого є лише лінійні й нелінійні ємності, і одного підсилювача постійного струму, що перемикається за допомогою ключів, або *перетворювача функціонального*. На мал. 1 наведено схему Є. м., на якій Є — ємнісний багатополюсник, $K_1, ..., K_m$ — ключі, керовані так, щоб вхід α і вихід β електронного *підсилювача* (П) з великим від'ємним коеф. підсилення по черзі підмикалися до полюсів багатополюсника з номерами 1, 2, ..., m. Внутрішню схему багатополюсника й параметри його елементів треба вибирати так, щоб при нульових значеннях напруг $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ напруги $X_1, ..., X_n$ задовольняли задану матем. залежність. Полюси $f_1, ..., f_s$ призначені для введення в багатополюсник певних потенціалів, а полюси з напругами $\varphi_1, ..., \varphi_m$ — для введення зарядів з виходу П. У заг. випадку треба, щоб у багатополюснику були ще й полюси для одержання деяких допоміжних напруг $y_1, ..., y_r$. Оскільки елементами багатополюсника Є є тільки ємності, то він одночасно виконує функції й розв'язувальної, й запам'ятовувальної систем. Схему багатополюсника треба вибирати так, щоб процес його зрівноважування, тобто процес перетворювання напруг $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ на машинні нулі, збігався (див. *Зрівноважування методи*). На основі розглянутої схеми можна побудувати різноманітні матем. прилади й пристрої для розв'язування скінченних і дифер. рівнянь, а також пристрої для виконування деяких матем. операцій (суматори, інтегратори, функціональні перетворювачі та ін.). Усі такі пристрої є квазіаналоговими.

На мал. 2 наведено схему ємнісного суматора. У зрівноваженому стані напруга X_0, якщо власний заряд вузла ε дорівнює нулеві, виражається через напруги $X_1, ..., X_n$ як $X_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{C_0} X_i$. Стрілкою показано точки, до яких у процесі зрівноважування треба підмикати вхід α і вихід β *підсилювача відпрацьовуючого* для перетворення напруги ε на машинний нуль. Система таких простих суматорів становить пристрій для підсумовування багатовимірних векторів. На основі ф-л чисельного інтегрування система суматорів може реалізувати операцію інтегрування гратчастих ф-цій. Якщо кулонно-вольтні харак-





1. Схема ємнісної моделі.
2. Схема ємнісного суматора.

теристики нелінійних ємностей такі, що дають змогу сформувати на виході напругу X_0, яка відповідає бажаним матем. зв'язкам її зі вхідними напругами $X_1, ..., X_n$, то можна одержати ємнісний функціональний перетворювач. Універсальніший спосіб одержання потрібних функціональних перетворювачів грунтується на сумісному використанні ємнісних ланцюгів і стандартних, напр., діодних, перетворювачів. Є. м. можна застосовувати і для множення. Щоб одержати універсальну ємнісну машину, досить мати три електронні підсилювачі, одну множильну ланку, набір ємностей і ключі.

Подібно до *квазіаналогових моделей* алгебр. рівнянь α, ρ, σ та інших типів можна одержати аналогічні ємнісні схеми, замінивши омічні провідності ємностями, а систему одночасно працюючих підсилювачів — одним перемикальним. У практиці моделювання Є. м. застосовують поки що незначною мірою, бо точність одержуваних результатів надто мала.

Літ.: Пухов Г. Е. Теория емкостных математических машин. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», 1965, в. 3.

В. К. Білик.

ЖЕГА́ЛКІНА А́ЛГЕБРА — один з різновидів *алгебри логіки*, названий за ім'ям рад. математика І. І. Жегалкіна. У Ж. а. використовуються такі теоретико-висловлювальні зв'язки: логічне множення (*кон'юнкція*, знак ·), додавання за модулем 2 (виключальне «або», знак +) і константа 1 («істина»). Набір цих операцій повний, тобто будь-яка ф-ція алгебри логіки може бути представлена суперпозицією зазначених операцій. Більше того, в Ж. а. будь-яка ф-ція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебри логіки однозначно зображувана як многочлен, у якому кожна змінна x_i входить не вище як у першому степені, а коеф. є елементами поля з двох елементів, тобто або нулем, або одиницею. Можливість такого зображення «зведеними» многочленами випливає з існування інтерполяційної формули Лагранжа, яка в цьому разі набуває простого вигляду $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(x_1 + a_1 + 1) \ldots (x_n + a_n + 1)$. Булеві зв'язки *диз'юнкцію* та заперечення в Ж. а. записують як $x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$; $\overline{x} = x + 1$.

Ж. а. наз. інколи б у л е в и м к і л ь ц е м (не плутати з терміном «булева алгебра»). Операції над зведеними многочленами провадять як над звичайними многочленами з цілочисловими коеф., потім в одержаному результаті всі змінні x_i^m, у яких $m > 0$, замінюються на x_i, а коеф. при одночленах замінюються їхніми найменшими лишками за модулем 2. Саме ця близькість Ж. а. до звичайної елементарної алгебри многочленів пояснює її перевагу з методичної точки зору. Деякі автори використали Ж. а. в дослідженнях з матем. логіки та в обчисл. техніці. Зокрема, І. І. Жегалкін застосував Ж. а. в дослідженнях *числення предикатів вузького*. Він поширив положення цієї алгебри на числення матриць з коеф. 0, 1 і знайшов вирішення п р о б л е м р о з в ' я з у в а н н я на скінченних класах для деяких типів формул вузького числення предикатів. Ж. а. з успіхом застосовують у *релейно-контактних схем теорії*. Ж. а. допускає природне узагальнення на випадок k-значних логік, якщо k — степінь простого числа. Справді, в цьому разі функції відповідної алгебри логіки згідно з інтерполяційною формулою Лагранжа допускають однозначне зображення зведеними поліномами (тобто такими, в яких кожна змінна входить у степені, не вищому від k—1) з коефіцієнтами із скінченного поля (поля Галуа) з k елементами. Це дає змогу застосувати апарат теорії поліномів над скінченними полями до досліджень з *логік багатозначних*.

Літ.: Ж е г а л к и н И. И. Арифметизация символической логики. «Математический сборник Московского математического общества», 1929, т. 36, в. 3—4; Ж е г а л к и н И. И. К проблеме разрешимости. «Математический сборник. Новая серия», 1939, т. 6, в. 2; Ж е г а л к и н И. И. Проблема разрешимости на конечных классах. «Ученые записки Московского государственного университета», 1946, т. 1, в. 100.

Л. А. Калужнін.

Ж З

ЗАВА́ДИ — сигнали або дії, що спотворюють корисний сигнал, який несе основну інформацію (у пристроях вимірювання, телевимірювання, зв'язку та ін.) або визначає поведінку різних пристроїв (систем автоматичного регулювання, телекерування, цифрових та обчислювальних пристроїв тощо). Вплив З. у деяких випадках може призвести до значних помилок систем вимірювання, до порушення функціонування систем керування, а іноді й до катастрофічних наслідків. З. за своєю природою можуть бути детермінованими і випадковими. Приклад детермінованої З.— фон від джерел живлення змінного струму. За допомогою спец. конструктивних заходів вплив детермінованих З. можна усунути. Вплив детермінованих З. на результати вимірювання враховують як систематичну *похибку*.

Джерелами випадкових З. є теплові шуми напівпровідникових приладів, опорів та електронних ламп, а також похибки, що виникають під час перетворювань сигналів (у давачах, аналого-цифрових і цифро-аналогових перетворювачах, кодуючих пристроях та ін.). Випадкову З. можна описати як якусь випадкову функцію часу. Дуже поширене представлення З. як випадкової, не корельованої з осн. сигналом, функції типу «білого шуму». Найпоширенішими є дві схеми, за допомогою яких враховують вплив З.: 1) З. підсумовуються з осн. сигналом (адитивна З.); 2) З. помножуються з осн. сигналом (мультиплікативна З.). Приклади адитивних З.— похибки вимірювання та заокруглення, мультиплікативної — процес загасання радіосигналу (фединг). Вплив З. (і при великій кількості їхніх джерел) можна дослідити іноді за допомогою однієї так званої еквівалентної завади, дія якої ідентична дії всіх реальних завад.

Властивість пристроїв протистояти шкідливому впливові завад наз. з а в а д о с т і й к і с т ю. Найширшого практичного застосування набули такі способи боротьби з З., які підвищують завадостійкість: 1) спец. конструктивні вирішення вузлів і систем загалом, що виключають можливість виникнення З.; 2) представлення корисних сигналів у такому вигляді, коли дія З. мінімальна (кодування); 3) створення спец. коректувальних пристроїв, які усувають або зменшують дію З. (фільтрація, нагромадження інформації тощо). *Б. Ю. Мандровський-Соколов.*

ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ СИСТЕ́М КЕРУВА́ННЯ — властивість систем автоматичного керування (САК) протистояти діянню *завад*. Під завадами або шумами в САК розуміють здебільшого *збурювальні діяння*, що спотворюють дійсні значення вихідних сигналів системи. З. с. к.—важлива властивість системи, яку можна оцінювати, напр., процентом прирощування величини середньоквадратичної похибки або величиною умовної ймовірності появи певного значення вихідного сигналу системи під час діяння статистично заданої завади і т. д.

З. с. к. можна підвищувати і здійснюючи відповідні заходи, передбачені під час її конструювання, і раціонально добираючи параметри вже сконструйованої системи. Конструктивними заходами є передусім вибір найефективнішого виду передавання сигналів (системи з неперервними, дискретними сигналами, сигналами на змінному струмі, кодування сигналів тощо), використання найрізноманітніших інтеграторів, нагромаджувачів тощо. Ці заходи збільшують *відношення сигнал/завада*. Підвищення завадостійкості пов'язане з ускладненням системи, збільшенням її вартості, а це може призвести до зменшення надійності. Розв'язати задачу макс. підвищення З. с. к. можна, напр., при синтезі структури системи керування за умови мінімізації показника якості її роботи або шляхом відповідного вибору параметрів системи з заданою структурою.

Особливо загострюються питання З. с. к. при створенні та настроюванні самонастроюваних, екстрем., самонавчальних та ін. систем. Завади в таких випадках можуть не тільки різко погіршити якість роботи систем, а й призвести до того, що вони цілком втратять працездатність.

Літ.: Фельдбаум А. А. [та ін.]. Теоретические основы и управления. М., 1963; Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., 1963 [бібліогр. с. 273—275].

Б. Ю. Мандровський-Соколов.

ЗАВАНТА́ЖУВАЧ у програмуванні — програма, що об'єднує одержані в результаті трансляції модулі, розміщує їх у пам'яті, настроює адреси команд і реалізує зв'язки між цими модулями. Складаючи *програми*, виділяють логічно самостійні блоки. Кожен з них виконує якусь ф-цію чи ряд взаємопов'язаних ф-цій. Блоки можна програмувати й транслювати окремо й незалежно, при цьому утворюються модулі. Модуль, одержаний після трансляції, крім команд і даних, містить і додаткову інформацію, потрібну для реалізації зв'язків між модулями й настроювання адрес команд під час розміщування програми в пам'яті. Мову представлення програм у вигляді модулів завантаження наз. мовою завантаження; вона, як правило, є вихідною мовою *асемблера* й компіляторів, її використовують, щоб об'єднати блоки програм, написаних, можливо, різними мовами, для *програм сегментації* та щоб включити програми в бібліотеки. Об'єднання програм на рівні мови завантажування дає змогу уникнути повторної трансляції наперед складених і наладжених блоків програм.

З. іноді виконує дві ф-ції — редагування зв'язків і розміщування програм у *пам'яті ЦОМ*. В ін. випадках розрізняють дві самостійні програми — редактор зв'язків і власне З. Редактор зв'язків об'єднує незалежно одержані модулі в один модуль завантажування. Коли редагують зв'язки, реалізуються міжмодульні зв'язки й, крім того, до програми підключаються потрібні модулі з заг. бібліотеки чи особистих бібліотек (за запитом чи автоматично). З метою економії пам'яті машини редактор зв'язків може конструювати й сегменти, які завантажують динамічно й які замінюють один одного в її пам'яті. З. працює в складі керуючої програми *операційної системи*. Його ф-ції зводяться до розміщування відредагованого модуля в пам'яті й настроювання адрес, які залежать від місця розташування програми. Поділ ф-цій редактора зв'язків і З. не потребує повторного редагування зв'язків, якщо програму використовують багато разів. *Ю. М. Бояковський.*

ЗАВБА́ЧЕННЯ ВИПАДКО́ВИХ ПРОЦЕ́СІВ ТЕО́РІЯ — розділ *випадкових процесів теорії*, в якому за спостереженнями над одним процесом вивчають методи завбачення перебігу якогось іншого процесу, статистично пов'язаного з спостережуваним. Припустімо, що *випадковий процес* $\xi(t)$ спостерігається на якійсь множині E. Треба на основі спостережень якнайкраще завбачити значення *випадкової величини* ζ, статистично пов'язаної з $\xi(t)$, тобто треба знайти випадкову величину $\hat{\zeta}$, яка залежить від результатів спостереження і яку можна з найбільшою підставою прирівняти до ζ. Нехай для кожної пари випадкових величин η_1 і η_2 визначено відстань $\rho(\eta_1, \eta_2)$ між цими величинами; тоді $\rho(\zeta, \hat{\zeta})$ характеризує *похибку*, що виникає від заміни ζ на $\hat{\zeta}$. Осн. задачу З. в. п. т. можна сформулювати так: потрібно знайти такий функціонал $\hat{\zeta} = f\{\xi(t),\ t \in E,\}$ від спостережуваних величин $\xi(t)$, $t \in E$, для якого $\rho(\zeta, \hat{\zeta})$ набуває найменшого значення. Як можливі способи вибору відстані (метрики) між η_1 і η_2 можна розглядати $\rho(\eta_1, \eta_2) = P\{|\eta_1 - \eta_2| > \varepsilon\}$ при якомусь $\varepsilon > 0$, $\rho(\eta_1, \eta_2) = M|\eta_1 - \eta_2|$, $\rho(\eta_1, \eta_2) = M\dfrac{|\eta_1 - \eta_2|}{1 + |\eta_1 - \eta_2|}$, де M — символ *математичного сподівання*. З. в. п. т. найдокладніше розроблено для випадку середньоквадратичної метрики $\rho(\eta_1 \eta_2) = \{M[\eta_1 - \eta_2]^2\}^{1/2}$. Цю метрику ми й розглядатимемо далі. Заг. задача включає в себе як окремі випадки задачі *екстраполяції випадкового процесу* (спостерігається $\xi(t)$ на E, треба оцінити $\zeta = \xi(t_0)$, $t_0 \bar{\in} E$), *фільтрації випадкового процесу* (спостерігається на E $\xi(t) = x(t) + \eta(t)$, де $x(t)$ — корисний сигнал, $\eta(t)$ — шум, а треба завбачати $\zeta = x(t_0)$), *інтерполяції випадкового процесу* (спостерігається $\xi(t)$ (на $-\infty$, 0) $\cup [T, +\infty)$,

треба завбачати $\zeta = \xi(\tau)$, $0 < \tau < T$). Оцінка $\widehat{\zeta}$ величини ζ з найменшою середньоквадратичною похибкою має вигляд

$$\widehat{\zeta} = M\{\zeta/\xi(t),\quad t \in E\}. \qquad (1)$$

Формула (1) визначає умовне матем. сподівання випадкової величини $\widehat{\zeta}$, якщо відомі $\xi(t)$, $t \in E$. Використати рівність (1), щоб одержати ф-ли, які явно виражають $\widehat{\zeta}$ через $\xi(t)$, можна тільки в деяких спец. випадках (напр., якщо є досить прості явні формули умовного розподілу ζ при відомих $\xi(t)$, $t \in E$).

Приклад. Нехай на інтервалі $E = [0, T]$ спостерігається випадковий процес $\xi(t) = \nu g(t) + \eta(t)$, де $g(t)$ — відома ф-ція, $\eta(t)$ — гауссівський випадковий процес з відомою *кореляційною функцією* $R_\eta(t, s)$ і $M\eta(t) = 0$, ν — випадкова величина з відомою щільністю розподілу $h(x)$. Припустимо також, що $\eta(t)$ і ν незалежні. Потрібно знайти оцінку $\widehat{\nu}$ величини ν з найменшою середньоквадратичною похибкою. Оптим. оцінку $\widehat{\nu} = M\{\nu/\xi(t),\quad t \in E\}$ можна обчислити, припустивши додатково, що інтегр. рівняння $\int_0^T R_\eta(t,s)\,p(s)\,ds = g(t)$ має розв'язок $p_0(s)$, інтегровний зі своїм квадратом на відрізку $[0, T]$. Тоді

$$\widehat{\nu} = M\{\nu/\xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\exp\left\{x\int_0^T \xi(t)\,p(t)\,dt - \frac{x^2}{2}\int_0^T g(t)\,p(t)\,dt\right\}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\exp\left\{x\int_0^T \xi(t)\,p(t)\,dt - \frac{x^2}{2}\int_0^T g(t)\,p(t)\,dt\right\}dx}.$$

Зокрема, якщо ν має *нормальний розподіл* і $M\nu = 0$, $M\nu^2 = \sigma^2$, то

$$\widehat{\nu} = \frac{\sigma^2\int_0^T p(t)\,\xi(t)\,dt}{1 + \sigma^2\int_0^T p(t)\,g(t)\,dt}$$

лінійно виражають через результати спостереження $\xi(t)$.

Обмеження класу розглядуваних функціоналів тільки лінійними або поліномними призводить до збільшення середньоквадратичної похибки, але дає змогу частіше одержувати явний розв'язок, зручний для практичного використання.

Задача лінійного завбачення полягає в знаходженні випадкової величини $\widetilde{\zeta}$, яку лінійно виражають через $\xi(t)$, $t \in E$ і яка мінімізує середньоквадратичну похибку $M[\zeta - \widetilde{\zeta}]^2$. Задачу лінійного завбачення для випадкових процесів уперше розглядав А. М. Колмогоров. Він цю задачу сформулював геометрично так. Множину H усіх випадкових величин зі скінченною *дисперсією* можна розглядати як гільбертів простір (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі), якщо під скалярним добутком двох випадкових величин η_1 і η_2 розуміти $(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1\eta_2$. При такому виборі скалярного добутку $\{M[\eta_1 - \eta_2]^2\}^{1/2}$ — відстань між η_1 і η_2. Нехай H_E — сукупність найрізноманітніших комбінацій випадкових величин $\xi(t)$, $t \in E$ та їхніх границь у розумінні середньоквадратичної збіжності; H_E — підпростір у H. Будь-який лінійний функціонал $\widetilde{\zeta}$ від результатів спостереження являє собою випадкову величину з H_E. Отже, задачу лінійного завбачення можна інтерпретувати як задачу знаходження в H_E випадкової величини $\widetilde{\zeta}$, найближчої до ζ. Таку випадкову величину однозначно визначають із

$$M[\zeta - \widetilde{\zeta}]\,\xi(t) = 0 \text{ при всіх } t \in E. \qquad (2)$$

Рівняння (2) означає, що $\widetilde{\zeta}$ є проекція ζ на H_E, а $\zeta - \widetilde{\zeta}$— перпендикуляр з точки ζ на H_E. Похибка завбачення $\sigma = \sqrt{M[\zeta - \widetilde{\zeta}]^2}$ дорівнює довжині цього перпендикуляра. Співвідношення (2) показує, що осн. характеристиками, які потрібно знати, щоб розв'язати задачу лінійного завбачення, є кореляційна ф-ція $B(t, s) = M\xi(t)\xi(s)$ процесу $\xi(t)$ і ф-ція $B_{\zeta\xi}(t) = M\zeta\xi(t)$. Істотним достоїнством лінійної теорії є те, що вона може обмежитися цими порівняно простими характеристиками. У широкому класі випадків (напр., тоді, коли всі скінченновимірні розподіли системи випадкових величин $\{\zeta, \xi(t), t \in E\}$ гауссівські) розв'язок лінійної задачі збігається з оптим. завбаченням, обчисленим за ф-лою (1). Рівняння (2) для визначення $\widetilde{\zeta}$ є основним у теорії лінійного завбачення і в різних конкретних задачах набуває спец. вигляду.

Приклад 1. (Екстраполювання за скінченною кількістю спостережень). Припустимо, що процес $\xi(t)$ з відомою кореляційною ф-цією $B_\xi(t, s) = M\xi(t)\xi(s)$ спостерігають у скінченній кількості точок $t_1, \ldots, t_n$. Нехай відома й ф-ція $B_{\zeta\xi}(t) = M\zeta\xi(t)$. Лінійний функціонал від спостережуваних величин у цьому разі можна записати у вигляді $\widetilde{\zeta} = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\xi(t_k)$, де c_k потрібно знайти з умови (2), яка перетворюється на систему

$$\sum_{k=1}^{n} c_k B_\xi(t_k, t_i) = B_{\zeta\xi}(t_i), \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (3)$$

Приклад 2. Припустимо, що процес $\xi(t)$ з відомою кореляційною ф-цією $B_\xi(t, s)$ спостерігається на інтервалі $E = [0, T]$. Нехай λ_k і $\varphi_k(t)$ — послідовності власних значень і власних функцій інтегр. рівняння $\varphi(t) = \lambda \int_0^T B_\xi(t, s)\varphi(s)\,ds$. Тоді на інтервалі $[0, T]$ процес $\xi(t)$ можна подати у вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}, \qquad (4)$$

де $M\xi_k\xi_r = 0$, якщо $k \neq r$, $M\xi_k^2 = 1$. Із (4) випливає, що $\widetilde{\zeta}$ треба шукати у вигляді $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$, а використовуючи (2), одержимо

$$c_k = \sqrt{\lambda_k} \int_0^T B_{\zeta\xi}(t)\varphi_k(t)\,dt.$$

Приклад 3. Нехай $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ — випадкові процеси з відомими ф-ціями $B_{\xi\xi}(t, s)$ і $B_{\zeta\xi}(t, s) = M\zeta(t)\xi(s)$. Процес $\xi(t)$ спостерігають на множині E. Якщо найкращу лінійну оцінку $\widetilde{\zeta}(t_0)$ величини $\zeta(t_0)$ шукати у вигляді $\int_E c(t, t_0)\xi(t)\,m(dt)$, де $c(t, t_0)$ — невідома *вагова функція*, а $m(\cdot)$ — відома міра на E, то з співвідношення (2) одержимо інтегр. рівняння для ф-ції $c(t, t_0)$:

$$\int_E c(t, t_0) B_\xi(t, s)\, m(dt) = B_{\zeta\xi}(t_0, s), \ (s \in E), \quad (5)$$

що є інтегр. рівнянням Фредгольма 1-го роду. Є аналітичні труднощі при розв'язуванні цього рівняння. Якщо

$$B_{\xi\xi}(t, s) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\Psi_j(s), \quad t > s,$$

$$B_{\zeta\xi}(t, s) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(t)\Psi_j(s), \quad t > s,$$

де $\varphi_j(t)$, $\Psi_j(t)$, $\chi_j(t)$ — деякі відомі ф-ції, $E = [0, T]$, $m(\cdot)$ — міра Лебега на відрізку $[0, T]$, то є метод, що зводить розв'язування рівняння (5) до розв'язування системи лінійних алгебр. рівнянь. Якщо процеси $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ — стаціонарні й стаціонарно пов'язані, процес $\xi(t)$ спостерігають на $E = (-\infty, s)$ і найкращу оцінку $\zeta(s + T)$ шукають у вигляді $\int_{-\infty}^{s} c(\tau)\xi(s - \tau)\,d\tau$, то рівняння (5) набуває вигляду

$$\int_0^\infty c(\tau) B_\xi(v - \tau)\,d\tau = B_{\zeta\xi}(T + v), \quad v \geqslant 0. \qquad (6)$$

Рівняння (6) наз. рівнянням Вінера — Хопфа. Амер. математик Н. Вінер (1894—1964), який уперше розглядав задачі завбачення для випадкових процесів з неперервним часом, розробив метод розв'язування цього рівняння. Якщо $B_\xi(u)$ і $B_{\zeta\xi}(u)$ є перетвореннями Фур'є дробово-раціональних ф-цій, то для $c(\tau)$ можна одержати явні вирази.

Якщо відмовитися від вимоги лінійності *алгоритму* обробки спостережуваної реалізації, то можна одержати оцінки, що мають меншу середньоквадратичну похибку, ніж лінійні оцінки. Зокрема, якщо розглядати для ζ оцінки виду

$$c + \sum_{n=1}^{N} \int_0^T \ldots \int_0^T c_n(t_1, \ldots, t_n)\xi(t_1)\ldots$$
$$\ldots \xi(t_n)\,dt_1 \ldots dt_n,$$

де $c_n(t_1, \ldots, t_n)$ — невідомі вагові ф-ції, то з умови мінімуму середньоквадратичної похибки для вагових ф-цій можна одержати систему лінійних рівнянь. Щоб побудувати такі оцінки, треба знати моментні ф-ції розглядуваних процесів до порядку $2N$ включно. З. в. п. т. широко використовують в *автоматичного керування теорії*, *розпізнавання образів*, радіотехніці, метеорології.

Літ.: Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. «Успехи математических наук», 1952, т. 7, в. 5; Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960; Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [бібліогр. с. 648—654]; Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968 [бібліогр. с. 458—460]; Миддлтон Д. Очерки теории связи. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 142—145].

М. Й. Ядренко.

ЗАВБА́ЧУВАЛЬНИЙ ФІЛЬТР — пристрій, що обробляє якийсь вхідний сигнал так, щоб у кожний поточний момент часу на виході цього пристрою одержувати найімовірніші в розумінні прийнятого критерію майбутні значення цього сигналу. Див. також *Вінера — Хопфа рівняння* першого роду, *Фільтр*.

Б. Ю. Мандровський-Соколов.

ЗАДА́ЧА З РУХО́МИМИ КІНЦЯ́МИ — одна з задач *варіаційного числення*. Формулюється так: нехай у $(n + 1)$ — вимірному просторі змінних $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ задано поверхні S_1 і S_2 відповідно до рівнянь

$$\varphi_i(x, y) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, k, \ k \leqslant n + 1 \qquad (1)$$

$$\eta_j(x, y) = 0, \ j = 1, \ldots, m, \ m \leqslant n + 1 \qquad (2)$$

і функціонал

$$I = g_1(x_1, y(x_1)) + g_2(x_2, y(x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx. \qquad (3)$$

Назвемо криву $y(x)$ допустимою, якщо на ній функціонал I визначено, а кінці її лежать на поверхнях S_1 і S_2. З. з р. к. полягає у відшукуванні серед усіх допустимих кривих такої, що забезпечує мінімум функціоналові I.

Для одержання тих чи тих умов, що характеризують цю криву, на ф-ції g_1, g_2, f, y, φ_i, η_j (як звичайно у варіаційному численні) накладаються певні обмеження (неперервність, диференційовність і т. д.). У випадку, коли одна з поверхонь S_1 або S_2 вироджується в точку простору (x, y), одержуємо задачу з одним рухомим і одним фіксованим кінцем; коли обидві поверхні S_1 і S_2 вироджуються в точки, одержуємо задачу з фіксованими кінцями.

Оскільки задача з фіксованими кінцями є окремим випадком З. з р. к., то крива, що надає мінімуму функціоналові I в задачі (1—3), повинна задовольняти всі відомі для задачі з фіксованими кінцями необхідні умови мінімуму. Зокрема, у випадку достатньої гладизни, вона повинна задовольняти рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0,\ i = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

Інтегральні криві системи (4) наз. екстремалями. Проте в розглядуваній задачі треба додатково визначати положення кінців кривої на поверхнях S_1 і S_2. Це досягається за допомогою *умов трансверсальності*. Кажуть, що допустима крива задовольняє умови трансверсальності, якщо для будь-яких векторів $(dx_\alpha, dy(x_\alpha))$, $\alpha = 1, 2$, дотичних до поверхонь S_α, виконуються умови

$$\left[\left(f - \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i'} dy_i\right]_{x=x_\alpha} + $$
$$+ dg_\alpha\big|_{x=x_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \qquad (5)$$

Для того, щоб крива $y(x)$ надавала мінімуму функціоналові I, треба, щоб вона задовольняла умови трансверсальності.

Кожна точка поверхні S_1 характеризується $n + 1 - k$ параметрами. Отже, якщо в рівняння (5) при $\alpha = 1$ підставити $(n + 1 - k)$ лінійно незалежних векторів $(dx_1, dy(x_1))$, дотичних до поверхні S_1, то одержана система рівнянь дасть змогу визначити положення кінця кривої $(x_1, y(x_1))$, що надає мінімуму функціоналові I. Аналогічно визначають положення кінця мінімізуючої кривої на поверхні S_2.

Наведемо деякі окремі випадки умов трансверсальності. Нехай у 3-вимірному просторі поверхні S_α задано рівняннями $x = \varphi_\alpha(y, z)$, $g_\alpha = 0$, $f = f(x, y, z, y', z')$. Тоді, якщо вибрати як лінійно незалежні вектори, дотичні до поверхонь S_α, вектори $\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}, 1, 0\right)$ і $\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}, 0, 1\right)$, умови трансверсальності матимуть вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} - z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} - z'\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Якщо $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, а $g_\alpha \equiv 0$, умови трансверсальності набувають вигляду

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right|_{x=x_\alpha} = 0,\quad i = \overline{1, n}.$$

Літ. див. до ст. *Варіаційне числення.*

Ю. М. Данилін.

ЗАДА́ЧА З ФІКСО́ВАНИМ ЧА́СОМ — задача теорії оптимального керування, в якій моменти початку t_0 та кінця t_1 процесу зафіксовано. Ввівши допоміжну змінну x_{n+1}, що задовольняє рівняння $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$ та граничні умови $x_{n+1}(t_0) = t_0$, $x_{n+1}(t_1) = t_1$, З. з ф. ч. зводять до заг. задачі *оптимального керування теорії.*

Б. М. Пшеничний.

ЗАДА́ЧА ПРО ВУЗЬКІ́ МІСЦЯ́ — задача про виявлення найдужче перевантажених ресурсів, яка передбачає розробку способів усунення такого перевантаження. Такими ресурсами можуть бути устаткування, оснастка, людські резерви тощо. Оскільки виробнича програма підприємств змінюється в часі як за обсягом, так і за якістю, то змінюється й потреба в ресурсах кожного виду. При цьому може різко збільшуватися потреба в окремому виді ресурсів і перевантаженість їх. Найчастіше ресурсом буває устаткування. При цьому перевантаженим виявляється, як правило, найдефіцитніше устаткування — те, яке дорого коштує, великогабаритне, те, яке виробляють у невеликій кількості, тощо. В цьому разі для усунення вузького місця збільшують кількість одиниць устаткування «вузького місця», переміщують (якщо це не порушує технології) частину операцій з вузького місця на робочі місця менш завантажених груп устаткування (напр., на штампувальних дільницях — на преси більшої потужності), впроваджують понаднормові роботи і т. д. Вузьким місцем на підприємстві можуть виявитися й людські резерви — люди певної професії або розряду. Виявлення заздалегідь вузьких місць такого роду дає змогу своєчасно вжити потрібних організаційних заходів для усунення їх.

З. про в. м. належить до задач *календарного планування.* Її розв'язують як складову частину ширшої проблеми — оцінки й порівняння наявних ресурсів і ресурсів, необхідних для виконання фіксованої (заданої) виробничої програми. Розв'язання цієї задачі необхідне й при побудові календарного плану-графіка роботи цеху (дільниці).

Т. П. Подчасова.

ЗАДА́ЧА ПРО КОМІВОЯЖЕ́РА — одна з поширених комбінаторних задач дискретного програмування. Заг. формулювання З. про к.: торговець, що виїжджає з якогось міста, повинен відвідати кожне з $(n - 1)$ інших міст лише раз і повернутися у вихідне місто. Матриця відстаней $A = \{a_{ij}\}$ $(i, j =$

$= 1, 2, \ldots, n$) відома. Треба визначити, в якому порядку торговець має відвідувати міста, щоб заг. пройдена відстань була мінімальною. Якщо a_{ij} розглядати як час, витрати чи інший показник, то до З. про к. зведеться чимало прикладних задач, пов'язаних з обходом ряду пунктів, прокладанням комунікацій між ними, складанням розкладу виконання робіт, оптимізацією програм для ЕОМ тощо. Розв'язок З. про к. можна знайти, перебираючи $(n-1)!$ можливих маршрутів. Проте зі зростанням n кількість варіантів швидко досягає астрономічних цифр, що змушує відмовитися від прямого перебирання їх.

Один із способів розв'язування З. про к. полягає в зведенні її до задачі цілочислового *програмування лінійного*, яка полягає в мінімізації лінійної форми витрат $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$ при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ (i, j = 1, 2 \ldots, n), \quad (1)$$

$$0 \leqslant x_{ij}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \quad (2)$$

$$(n-1)\, x_{ij} + u_i - u_j \leqslant n - 2, \quad (3)$$

$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

де u_i — деякі спеціально дібрані допоміжні цілі числа. Умова (1) виражає одноразовість відвідання міст, (2) — невід'ємність змінних, (3) — однозв'язність маршруту.

Використання ідеї *програмування динамічного* полягає в тому, що З. про к. подають у вигляді багатокрокового процесу нарощування ланок шляху, мінімізуючи витрати. Осн. рекурентне рівняння при цьому має вигляд:

$$f_i(e_1, e_2, \ldots, e_k) =$$
$$= \min_{1 \leqslant m \leqslant k} [a_{ie_m} + f_{e_m}(e_1, e_2, \ldots, e_{m-1},$$
$$e_{m+1}, \ldots, e_k)],$$

де $f_i(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — довжина оптим. шляху повернення від i-го до вихідного міста через міста $e_1, e_2, \ldots, e_k$, що залишилися, e_m — наступне за i місто шляху. Розв'язку досягають, перебираючи $n^2 \cdot 2^{n-1}$ варіантів. Найефективнішим з відомих способів одержання точного розв'язку З. про к. вважають *гілок і границь метод*. *Л. Л. Закашанський.*

ЗАДА́ЧА ПРО НАЙКОРО́ТШИЙ ШЛЯХ — задача про відшукування на напрямленому *графі* шляху найменшої довжини між двома заданими його вершинами. Нехай задано напрямлений граф, кожній дузі якого поставлено у відповідність невід'ємне число, яке наз. довжиною дуги. Довжиною шляху такого графа наз. суму довжин дуг, з яких складається цей шлях.

З. про н. ш. виникає в багатьох прикладних задачах, особливо під час розв'язування *транспортних задач*, дискретних задач *програмування динамічного* тощо. В задачах сіткового планування й управління *алгоритми* розв'язування З. про н. ш. використовують для знаходження *критичного шляху*. Відомо кілька ефективних методів розв'язування З. про н. ш. Найчастіше вдаються до алгоритмів Мінті, Беллмана — Шімбела й Форда. В СРСР для аналізу транспортних мереж широко застосовують алгоритм, оснований на методі *послідовного аналізу варіантів* і близький до алгоритму Форда. *Н. З. Шор.*

ЗАДА́ЧА ПРО ОПТИМА́ЛЬНУ ШВИДКОДІ́Ю — одна з основних задач теорії оптимального керування, в якій критерієм якості керування є час переходу з однієї точки в іншу. Формально відповідає випадкові в загальній задачі *оптимального керування теорії*, коли $f_0(x, u) \equiv 1$. Загальна постановка З. про о. ш. така. Є об'єкт керування, закон руху якого описується системою диф. рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-вимірний вектор фазових координат, u — керування, що є r-вимірним вектором, який змінюється в якійсь множині U r-вимірного простору. Ф-ції $f_i(x, u)$ неперервні й неперервно диференційовні за x. Задано точки x^0 і x^1. Потрібно вибрати таку вимірну обмежену ф-цію $u(t)$ й моменти часу t_0 і t_1, що $u(t) \in U$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, траєкторія $x(t)$ систем (1), яка відповідає керуванню $u(t)$ й точці x^0, проходить у момент t_1 через точку x^1, тобто задовольняються співвідношення $\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ і різниця $t_1 - t_2$ — мінімальна. Принцип максимуму (див. *Понтрягіна принцип максимуму*) для цієї задачі формулюється так. Нехай $u^0(t)$ — оптим. керування, що є розв'язком поставленої задачі оптим. швидкодії, а $x^0(t)$ — відповідна йому траєкторія. Тоді знайдеться така n-вимірна вектор-функція $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t)\}$, що:

а) справджується система рівнянь:

$$\frac{d\Psi_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t))}{dx_i} \Psi_j(t);$$

б) $H(\Psi(t), x^0(t), u^0(t)) = M(\Psi(t), x^0(t))$,

$$\text{де } H(\Psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i f_i(x, u), \ M(\Psi, x) =$$
$$= \sup_{u \in U} H(\Psi, x, u);$$

в) ф-ція $M(\Psi(t), x^0(t))$ — постійна на відрізку $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ і невід'ємна.

Найкраще розвинуто теорію З. про о. ш. для лінійних систем дифер. рівнянь, тобто для випадку, коли ф-ції $f_i(x, u)$ — лінійні

за x і за u. У цьому випадку систему (1) можна записати у векторній формі $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, де A — матриця з елементами a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, а B — матриця з елементами b_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$. Для лінійної З. про о. ш. принцип максимуму набуває такого вигляду: для того, щоб керування $u^0(t)$ було оптимальним, необхідно, щоб існувала така вектор-ф-ція $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t)\}$, яка так задовольняє систему дифер. рівнянь

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^*\Psi(t),$$

що $$(\Psi(t), Bu^0(t)) = \sup_{u \in U} (\Psi(t), Bu),$$

де A^* — матриця, транспортована до A, а (x, y) — скалярний добуток векторів x та y. Припустимо, що ділянка U — паралелепіпед, тобто визначається нерівностями $|u_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$. Вважається, що умову спільності положення виконано, якщо для всіх $j = 1, \ldots, r$ системи векторів $b^j, Ab^j, \ldots, A^{n-1}b^j$ — лінійно незалежні. Тут вектор b^j має компоненти b_{ij}, $i = 1, \ldots, n$. Всі наведені нижче результати справджуються при виконанні цього припущення. Нехай $u^0(t)$ — розв'язок задачі лінійної оптим. швидкодії. Тоді кожна з ф-цій $u_j^0(t)$, $j = 1, \ldots, r$ — кусково постійна, має лише скінченне число розривів і $u_j^0(t)$ дорівнює $+1$ або -1. Моменти часу t, в які відбувається зміна значення $u_j^0(t)$ з $+1$ на -1 або навпаки, наз. моментами перемикання. Таким чином, оптим. керування має лише скінченне число моментів перемикання. Якщо всі власні значення матриці A дійсні, то число моментів перемикання кожної з компонент $u_j^0(t)$ в оптим. керуванні не перевершує $n - 1$. Останнє твердження має назву теореми про n інтервалів.

Літ. див. до ст. *Оптимального керування теорія.*

Б. М. Пшеничний.

ЗАДА́ЧА ПРО ПЕРЕВЕ́ЗЕННЯ З ПРОМІ́ЖНИМИ ПУ́НКТАМИ — узагальнена транспортна задача, коли для кожного пункту споживання складають рівняння матеріального балансу. Це рівняння відображує той факт, що для кожного пункту обсяг вивезеного продукту мінус кількість завезеного продукту дорівнює чистому обсягові продукту, виробленого в цьому пункті (якщо різниця додатна) або чистому обсягові споживаного в ньому продукту (якщо різниця від'ємна).

Рівняння матеріального балансу для кожного пункту має вигляд:

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} + a_j^* = \sum_{k \neq j} x_{jk} + b_j^*, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

де x_{ij} — загальний обсяг перевезень з i в j, $i \neq j$, a_j^* — виробництво в пункті j, b_j^* — споживання в пункті j. Частку продукту місцевого виробництва, призначену для внутр. споживання, можна виключити з моделі. При цьому символи a_j^* і b_j^* замінюють на символи a_j (чисте виробництво) і b_j (чисте споживання), які визначають так: $a_j = a_j^* - \min(a_j^*, b_j^*)$, $b_j = b_j^* - \min(a_j^*, b_j^*)$. З. про п. з п. п. полягає у відшукуванні чисел x_{ij}, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, що задовольняють рівняння матеріального балансу й мінімізують цільову ф-цію $z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, $(i \neq j)$, де c_{ij} — витрати на транспортування одиниці продукту з пункту i в пункт j. Задачу можна подати у сітковому вигляді (див. *Сіткові методи планування й управління*).

З. про п. з п. п. є прикладною задачею *програмування лінійного*. Для її розв'язування застосовують *симплекс-метод*, методи *графів теорії*. У деяких окремих випадках розв'язування її можна звести до розв'язування транспортної задачі. З. про п. з п. п. застосовують при розв'язуванні задач транспортування вантажів через проміжні бази або транспортування сировини з проміжною переробкою, напр. заготівля металобрухту в постачальників, перевезення, переробка його на пунктах проміжної обробки (пресування й вивезення споживачам — металургійним заводам).

О. О. Бакаєв.

ЗАДА́ЧА ПРО ПРИЗНА́ЧЕННЯ — задача про найкращий розподіл n робіт між n виконавцями за припущенням, що кожного виконавця призначають лише на одну роботу, а кожна робота призначена тільки для одного виконавця. Виконавців розрізняють за їхніми здібностями до виконання тієї чи іншої роботи. Нехай $a_{ij} \geqslant 0$ — продуктивність i-го виконавця на j-й роботі. Найкращим вважають розподіл робіт, який максимізує ефективність, що вимірюється сумою продуктивності всіх n виконавців. Позначимо через x_{ij} змінну, яка дорівнює одиниці, якщо i-го виконавця призначено на j-у роботу, й нулеві, якщо для j-ї роботи обрано ін. виконавця. Задача зводиться до задачі *програмування лінійного*, яка полягає в знаходженні x_{ij}, що максимізують

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n. \quad (4)$$

Задача максимізації *лінійної форми* (1) за умов (2—4) завжди має цілочислові

розв'язки, тому за умов (2—3) кожен x_{ij} буде нулем або одиницею. З. про п. становить окремий випадок *транспортної задачі*. Найефективнішим для розв'язування З. про п. є угорський метод. Ін. прикладами можуть бути задачі розподілу робіт між механізмами, розподіл цілей між вогневими засобами тощо.

Літ. див. до ст. *Програмування лінійне.*

Л. М. Комзакова.

ЗАДА́ЧА ПРО РОЗПО́ДІЛ ПОСТА́ВОК — одна з задач оперативного оптимального керування в системах, пов'язаних з нагромадженням запасів на складах та витрачанням їх. Нехай на всіх n складах системи створюється запас однорідного товару. Товар періодично замовляють у виготовлювачів централізовано та одночасно для всіх складів системи. Припускають, що замовлена кількість товару Q відома. Замовлення може виконуватись із затримкою в часі. Наявність товару на кожному складі в момент виконання замовлення також відома. Треба вирішити, як розподілити кількість товару Q між n складами після того, як замовлення виконано. Припускають, що протягом часу T до реалізації наступного замовлення склади нізвідкіля товар не одержують. Треба, щоб замовлення розподіляли між складами так, щоб мінімізувалася сума витрат на перевезення й очікуваних штрафних витрат, зумовлених незадоволенням попиту протягом часу T. Нехай $C_j(x_j)$ — транспортні витрати на перевезення x_j одиниць продукту відправника до j-го складу; y_j — величина запасу цього продукту в j-му складі в момент, коли здійснюється розподіл; π_j — віднесені до одиниць потрібного продукту штрафні витрати, коли запасу в j-му складі немає; $p_j(v_j)$ — імовірність того, що на j-му складі протягом часу T виникає попит на v_j одиниць продукту. Тоді, нехтуючи часом транспортування, функцію витрат для j-го складу можна визначити як

$$f_j(x_j) = c_j(x_j) + \pi_j \sum_{v_j = y_j + x_j}^{\infty} (v_j - y_j - x_j)\, p_j(v_j).$$

Задача полягає у визначенні невід'ємних цілих чисел x_j, що задовольняють умову $\sum_{j=1}^{n} x_j = Q$ і мінімізують ф-цію $z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

З. про р. п. є задачею *програмування математичного*, розв'язувати її доводиться при оперативному керуванні на транспорті, в сфері матеріально-тех. постачання та в різних виробничих системах. *О. О. Бакаєв.*

ЗАДА́ЧА ПРО РЮКЗА́К — задача про найкращий вибір предметів з загальної кількості n предметів так, щоб сумарна вага (об'єм, габарит тощо) вибраних предметів не виходила за зазначену межу b, а сумарна корисність їх була максимальна. Кожен предмет має вагу a_j й характеризується коеф. корисності c_j. Нехай x_j дорівнює одиниці, якщо j-й предмет приймають до укладання, і нулеві в противному разі. Тоді задача є задачею цілочислового *програмування лінійного*, яка полягає в знаходженні цілих x_j, що максимізують $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

До З. про р. зводиться багато задач про розміщення устаткування на літаку чи ракеті, завантаження суден, компактного укладання устаткування тощо. В різних конкретних задачах коеф. корисності може описувати різні якості предметів — вартість, ефективність, калорійність тощо. Нерівність (1) може означати обмеження на вагу, об'єм, деякі розміри тощо. З. про р. як задачу цілочислового програмування можна розв'язати *Гоморі методом*, але для розв'язування її найефективнішими є *гілок і границь метод* і метод функціональних рівнянь *програмування динамічного*.

Літ. див. до ст. *Програмування лінійне.*

Л. М. Комзакова.

ЗАДА́ЧА ПРО СКЛАД — одна з задач оптимального планування в системах, пов'язаних з закупівлею та збутом однорідного продукту. З. про с. є прикладною задачею *програмування лінійного*. Нехай у початковий момент часу на складі, місткість якого k одиниць продукту, є k_0 таких одиниць. У кожен з n дискретних моментів часу (1, 2, 3, ..., n) відбувається закупівля й продаж деякої кількості одиниць продукту. В момент часу n наявний запас його повинен дорівнювати k_1. Заг. кількість продукту, яку можна закупити за всі n одиниць часу, дорівнює R. Вихідними даними є такі величини: витрати p_i на продаж одиниці продукту, реалізованого в момент часу i, витрати q_i на купівлю одиниці продукту, закупленого в момент часу i, вартості c_i зберігання одиниці продукту протягом проміжку часу $(i-1, i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Позначимо через α_i кількість продукту, реалізованого в момент часу i, β_i — кількість продукту, закупленого в момент часу i, γ_i — залишок продукту, що зберігався на складі у проміжок $(i-1, i)$ і нереалізований у момент часу i, δ_i — заг. кількість продукту на складі після закупівлі у момент часу i. В результаті розв'язання задачі повинні бути одержані такі значення α_i і β_i, при яких заг. прибуток $\sum_{i=1}^{n} (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - c_i \delta_{i-1})$ виявляється максимальним при обмеженнях: $\gamma_i + \beta_i = \delta_i$,

$\delta_{i-1} - \alpha_i = \gamma_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i \leqslant R, 0 \leqslant \delta_i \leqslant k, \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0, \gamma_i \geqslant 0, \delta_0 = k_0, \delta_n = k_1, i = 1, \ldots, n$.

Розв'язування задачі зводиться до визначення оптим. однорідного потоку в мережі.

І. М. Мельник.

ЗАМИКА́ННЯ ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНОГО АЛГОРИ́ТМУ — упорядкована множина співвідношень, що її одержують граничним переходом із співвідношень, які утворюють *обчислювальний алгоритм*. Поняття З. о. а. запровадив акад. АН СРСР С. Л. Соболєв. Нехай потрібно розв'язати рівняння

$$Lu = f, \quad (1)$$

де $u \in U$, $f \in F$; U, F — функціональні простори, а L — оператор, що переводить U в F. Замінимо рівняння (1) наближеним рівнянням

$$L^{(h,q)}u^{(h,q)} = f^{(h,q)}, \quad (2)$$

заданим у скінченновимірному просторі, де $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_k)$ — параметри, що означають якість наближення (розміри сітки, кількість ітерацій, число невідомих, величину допустимої *похибки* обчислення тощо). Нехай u та $u^{(h,q)}$ — розв'язки відповідно рівнянь (1) та (2) і нехай $u^{(h,q)} \to u$ в певній звичайній нормі, коли ці параметри прямують до граничних значень, які, не зменшуючи загальності, можна вважати за такі, що дорівнюють нулеві. Обчисл. алгоритм розв'язування рівняння (2) полягає в послідовному одержанні сукупності співвідношень

$$L_m^{(h,q)}u^{(h,q)} = \varphi_m^{(h,q)}, \ \varphi_m^{(h,q)} = D_m^{(h,q)}f^{(h,q)}, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \ M = M(h, q), \quad (3)$$

в якій $L_M^{(h,q)} = I$ — тотожний оператор. Це означає, що на M-му кроці перетворень (3) одержимо точний розв'язок рівняння (2): $u^{(h,q)} = D_M^{(h,q)}f^{(h,q)}$. Сукупність (3) разом із способом апроксимації (2) і становить обчисл. алгоритм T розв'язування рівняння (1). Нехай можна ввести параметр $z = z(m, h, q)$, монотонно залежний від m і такий, що при фіксованому z, $0 \leqslant z < z_0 = \lim_{h\to\infty} z(M, h, q)$ і якомусь способі прямування до нуля параметрів h співвідношення (3) переходять у

$$L_z^q u^q = \varphi_z^q, \ \varphi_z^q = D_z^q f^{(0,q)}. \quad (4)$$

при цьому $L_{z_0}^q = I$; тоді $u^q = \varphi_{z_0}^q$. Співвідношення (4), якщо вони мають зміст, наз. З. о. а. T. Якщо оператори L_z^q, D_z^q та ф-ція φ_z^q рівномірно за z обмежені в певній звичайній нормі, то вважають, що алгоритм T має **регулярне замикання**. У протилежному випадку вважають, що алгоритм T має нерегулярне замикання (тоді при підвищенні точності дослідження рівняння (1) в реалізації алгоритму T можуть виникнути труднощі, пов'язані або з втратою знаків в обчисленнях, або з виходом за розрядну сітку ЕОМ). Елементи матриць систем типу (2), що виникли з апроксимації задачі матем. аналізу, побудовано здебільшого якимсь регулярним чином. Тому можна припускати, що такі системи з багатьма невідомими можуть інколи за своїми властивостями бути ближчими до свого замикання, ніж до своїх скінченновимірних аналогів. Завдяки цьому властивості обчисл. алгоритмів можна вивчати, досліджуючи властивості їхніх замикань способами й методами матем. аналізу. Приклад З. о. а.: рівняння (1) — *крайова задача* для лінійного звичайного дифер. рівняння 2-го порядку; рівняння (2) — різницева апроксимація рівняння (1) на сітці з кроком h; сукупність (3) — формули прогонки, одержані на основі застосування методу Гаусса до системи (2). Тоді співвідношення (4) є крайовою задачею для системи трьох звичайних нелінійних дифер. рівнянь 1-го порядку, оператори якої факторизують оператор задачі (1).

В. І. Лебедєв.

ЗАОКРУ́ГЛЕННЯ ПО́ХИБКА — *похибка*, яка виникає при реалізації арифметичних операцій на ЦОМ із заокругленням результату до фіксованої кількості розрядів. Розрізняють два режими роботи ЦОМ — з фіксованою комою (ф. к.) і плаваючою комою (п. к.). При обчисленнях з ф. к. кожне число x перебуває в інтервалі $-1 \leqslant x \leqslant 1$, до якого початкові числа зводяться масштабуванням. При обчисленнях з п. к. кожне число x подають у вигляді $x = 2^b \cdot a$, де b — ціле додатне або від'ємне число, яке наз. порядком, і a (мантиса) — число, яке задовольняє одну з нерівностей: $-1 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Припускають, що обчисл. машини оперують з числами, які мають у p-му (для простоти обмежимося $p = 2$) представлені τ розрядів після коми у випадку ф. к. і τ розрядів у мантисі у випадку п. к.; такі числа називатимемо **стандартними**. Рівність виду $z = fl(x \overset{\pm}{\underset{:}{\times}} y)$ означає, що x, y та z — стандартні числа з ф. к. і що z одержано з x і y виконанням відповідної операції з ф. к. В цьому разі З. п. зумовлюватимуться тільки множенням і діленням. Припускають, що процес заокруглення такий, що $z = fl(x \overset{\times}{:} y) \equiv x \overset{\times}{:} y + \varepsilon$, де $|\varepsilon| \leqslant 2^{-\tau-1}$. Багато які ЦОМ у режимі ф. к. дають можливість точно обчислювати скалярний добуток $x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n$ без спец. програмування (якщо тільки не відбувається переповнення). В заг. випадку точне представлення такої суми вимагає 2τ розрядів після двійкової коми. Запис $z = fl_2(x_1 \times y_1 + \ldots + x_n \times y_n)$ означає, що z — число, одержане точним нагромадженням скалярного добутку і наступним заокругленням результату, на відміну від запису $z = fl_1 (x_1 \times$

$\times y_1 + \ldots + x_n \times y_n)$, який означає заокруглення на кожному кроці. Тоді $z = fl_2(x_1 \times y_1 + \ldots + x_n \times y_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \varepsilon$, де $|\varepsilon| \leqslant 2^{-\tau-1}$ на відміну від заокруглення на кожному кроці, коли $|\varepsilon| \leqslant n \cdot 2^{-\tau-1}$.

У режимі п. к. рівність $z = fl(x \overset{\pm}{\underset{:}{\times}} y)$ означає, що x, y і z — стандартні числа з п. к. і що z одержано з x і y виконанням відповідної операції з п. к. З. п. в цих операціях припускають такими, що

$$z = fl(x \overset{+}{\underset{:}{\overset{-}{\times}}} y) \equiv (x \overset{+}{\underset{:}{\overset{-}{\times}}} y)(1 + \varepsilon), \quad (1)$$

де ε — відносна похибка і $|\varepsilon| \leqslant 2^{-\tau}$. Найрізноманітніші результати, які мають місце в режимі п. к., прямо випливають із співвідношень (1), що їх застосування приводить до оцінок виду $(1 - 2^{-\tau})^r \leqslant 1 + \varepsilon \leqslant (1 + 2^{-\tau})^r$; їх можна спростити, припустивши, що виконується умова $r \cdot 2^{-\tau} < 01$ (це цілком виправдано в практичних застосуваннях для будь-якого прийнятого τ). Тоді

$$(1 + 2^{-\tau})^r < 1 + 1{,}06 \cdot r \cdot 2^{-\tau},\ (1 - 2^{-\tau})^r > 1 - 1{,}06 \cdot r \cdot 2^{-\tau} \text{ і } 1 - 1{,}06 \cdot r \cdot 2^{-\tau} < 1 + \varepsilon < 1 + 1{,}06 \cdot r \cdot 2^{-\tau},$$

звідки $|\varepsilon| < 1{,}06 \cdot r \cdot 2^{-\tau}$. Останнє співвідношення використовують у всіх таких оцінках:

1) $$fl(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i (1 + \mathrm{E}),$$

де $$|\mathrm{E}| < (n - 1) \cdot 1{,}06 \cdot 2^{-\tau},$$

2) $$fl(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \equiv x_1(1 + \varepsilon_1) + x_2(1 + \varepsilon_2) + \cdots + x_n(1 + \varepsilon_n),$$

де $|\varepsilon_1| < (n - 1) \cdot 1{,}06 \cdot 2^{-\tau}$, $|\varepsilon_r| < (n - r + 1) \times 1{,}06 \cdot 2^{-\tau}$, $r = 2, \ldots, n$; тут припускалося, що $S_2 = fl(x_1 + x_2)$. $S_r = fl(S_{r-1} + x_r)$, $r = 3, \ldots, n$; 3) $fl(x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \cdots + x_n \times y_n) = x_1 y_1 (1 + \varepsilon_1) + \cdots + x_n y_n (1 + \varepsilon_n)$,

де $|\varepsilon_1| < n \cdot 1{,}06 \cdot 2^{-\tau}$, $|\varepsilon_r| < (n - r + 2) \times 1{,}06 \cdot 2^{-\tau}$, $r = 2, \ldots, n$;

4) $$fl\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n}\right) \equiv \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} \times (1 + \mathrm{E}),$$

де $|\mathrm{E}| < (m + n - 1)\, 1{,}06 \cdot 2^{-\tau}$.

Для операцій додавання й множення, які реалізують на ЦОМ у режимі п. к., справджуються нерівності $|fl(\alpha \times x_1) - fl(\alpha \times x_2)| \leqslant 2|\alpha| \cdot |x_1 - x_2|$, $|fl(\alpha + x_1) - fl(\alpha + x_2)| \leqslant l|x_1 - x_2|$. Стала l залежить від співвідношення порядків доданків і способу заокруглювання, зафіксованого в машині. Можна підібрати спосіб записування та заокруглювання такі, що $l = 2$. На основі зазначених результатів можна одержати мажорантні оцінки З. п. для багатьох обчисл. алгоритмів розв'язування прикладних задач (див. *Похибок обчислювань теорія*). *Обчислювальні алгоритми*, реалізовані на ЦОМ, наз. р е а л ь н и м и.

Інший підхід до автомат. аналізу й контролю похибок при обчислюванні на ЦОМ грунтується на інтервальному аналізі. Показано, що інтервальна арифметика є засобом для автомат. визначення верхніх границь нагромадженої З. п. при обчислюванні на будь-якій ЦОМ. Слід зазначити, що мажорантні оцінки, хоч їх і широко використовують у практиці обчислень, є характеристикою досить грубою, тому важливим є питання асимптотичного розподілу З. п.

Наведемо кілька результатів асимптотичного розподілу З. п. для перетворення векторів. Нехай в n-вимірному дійсному просторі R задано якусь опуклу однозв'язну замкнену область G, і вектори $z \in G$ — *випадкові величини*, щільність розподілу яких є неперервна функція $P(z)$, причому $P(z \geqslant c) > 0$). Припустимо, що над векторами z здійснюється послідовність $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, k < n$, перетворень, матриці яких мають вигляд $u_r = E - a_r \cdot b_r'$, $r = 1, \ldots, k$, де a_r та b_r' — прямокутні матриці розміром $n \times 1$ (вектор-стовпці), E — одинична матриця, знак штрих означає транспонування. Позначивши через z_r вектор, одержаний з вектора $z \subset G$ після перших r перетворень, одержимо $z_r = z_{r-1} - (b_r z_{r-1})\, a_r$. Реально буде обчислено вектор

$$z_r^{(\tau)} = z_{r-1}^{(\tau)} - (b_r^{(\tau)}, z_{r-1}^{(\tau)})\, a_r^{(\tau)} + \varepsilon_r^{(\tau)} = u_r^{(\tau)} z_{r-1}^{(\tau)} + \varepsilon_r^{(\tau)} = u_r^{(\tau)} u_{r-1}^{(\tau)} \ldots u_1^{(\tau)} (z + \varepsilon_0^{(\tau)} + u_1^{(\tau)-1} \varepsilon_1^{(\tau)} + u_1^{(\tau)-1} u_2^{(\tau)-1} \varepsilon_2^{(\tau)} + \cdots + u_1^{(\tau)-1} u_2^{(\tau)-1} \ldots u_r^{(\tau)-1} \varepsilon_r^{(\tau)}),$$

де $u_r^{(\tau)} = E - a_r^{(\tau)} b_r^{(\tau)}$, $\varepsilon_0^{(\tau)}$ — похибка одержана від заокруглення компонент вектора z до τ знаків після коми, $\varepsilon_r^{(\tau)}$ — похибка, внесена на r-му кроці внаслідок неточної реалізації ф-ли обчислення z_r. З цієї ф-ли випливає, що вектор $z_r^{(\tau)}$ можна розглядати як результат точного перетворення вектора, який стоїть у круглих дужках. Цей вектор відрізняється від вектора z на величину

$\eta_r^{(\tau)} = \varepsilon_0^{(\tau)} + u_1^{(\tau)^{-1}} \varepsilon_1^{(\tau)} + \ldots + u_1^{(\tau)^{-1}} u_2^{(\tau)^{-1}} \ldots u_r^{(\tau)^{-1}} \varepsilon_r^{(\tau)}$, яку називають еквівалентним збуренням і розглядають як ф-цію випадкового аргументу z. Припустимо, що при обчислюванні $z_r^{(\tau)}$ скалярний добуток обчислюється в режимі нагромадження. Тоді $\varepsilon_r^{(\tau)} = \delta_r^{(\tau)} a_r^{(\tau)} + \sigma_r^{(\tau)}$, де $\delta_r^{(\tau)}$ — похибка від заокруглення скалярного добутку $(b_r^{(\tau)}, z_{r-1}^{(\tau)})$, а $\sigma_r^{(\tau)}$ — похибка від заокруглення добутку заокругленого скалярного добутку на вектор $a_r^{(\tau)}$, і $\eta_r^{(\tau)} = \varkappa_r^{(\tau)} + \nu_r^{(\tau)}$,

де

$$\varkappa_r^{(\tau)} = \varepsilon_0^{(\tau)} + u_1^{(\tau)^{-1}} \delta_1^{(\tau)} a_1^{(\tau)} + \cdots + u_1^{(\tau)^{-1}} u_2^{(\tau)^{-1}} \ldots \ldots u_r^{(\tau)^{-1}} \delta_r^{(\tau)} a_r^{(\tau)}; \; \nu_r^{(\tau)} = u_1^{(\tau)^{-1}} \sigma_1^{(\tau)} + \cdots + u_1^{(\tau)^{-1}} u_2^{(\tau)^{-1}} \ldots u_r^{(\tau)^{-1}} \sigma_r^{(\tau)}.$$

Щодо всіх похибок, які виникають при лінійних перетвореннях, справджується у випадку ф. к. таке твердження: всі похибки, що виникають при лінійних перетвореннях векторів, асимптотично незалежні між собою й розподілені рівномірно майже для всіх матриць перетворення виду $E - ab'$ при будь-якому розподілі вхідних даних, який має відмінну від 0 майже всюди неперервну щільність розподілу.

Більшість сформульованих результатів переноситься на обчислення з п. к., але тут мають місце й деякі особливості. Як зазначено вище, в режимі ф. к. З. п. визначаються переважно похибкою множення, яка асимптотично розподілена рівномірно й симетрично відносно 0. Симетрія похибки відносно 0 дає змогу одержати ймовірнісні оцінки для норм еквівалентного збурення значно кращі за мажорантні. Щодо додавання в режимі п. к. мають місце такі твердження: при будь-якому закріпленому способі заокруглювання, визначуваному лише відкинутими розрядами, похибка при додаванні випадкових чисел у режимі п. к. матиме систематичне зміщення при будь-якій *системі числення* з парною основою; класичний спосіб заокруглювання у будь-якій системі з непарною основою асимптотично приводить до незміщених похибок для додавання в режимі п. к. Отже, в обчисленнях з п. к. різні системи числення нерівноправні з погляду «якості» З. п.

Літ.: Воеводин В. В. Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М., 1969 [бібліогр. с. 148—153]; Wilkinson J. H. Rounding errors in algebraic processes. London, 1963; Moore R. E. Interval analysis. Englewood Cliffs — New - York, 1966. *М. Д. Бабич.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ — елемент автоматичних та обчислювальних пристроїв, який набуває різних станів, які характеризуються значеннями величин, що відображають інформацію, і зберігає ці стани певний час для дальшого використовування в процесі переробки інформації.

Відповідно до форми представлення інформації З. е. можуть бути аналоговими й цифровими. Аналоговий З. е. набуває довільного стану в певному діапазоні запам'ятовуваних величин, напр., напруги на обкладках конденсатора, залишкової індукції магн. матеріалу тощо. Цифрові З. е. набувають фіксованої кількості станів, кожний з яких ставиться у відповідність певній цифрі. В *обчислювальній техніці* найпоширенішими є елементи з двома стійкими станами для представлення розряду двійкового числа — *біта*. З. е. застосовують переважно для побудови логіч. кіл та *регістрів* як складових частин *процесорів* машини *(тригер)* і побудови *запам'ятовувальних пристроїв* (ЗП).

За фіз. структурою З. е. для ЗП бувають дискретними або входять до складу запам'ятовувальних середовищ. Дискретні З. е. являють собою автономні фіз. одиниці *(кріотрон, трансфлюксор)*, які конструктивно можна об'єднати в *комірки запам'ятовувального пристрою* або *матрицю запам'ятовувальну* чи виготовити як складову частину матриці методами групової технології (*матриця феритова багатоотвірна*, тонкоплівкова матриця). Запам'ятовувальні середовища відзначаються тим, що всі їхні ділянки мають рівноцінні властивості. За З. е. правлять ділянки, локалізовані за допомогою засобів зчитування — записування в просторі (*стрічки магнітні*, циліндричні тонкі магн. плівки) або в просторі й часі (магнітострикційні, акустичні ЗП).

За стійкістю зберігання інформації розрізняють З. е. стійкі, тобто такі, які зберігають інформацію довільний час у процесі нормальної експлуатації (ферит з прямокутною петлею гістерезису, сегнетоелектрик) і нестійкі — з самовільним стиранням інформації (конденсаторні ЗП, ЗП на електроннопроменевих трубках). В останньому випадку інформацію треба періодично відновлювати. Найпоширенішими є стійкі З. е. Серед них розрізняють З. е., які зберігають записану інформацію при відмиканні живлення (магнітні елементи), і які не зберігають її (тригер, тунельний *діод напівпровідниковий*). Окрему групу становлять З. е. зі зчитуванням без руйнування інформації, стан яких не змінюється при багаторазовому зчитуванні. Частина З. е. цієї групи допускає зміну інформації в процесі роботи (*біакс*, трансфлюксор, кріотрон, *диски магнітні*, магн. стрічки та ін.); їх широко застосовують для побудови адресних ЗП та *запам'ятовувальних пристроїв асоціативних*. Друга частина цієї групи З. е. допускає одноразове записування інформації, виконуване, як правило, під час виготовлення нагромаджувача встановленням елементів зв'язку (діодних, резистивних, індуктивних) у запам'ятовувальну матрицю, засвічуванням або перфорацією певних ділянок носія (оптичні ЗП, перфоровані носії) та ін. способами. Виготовлений один раз набір таких З. е. надалі використовують лише для зчитування з нього інформації й широко застосовують у *довгочасних запам'ятовувальних пристроях*.

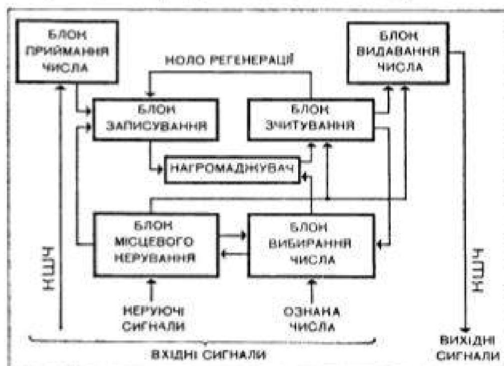
Для побудови нагромаджувачів ЗП використовують З. е. з різними принципами роботи (від електромеханічних і пневматичних до електромагнітних та оптичних). Основними напрямами розвитку З. е. є підвищування швидкостей записування й зчитування інформації та поліпшування технологічності виготовлення З. е. в умовах масового виробництва. В обчисл. машинах найчастіше застосовують магнітні З. е. Так, більшість зовнішніх ЗП виконано на носіях з магнітним покриттям (*барабани магнітні*, магн. диски та стрічки). Виготовляючи швидкодіючі *оперативні запам'ятовувальні пристрої*, використовують феритові З. е. (феритові осердя з зовн. діаметром 0,3—2 *мм* і часом перемикання 0,2—0,4 *мксек*). Щоб збільшити швидкість роботи ЗП, застосовують З. е. на циліндричних і плоских тонких магн. плівках з часом перемикання від одиниць до десятків наносекунд. Збільшення швидкості й щільності записування інформації та поліпшення технологічності виробництва ЗП досягають, застосовуючи напівпровідникові матриці в інтегральному виконанні та оптичні ЗП з використанням лазерного променя. *Ф. Н. Зиков.*

ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ — пристрій, що виконує функції приймання, зберігання та видавання закодованої інформації в системах і машинах, призначених для передавання й обробки її.

Перші тех. пристрої зберігання дискретної інформації застосовували ще в 19 ст.: телеграфну стрічку при прийманні на апараті Морзе можна розглядати як засіб зберігання інформації. Згодом було розроблено систему автоматичного телеграфування, при якій спочатку заготовляють стрічку, перфоруючи її, а потім швидко передають заготовлену на *перфораційній стрічці* телеграму за допомогою трансмітера. Подібні ЗП на перфострічках і досі широко застосовують в *обчислювальній техніці*. Необхідність підвищити швидкість і надійність передач у техніці зв'язку привела до створення ЗП з використанням запису на магнітній стрічці, які набули поширення і в зв'язку зі створенням верстатів з програмним керуванням. З розвитком обчисл. техніки, яка спочатку використовувала наявні пристрої зберігання інформації (*перфораційні карти*, перфострічки, *стрічки магнітні*, електромех. реле тощо), почали розробляти ЗП з автомат. занесенням і видаванням інформації за адресою, що є закодованим номером запам'ятовувальної комірки, за дуже короткий час — від сотень до одиниць мікросекунд і менше. При цьому обсяг збережуваної інформації становить десятки й сотні тисяч слів (чисел). Так з'явилися ЗП на ультраакустичних лініях затримки, на електроннопроменевих трубках, а згодом на феритових осердях з прямокутною петлею гістерезису, феромагнітних плівках тощо. Розширення асортименту і якісних показників ЗП, розроблених для потреб обчисл. техніки, привело до інтенсивного впровадження ЗП як автономного пристрою в інших галузях техніки (зв'язок, автомат. керування, вимірювання тощо) і підвищення їхнього тех. рівня.

Осн. показниками ЗП є: *запам'ятовувального пристрою ємність*; швидкодія, яка характеризується часом звертання до ЗП; надійність роботи, що визначається нечутливістю до змін умов навколишнього середовища та напруги живлення; економічність, яка характеризується відношенням витрат на виготовлення ЗП до ємності ЗП.

Вимоги обчисл. техніки до ЗП щодо підвищення швидкодії та ємності при мінім.



Блок-схема запам'ятовувального пристрою.

витратах мають суперечливий характер і, як правило, поєднати їх в одному пристрої не вдається. Пошуки приводять до використання багаторівневої пам'яті — ієрархії ЗП, в яку включають ЗП різних пристроїв і застосовують їх так, щоб можна було звести до мінімуму їхні вади й максимально використати переваги.

Розрізняють ЗП таких типів: за характером звертання до ЗП — *запам'ятовувальний пристрій адресний* і *запам'ятовувальний пристрій асоціативний* (у першому звертання провадиться до комірки, номер якої містить код адреси, тобто за адресою, у другому — за деякою інформацією, яка міститься в самому слові, числі, тобто за змістом); за способом вибирання інформації з окремих комірок — *запам'ятовувальні пристрої з довільним звертанням*, *запам'ятовувальні пристрої з послідовним звертанням* і запам'ятовувальні пристрої з циклічним звертанням (останні два типи, як правило, пов'язані з застосуванням нагромаджувача з переміщенням інформації щодо її носія — різні лінії затримки, з переміщенням носія відносно засобів зчитування — стрічки, карти, барабан і т. п. або з необхідністю періодично відновлювати інформацію — електроннопроменеві трубки); за функціональним призначенням — *оперативні запам'ятовувальні пристрої*, що безпосередньо зв'язані з арифм. пристроєм, їх використовують для запам'ятовування проміжних результатів обчислення та інформації з зовнішнього ЗП для поточних обчислень; *довгочасні запам'ятовувальні пристрої*, які застосовують для тривалого зберігання незмінної в про-

цесі роботи ЦОМ інформації (програми, константи), звичайно записуваної поза машиною; *запам'ятовувальні пристрої зовнішні*, які призначені для зберігання всієї інформації, яку вводять у машину, відзначаються великою ємністю при порівняно невеликій швидкодії; *запам'ятовувальні пристрої буферні* — для узгодження швидкостей роботи окремих пристроїв в ЦОМ або зовн. об'єктів між собою та ЦОМ; і як різновид буферних ЗП — *запам'ятовувальні пристрої магазинні*, або стекові,— для узгодження швидкостей арифмет. пристрою та оперативного ЗП.

Незважаючи на різноманітність типів ЗП, їхні функціональні особливості можна відобразити узагальненою блок-схемою (див. мал.), яка включає такі блоки: 1) *нагромаджувач* — призначений безпосередньо для зберігання закодованої інформації; 2) блок приймання числа — призначений для приймання і, в разі потреби, короткочасного зберігання коду числа; 3) блок записування — перетворює код числа на сигнали, здатні викликати відповідні зміни в стані запам'ятовувального середовища нагромаджувача; 4) блок вибирання — використовується для перетворення ознаки числа на сигнал зчитування його з нагромаджувача; 5) блок зчитування — перетворює сигнали нагромаджувача на сигнали, стандартні для машини; 6) блок видавання числа — призначений для короткочасного зберігання коду числа; 7) блок місцевого керування — перетворює керуючий сигнал звертання до запам'ятовувального пристрою на послідовність сигналів, які керують роботою блоків ЗП. Залежно від типу ЗП чи принципів його побудови можуть бути й відхилення від наведеної схеми. Так, напр., у швидкодіючих ЗП іноді доцільно не застосовувати блоків приймання чи видавання числа, в довгочасних ЗП немає блока записування тощо. ЗП працює в режимі зчитування певного числа або в режимі записування. Записується число поданням до ЗП по кодових *шинах* числа (КШЧ) коду числа, керуючого сигналу в блок місцевого керування й ознаки числа, що здебільшого є кодом адреси запам'ятовувальної комірки, в яку треба записати число. Координати цієї комірки знаходить блок вибирання числа методом розшифровування коду адреси, порівнянням коду заданої адреси з кодом номера комірки або виробленням ознаки вільної комірки. Цей же самий блок очищає комірку і — разом з блоком записування — записує код числа в нагромаджувачі. Зчитування відрізняється від записування тим, що код числа, зчитаний з комірки, передається через блок зчитування в блок видавання і, в разі потреби, в блок записування для відновлення зруйнованої при зчитуванні інформації. Фіз. адресу комірки знаходять або за кодом адреси, або за іншими ознаками, що є найчастіше кодом числа або його частиною — у випадку асоціативних ЗП.

Розвиток ЗП йде шляхом створення високоекономічних, надійних малогабаритних пристроїв великої швидкодії та ємності. Звичайно, всі ці якості не поєднуються в одному ЗП. Наприкінці 60-х років виконувалися роботи щодо створення ЗП з матрицями на монолітних *інтегральних схемах* ємністю від 12 до 400 тис. *біт* з циклом 50 ÷ 200 *нсек*. Розробляють ЗП на тонких феромагнітних плівках (плоских і циліндричних) ємністю від 25 тис. до 200 млн. *біт* з часом звертання 75 *нсек* ÷ 1 *мксек*. Розроблено зовнішні запам'ятовувальні пристрої на *дисках магнітних* з плаваючими головками ємністю до 10 мільярдів *біт*.

Літ.: Крайзмер Л. П. Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства. М.— Л., 1964 [бібліогр. с. 349—371]; Китович В. В. Оперативные запоминающие устройства на ферритовых сердечниках и тонких магнитных пленках. М.— Л., 1965 [бібліогр. с. 233—236]; Запоминающие устройства современных ЭЦВМ. Пер. с англ. М., 1968.

Ф. Н. Зиков.

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ АДРЕСНИЙ — запам'ятовувальний пристрій, у якому запам'ятовувальні комірки або групи їх мають певний машинний номер (адресу), що відповідає їхньому розміщенню в запам'ятовувальному середовищі, а звертання до певної ділянки цього середовища провадиться відповідно до коду його адреси. При адресному звертанні код адреси точно вказує часово-просторові координати тієї частини запам'ятовувального середовища, в якій міститься інформація з цією адресою (або до якої треба записати її).

Характерною особливістю З. п. а. є наявність у них блока перетворювання коду адреси на сигнали вибирання. Цей блок виконують по-різному залежно від типу *нагромаджувача*. Якщо носій інформації переміщується відносно засобів зчитування або інформація переміщується відносно носія, то З. п. а. наз. циклічним, або з послідовним вибиранням. ЗП з дискретними *запам'ятовувальними елементами*, до яких доступ здійснюється за допомогою т. з. ліній вибирання, наз. *запам'ятовувальними пристроями з довільним звертанням*. У ЗП з запам'ятовувальними елементами записану в нагромаджувачі інформацію супроводжує особлива мітка — *маркер* (нагромаджувач на магнітному барабані) або свій номер (нагромаджувач на магн. стрічці). Момент вибирання інформації визначається збігом числового значення коду адреси з номером, який супроводить інформацію, що переміщується відносно засобів зчитування, або рівністю його значенню числа, яке є результатом підсумовування маркерних імпульсів. У ЗП з довільним звертанням код адреси за допомогою дешифраторів і формувальних пристроїв перетворюється на сигнали вибирання в певних лініях вибирання, які називають адресними. Т. ч., адресні лінії визначають фіз. адресу запам'ятовувальної комірки, призначеної для зберігання певного слова. Для записування коду слова до запам'ятовувальної комірки використовують розрядні лінії, що об'єднують елементи нагромаджувача, які належать до одного розряду. По розрядних лініях подаються сигнали,

що відповідають записуваному кодові. Вони ж призначені й для виведення інформації.

Щоб зменшити кількість обладнання, лінії вибирання проводять у кількох вимірах — по кількох координатах. Відповідні лінії по кожній координаті збуджуються згідно з заданим кодом, а запам'ятовувальні елементи, що їх вибирають, визначаються збігом збуджених ліній.

Здебільшого застосовують дво- й трикоординатні системи вибирання. В двокоординатній (двовимірній) системі адресні лінії, які в цій системі називають числовими, керуються по одній координаті й кожна з них проходить через одну запам'ятовувальну комірку. Керування по 2-й координаті здійснюється розрядними лініями. В трикоординатній (тривимірній) системі адресними лініями керують по двох координатах. Розміщення вибираного слова визначається перетином адресних ліній, а розряди слова — розрядними лініями по 3-й координаті. Під час зчитування інформації запам'ятовувальні елементи можуть зберігати свій стан, встановлений внаслідок записування. Це ЗП з неруйнівним зчитуванням. Якщо ж при зчитуванні запам'ятовувальні елементи свого стану не зберігають, а встановлюються в певний початковий стан, то такий ЗП наз. ЗП з руйнівним зчитуванням. Саме запам'ятовувальні елементи насамперед визначають тех. характеристики ЗП. Тому в назві ЗП звичайно є й інформація про використовувані запам'ятовувальні елементи: нагромаджувач на магн. стрічці чи на магн. барабані, дисковий ЗП, ЗП на феритах, на тонких плівках тощо. Здебільшого в З. п. а. використовують порівняно прості запам'ятовувальні елементи з руйнівним зчитуванням.

ЗП якого-небудь одного типу, як правило, не може мати характеристик, які задовольняли б усі вимоги до цих пристроїв при використанні їх у системах перетворювання дискретної інформації. Напр., збільшити швидкодію ЗП можна лише за певного зменшення його ємності. Тому здебільшого ЗП в ЦОМ створюють певну ієрархічну структуру, на верхніх ступенях якої містяться ЗП з великою швидкодією й порівняно малою ємністю, а на нижніх — повільнодіючі ЗП великої ємності. Залежно від класу ЦОМ таких ступенів у них буває 2—4, а в обчислювальних системах — до 6—7.

Літ.: Гутенмахер Л. И. Электронные информационно-логические машины. М., 1962 [бібліогр. с. 198]; Крайзмер Л. П. Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства. М.— Л., 1964 [бібліогр. с. 349—371].

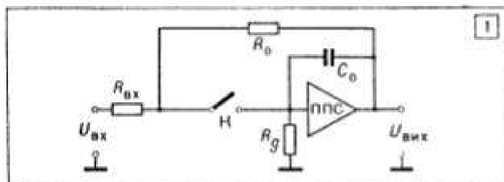
Ф. Н. Зиков.

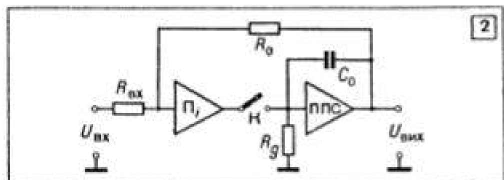
ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ АОМ (ЗП АОМ) — комплекс технічних засобів аналогової обчислювальної машини для запам'ятовування та відтворювання машинних змінних. ЗП АОМ бувають електромех., ємнісні (конденсаторні) та ЗП з магнітними носіями запису інформації.

В електромеханічних ЗП АОМ використовують *подільники напруги* (потенціометри), в яких запам'ятовуваним напругам відповідають положення рухомого контакта (повзуна). Щоб привести в дію повзун подільника, застосовують неперервні слідкуючі системи та реверсивний кроковий двигун, який забезпечує тривале незмінне положення повзуна, коли немає імпульсів керування. З'єднання приводного двигуна слідкуючої системи з веденими осями потенціометрів здійснюється за сигналами керування через електромагнітні муфти. Для електромех. ЗП характерними є велика точність введення — виведення запам'ятовуваної інформації (близько сотих часток процента) й практично необмежений час запам'ятовування, якщо апаратуру відімкнено від джерел живлення. Такі ЗП з'єднують з АОМ, підмикаючи подільники напруги до розв'язувальних кіл без проміжних перетворювачів. Осн. вади цих ЗП — мала швидкодія та порівняно велика витрата апаратури на одиницю збережуваної інформації.

Найчастіше застосовують ємнісні ЗП, в яких використовують властивість конденсатора зберігати подану на нього напругу. Конденсаторні комірки пам'яті підмикають до розв'язувальних кіл АОМ через електромеханічні (релейні) або електронні комутатори. Щоб запобігти спотворюванню збережуваної інформації, внаслідок розряджання конденсаторів на зовн. навантаження, в ЗП АОМ вводять розв'язуючі електронні підсилювачі (повторювачі) з великим вхідним і невеликим вихідним опорами. Для цього використовують розв'язувальні підсилювачі постійного струму (ППС). Комірки ЗП АОМ показано на мал. 1. Час зберігання конденсатором напруги $U_{\text{вих}}$ (ключ К розімкнено) забезпечується в цій схемі за рахунок значної величини сталої часу розряду, яка дорівнює $T_{\text{р}} = C_0 R_g (1 + k)$, де k — коеф. підсилення ППС без *зворотного зв'язку*. Час запам'ятовування напруги $U_{\text{вх}}$ залежить від сталої часу заряджання конденсатора $T_{\text{з}} = C_0 R_0$, він обмежує швидкодію й точність роботи схеми. Введення підсилювача струму (повторювача) Π_i з коеф. підсилення за струмом k_i (мал. 2) зменшує сталу часу заряджання $T_{\text{з}}$ і, отже,— час заряджання конденсатора в k_i разів, не знижуючи точності роботи схеми в режимі запам'ятовування й не зменшуючи часу зберігання. Така схема може забезпечити тривалість часу приймання інформації в кілька десятків *мксек* при похибці порядку десятих часток процента й тривалості часу зберігання порядку кількох десятків *сек*. Заг. вадою конденсаторних ЗП є обмежений час зберігання інформації та відносно велика витрата апаратури на одиницю інформації, яку зберігають. Інформаційну ємність комірки ЗП АОМ у двійкових одиницях (*бітах*) можна оцінити за формулою $C_0 = \log_2 1/\delta$, де δ — відносна похибка відтворення величини напруги, яку зберігають. Напр., коли $\delta = 0{,}1\%$, $1/\delta = 10^3$ і $C = 10$ двійкових одиниць.

У ЗП АОМ з **магнітним носієм запису інформації** використовують властивості феромагнетику з прямокутною петлею гістерезису зберігати стан намагніченості, що залежить від запам'ятовуваного електричного сигналу. У ЗП, призначених для запам'ятовування окремих рівнів напруги без проміжного перетворення (модуляції), застосовують феритові осердя. Запам'ятовування на таких елементах здійснюється безпосереднім перетворенням напруг постійного струму на пропорційні прирощування залиш-





1. Комірка пам'яті запам'ятовувального пристрою АОМ.
2. Комірка пам'яті запам'ятовувального пристрою АОМ з підсилювачем струму.

кового магнітного потоку осердя, а зчитувані електр. сигнали пропорційні рівневі залишкової намагніченості осердя. Найменша похибка при запам'ятовуванні та зчитуванні в елементах з тороїдними осердями становить одиниці процентів. Похибки елементів пам'яті, побудованих на осердях з розгалуженими магнітопроводами (трансфлюксорах) із застосуванням схем зворотних зв'язків, становлять десяті частки процента.

ЗП АОМ на трансфлюксорах і тороїдних осердях з використанням методу ідеального намагнічування й негативних зворотних зв'язків характеризуються порівняно невеликою швидкодією: тривалість часу приймання інформації становить десяті частки — одиниці *сек*. Істотного збільшення точності та ємності ЗП АОМ на магнітних носіях досягають за рахунок проміжного перетворення запам'ятовуваних сигналів за допомогою модуляції й демодуляції. Перетворення за системою двійкової кодово-імпульсної модуляції забезпечує можливість використовувати комплекс запам'ятовувальних елементів, які застосовують у цифровій обчисл. техніці: магнітні стрічки, диски, барабани, феритові матриці. Похибки таких ЗП становлять десяті й соті частки процентів, а їхня швидкодія забезпечує запам'ятовування й відтворювання сигналів з багаторазовим транспонуванням спектра сигналів у ділянку високих частот, що дає змогу використати в АОМ ЗП з швидкою періодизацією розв'язування. В спеціалізованих АОМ широко застосовують ЗП на магнітній стрічці (напр., для статистичної обробки інформації), в яких запам'ятовувані сигнали спочатку перетворюють за допомогою якогось виду модуляції. Похибки цих ЗП становлять здебільшого десяті частки процента.

Літ.: Верлань А. Ф. Запоминающее устройство для электронных моделей. «Автоматика и приборостроение», 1963, № 3; Зинкевич В. П. Идеальное намагничивание ферритовых сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса, используемых в качестве элементов аналоговой памяти. В кн.: Вопросы технической кибернетики. М., 1966; Розенблат М. А. Магнитная память для непрерывных величин. «Вестник АН СССР», 1964, № 11; Ламин Е. И. О квантовании информации в запоминающих устройствах аналоговой вычислительной машины. В кн.: Средства аналоговой и аналого-цифровой вычислительной техники. М., 1968. *Є. І. Ламін.*

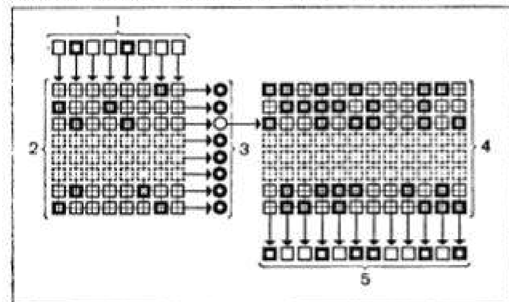
ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ АСОЦІАТИ́ВНИЙ — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), інформацію з якого видобувають не за адресою, а за певними ознаками цієї інформації внаслідок одночасного порівнювання всіх або групи збережуваних слів з заданою ознакою. Ознаку, що належить слову в пам'яті, називають асоціативною, а ознаку, за якою провадиться пошук,— ознакою опиту (див. мал.). Принципи побудови З. п. а. визначаються видом пошуку інформації — простим чи складним. Простий пошук полягає у відшукуванні слова, асоціативна ознака якого збігається з ознакою опиту. Під складним пошуком розуміють відшукування екстремуму всіх чисел у середині або поза заданими межами, чисел, які дорівнюють заданому або більші за нього, дорівнюють заданому або менші за нього, найближчих більших, найближчих менших і т. д. Якщо при простому пошуку ознаці опиту завжди відповідає тільки одне слово в пам'яті, причому опит завжди ведеться за тими самими розрядами, то такий пошук може здійснювати найпростіший З. п. а. Конструкція З. п. а. ускладнюється, якщо опит ведеться за будь-якими розрядами й якщо ознаці опиту відповідає одночасно кілька слів. Поділ багатозначної відповіді й послідовне видобування слів провадяться або апаратурними методами, або алгоритмічними. Можливе й упорядковане видобування слів у порядку зростання або спадання їхніх величин.

Складний пошук можна здійснити в З. п. а., призначеному для простого пошуку з алгоритм. поділом багатозначної відповіді. Якщо в кожну запам'ятовувальну комірку такого ЗП ввести ще додаткові логічні, арифм. й *запам'ятовувальні елементи* й забезпечити відповідні сполучення між ними не лише в межах запам'ятовувальної комірки, а й з сусідніми комірками, то, крім асоціативного пошуку, стане можливим здійснювати й групові арифм. та логіч. операції.

Одночасний перегляд усієї інформації в З. п. а. потребує застосування запам'ятовувальних елементів з неруйнівним зчитуванням, які реалізують логічні функції типу рівнозначності чи нерівнозначності. Найповніше ці вимоги задовольняють кріотрони (див. *Кріогенні елементи обчислювальної тех-*

ніки), але можна створювати З. п. а. й на ін. елементах — багатоотвірних феритових осердях, біаксах, тунельних діодах, магнітних плівках і транзисторних елементах.

Ємність розроблених З. п. а.— кілька тисяч слів з циклом звернення — від часток до одиниць мікросекунд. Через недостатню ємність З. п. а. їх використовують у сучасних машинах переважно як буферні ЗП. Вважають, що для того, щоб З. п. а. можна було використовувати як основний ЗП машини, треба, щоб він мав ємність $10^7 \div 10^8$ *біт*. Таке застосування З. п. а. привело б до суттєвого спрощення організації обчисл. процесу й наблизило б його до звичайної мови матем. формул. З. п. а. ефективні при розв'язуванні інформаційно-довідкових завдань, завдань розпізнавання тощо, коли збережувана інформація чи запити, що надходять, не є суворо впорядкованими й коли єдиним методом пошуку потрібної інформації в адресному ЗП є перебирання, тобто почерговий, слово за словом, перегляд усієї інформації або більшої частини її.



Спрощена блок-схема асоціативного запам'ятовувального пристрою: *1* — ознака опиту; *2* — асоціативні ознаки слів; *3* — індикатори збігу; *4* — основна інформація; *5* — виходи основної інформації.

З. п. а. може дати помітний виграш у продуктивності при розв'язуванні завдань, які потребують опрацьовування в реальному масштабі часу дуже великих масивів невпорядкованої інформації та завдань, пов'язаних, напр., з телеметрією, з роботою систем зв'язку й радіолокаційних систем оповіщання й наведення, а також пов'язаних з керуванням повітряним транспортом тощо.

Літ.: Крайзмер Л. П. [та ін.]. Ассоциативные запоминающие устройства. Л., 1967 [бібліогр. с. 175—181]; Хэнлон Э. Ассоциативные запоминающие устройства. В кн.: Запоминающие устройства современных ЭЦВМ. Пер. с англ. М., 1968.

І. Д. Войтович, Г. А. Михайлов.

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ БУФЕРНИЙ — запам'ятовувальний пристрій для узгодження швидкостей роботи різних пристроїв ЦОМ чи зовнішніх об'єктів між собою та з ЦОМ. Окремі пристрої машини, а також зовнішні пристрої, що використовують різні принципи побудови (від електронних схем до електромеханічних), не можуть працювати з однаковою швидкістю. Щоб запобігти втратам часу через неузгоджену (в часі) роботу пристроїв, застосовують З. п. б., який нагромаджує інформацію в темпі повільнодіючого пристрою й видає її зі швидкістю швидкодіючого пристрою, або навпаки. Для узгодження швидкості роботи зовн. пристроїв з ЦОМ як буферні ЗП найчастіше застосовують ЗП на магнітних барабанах, дисках або на феритах, що обмінюються інформацією з осн. оперативним ЗП (ОЗП) машини. Щоб узгодити швидкість роботи окремих пристроїв машини (здебільшого ОЗП й арифметичного пристрою) як буферні застосовують дужче швидкодіючі ОЗП невеликої ємності та ЗП на тонких магнітних плівках, регістрах різної модифікації тощо. *Ф. Н. Зиков.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ДОВГОЧАСНИЙ — див. *Довгочасний запам'ятовувальний пристрій.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ З ДОВІЛЬНИМ ЗВЕРТАННЯМ — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), в якому час звертання за довільною адресою не залежить від взаємного розміщення запам'ятовувальних комірок у нагромаджувачі. З. п. з д. з., як правило, розробляють на базі *нагромаджувачів*, які за своєю природою не потребують циклічного або послідовного зчитування (записування).

Найхарактернішими рисами З. п. з д. з. є наявність у запам'ятовувальному середовищі ліній вибирання і формувачів сигналів вибирання, які приводяться в дію відповідно до ознаки слова або коду її адреси. Звернення до запам'ятовувальної комірки (див. *Комірка запам'ятовувального пристрою*) здійснюється в них внаслідок збігу ліній вибирання в просторі й сигналів вибирання в них за часом.

Нагромаджувач З. п. з д. з. будують гол. чин. на основі дискретних *запам'ятовувальних елементів*, якими найчастіше бувають феритові осердя, монолітні ферити й феритові пластини та тонкі магнітні плівки й МОН-транзистори (метал — окисел — напівпровідникові транзистори).

В процесі роботи ЦОМ порядок звертання до ЗП звичайно визначається результатами обчислювань на попередньому етапі, тобто не завжди можна використати природний порядок проходження не лише числової інформації, а й команд. За такої організації обчислювального процесу найефективнішим виявляється застосування З. п. з д. з. Тому як ЗП, що працює безпосередньо з *арифметичним пристроєм* або пристроєм керування, використовують, як правило, саме такий ЗП. А в тих випадках, коли з яких-небудь міркувань в оперативному ЗП застосовують нагромаджувач із циклічним вибиранням, роботу його організовують так, щоб за один цикл провадилося вибирання тільки за однією адресою, тобто однакової доступності в цьому випадку досягають за рахунок втрати швидкості. *Ф. Н. Зиков.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ З ПОСЛІДОВНИМ ЗВЕРТАННЯМ — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), в якому записування або зчитування слова (числа) здійснюється послідовно розряд за розрядом.

Послідовне звертання здебільшого зумовлене використанням у ЗП *нагромаджувачів* з переміщуванням носія інформації й засобів зчитування — записування одного відносно одних (нагромаджувачі на картах, стрічках, барабанах, дисках, електроннопроменевих трубках та оптичні) або з переміщенням сигналів, які відображають збережувану інформацію, відносно запам'ятовувального середовища (різні лінії затримки). Здебільшого З. п. з п. з. будують за принципом адресної організації звертання (див. *Запам'ятовувальний пристрій адресний*) — пошук фіз. *адреси* місця розташування інформації провадиться відповідно до *коду* адреси. Для реалізації адресного звертання записувана в нагромаджувач інформація супроводиться особливою міткою — маркером, яка заноситься в нагромаджувач при записуванні інформації (нагромаджувач на магн. стрічці) або попереднім розмічанням (нагромаджувач на магн. барабані). Інформація може супроводитися й своїм номером (розмічання зон у нагромаджувачах на стрічці). Момент знаходження фіз. адреси визначається збігом числового значення коду адреси з номером, що супроводить інформацію, або рівністю цього значення результатові підсумовування маркерних імпульсів.

Оскільки З. п. з п. з. працює в послідовному режимі, а більшість ЦОМ працює в паралельному режимі, то з'являється необхідність узгодити З. п. з п. з. з іншими пристроями ЦОМ. Це завдання розв'язують в основному двома способами: застосовуючи перетворювачі паралельного коду на послідовний і, навпаки, використовуючи кілька (за кількістю розрядів у машинному слові) частин нагромаджувача (доріжка барабана, електроннопроменева трубка тощо), кожна з яких призначена для зберігання одного розряду збережуваних слів. Перший спосіб менш економічний і потребує великих затрат часу на звертання до ЗП. Другий економічніший, але вимагає наявності єдиної синхронізації для всіх частин нагромаджувача й певних співвідношень між ємністю частини нагромаджувача й потрібною ємністю всього ЗП. Можливий і компромісний варіант паралельно-послідовної організації роботи ЗП, при якому маш. слово передається послідовно групами розрядів, а група розрядів — паралельно (напр., у ЗП на магн. барабанах і стрічках). Швидкість роботи З. п. з п. з. визначається способом організації переміщування інформації або засобів зчитування однієї відносно одних (від мех. переміщень у нагромаджувачах на перфострічці до керованих переміщень електронного променя). Найменшу швидкість мають ЗП, що використовують мех. переміщення. Проте такі ЗП поширені завдяки великій ємності й добрим економ. показникам. Практично в складі всіх обчисл. систем є ЗП з великою ємністю, що використовують нагромаджувачі на магн. стрічці, барабані чи дисках. За тех. даними (невелика швидкість, великі ємності) ці пристрої займають місце на нижчому ступені ієрархії ЗП. Поява оптичних ЗП, що характеризуються підвищеними швидкостями, дала змогу використати З. п. з п. з. на вищих ступенях ієрархії. *Ф. Н. Зиков.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ЗОВНІШНІЙ, зовнішній нагромаджувач — запам'ятовувальний пристрій (ЗП) великої ємності, що обмінюється інформацією в ході розв'язування задач з дужче швидкодіючим внутрішнім запам'ятовувальним пристроєм цифрової обчислювальної машини (ЦОМ), напр. з *оперативним запам'ятовувальним пристроєм* (ОЗП). Збільшувати ємність шляхом розширення внутрішніх швидкодіючих ЗП ЦОМ недоцільно з огляду на їхню високу вартість і порівняну тех. складність, тому осн. обсяг інформації доцільно зберігати в З. п. з., у яких вартість зберігання одиниці інформації на один — кілька порядків нижча, ніж в ОЗП. З сучасних тех. засобів записування й зберігання інформації зазначеним вимогам відповідають і широко застосовуються як З. п. з. такі пристрої магнітного записування: *стрічка магнітна* (МС), *барабан магнітний* (МБ), *диск магнітний* (МД) і *карти магнітні* (МК). Ці пристрої належать до групи ЗП з рухомим носієм інформації. Наявність вузлів, що механічно переміщуються,— їхня основна вада. Зате принцип переміщування носія дає змогу (порівняно з нерухомим носієм) значно спростити систему вибирання інформації та, при великих ємностях ЗП, набагато зменшити вартість зберігання одиниці інформації.

В ЗП на МБ і МД носій безперервно обертається (МБ — циліндрична поверхня, МД — плоска поверхня диска). Швидкість переміщування носія — порядку $40 \div 60$ *м/сек*. Спосіб записування — безконтактний, між «плаваючою» магн. головкою (МГ) і носієм є зазор близько $5 \div 10$ *мкм* і $20 \div 30$ *мкм* — між нерухомою МГ і носієм. Наявність зазора забезпечує надійність і довговічність роботи ЗП. У ЗП на МС стрічкопротяжний механізм включається й переміщує стрічку біля блока МГ тільки на час записування (зчитування) інформації. Швидкість переміщування стрічки в робочому режимі — порядку $1 \div 4$ *м/сек*. Спосіб записування, як правило, контактний: стрічка доторкається до блока МГ. В ЗП на МК механізм переміщування карти вузла записування — зчитування перебуває в постійному русі, а комплект карт — у спокої. Під час вибирання карти вона транспортується до вузла записування — зчитування й переміщується біля блока МГ зі швидкістю від 1 до 10 *м/сек* залежно від типу МК. Спосіб записування здебільшого контактний. Такий спосіб записування є однією з вад МС і МК, бо носій і головки швидко спрацьовуються.

Осн. тех. характеристики З. п. з. такі: ємність пристрою — кількість двійкових знаків або символів (певної розрядності), яка одночасно може зберігатись у ЗП; час вибирання — час, потрібний для того, щоб знайти відповідну інформацію; швидкість обміну інформацією — к-сть двій-

кових знаків або символів, переданих або прийнятих З. п. з. за 1 *сек*.

Щодо нагромаджування інформації, то З. п. з. поділяють на ЗП з незмінним носієм або ЗП зі сталою ємністю (сюди належать МБ і МД зі стаціонарними дисками) та ЗП зі змінним носієм (це — МС, МК і МД зі змінними пакетами). ЗП зі змінним носієм інформації дає змогу створювати бібліотеки, картотеки й архіви та зберігати практично необмежені обсяги даних.

За способом вибирання інформації З. п. з. поділяються на ЗП з послідовним вибиранням (сюди належать МС і деякі типи МК) та ЗП з довільним вибиранням (МБ, МД і МК).

Оскільки обмін З. п. з. з ОЗП звичайно здійснюється нормованими порціями — блоками (напр. обсягом, достатнім для заповнення куба ОЗП), поняття «послідовне вибирання» й «довільне вибирання» стосовно до З. п. з. відносять до вибирання блока інформації. При послідовному вибиранні, коли треба знайти заданий блок інформації, послідовно перебирають адреси всіх блоків, аж до моменту збігу поточної адреси з заданою. Для цього способу вибирання характерним є великий діапазон часу вибирання. Для одного й того самого типу пристрою час вибирання може становити від кількох мілісекунд до кількох хвилин. При довільному вибиранні будь-який заданий блок інформації вибирається за сталий проміжок часу. При цьому час вибирання для різних типів З. п. з. — від кількох *мсек* до 0,8 *сек* (див. таблицю).

У великих системах обробки інформації одночасно застосовуються різні типи З. п. з. Поєднування й використовування їхніх особливостей дає змогу найоптимальніше організувати роботу ЗП системи. Напр., великі обсяги інформації вигідно зберігати на МС, а потім передавати інформацію в ЦОМ, спочатку перезаписуючи групу наступних блоків у дужче швидкодіючі ЗП на МБ або МД. Крім розглянутих, є й інші ЗП, що працюють на основі магнітного записування: ЗП на відрізках магнітної стрічки. На поворотній турелі встановлено 64 касети (котушки) з відрізком стрічки завширшки 16 *мм* і завдовжки 9 *м*. Механізм вибирання підводить потрібну касету й витягує з неї відрізок стрічки, який переміщується біля блока МГ. Після закінчення зчитування (записування) відрізок стрічки втягується назад у касету; ЗП із замкнутими петлями магнітних стрічок. У контейнері пристрою вміщено 16 ведучих вузлів, кожен з яких переміщує петлю замкнутої МС. У робочому режимі здійснюється привод лише однієї, вибраної, петлі. Один блок МГ, що переміщується дискретним приводним механізмом, обслуговує всі петлі контейнера; ЗП на великих магнітних картах. У поворотному циліндрич. магазині, що складається з 20 комірок, які також поділено на блоки, де зберігається по 10 карт, міститься 2000 карт. Повертаючи магазин і подаючи по вертикалі відповідний блок, вибрані 10 карт підводять до виконавчого механізму, й він захоплює (за індивідуальний для кожної з 10 карт виступ) потрібну карту й переміщує її біля блока МГ, а після закінчення записування (зчитування) повертає її на своє місце.

Характеристики зовнішніх запам'ятовувальних пристроїв.

Тип ЗП	Ємність, млн. двійкових знаків	Середній час вибирання, *сек*	Швидкість обміну, рядків/*сек*	Швидкість обертання, *об/хв*
Магнітні барабани	0,17—200	0,00125—0,385	$12 \cdot 10^3$—$500 \cdot 10^3$	870—24 000
Магнітні барабани надвеликі	до 7784	0,00125—0,385	$12 \cdot 10^3$—$500 \cdot 10^3$	870—24 000
Магнітні диски	0,6—12 500	0,008—0,8	$60 \cdot 10^3$—$100 \cdot 10^4$	900—2400
Магнітні диски зі змінними пакетами	4—70	0,065—0,5	$60 \cdot 10^3$—$80 \cdot 10^4$	2400
Магнітна стрічка	200—400 (ємність бобіни)	від 10 *сек* до кількох хвилин	$20 \cdot 10^3$—$300 \cdot 10^3$	—
Магнітні карти з довільним вибиранням	5—5400	0,1—0,7	$28 \cdot 10^3$—$100 \cdot 10^3$	—

Провадяться роботи над створенням ЗП за такими перспективними способами як фотооптичний спосіб з високошвидкісним скануванням за допомогою безінерційного оптичного перетворювача; спосіб термопластичного записування з застосуванням лазерної техніки; фероелектричний спосіб записування; магнітне записування з оптичним відтворюванням та ін. Проте на шляху практичної побудови на їхній базі ЗП великої ємності виникає кілька обмежень та істотних тех. труднощів. Для одних, напр., механізм з носієм інформації повинен перебувати у вакуумі, для інших потрібна складна оптична система й наявність точних вузлів мех. переміщування.

Літ.: Каган Б. М., Адасько В. И., Пурэ Р. Р. Запоминающие устройства большой емкости. М., 1968 [бібліогр. с. 314—317]; Макуречкин В. Г. Магнитная запись в вычислительной технике. М., 1968 [бібліогр. с. 166—167]; Хогленд А. Цифровая магнитная запись. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 270—273]. *Р. Я. Черняк.*

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ МАГАЗИННИЙ — запам'ятовувальний пристрій, який складається з кількох, розміщених один під одним регістрів, з'єднаних послідовно, і які працюють таким чином, що тільки верхній регістр має зв'язок з зовнішньою системою. При записуванні *даних* до З. п. м. кожне слово вводиться у верхній *регістр*, «проштовхуючи» вниз вміст усіх регістрів. При читанні слова з З. п. м. зчитується вміст лише верхнього регістру, причому вміст решти регістрів переміщується вгору, заповнюючи звільнене місце. Принцип роботи магазинного

ЗП: «першим до З. п. м.— останнім із З. п. м.». Описаний режим роботи регістрів можна забезпечити апаратним або програмним шляхом. Звичайно цей режим здійснюється не послідовними повторними передачами вмісту регістрів, а переадресацією комірок, які використовують у звичайному ЗП як регістри З. п. м. В цьому випадку адреса останньої зайнятої (чи першої вільної) комірки наз. індикатором З. п. м. і зберігається в певному регістрі чи комірці ЗП.

З. п. м. широко використовують для обробки й теор. дослідження вкладених один в одного процесів (трансляція дужкових записів, обчислювання виразів у бездужковій формі запису, обробка сигналів переривання, адрес повернення, циклів у циклі тощо).

Апаратно реалізований З. п. м. використовують, напр., в обчисл. машинах загального призначення «БЭСМ-6», «*Днепр-2*» та в ряді спеціалізованих машин.

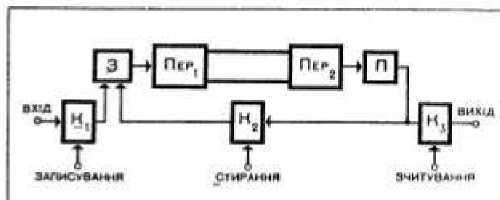
Близький до З. п. м. запам'ятовувальний пристрій **стековий** відрізняється від З. п. м. тим, що в ньому кілька верхніх регістрів (у загальному випадку — всі регістри) мають зв'язок з зовн. системою. Аналіз вмісту цих регістрів може передувати процесові записування й читання у стековому ЗП (який здійснюється так, як і для ЗП магазинного).

І. В. Вельбицький.

ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ НА ЛІНІЯХ ЗАТРИ́МКИ — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), зберігання інформації в якому здійснюється внаслідок циркуляції інформаційних сигналів по замкненому контуру, що містить у собі лінію затримки. Практично запам'ятовування в такому пристрої забезпечується підмиканням виходу лінії затримки через підсилювач на її вхід, і внаслідок цього інформаційні імпульсні сигнали, подані на вхід лінії, можуть циркулювати в ній як завгодно довго. Завдяки властивості ліній затримки передавати сигнали зі входу на вихід із запізненням у часі, яке в багато разів перевищує тривалість сигналів, існує можливість зберігати в такому контурі великий обсяг інформації. Ємність З. п. на л. з. визначається кількістю імпульсів, які можуть одночасно циркулювати в лінії. Збільшення ємності такого ЗП пов'язане зі збільшенням часу затримки лінії й частоти проходження сигналів і практично обмежується величиною згасання сигналів та смугою пропускання лінії. Відповідно до цього для ЗП добирають і тип ліній затримки. У ЗП застосовують переважно ультразвукові лінії затримки, в яких для звукопроводів використовують ртуть, кварц, сплави магнію, нікелю та інші матеріали з малою швидкістю поширення сигналів $(1 \div 6) \cdot 10^3$ *м/сек* і порівняно невеликим ступенем згасання коливань.

Інформаційні сигнали подаються на вхід ключа $К_1$ (мал.) і за наявності сигналу «записування» комутуються на вхід збуджувача З вхідного перетворювача $Пер_1$, який перетворює електричні сигнали на ультразвукові. Вихідний перетворювач $Пер_2$ здійснює зворотне перетворювання. Сигнали з виходу лінії по колу *зворотного зв'язку*, яке складається з підсилювача П та ключа $К_2$, комутуються на вхід збуджувача З. Якщо треба повністю або частково очистити З. п. на л. з., на вхід ключа $К_2$ подається на певний час заборонний сигнал «стирання», який закриває ключ і тим самим розриває коло зворотного зв'язку. Виводиться інформація з виходу $К_3$ за наявності дозволяючого сигналу «зчитування».

В ультразвукових лініях затримки використовують два способи перетворювання сигналів — п'єзоелектричний і магнітострикційний.



Блок-схема запам'ятовувального пристрою на лініях затримки.

Застосування перетворювача того чи іншого типу залежить від того, чи можна його узгодити з звукопроводом лінії, щоб втрати потужності сигналів у ЗП були якнайменші. П'єзоелектричний перетворювач являє собою пластину з кварцу або іншого матеріалу з п'єзоелектричними властивостями; навколо пластини — металеві обкладки, на них подаються електричні сигнали. Такі перетворювачі використовують у ртутних і кварцових лініях затримки. Магнітострикційний перетворювач — котушка на кінцях звукопроводу у вигляді дроту, тонкостінної трубки або стрічки з феромагнітного матеріалу з різким проявом магнітострикції. Ємність ЗП на ультразвукових лініях затримки, як правило, становить від кількох сот до кількох тисяч бітів. Проте завдяки використанню нових матеріалів звукопроводів і нових конструкцій ліній ємність ЗП можна збільшити до кількох десятків тисяч бітів. Осн. вадою З. п. на л. з. є великий час вибирання (в середньому — половина часу затримки лінії).

Незважаючи на порівняно невеликий обсяг збережуваної інформації та малу швидкодію, З. п. на л. з. й досі застосовують завдяки їхній малій вартості, простоті експлуатації та надійності. Їх використовують у малих обчисл. машинах з послідовною обробкою інформації, в системах зв'язку, в телебаченні й радіолокаційних системах. *М. К. Бабенко.*

ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ ОПЕРАТИ́ВНИЙ — див. *Оперативний запам'ятовувальний пристрій.*

ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНОГО ПРИ́СТРОЮ ЄМНІСТЬ — найбільша кількість закодованої інформації, яку можна одночасно зберігати в цьому пристрої (ЗП). Ємність виражають кількістю чисел або слів певної розрядності, а найчастіше — кількістю байтів. Через те, що в більшості *цифрових обчислювальних*

машин прийнято двійкове кодування інформації, в тому числі й адрес, то звичайно кількість слів подають степенем двійки: 2^{10}, 2^{11} і т. д. Кількість розрядів визначається *розрядністю обчислювальної машини*. Найчастіше використовують ЗП з розрядністю 18, 36 і 72. Ємність ЗП іноді характеризують числом збережуваних двійкових розрядів, або *бітів*. Для оперативних ЗП характерна ємність від 2 до 64 тис. слів, або байтів, що відповідає приблизно $10^4 \div 2 \cdot 10^6$ *бітів*. Ємність зовнішніх ЗП, як правило, більша і, в разі використання *нагромаджувачів* на магнітних дисках, становить $10^8 \div 2 \cdot 10^9$ *бітів*, а при використанні великої кількості *стрічок магнітних* — ще більша. *Ф. Н. Зиков.*

ЗАПАМ'ЯТО́ВУВАЛЬНОГО ПРИ́СТРОЮ ЗО́НА — ділянка в ЗП, призначена для зберігання деякого обмеженого обсягу інформації (звичайно в пристроях на *стрічках магнітних*). На магнітній стрічці розміщується від кількох десятків до кількох сотень зон (залежно від густоти запису, розмірів зон і стрічки) з невеликими проміжками між ними. Межі зон позначають звичайно записом імпульсів на спец. доріжці стрічки. Зони розміщують або попередньо розмічаючи стрічку й записуючи їхні номери в проміжках, або без такого розмічання, послідовно заповнюючи стрічку в процесі записування. Відповідно, пошук здійснюється або зчитуванням номерів, або послідовною лічбою зон; у цьому випадку номер поточної зони має зберігатися в ЦОМ. Групування інформації за зонами прискорює записування й вибирання її, оскільки, звертаючись до стрічки, шукають лише одну адресу, спільну на всю групу записаних у зону слів,— номер зони. *І. Т. Пархоменко.*

ЗАПА́СІВ ТЕО́РІЯ, теорія керування запасами — розділ прикладної математики, що вивчає системи, пов'язані з нагромаджуванням, видаванням і поповнюванням запасів. З. т. органічно входить до *операцій дослідження*. Будучи математичною теорією, вона розв'язує насущні проблеми економіки та організації виробн. Спочатку розв'язувані задачі мали суто утилітарний характер, а постановка їх вкрай спрощувалась; застосовувані матем. методи були наближеними, а теор. узагальнень зовсім не було. У 50-х роках швидкий розвиток матем. методів (теорія ймовірнісних процесів, *масового обслуговування теорія*, лінійне й нелінійне програмування) і застосування ЕОМ сприяють розвиткові З. т.

Відомо, що кожний виробничий процес пов'язаний з необхідністю нагромаджувати й витрачати запаси матеріалів, устаткування, запасних частин і готової продукції. Коли запасів немає або їх не вистачає, це призводить до непродуктивних втрат. З другого боку, надмірне нагромадження запасів пов'язане з омертвленням ресурсів, псуванням під час зберігання, переповненням складських приміщень. Через це ставиться задача визначити найраціональнішу кількість запасів, найвигіднішу стратегію поповнювання й витрачання їх. З. т., спираючись на положення сучасної математики, а особливо таких її розділів, як *імовірностей теорія, програмування математичне, обчислювальна математика* та ін., розв'язує такі задачі й дає конкретні рекомендації щодо практичного застосування їх. Сфера застосування результатів, одержаних у З. т., вийшла далеко за межі задач, пов'язаних з організацією складського г-ва, відпусканням і зберіганням продукції. Ці результати успішно застосовують у різних задачах виробничої і тех. діяльності: при проектуванні електронної апаратури, в задачах оптим. транспортного забезпечення, в теорії надійності, в задачах експлуатації водосховищ і т. п.

Задачі З. т. можна класифікувати або за змістовими властивостями досліджуваних систем, або за методами дослідження. З цього погляду системи З. т. можна поділити на системи з простою структурою (один склад або база) і системи з складною структурою (мережа послідовних або паралельних баз). Задачі, розв'язувані в З. т., можуть бути однономенклатурні (керування запасами однорідної продукції) і багатономенклатурні (взаємопов'язане постачання продукцією кількох різних видів). Кожна система З. т. може функціонувати в неперервному або в дискретному часі. Осн. часовою характеристикою системи З. т. є рівень запасу, тобто кількість продукції на складі в даний момент часу. Залежно від особливостей продукції рівень запасів може бути або дискретним, або неперервним. У деяких задачах рівень запасу може мати від'ємні значення — нагромаджується незадоволений попит. У багатономенклатурних системах і системах із складною структурою рівень запасу — векторна величина, компоненти якої — це рівень запасів різних видів продукції на різних складах.

Осн. поняттями З. т., що характеризують кожну з розглянутих систем, є попит, поповнення запасів і замовлення на поповнення. Кожне з цих понять включає часові й кількісні показники. Перші з них характеризують множину моментів часу, коли виникає попит, відбувається поповнювання запасів та дається замовлення на поповнення. Другі — ставлять у відповідність кожному такому моментові часу певну кількість продукції. Кожен з показників може бути або строго детермінованим (вибирають його завжди за одним і тим самим наперед визначеним законом), або випадковим (має імовірнісний характер), або керованим (залежить від якихось миттєвих характеристик). Детермінованість часових і кількісних показників, їхня випадковість, способи здійснювання керування ними в різних системах можуть виявлятися по-різному. Так, детермінованість попиту за часом може мати безперервний характер (за однакові проміжки часу відпускають певну кількість продукції) або дискретний (продукцію відпускають лише в окремі моменти часу, що чергуються за певним законом). Випадковий попит може бути неперервним у часі, напр.,

описуватися якимсь відомим неперервним випадковим процесом. За дискретного випадкового попиту моменти відпускання продукції настають через випадкові проміжки часу, й щоразу відпускається випадкова кількість продукції. Попит може мати й змінну інтенсивність, що змінюється залежно від наявності продукції на складі. В цьому випадку попит наз. керованим. Попит має керований характер, коли при нагромадженні незадоволеного попиту до певного рівня дальше надходження заявок припиняється. Величина попиту також може бути керованою, залежати або від наявності запасів, або від кількості продукції, яку вже замовлено, але вона ще не надійшла на склад. Приблизно так само можна охарактеризувати детерміновані, випадкові й керовані показники, що стосуються поповнення запасу й замовлення на поповнення. Мета дослідження систем З. т. — визначити оптим. режим роботи системи або вивчити окремі невипадкові характеристики системи, що є показниками її ефективності. В задачах оптимізації оцінюють переважно затрати, пов'язані зі зберіганням продукції, затрати, що виникають, коли запаси вичерпуються й затрати на оформлення та одержання замовлення.

Розв'язуючи задачі З. т., застосовують різні матем. методи: матем. програмування, теорії масового обслуговування, кореляційні та методи статистичного моделювання. В З. т. досить повно вивчено однономенклатурні системи з простою структурою, одержано деякі результати щодо дослідження систем зі складною структурою і багатономенклатурних систем. Схеми З. т., досліджувані аналітично, як правило, характеризуються марковським характером надходження заявок і поповнення запасів.

Літ.: Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М., 1969 [бібліогр. с. 325—343]; Хэнсменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 277—279]; Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 404—423]; Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 352].

Т. І. Фурсова.

ЗАПЕРЕ́ЧЕННЯ в алгебрі логіки — одна з *логічних операцій*. У природній мові відповідає частці «не». В *алгебрі логіки* З. записують $\neg A$ (або $\overline{A}$).

ЗА́ПИС — у задачах *автоматичної обробки даних* — логічна порція інформації, що є об'єктом або наслідком одного кроку обробки. Аналогом З. при ручній обробці є документ. Звичайно споріднені за структурою і способом використання З. об'єднують у масиві.

Л. П. Бабенко.

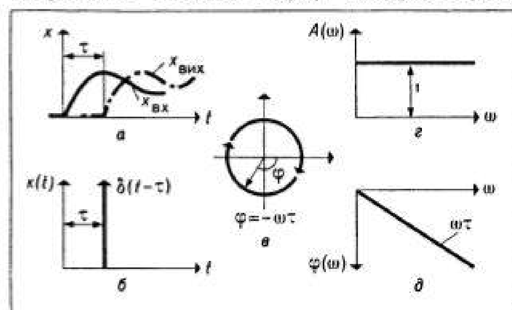
ЗА́ПИС БЕЗДУ́ЖКОВИЙ, польський запис — представлення виразу, при якому порядок виконування операції визначається її контекстом і її позицією у формулі. З. б. запровадив польський логік Я. Лукасевич. При З. б. стають непотрібними дужки і не треба враховувати старшинство операцій. Є такі З. б.: прямий — операції виконують справа наліво, інверсний — операції виконують зліва направо та ін. Щоб перетворити арифм. вираз на прямий (інверсний) З. б., треба вписати в ньому зліва (справа) операції в тому порядку, в якому їх треба виконувати, а справа (зліва) — їхні операнди. Напр., перетворення виразу $a + (b + c) \times d$ на З. б. можна представити в такому вигляді:

вираз	прямий запис	інверсний запис
$b + c$	$+ bc$	$bc +$
$(b + c) \times d$	$\times + bcd$	$bc + d \times$
$a + (b + c) \times d$	$+ a \times + bcd$	$abc + d \times +$

Виключення дужок та ігнорування старшинства операцій значно спрощує обробку таких виразів *трансляторами*, тому З. б. широко використовують у *мовах машинно-орієнтованих* і в *мовах проміжних*.

С. М. Берестова.

ЗАПІЗНЮВАННЯ БЛОК — пристрій для відтворювання функцій часу з запізнювальним аргументом. З. б. виконує таке часове перетворювання сигналу: $x_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$, де t — поточний час, τ — час запізнювання, $x_{\text{вх}}$, $x_{\text{вих}}$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали З. б. (мал., *а*). Розрізняють блоки постійного запізнювання, в яких у процесі роботи $\tau = \text{const}$, і блоки змінного запізнювання, в яких $\tau = \text{var}$. У блоках змінного запізнювання τ може бути ф-цією часу t або (і) якоїсь іншої змінної. Часові й частотні характеристики (див. *Імпульсна перехідна функція*, *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) ідеального блоку запізнювання (для випадку $\tau = \text{const}$) показано на мал. *а* — *д*. За характером сигналів розрізняють З. б., призначені для відтворювання неперервних (кусково-неперервних) сигналів, і З. б. для відтворювання дискретних (імпульсних) сигналів. У З. б. для одержання часового зсуву використовують



Характеристики блока запізнювання: *а* — часова; *б* — $k(t)$ — імпульсна перехідна функція ($\delta(t - \tau)$ — дельта-функція); *в* — амплітудно-фазова характеристика; *г* — амплітудно-частотна характеристика; *д* — фазо-частотна характеристика.

магн. стрічки, запам'ятовувальні конденсатори, лінії затримки, регістри зсуву й *фільтри*, що апроксимують *передавальну функцію* ідеального З. б. $e^{-p\tau}$.

З. б. застосовують у моделюючих установках, кореляторах і пристроях, які використовують кореляційні методи визначення параметрів руху в системах автомат. керування й контролю тощо.

Літ.: Жовинский В. Н. Схемы запоминания напряжений и блоки запаздывания. М.— Л., 1963 [бібліогр. с. 76—78]; Догановский С. А., Иванов В. А. Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. М., 1966 [бібліогр. с. 272—278]; Козубовський С. Ф., Хартеброт Г. Блок регульованого запізнювання для дискретних сигналів. «Автоматика», 1967, № 1.

Ю. В. Крементуло.

ЗАХИСТ ПАМ'ЯТІ — див. *Пам'яті захист.*

ЗАЦИКЛЮВАННЯ — нескінченно повторюване виконання якої-небудь ділянки *програми.* Причиною З. є здебільшого помилка в програмі, а іноді його організують спеціально й потім використовують, напр., у тестах для ЕЦОМ.

ЗБІЙ ЦОМ — короткочасне порушення нормальної роботи машини, яке спотворює результати обчислень. Збій може бути випадковим або систематичним. Причиною в и п а д к о в и х (поодиноких) збоїв є випадкові завади в електр. колах, зумовлені флуктуаціями напруги живлення, порушеннями контактних з'єднань через мех. вібрації тощо. Такі збої призводять до спотворення однієї або кількох операцій ЦОМ. Виявляти їх можна спец. системами контролю або програмними засобами, напр., порівнюючи результати подвійного перераховування ділянки *програми.* Щоб усунути наслідки таких збоїв, треба повторно виконати окремі операції або весь хід обчислень, але при цьому не виникає потреби відновлювати працездатність ЦОМ. Причиною с и с т е м а т и ч н и х збоїв є критичний стан окремих елементів, робочі точки характеристик яких близькі до границь областей працездатності. В таких умовах навіть незначні, в межах допусків, коливання напруг, температури тощо або «важкі» комбінації *кодів* можуть призводити до збоїв. Систематичні збої фіксуються спец. схемами контролю або програмними засобами шляхом аналізу результатів обчислень. Якщо причину цих збоїв не усунено, вони можуть призвести до відмови, тобто до сталого порушення працездатності ЦОМ. Відшукують причину збоїв, ретельно перевіряючи всю машину і застосовуючи випробувальні програми в ускладнених режимах її роботи. Часто це буває трудомісткою операцією. Кількість і характер збоїв, а також час для виявляння їх визначають надійність і ефективність ЦОМ.

А. Я. Зубатенко.

ЗБУДЖЕННЯ КЛІТИНИ ТЕОРІЯ — теорія процесів, що виникають у збудливих клітинах від діяння подразників. Основою збудження є певні зміни фіз.-хім. властивостей поверхневих структур м'язових і нервових клітин, які надають збудженню здатності самопоширюватися по клітині. Найкраще обгрунтовану З. к. т. розробили (1949) англ. фізіологи А. Ходжкін та А. Хакслі. За цією теорією, в поверхневій мембрані клітини, що перебуває в стані спокою, існує електр. поляризація, зумовлена нерівномірним розподілом основних іонів натрію, калію та хлору між протоплазмою клітини та позаклітинним середовищем. Позаклітинне середовище містить переважно іони натрію та хлору, а протоплазма — іони калію. Електр. поля зарядів катіонів компенсуються полями зарядів аніонних груп амінокислот і білків. Оскільки в стані спокою поверхнева мембрана значно краще пропускає іони калію, ніж іони натрію, то внаслідок дифузії цих іонів зовн. поверхня мембрани заряджається позитивно щодо внутрішньої. Величина виниклої різниці потенціалів («мембранного потенціалу», або «потенціалу спокою») близька до потенціалу калієвого електрода E_K

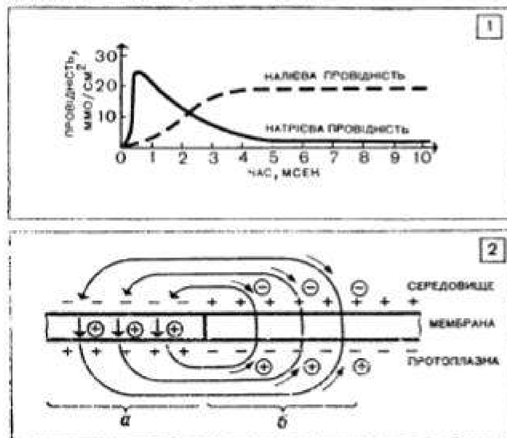
$$E_K = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K]_{вн}}{[K]_{зовн}},$$

де R — універсальна газова стала, T — абсол. т-ра, F — число Фарадея, $[K]_{вн}$ та $[K]_{зовн}$ — активність іонів калію всередині та зовні клітини. Невелике постійне витікання іонів через мембрану компенсується особливими «насосами», які переносять іони крізь неї проти градієнта потенціалу, використовуючи енергію обміну речовин. Неодмінною причиною виникнення збудження є зниження від діяння подразника мембранного потенціалу до певного критичного рівня (порога). Це зниження потенціалу (деполяризація) мембрани зумовлене діянням на поверхневу мембрану клітини або особливих речовин, що їх виділяють закінчення відростків інших клітин, які утворюють з нею синаптичні контакти, або надходженням зовн. енергії від подразника; воно пов'язане зі зміною іонної проникності мембрани. Коли деполяризація досягає порога, в мембрані відбуваються структурні зміни (їхня природа не ясна поки що), які приводять до істотного підвищення її здатності пропускати іони натрію (в ній ніби відкриваються специфічні «натрієві» канали або пори). Внаслідок цього виникає істотний плин їх через мембрану всередину клітини, що переносить певну кількість позитивних зарядів і деполяризує мембрану. Такий процес самопідтримується, бо виникаюча деполяризація дедалі збільшує натрієву проникність і т. п. Зрештою плин іонів натрію не тільки знижує зумовлений іонами калію мембранний потенціал, а й створює різницю потенціалів протилежного напряму, яка близька до потенціалу натрієвого електрода

$$E_{Na} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Na]_{зовн}}{[Na]_{вн}}.$$

Структурні зміни мембрани і зміни її потенціалу надзвичайно короткочасні. Структура мембрани та її потенціал зразу ж відновлюються, хоча діяння подразника й триває. Більше того, з певною затримкою розвивається підвищення проникності мембрани для іонів калію, надмір яких є всередині клі-

тини (відкриваються «калієві» канали), що створює плин цих іонів з клітини і сприяє відновленню початкової поляризації клітинної мембрани (мал. 1). Описана зміна електричного потенціалу мембрани («потенціал дії») є характерною рисою збудження; вона є й основою здатності збудження самопоширюватися. Поява на збудженій ділянці клітинної мембрани зміненої електр. поляризації приводить до виникнення на поверхні клітини поздовжньої різниці потенціалів — збуджена ділянка виявляється зарядженою негативно



1. Зміна натрієвої та калієвої провідності під час деполяризації мембрани (за Ходжкіном, 1965). **2.** Схема поширення нервових імпульсів на поверхні мембрани: *а* — збуджена ділянка; *б* — незбуджена ділянка.

щодо навколишніх незбуджених її ділянок (мал. 2). Оскільки позаклітинне середовище і протоплазма клітини є провідниками електрики другого роду, то між незбудженими і збудженими ділянками виникають електр. струми (струми дії), спрямовані зовні клітини від незбуджених ділянок до збудженої, а всередині клітини — в протилежному напрямі. Наявність цих струмів приводить до деполяризації незбуджених ділянок мембрани (т. з. електротонічна дія). Така деполяризація, досягши певного критичного рівня, спричинює в незбуджених ділянках активну зміну натрієвої проникності мембрани і весь ланцюг наступних явищ. Подразне діяння (гарантійний фактор) ділянки збудження на сусідні незбуджені ділянки клітини таке велике, що за нормальних умов процес збудження з великою швидкістю поширюється по клітині до кінцевих відгалужень її відростків. Ця швидкість залежить в основному від фіз. факторів — електр. опору відростка, середовища тощо.

Експериментальні докази правильності описаних уявлень досить грунтовні. Дослідами на гігантських нервових волокнах головоногих молюсків було виявлено, що здатність до збудження і проведення імпульсу зберігається, якщо з них практично повністю видавити протоплазму й замінити її сольовим розчином. Отже, процес збудження дійсно пов'язаний з поверхневою мембраною клітини, а не зі вмістом її протоплазми. Усунення з навколишнього середовища іонів натрію в більшості збудливих клітин оборотно усуває початковий вхідний потік іонів і тим самим унеможливлює виникнення збудження. Такий самий ефект можна одержати, штучно збільшуючи вміст іонів натрію всередині клітини і тим самим усуваючи градієнт потенціалу, що забезпечує їхній рух через мембрану внаслідок збудження. Кількість іонів, що проникають під час генерації одиночного імпульсу, надто мала для того, щоб її можна було визначити аналітично, але її можна визначити під час ритмічного подразнювання і потім перерахувати на один імпульс; вона становить $2{,}6 \cdot 10^{12}$ йонів/*см*².

На основі експериментально одержаних даних про мембранні іонні потоки можна провести моделювання поширюваного потенціалу дії на теор. кабелі, властивості якого ідентичні фіз.-хім. властивостям клітини. Теоретично одержані криві поширюваного потенціалу дії в цьому випадку дуже добре збігаються з формою кривих потенціалу дії, що їх зареєстровано в природних умовах.

Літ.: Ходжкин А. Нервный импульс. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 113—123]; Катц Б. Нерв, мышца и синапс. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 203—217]. *П. Г. Костюк.*

ЗБУ́РЮВАЛЬНЕ ДІЯННЯ, збурення — діяння, що порушує потрібний функціональний зв'язок (залежність) між вхідною і вихідною (контрольованою) координатами механізму, машини, процесу (системи). З. д. можуть бути як зовн.— зміни навантаження (струму, навантажувального моменту машини) і зовнішньої т-ри, різні перешкоди (наводки, витікання, фони), так і внутрішні — зміни параметрів ланок системи внаслідок старіння, самонагрівання тощо.

Методи й засоби зменшення чи цілковитого усунення З. д. становлять осн. зміст теорії і практики автомат. регулювання й керування. Шкідливі З. д. компенсують, використовуючи *системи керування замкнені* зі зворотним зв'язком, що працюють за відхиленням (принцип Ползунова — Уатта), або *системи керування розімкнені* зі зв'язками за збуреннями (принцип Понселе). Найдосконалішими щодо цього є *комбіновані системи автоматичного керування*, які містять і коло *зворотного зв'язку*, і зв'язки за збуреннями. Питання цілковитого усунення дії З. д. розглядає теорія інваріантності (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*). *П. І. Дехтяренко.*

ЗВІ́ДНІСТЬ у теорії алгоритмів — поняття, яке застосовують для постановки та розв'язування питань «складності» рекурсивно перелічних множин. Принциповим результатом *алгоритмів теорії* є доведення існування рекурсивно перелічних, але не рекурсивних множин. Оскільки рекурсивно перелічні (ефективно породжувані) множини часто зустрічаються в матем. практиці, то, природно, постало питання, чи всі рекур-

сивно перелічні, але не рекурсивні множини мають однакову алгоритм. «складність».

Найбільш вивченим поняттям З. є Тьюрінгова З. (З. за Тьюрінгом, T-звідність). Множина A натуральних чисел T зводиться до множини натуральних чисел B (символічно $A \leqslant_T B$), якщо характеристична ф-ція χ_A множини A належить до найменшого класу ф-цій, який містить характеристичну ф-цію χ_B множини B, всі частково рекурсивні функції і замкнутий щодо операцій підстановки, примітивної рекурсії та μ-оператора. Наведемо ще одне означення З. (т. з. m-звідність): множина A m- зводиться до B ($A \leqslant_m B$), якщо існує одномісна загальнорекурсивна ф-ція h така, що для всіх натуральних чисел $n : n \in A$ тоді й тільки тоді, коли $h(n) \in B$. Крім понять T-звідності та m-звідності є ще звідності — таблична (tt-звідність), обмежена таблична (btt-звідність) та ін. Усі ці звідності є транзитивними, тобто з $A \leqslant_x B$ і $B \leqslant_x C$ випливає, що $A \leqslant_x C$ (тут і далі x набуває значень T, tt, btt і m). Всяке відношення З. дає змогу визначити відношення еквівалентності: $A \equiv_x B$ тоді й тільки тоді, коли $A \leqslant_x B$ і $B \leqslant_x A$. Далі визначають відповідний ступінь нерозв'язності: x-ступенем множини A наз. родина $d_x(A) = \{B | B \equiv_x A\}$. Множина всіх x-ступенів L_x частково впорядковується таким відношенням: $d_x(A) \leqslant d_x(B)$ тоді й тільки тоді, коли $A \leqslant_x B$. Якщо x-ступінь містить принаймні одну рекурсивно перелічну мн-ну, то його наз. рекурсивно перелічним x-ступенем. Множину всіх рекурсивні перелічних x-ступенів позначають через L_x^0; $L_x^0 \subseteq L_x$.

Осн. дослідження ступенів стосуються вивчення будови частково впорядкованих множин L_x^0 та L_x. Вкажемо на деякі важливо властивості цих частково впорядкованих множин: 1) Частково впорядковані множини L_x^0 та L_x є верхніми півгратками (півструктурами), тобто для будь-яких двох елементів d_0 і d_1 з $L_x^0(L_x)$ існує їхня точна верхня межа $d_0 \oplus d_1$ в $L_x^0(L_x)$. Крім того, L_x^0 з'являється під півгратками L_x. Це значить, що для $d_0, d_1 \in L_x^0$ їхня точна верхня межа в L_x лежить у L_x^0. 2) У півгратці L_x немає найбільшого елемента, а в півгратці L_x^0 є найбільший елемент (1_x). 3) У півгратках L_x і L_x^0 є найменший елемент (0_x). 4) Півгратка L_x — континуальна, а L_x^0 — лічбова. 5) Півгратки $L_x^0(L_x)$ не є гратками, тобто в $L_x^0(L_x)$ є такі два елементи d_0, d_1, що для них не існує точної нижньої межі.

Перелічені властивості є спільними для всіх З. Але є й відмінності. Вкажемо деякі властивості півграток L_T, L_T^0, L_m, L_m^0. 1) Півгратка L_m^0 є ідеалом півгратки L_m, тобто з $d_0 \in L_m^0$, $d_1 \in L_m$ і $d_1 \leqslant d_0$ випливає, що $d_1 \in L_m^0$. 1') Півгратка L_T^0 не є ідеалом півгратки L_T. 2) Півгратка L_m^0 містить атоми — мінім. елементи: такі елементи $d \in L_m^0$, що $d \neq O_m$ і з $d_0 \leqslant d$ випливає, що $d_0 = O_m$ або $d_0 = d$. 2') Півгратка L_T^0 задовольняє таку властивість щільності: якщо $d_0, d_1 \in L_T^0$ і $d_0 < d_1$, то існує $d_2 \in L_T^0$ така, що $d_0 < d_2 < d_1$. Зокрема, L_T^0 не містить атомів.

У дослідженнях з З. часто розглядають ще одну операцію на L_T — операцію «стрибок». Не даючи точного означення, можна сказати, що стрибком T-ступеня множини A є T-ступінь найбільшої щодо T-звідності множини, яка «рекурсивно перелічна» в A. Операцію «стрибок» використовують і при побудові ієрархій у теорії рекурсивних ф-цій.

Усі згадані поняття З. запровадив Е. Пост. Слід відзначити, що це поняття в теорії алгоритмів застосовують не лише для З. множин, як було розглянуто вище. Можна вказати ще на З. нумерацій (див. *Нумерацій теорія*). З. множин можна розглядати як З. відповідних проблем розв'язування (проблема розв'язування для множини A полягає в обчислюванні характеристичної ф-ції χ_A). Але в теорії алгоритмів виникають і інші проблеми, напр., проблема відокремлюваності (відокремлювання) для множин A та B, що полягає в обчислюванні хоча б однієї функції, що дорівнює 1 на A і 0 на В. Зазначені дві проблеми є окремими прикладами заг. поняття масової проблеми. Існує поняття З. для масових проблем, у якому використовують поняття частково рекурсивного оператора. Відповідні ступені трудності масових проблем утворюють частково впорядковану множину M, яка є півграткою. Півгратка L_T має природне вкладення в гратку M.

Літ.: Медведев Ю. Т. Степени трудности массовых проблем. «Доклады АН СССР», 1955, т. 104, № 4; Post E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. «Bulletin of the American Mathematical Society», 1944, v. 50, N 5; Sacks G. E. Degrees of unsolvability. Princeton, 1963; Роджерс X. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 587—599]. *Ю. Л. Єршов.*

ЗВОРО́ТНИЙ ЗВ'ЯЗО́К — діяння результатів функціонування якоїсь системи (об'єкта) на характер цього функціонування. Осн. ідея З. з. полягає в тому, щоб використати самі відхилення системи (об'єкта) від певного стану для формування *керуючого діяння*. Блок-схему системи зі З. з. наведено на мал. 1. Тут О — дійсна (реальна) система (об'єкт), О* — друга (реальна чи гіпотетична, її часто називають еталонною) система, яка визначає мету керування, Р — пристрій (орган) керування, y, y^*, z — оператори, які описують функціонування відповідних

елементів системи, L — неконтрольоване *збурювальне діяння.* Стан y системи О таким чи іншим способом порівнюється зі станом y^* системи О* . Внаслідок цього О зазнає діяння $z = z(y, y^*)$.

На відміну від *систем керування розімкнених* системи керування, які використовують З. з., наз. *системами керування замкненими.* При цьому зв'язок Р з О наз. прямим (коло I), а зв'язок О з Р — зворотним (коло II). Або інакше: в системах зі З. з. можна виділити замкнене коло причинно-наслідкових явищ. Коли від діяння З. з. початковий відхил стану y (первинної, керованої координати), спричинений збурювальними діяннями, зменшується, то кажуть, що має місце негативний З. з., а в противному разі говорять про позитивний З. з. Звичайно позитивний З. з. приводить до нестійкості роботи системи в цілому. Залежно від виду операторів, що виробляють z, розрізняють неперервний і дискретний(епізодичний), лінійний і нелінійний, статичний і динамічний З. з.

З. з. у системах автоматичного керування. Принцип З. з. найповніше розроблено в *автоматичного керування теорії.* Вже в перших автомат. регуляторах *стабілізації систем* як керуюче діяння використовували відхил початкової величини від заданого значення; у *слідкуючих системах* і *системах програмного керування* керуюче діяння формувалося на основі вимірювання й перетворювання *похибки* розузгодження — різниці між заданим значенням керованої координати і її поточним значенням на виході системи, тобто в таких системах $z = z(y^* - y)$. Значну кількість систем автомат. керування створили й створюють на основі цієї ідеї.

Передавальна функція замкненої одноконтурної системи $W_з(p)$ з негативним З. з. (мал. 2) виражається через передавальні ф-ції прямого кола керуючого пристрою (регулятора) $W_к(p)$ і об'єкта $W_о(p)$ та кола З. з. $W_{зз}(p)$ так:

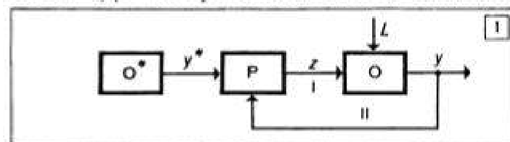
$$W_з(p) = \frac{y(p)}{y^*(p)} = \frac{W_к(p)\,W_{зз}(p)}{1 + W_к(p)\,W_о(p)\,W_{зз}(p)}. \qquad (1)$$

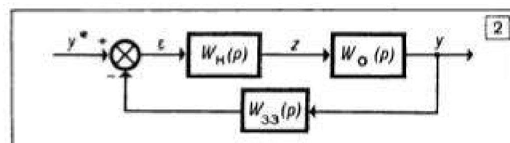
Введення З. з. дає змогу ускладнити керуючий сигнал у системах. Так, якщо в розімкненій системі вхідна величина y^* і є керуючим діянням, то в замкнених системах керуюче діяння z залежить від законів перетворювання похибки $\varepsilon = y^* - y$ системи і для розглянутого вище випадку z визначають як

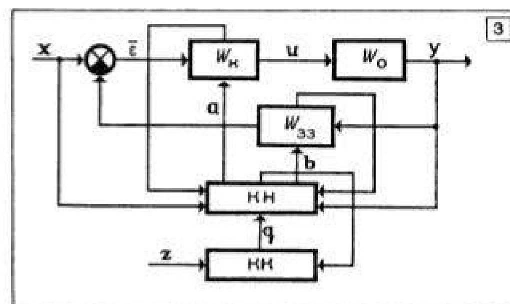
$$z = \frac{W_к(p)}{1 + W_{зз}(p)\,W_к(p)\,W_о(p)}\,y^*(p). \qquad (2)$$

У *багатоконтурних системах автоматичного керування* можна використовувати й місцеві З. з., які охоплюють одну чи кілька ланок, і загальний (головний) З. з., який охоплює всю систему в цілому. При керуванні багатокоординатними об'єктами (напр., у системах програмного керування) використовують перехресні стабілізуючі зв'язки між двома чи кількома системами керування по окремих координатах. Складні багатоконтурні кола З. з. використовують для організації систем керування, оптим. за якимось критерієм. Ускладнення кіл З. з., пов'язане з задоволенням певного критерію якості керування, часто є еквівалентним перетворенню розузгодження, одержаного за допомогою загального З. з.

З. з. у кібернетичних системах. До кібернетичних систем належать







1. Блок-схема системи зі зворотним зв'язком.
2. Блок-схема замкненої одноконтурної системи зі зворотним зв'язком.
3. Трирівнева ієрархічна система керування зі зворотними зв'язками.

системи керування, в яких є кілька різних за рівнем ієрархії контурів керування, а також системи класифікації, розпізнавання та прийняття рішень, здатні змінювати свою організацію в процесі навчання. На мал. 3 подано трирівневу *ієрархічну систему керування.* 1-й рівень (контур) керування будується з використанням неперервного З. з. на перетворенні сигналу в колі З. з. за $W_{зз}$ і сигналу розузгоджування за $W_к$. Це рівень безпосереднього керування об'єктом. Конкретні значення параметрів $\mathbf{a}$ передавальної ф-ції $W_к$ і $\mathbf{b}$ передавальної ф-ції $W_{зз}$ задає контур настроювання (КН). У КН вводяться неперервно чи дискретно значення $\mathbf{y}$ З. з. та $\mathbf{x}$. За значенням координат об'єкта і вхідного сигналу, а також залежно від критерію керування $\mathbf{q}$, КН виробляє і встановлює в $W_к$ і $W_{зз}$ значення параметрів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Цей рівень ієрархії має свої специфічні З. з. від ланок $W_к$ і $W_{зз}$ за параметрами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. КН керує

здебільшого якоюсь множиною систем керування. 3-й рівень ієрархії становить контур критеріїв — КК. Залежно від обстановки, в якій відбувається керування (напр., нормальної чи аварійної роботи об'єкта, діяння *завад*), а також від зовн. показань **z**, що враховують роботу суміжних систем, чи мети оператора, який керує комплексом систем, КК виробляє потрібний критерій якості керування з набору критеріїв *q* і подає сигнал у КН про зміну *алгоритму* настроювання параметрів контура безпосереднього керування об'єктом. Тут вектори **y** і **x** вводять в основному для того, щоб інформувати КК про стан виходу і входу системи в якісь дискретні моменти часу. З. з., характерний для цього рівня ієрархічного керування, здійснюється з КН за критерієм **q** · КК керує якоюсь множиною контурів настроювання. Контур безпосереднього керування виконують здебільшого на елементах *аналогових обчислювальних машин*, а контур настроювання і вироблення критерію реалізують за допомогою ЦОМ.

Важливу роль З. з. відіграє в системах класифікації, *розпізнавання образів* і прийняття рішень. Позитивний З. з. використовують, щоб реалізувати заохочування, напр., у системах типу *персептрона* при самонавчанні чи навчанні з допомогою вчителя. У *системах «людина-машина»* З. з., який замикається через оператора, можна використати для безпосереднього вироблення керуючого сигналу, для перевірки й вироблення критерію управління, а також як інформаційний зв'язок, який дає змогу операторові прийняти оптим. рішення.

З. з. у біологічних системах існує від клітини до цілісного організму. Сукупності клітин, що утворюють органи, мають здатність саморегуляції. Звичайно ця здатність спрямована на підтримування постійного значення вихідної величини. Так, напр., серце має спец. автономний нервовий регулятор — синусний вузол, який керує послідовним скороченням різних відділів серця і підтримує постійність частоти скорочень серця. Система керування рівнем цукру в крові розв'язує завдання стабілізації біохім. процесів: розпаду глікогену тканин з виділенням цукру в кров і синтезу глікогену печінкою з вільного цукру в крові. При цьому керуючий сигнал, що становить різницю між заданим значенням рівня цукру, необхідного для організму в певний момент часу, і поточним значенням рівня цукру в крові, виробляється внаслідок діяння негативного З. з. Розвинений організм має великий набір систем регуляції, які забезпечують відносну постійність речовинних і енерг. витрат при взаємодії організму з середовищем. До параметрів організму, постійність яких підтримується в процесі його життєдіяльності, належать: температура й вага тіла, хвилинний об'єм крові й дихання, рівень цукру й гемоглобіну та багато інших. Підтримування в потрібних межах кожної з цих величин здійснюється внаслідок взаємопов'язаної роботи багатьох органів, які входять у конкретну систему регуляції. Характерними для біол. систем керування є складне перетворювання сигналів помилок і З. з. (мал. 2) та ієрархічна побудова з настроюванням від нервової системи й виробленням критеріїв за допомогою мозку (мал. 3). У біол. системах керування здійснюється злагоджена взаємодія повільнодіючих систем (систем обміну, гуморальної) та швидкодіючих (нервової системи).

У системах керування рухами організму З. з. звичайно використовується через органи чуттів. Приблизно 90% систем керування рухами використовують візуальний З. з., а решта 10% — слуховий, дотиковий та ін. З. з. Контроль над правильністю руху здійснюється ще й місцевими З. з. від рецепторів м'язів. Контроль над правильністю цілого комплексу складних рухів здійснюється за допомогою кіркового механізму зіставляння, який працює на основі показань складного алгоритмічного З. з. Мету комплексу рухів організму виробляє акцептор дії. Він же остаточно порівнює задану програму і результати дій організму. Роботу акцептора дії на основі механізму З. з. (аферентації) описав ще в 30-х рр. рад. фізіолог П. К. Анохін. Проте ідеї, закладені в поняття акцептора дії, були надто складні для тодішнього рівня розвитку теорії автомат. регулювання. Акцептор дії відіграє важливу роль у навчанні біосистем, у розпізнаванні образів і прийнятті рішень, замикаючи З. з. між організмом і середовищем на найвищому рівні ієрархічного керування за метою комплексу дій, кожна з яких виконується відповідно до певного критерію.

З. з. в економічних і соціальних системах. Простим регулятором осередку економ. системи, яка виробляє певний продукт, є ринок, тобто споживання цього продукту. Різниця між попитом на продукт і виходом економ. осередку (наявністю продукту в продажу), яка виникає внаслідок З. з., є керуючим сигналом для економ. осередку. В цьому разі З. з. може бути неперервним чи дискретним, але досить частим. Взаємозлагоджена робота багатьох економ. осередків, які становлять галузь пром-сті, потребує впровадження координуючого й керуючого органу, що працює на основі дискретних З. з. від економ. осередків. З. з. дає змогу виробити потрібні оптим. настройки для кожного економ. осередку (контури безпосереднього керування й настроювання показано на мал. 3). Для управління пром-стю в цілому потрібен ще один рівень ієрархічного управління, який на основі З. з. виробляє критерії для галузей пром-сті (мал. 3). І, зрештою, визначення мети економіки країни в цілому покладено на органи політичного управління.

В соціальній сфері З. з. використовують для визначення політичних, моральних та ін. тенденцій, тут його здійснюють шляхом соціологічних досліджень і опитування. Цей З. з. від суспільства до органів влади необ-

хідний для вироблення правильної (такої, яка відповідає запитам суспільства) найближчої й віддаленої політики, що її потім здійснюють за допомогою законодавства, засобів масової інформації (преса, радіо, телебачення) і т. ін. З. з. у дискретній формі виборів, які проводять періодично, дає змогу тримати в певному оптим. стані державні та партійні органи безпосереднього управління суспільством.

Літ.: Антомонов Ю. Г. Автоматическое управление с применением вычислительных машин. Л., 1962 [бібліогр. с. 334—337]; Хэммонд П. Теория обратной связи и ее применения. Пер. с англ. М., 1961.

Ю. Г. Антомонов.

ЗВ'ЯЗКИ ЛОГІЧНІ — *логічні операції* над висловлюваннями.

ЗГОРТКА РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН — розподіл суми двох взаємно незалежних випадкових величин. Нехай ξ і η — незалежні дискретні *випадкові величини* з розподілами $P\{\xi = k\} = a_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ і $P\{\eta = l\} = b_l$ $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Сума $\zeta = \xi + \eta$ має розподіл $c_k = P\{\zeta = k\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{k-i}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$. Останній вираз називають згорткою розподілів $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ двох дискретних випадкових величин ξ і η і позначають $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$. Нехай тепер ξ і η — неперервні незалежні випадкові величини, задані щільністю ймовірності $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ відповідно. Щільність імовірності $f(t)$ їхньої суми визначається інтегралом $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u)\psi(u)du$. Інтеграл у правій частині наз. згорткою щільностей $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервних випадкових величин ξ і η. У цьому випадку застосовують те саме позначення операції згортання $f(t) = \varphi(t) * \psi(t)$.

Якщо випадкові величини ξ і η задано своїми ф-ціями розподілу $F(x)$ і $G(x)$, згортка $H(x)$ їхніх розподілів визначається як $H(x) = F(x) * G(x) = \int F(x - z)\, dG(z)$, де інтеграл слід розуміти як інтеграл Стільтьєса. Операція згортки комутативна $F(x) * G(x) = G(x) * F(x)$ й асоціативна: $[F(x) * G(x)] * H(x) = F(x) * [G(x) * H(x)]$.

Л. П. Петренюк.

ЗДІЙСНЕННОСТІ МЕТИ ПРИНЦИП — принцип оптимальної поведінки, що має велике значення в теорії *ігор безкоаліційних* і полягає в прагненні гравців до ситуацій рівноваги. Для антагоністичних ігор З. м. п. збігається з *максиміну принципом.*

М. М. Воробйов.

ЗДІЙСНЕННОСТІ ФІЗИЧНОЇ КРИТЕРІЇ — умови, за допомогою яких визначають принципову можливість створення деякої динамічної системи або її елементів. Необхідність застосування З. ф. к. виникає, зокрема, при *систем автоматичного керування синтезі*, синтезі згладжувальних та випереджувальних фільтрів, розв'язуванні деяких задач ідентифікації, побудові інваріантних систем керування тощо. В результаті різних процедур синтезу одержують вирази, що описують вагову функцію системи (ланки, фільтра) або її *передавальну функцію:* $w(t)$ або $W(s)$ (s — комплексна змінна). Для того, щоб стійкі пристрої, що їх синтезують, могли бути фізично здійсненними, необхідно, щоб $w(t)$ або $W(s)$ задовольняли З. ф. к., формульований так: 1) пристрій буде фізично здійсненним, якщо

$$\begin{aligned} w(t) &= 0, \quad \text{при} \quad t < 0, \\ w(t) &= 0, \quad \text{при} \quad t \to \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

тобто вихідний сигнал пристрою має дорівнювати нулеві при відсутності вхідного сигналу, а реакція його на імпульсний вхідний сигнал повинна згасати з часом. Умова (1) є необхідною і достатньою; 2) якщо відома передавальна функція синтезовуваного пристрою, то для того, щоб він був фізично здійсненним, необхідно, щоб $W(s)$ була аналітичною у правій півплощині комплексної змінної s, тобто якщо $W(s)$ зображує відношення двох поліномів, то всі полюси $W(s)$ повинні лежати в лівій півплощині, а область розташування нулів може бути необмеженою. Цей критерій є необхідним і достатнім, якщо $|W(j\omega)|$ зменшується зі швидкістю ω^{-n}; 3) фіз. здійсненність можна перевірити за $W(j\omega)$ за допомогою критерію Пелі — Вінера:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log |W(j\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < c, \tag{2}$$

де c — скінченне дійсне число, якщо $W(j\omega)$ є передавальною функцією фізично здійсненного пристрою. Критерії (1) і (2) еквівалентні. У цифрових та імпульсних системах З. ф. к. має вид, аналогічний (1), якщо розглядати імпульсну вагову функцію

$$w^*(iT) = 0, \qquad i < 0, \tag{3}$$

де $i = 0, 1, 2, 3\ldots$ — цілі числа.
Якщо задана імпульсна передавальна функція

$$W^*(z) = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_0}, \tag{4}$$

то З. ф. к. полягає в тому, що $m \leqslant n$. При цьому вважають, що $a_0 \neq 0$.

Літ.: Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 [бібліогр. с. 873—878]; Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963].

Б. Ю. Мандровський-Соколов.

ЗМІННИХ НАПРЯМІВ МЕТОД — один з методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу. Див. *Еліптичного типу диференціальних рівнянь у частинних похідних способи розв'язування.*

ЗНА́КОВИЙ РОЗРЯ́Д — розряд регістра, суматора арифметичного пристрою або комірки запам'ятовувального пристрою цифрової обчислювальної машини, у якому зберігається *код* знака подаваного числа. Прийнято знак «+» позначати через «0», а знак «—» — через «1». У машинах з плавучою комою, на відміну від машин з фіксованою комою, для подавання чисел потрібні два З. р.: один — для подавання знака мантиси, другий — для подавання знака порядку. Крім того, застосовуючи в ЦОМ для подавання чисел з фіксованою комою модифікованих, оберненого і додаткового кодів, знак числа також зображують як дворозрядний код «00» у випадку додатних чисел і як код «11» — у випадку від'ємних чисел. Це дає змогу легко визначати ситуацію, за якої сталося переповнення розрядної сітки машини (ознакою переповнення є наявність кодів «01» або «10» у З. р.).

Під час виконання в ЦОМ операції додавання (віднімання) знак результату одержують автоматично, бо в операції беруть участь не самі числа, а їхні коди (включаючи й код знака). Якщо виконують операцію множення (ділення), знак результату визначають, підсумовуючи коди З. р. множеного й множника (діленого й дільника) за mod 2. Див. також *Операції над числами*. *В. М. Коваль.*

ЗНАЧУ́ЩІ ЦИ́ФРИ наближеного числа — всі правильні цифри наближеного числа, крім нулів, які стоять зліва від першої цифри, відмінної від нуля. Всі цифри якогось числа k вважають за правильні, якщо абс. *похибка* числа k не перебільшує половини одиниці розряду останньої цифри цього числа. Відносна похибка числа k, яке має n правильних цифр, дорівнює $\delta_k = \frac{1}{z \cdot a^{n-1}}$, де z — перша З. ц. числа k, a — основа числення. Набл. числа слід записувати, зберігаючи лише правильні цифри.

Приклад. У числі 0,003070 перші три нулі не є З. ц., бо вони служать лише для встановлювання десяткових розрядів інших цифр. Інші два нулі є З. ц., бо перший з них стоїть між З. ц. «3» і «7», а другий нуль указує, що в набл. числі збережено десятковий розряд 10^{-6}. А якщо в числі 0,003070 остання цифра не є значущою, то це число треба записувати у вигляді 0,00307. З цього погляду числа 0,003070 і 0,00307 не рівноцінні, бо в першому числі є чотири З.ц., а в другому — три. У першому випадку набл. число є результатом вимірювання або обчислень з похибкою 0,0000005, у другому — з похибкою 0,000005.

Поняття З. ц. використовують у практичних розрахунках і в обчислюваннях на ЕОМ. *Т. В. Решетняк.*

ЗО́ВНІШНЄ ОБЛА́ДНАННЯ — те саме, що й *зовнішні пристрої*.

ЗО́ВНІШНІ ПРИ́СТРОЇ — пристрої, що виконують зовнішні функції машинної обробки інформації, на відміну від перетворювань інформації, що їх виконує центральний пристрій електронної обчислювальної машини ЕОМ (процесор). За родом виконуваних операцій З. п. поділяють на групи: пристрої підготовки інформації, які служать для занесення інформації вручну на перфоносії, пристрої записування на магнітні карти тощо; пристрої для контролю, друкування з перфокарт, розмножування, перенесення з одного виду носія на інший та для виконання інших допоміжних операцій; пристрої введення інформації — для введення в ЕОМ попередньо підготовленої інформації на перфоносіях і спец. бланках, і з первинних документів, графіків тощо; пристрої виведення інформації (див. *Пристрої введення та виведення інформації*), за допомогою яких інформація виводиться з ЕОМ у вигляді алфавітно-цифрового тексту, графіків і креслень та на перфоносіях (для зв'язку з ЕОМ без проміжних носіїв використовується апаратура комбінованого призначення, напр., *телетайпи*, виносні пульти з екраном і світловим олівцем); *нагромаджувачі* — для зберігання великих обсягів інформації (магнітні барабани, стрічки, диски); периферійне обладнання — апаратура, встановлена на робочих місцях для підготовки чи передавання даних в ЕОМ безпосередньо; апаратура передавання даних — комплекс технічних засобів для обміну інформацією з ЕОМ на великій відстані по лініях зв'язку. Тенденції розвитку З. п. спрямовано на виключення трудомістких підготовчих операцій, підвищення зручності й оперативності в спілкуванні людини з машиною. *І. Т. Пархоменко.*

ЗРІВНОВА́ЖУВАННЯ МЕ́ТОДИ — методи зведення до нуля або до певного значення, розузгодження в математичних машинах неперервної дії для досягнення еквівалентності між рівняннями модельованого об'єкта й моделюючої системи. Під рівняннями модельованого об'єкта розуміють залежності, які відображають матем. операції, включаючи функціональні залежності, системи лінійних і нелінійних алгебр. і дифер. рівнянь і рівняння в частинних похідних. З. м. застосовують і для підвищення точності розв'язання задач на моделюючих машинах, усуваючи похибки, що виникають через неточність встановлення параметрів або зміну їх у процесі розв'язування. Зрівноважування контролюється досягненням нульових значень деяких фіз. величин. В електронних колах за такі величини найзручніше брати різницю потенціалів між вузлами схеми. Процес зрівноважування може відбуватись одночасно в різних ділянках моделюючої системи. Для цього застосовують *слідкуючі системи* або *підсилювачі операційні*, які відпрацьовують *потенціально-нульові точки*. Послідовне (по черзі) зрівноважування здійснюється або вручну, або для цього застосовують кодокеровані елементи чи перемикальні схеми. На однозначність розв'язку при одночасному зрівноважуванні впливає стійкість розв'язку з врахуванням впливу малих параметрів; при послідовному зрівноважуванні необхідно забезпечити збіжність ітераційного процесу. З. м.

наочно ілюструються при моделюванні системи лінійних алгебр. рівнянь. Систему лінійних алгебр. рівнянь зобразимо у вигляді:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n + f_1 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{ji}x_i + \cdots + a_{jn}x_n + f_j = 0, \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n + f_m = 0,$$

де a_{ji} — відомі коефіцієнти, x_i — невідомі, f_j — відомі вільні члени. Рівняння (1) запишемо у матричній формі

$$AX + F = 0, \qquad (2)$$

де A — матриця коефіцієнтів, X — вектор невідомих, F — вектор вільних членів. Припускають, що матриця коефіцієнтів квадратична й досить добре зумовлена. Якщо *аналогову модель* побудувати неможливо або недоцільно, застосовують *квазіаналогове моделювання* зі зрівноважуванням. При цьому рівняння (2) замінюють рівняннями з нев'язками:

$$AX + F = \varepsilon, \qquad (3)$$

де ε — вектор нев'язок; при $\varepsilon = 0$ система (3) перетворюється на систему (2). У загальнішому випадку З. м. передбачають введення вектора додаткових величин Y та зрівноважуваних величин Φ. Введення цих величин іноді спрощує побудову *квазіаналогової моделі* й прискорює процес зрівноважування. Заг. блок-схему зрівноважування наведено на мал. 1, де КА — квазіаналогова модель, ПЗ — пристрій зрівноважування. Одночасне зведення всіх нев'язок до нуля можна розглянути на прикладі матричної моделі з операційними підсилювачами (мал. 2). У цій моделі провідності g_{ji} моделюють коефіцієнти a_{ji} системи (1), I_j — вільні члени f_j, напруг U_i — шукані невідомі x_i, операційні підсилювачі Π_j відпрацьовують потенціально-нульові точки δ_j. Рівняння електр. кола матиме вигляд

$$GU + I = ND, \qquad (4)$$

де G — матриця провідностей, U — вектор напруг, I — вектор струмів, N — діагональна матриця, елементи якої становлять собою суму провідностей, що їх підмикають до j-ї потенціально-нульової точки, D — вектор напруг потенціально-нульових точок. Рівняння (4) еквівалентні (3). Враховуючи, що $D = -\frac{U}{K}$, де K — коефіцієнт підсилення підсилювачів, перепишемо (4) у вигляді

$$\left(G + \frac{N}{K}\right)U + I = 0, \qquad (5)$$

а при досить великому K $GU + I = 0$, це еквівалентне системі рівнянь (2).

Аналізуючи процес одночасного зрівноважування, необхідно враховувати вплив паразитних ємностей C, які виникають у колі зворотного зв'язку підсилювачів (на мал. 2 їх позначено пунктиром). Якщо врахувати ці ємності й струми, які протікають через них, рівняння (5) набувають вигляду

$$\left(1 + \frac{1}{K}\right)C\frac{dU}{dt}E + \left(G + \frac{N}{K}\right)U + I = 0, \qquad (6)$$

де E — одинична матриця. Досліджуючи систему (6) на стійкість будь-яким з відомих методів (див. *Стійкість моделі*), одержують характеристику процесу зрівноважування. Розв'язок можна одержати лише в тому разі, якщо система стійка. Однією з умов стійкості є вимога від'ємності дійсної частини коренів характеристичних рівнянь системи

$$\left(1 + \frac{1}{K}\right)CpE + G + \frac{N}{K} = 0. \qquad (7)$$

Зокрема, якщо G — симетрична й додатно визначена матриця, то умова стійкості виконується. Достатньою ознакою стійкості буде й виконання нерівності $g_{jj} > \sum_{i \neq j} g_{ji}$. При послідовному зрівноважуванні систему (2) формують так, щоб коефіцієнти, які стоять на гол. діагоналі матриці (тобто коефіцієнти типу $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{jj}, \ldots, a_{nn}$), були максималь-

1. Блок-схема зрівноважуваної квазіаналогової моделі.
2. Схема матричної зрівноважуваної моделі систем лінійних алгебричних рівнянь.

ними в кожному рівнянні. Процес послідовного зрівноважування полягає в тому, що, змінюючи по черзі $u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n$, домагаються нульових значень $\delta_1, \ldots, \delta_j, \ldots, \delta_m$. Цей спосіб еквівалентний методові повної релаксації, а при циклічному обході зрівноважуваних величин — методові Некрасова. В процесі зрівноважування значення δ_j можна не доводити до нуля, а тільки зменшувати його. При цьому буде реалізовано метод неповної релаксації. Необхідною й достатньою умовою збіжності ітераційного методу для системи лінійних алгебр. рівнянь є умова, щоб усі корені характеристичного рівняння матриці в B були за модулем менші за одиницю, де $B=E-A$. Достатньою умовою збіжності для симетричних матриць є додатна визначеність матриці A. Практично при визначенні збіжності ітераційного процесу зручно користуватися умовою, щоб будь-яка норма матриці B була меншою за одиницю або умовою

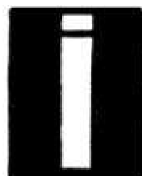
$$a_{jj} > \sum_{i \neq j} a_{ji} \text{ або } a_{jj} > \sum_{j \neq i} a_{ji}.$$

Крім розглянутих методів, застосовують і метод мінімізації. Суть його полягає в тому, що виділяють величину $S = \sum_j \delta_j^2$ або $Q = \sum_j |\delta_j|$, і на кожному кроці послідовного наближення цю величину зменшують. З методів, які мають неминучу збіжність, застосовують і метод найшвидшого спуску. Розглянуті З. м. можна узагальнити на системи нелінійних алгебр. рівнянь, на звичайні дифер. рівняння та системи рівнянь і на дифер. рівняння в частинних похідних. З. м. застосовують, розв'язуючи деякі задачі *програмування лінійного*, ними користуються, створюючи *спеціалізовані обчислювальні машини* неперервної дії.

Літ.: Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [бібліогр. с. 677—734]; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564]. *В. М. Самусь.*

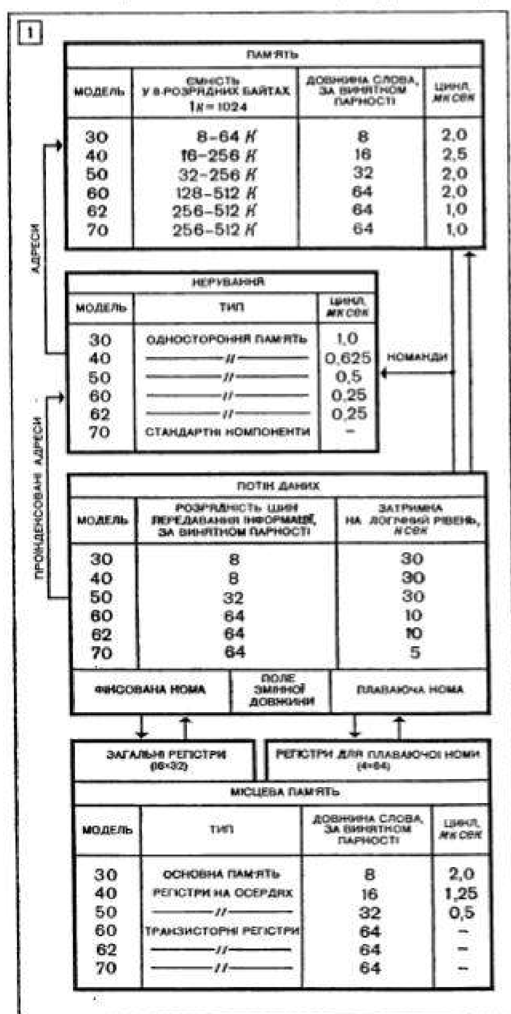
ЗСУВ — один із видів порозрядних логічних операцій, які виконує ЕЦОМ. Операція З. полягає в зміщуванні машинного коду праворуч або ліворуч на задану кількість розрядів. Операція ця двомісна, одним з її операндів є зсовуваний код, а другим — число, яке вказує величину й напрям З. Зсув коду $a = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ на k розрядів (k — ціле) ліворуч замінює його на код $a_{k+1}\, a_{k+2} \ldots a_n \underbrace{0 \ldots 0}_{k}$, зсув на k розрядів праворуч дає код $\underbrace{0 \ldots 0}_{k} a_0 a_1 \ldots a_{n-k}$. Розрізняють логічний З., при якому зсуваються всі розряди коду, включаючи знак, та арифм. З., при якому зсуваються лише цифрові розряди. В конкретних типах машин операції З. можуть мати свої особливості, зумовлені системою команд і прийнятими способами кодування чисел. У машинах з фіксованою комою, з p-їчною позиційною *системою числення* (p — основа системи числення) з невід'ємною базою операція З. еквівалентна множенню (при $k > 0$) або діленню (при $k < 0$) без зоокруглення на p^k. *В. П. Сьомик.*

ЗУПИН — припинення роботи ЦОМ (обчислювань за програмою) з одночасною фіксацією результатів. Залежно від причин, що зумовили З., розрізняють: програмний З., що залежить від спец. команди в *програмі* розв'язування задачі; З. за ознакою, яку задають з пульта; аварійний З.; З., який здійснює з пульта оператор. У однопрограмних ЦОМ зазначені причини зумовлюють З. ЦОМ, у мультипрограмних — З. програми, а ЦОМ переходить або до розв'язування наступних задач, або в режим контролю. *В. П. Боюн.*



ІБМ (International Business Machines) — див. *«Інтернейшенал бізнес машінз корпорейшен»*.

«IBM-360» — сімейство цифрових обчислювальних машин з універсальною організацією. Розробила ці машини фірма *«Інтернейшенал бізнес машінз корпорейшен»*. У квітні 1964 було оголошено про випуск шести програмно сумісних моделей сімейства. Вони мали єдину систему команд і різнились обсягом використовуваної пам'яті та продуктивністю. Перші зразки машин цього сімейства надійшли замовникам у 2-й половині 1965, а до 1970 було



ПАМ'ЯТЬ

МОДЕЛЬ	ЄМНІСТЬ У 8-РОЗРЯДНИХ БАЙТАХ 1К = 1024	ДОВЖИНА СЛОВА, ЗА ВИНЯТКОМ ПАРНОСТІ	ЦИКЛ, МКСЕК
30	8–64 К	8	2,0
40	16–256 К	16	2,5
50	32–256 К	32	2,0
60	128–512 К	64	2,0
62	256–512 К	64	1,0
70	256–512 К	64	1,0

КЕРУВАННЯ

МОДЕЛЬ	ТИП	ЦИКЛ, МКСЕК
30	ОДНОСТОРОННЯ ПАМ'ЯТЬ	1,0
40	—— // ——	0,625
50	—— // ——	0,5
60	—— // ——	0,25
62	—— // ——	0,25
70	СТАНДАРТНІ КОМПОНЕНТИ	–

ПОТІК ДАНИХ

МОДЕЛЬ	РОЗРЯДНІСТЬ ШИНИ ПЕРЕДАВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ, ЗА ВИНЯТКОМ ПАРНОСТІ	ЗАТРИМКА НА ЛОГІЧНИЙ РІВЕНЬ, НСЕК
30	8	30
40	8	30
50	32	30
60	64	10
62	64	10
70	64	5

МІСЦЕВА ПАМ'ЯТЬ

МОДЕЛЬ	ТИП	ДОВЖИНА СЛОВА, ЗА ВИНЯТКОМ ПАРНОСТІ	ЦИКЛ, МКСЕК
30	ОСНОВНА ПАМ'ЯТЬ	8	2,0
40	РЕГІСТРИ НА ОСЕРДЯХ	16	1,25
50	—— // ——	32	0,5
60	ТРАНЗИСТОРНІ РЕГІСТРИ	64	–
62	—— // ——	64	–
70	—— // ——	64	–

1. Логічна структура системи «IBM-360».

створено близько 15 моделей, з яких найменша («IBM-360-20-1») приблизно в 50 раз дешевша і в 100 раз менш продуктивна за найбільшу («IBM-360-195»). Кілька моделей фірма не довела до серійного виробництва.

«IBM-360» — сімейство обчисл. машин з єдиним комплексом принципів побудови, тех. засобів, операційних програм і методів тех. обслуговування. В машини «IBM-360» закладено ряд нових принципів, що роблять їх універсальними й дають змогу однаково ефективно використовувати їх у різних галузях економіки, науки й техніки. Найважливіші з цих принципів такі: 1) нова елементна й технологічна база машин третього покоління (див. *Обчислювальна машина*), що забезпечує принципову реалізовність проекту «IBM-360»; 2) програмна сумісність усіх моделей сімейства — будь-яка з програм дає один і той самий результат на кожній з моделей, яка має відповідну пам'ять і пристрої введення — виведення. Мікропрограмний принцип керування забезпечує програмну сумісність деяких малих моделей «IBM-360» з ін. машинами фірми, випущеними раніше (режим емулювання); 3) універсальна *операційна система* (ОС), яка має для деяких моделей системи близько двох млн. команд. ОС «IBM-360» має *транслятори* для кількох найпоширеніших мов програмування і забезпечує різні швидкості й якість трансляції (вартість розробки ОС машин серії «IBM-360» майже дорівнює вартості виготовлення самої системи); 4) універсальність *команд системи* й організації, якої досягають таким способом. Осн. обчисл. можливості сімейства машин забезпечуються т. з. стандартною системою команд (86 команд). Доповнивши цей стандартний набір командами десяткової арифметики (8 команд), одержують систему команд для економ. розрахунків. При доповненні набору операціями з плаваючою комою (44 команди) одержують систему команд для наукових розрахунків. Якщо систему команд для економ. і наукових розрахунків доповнити засобами захисту пам'яті, то вийде універсальна система команд (близько 140 команд); 5) можливість підмикання великої кількості різних *зовнішніх пристроїв* і стандартного зчленовування цих пристроїв з *процесором* через апаратуру *каналів зв'язку*. Організацію зчленовування пристроїв з процесором виконано так, що вона забезпечує єдиний спосіб керування ними незалежно від їхньої фіз. природи й кількості їх та дає змогу об'єднувати кілька машин в одну ієрархічну *обчислювальну систему*. Більшість моделей «IBM-360» — це, власне, не машини, а обчисл. системи; 6) організація пам'яті, яка, незалежно від її фіз. реалізації, забезпечує просте переміщування і гнучкий схемний захист *програм*, допускає нарощування пам'яті до великих обсягів та

ефективне ієрархічне об'єднування запам'ятовувальних пристроїв з різними швидкостями й принципом роботи; 7) потужна система схемнопрограмного переривання, що дає змогу організувати ефективну роботу в системах керування в реальному масштабі часу.

На мал. 1 наведено логічну структуру «ІВМ-360» для перших шести моделей системи. Характеристики подано відповідно до різних рівнів продуктивності. Можна об'єднувати різні моделі системи в одну ієрархічну систему через спільні зовн. пристрої, канали чи спільну пам'ять.

Блоки пам'яті виготовляють або як одне ціле з процесором, або у вигляді окремих пристроїв. Цикл пам'яті не зв'язаний жорстко з внутр. циклом процесора, і це дає змогу оптимально вибирати швидкість роботи пам'яті при певній довжині слова. Адресація пам'яті здійснюється з точністю до 1 *байта*. Максимальне число адресовуваних *байтів* пам'яті — 16 777 216.

В обчисл. системі «ІВМ-360» використовують такі осн. формати інформації (мал. 2): *байт* — 8 двійкових розрядів; півслово — два *байти*; слово — двоє півслів (4 *байти*); подвійне слово — двоє слів (8 *байтів*). Крім цих одиниць інформації (полів фіксованої довжини) використовують і поля змінної довжини, кількість *байтів* у яких задається відповідними розрядами команди.

Центр. обчислювач «ІВМ-360» має 16 загальних регістрів для зберігання слів (індексів чи операндів з фіксованою комою) і 4 регістри для зберігання подвійних слів (операндів з плаваючою комою). Фізично ці регістри можна виконати на активних елементах, у вигляді окремого блоку пам'яті чи як частину

2. Формати даних «ІВМ-360».

осн. пам'яті. У будь-якому разі адреси й функції загальних регістрів однакові. Загальні регістри пронумеровано від 0 до 15, вони вибираються за допомогою 4-розрядного адресного поля, що позначається літерою *R* у команді. Команди «IBM-360» — змінної довжини 2, 4 й 6 *байтів* (див. мал. 2). Залежно від способу формування адреси операндів розрізняють п'ять осн. форматів команд: *RR* — регістр — регістр, *RX* — регістр — пам'ять з індексацією адреси пам'яті; *RS* — регістр — пам'ять без індексації адреси пам'яті, *SI* — безпосередній операнд — пам'ять, *SS* — пам'ять — пам'ять. Більшість команд системи «IBM-360» — двохадресні, проте є й одно- й трьохадресні. Адреса звертання до запам'ятовувального пристрою може модифікуватися (індексуватися) на вміст будь-якого з 16 загальних регістрів. У форматах *RS* і *SS* передбачено подвійну індексацію. Непрямої адресації нема. Керування порядком вибирання команд, а також фіксація й індикація стану системи по відношенню до виконуваної програми здійснюється словом стану програми — *PSW*, що займає 8 *байтів* пам'яті й має адресу команди, наступної за перериваною командою, ознаку результату раніше виконаної команди, код переривання, маску системи, маску програми, ключ захисту пам'яті й кілька службових розрядів для визначення режиму роботи. При перериванні поточне *PSW* замінюється новим, відповідно до причини переривання. Старе *PSW* запам'ятовується в окремій, що відповідає причині переривання, комірці пам'яті. В «IBM-360» можливі п'ять класів переривання (в порядку пріоритету обслуговування) — від схем контролю, від введення — виведення. при звертанні до супервізора, зовнішні та програмні.

Обмін інформацією між зовнішніми пристроями й пам'яттю здійснюється через селекторний і мультиплексний канали, що працюють незалежно один від одного (див. *Пристрій обміну*). Обмін здійснюється байтами й супроводжується контролем по парності. Швидкість обміну може досягати 5×10^6 *байт/сек.*

За елементною базою «IBM-360» належить до машин 3-го покоління. Всі моделі побудовано на базі гібридних *інтегральних схем*. Осн. логічною схемою є *інвертор* з діодними логічними елементами на вході. При виготовленні систем сімейства «IBM-360» застосовано новий спосіб автомат. компонування схем та використано багатошаровий друкований монтаж. Це дало змогу значно зменшити кількість рознімних компонентів машини, збільшити її надійність, поліпшити характеристики й зменшити вартість.

Основні характеристики деяких моделей сімейства обчислювальних систем «IBM-360»

Назва моделі	Рік виготовлення	Час додавання/ множення, *мксек*	Ємність ОЗП на магн. осердях, тис. слів	Тривалість циклу, *мксек*	Тип і ємність одного блока зовнішнього ЗП, млн. знаків	Введення — виведення	
						тип	швидкість: карт/*хв*, зн./*сек*, рядків/*хв*
Модель 40	1965	11,88/77	16—262	2,5	барабани 0,83, диски 7,25, магн. карти 400	перфокарти, перфострічки, друк. пристрої	1000/300 1000 200; 1100
Модель 30	1965	29/303 фікс., 39/312 плав.	8—64	1,5	барабани 0,83, диски 7,25, карти 400, стрічки	перфокарти, перфострічки, друк. пристрої	1000/300 1000 200; 1100
Модель 67	1966	1,3/	131—1048	0,75	барабани 4,1, диски 207; 7,5; 112, карти 400	перфокарти, друк. пристрої	1000/400 200; 1100
Модель 90	1967	0,18/0,27	262—1048	0,75	барабани 4,1, диски 234; 7,5; 112, карти 400	перфокарти, друк. пристрої	1000/400 200; 1100
Модель 75	1969	70/225	16—48	0,9	диски 7,25	перфокарти, друк. пристрої	1000 600; 1100
Модель 85	1969	0,08/0,5	4—6; тонкі плівки 1	1	стрічки	перфокарти, перфострічки, друк. пристрої	

Обчисл. система «IBM-360» має універсальну ОС, яка значно розширює можливості системи й програміста. Осн. призначення ОС — забезпечити користувачеві ефективне й оперативне використання ресурсів системи, добитися максимально можливого суміщення роботи пристроїв у часі, створити оптим. умови проходження потоку задач при мінімальній участі оператора. ОС «IBM-360» складається з набору опрацьовуючих і керуючих програм. Опрацьовуючі програми підмикаються відповідними блоками керуючих програм і призначені для перетворювання вхідної інформації до вигляду, придатного для безпосередньої реалізації в системі. Керуюча програма має три сфери дії: керування даними, керування завданнями й керування задачами. У відповідності з цим ОС має: супервізор введення — виведення, диспетчер завдань і диспетчер задач. Функції зв'язку оператора з системою і системи з оператором здійснює головний диспетчер. Опрацьовуючі програми ОС мають транслятори для найпоширеніших мов: *ФОРТРАН*, *КОБОЛ*, RPG, *АЛГОЛ-60* і *ПЛ-1*. Як мову

нижчого рівня використовують мнемокод «IBM-360». Передбачено можливість включати в систему транслятори й з інших мов. При цьому вирішальну роль відіграють як критерій повноти системи матем. забезпечення, так і економ. доцільність і тех. реалізовність проектів. Такі суперечності критеріїв призвели до того, що для мов ФОРТРАН і КОБОЛ використовують по три різні транслятори, кожен з яких накладає ті чи інші обмеження на використання мови й відрізняється швидкістю і якістю трансляції.

Архітектура машин «IBM-360» дуже вплинула на розробки багатьох зарубіжних фірм, які почали випускати обчисл. машини й системи, повністю чи значною мірою сумісні з машинами «IBM-360», логічна структура машин цього сімейства стала найпоширеніша у світі.

В табл. подано осн. тех. характеристики деяких реальних моделей системи «IBM-360».

Літ.: Амдаль Дж., Блоу Дж., Брукс Ф. Архитектура системы IBM-360. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965; Вычислительная система IBM/360. Пер. с англ. М., 1969; Зейденберг В. К., Матвеенко Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.

І. В. Вельбицький, П. В. Походзіло.

ІГОР ТЕОРІЯ — теорія побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь у більшості конфліктів, зацікавлені в тому, щоб приховати від супротивника свої наміри, прийняття рішень в умовах конфлікту виявляється здебільшого *прийняттям рішень в умовах невизначеності*. Навпаки, фактор невизначеності можна інтерпретувати як супротивника суб'єкта, що приймає рішення (через це прийняття рішень в умовах невизначеності можна розуміти як прийняття рішень в умовах конфлікту). Зокрема, багато тверджень *математичної статистики* звичайно формулюють як теоретико-ігрові. Логічною основою І. т. є формалізація трьох понять, що входять у її визначення і є фундаментальними для всієї теорії: конфлікту, прийняття рішення в ньому та оптимальності цього рішення. Ці поняття розглядають в І. т. в якнайширшому розумінні. Їхні формалізації відповідають змістовим уявленням про відповідні об'єкти. За змістом конфліктом вважають здебільшого будь-яке явище, щодо якого можна говорити про його учасників, про їхні дії, про наслідки явища, до яких ці дії приводять, про сторони, так чи інакше зацікавлені в цих наслідках, і про суть цієї зацікавленості. Якщо назвати учасників конфлікту к о а л і ц і я м и д і ї (позначивши їхню множину через $R_{д}$), можливі дії кожної з коаліцій дії — її с т р а т е г і я м и (множину всіх стратегій коаліції дії K позначають через S_K), наслідки конфлікту — с и т у а ц і я м и (множину всіх ситуацій позначають через S) і вважати, що кожна ситуація складається в результаті вибору кожної з коаліцій дії якоїсь своєї стратегії, так що $S \subset \prod_{K \in R_{д}} S_K$), а зацікавлені сторони — к о а л і ц і я м и і н т е р е с і в (множина їх — $R_і$) і, нарешті, якщо говорити про можливу перевагу для кожної коаліції інтересів K однієї ситуації s' над іншою s'' (цей факт позначають як $s' >_K s''$), то конфлікт загалом буде описано як систему

$$\Gamma = < R_{д}, \{S_K\}_{K \in R_{д}}, S, R_і \{>_K\}_{K \in R_і} >.$$

Таку систему, яка передає конфлікт, наз. грою. Конкретизації компонент, що задають гру, приводять до різноманітних окремих класів ігор.

Якщо у грі є лише одна коаліція дії K, можна вважати, що множина ситуацій S збігається з множиною стратегій S_K. Одержувані так ігри наз. н е с т р а т е г і ч н и м и. До них відносять *ігри без побічних платежів* та класичні *ігри кооперативні* разом з їхніми різними різновидами. Якщо в грі множини коаліцій дії та коаліцій інтересів збігаються ($R_{д} = R_і = I$; у цьому випадку і ті й ті коаліції наз. г р а в ц я м и), $S = \prod_{i \in I} S_i$, а відношення переваг задають ф-ціями виграшу, то одержують *ігри безкоаліційні*. Окремими класами їх є *ігри антагоністичні*, в т. ч. *ігри матричні* та *ігри на одиничному квадраті*; *ігри динамічні*, в т. ч. *ігри диференціальні*, *ігри рекурсивні*, *ігри стохастичні*, *ігри на виживання* та інші також належать до безкоаліційних ігор.

І. т. широко використовує різні математичні методи й результати з *імовірностей теорії*, класичного аналізу, функціонального аналізу (особливо важливими є теореми про нерухомі точки), комбінаторної топології, теорії дифер. та інтегр. рівнянь тощо. Специфіка І. т. сприяє розроблянню для неї різних матем. напрямів (напр. теорії *опуклих множин*, *програмування лінійного* і т. ін.).

Прийняттям рішення в І. т. вважають вибір коаліцій дії або, зокрема, вибір гравцем якоїсь своєї стратегії. Цей вибір можна уявляти собі у вигляді одноразової дії і зводити формально до вибору елемента з множини. Ігри з таким розумінням вибору стратегій наз. іграми в н о р м а л ь н і й ф о р м і. Їм протиставляють динамічні ігри, в яких вибір стратегії є процесом, що розгортається у часі. Цей процес супроводиться розширенням і звуженням можливостей, одержанням і втратою інформації про поточний стан справ тощо. Формально стратегією в такій грі є ф-ція, визначена на множині всіх інформаційних станів суб'єкта, що приймає рішення. Некритичне використання «свободи вибору» стратегій може призводити до парадоксальних явищ.

Питання про формалізацію поняття оптимальності є досить складним. Єдиного уявлення про оптимальність в І. т. немає, тому доводиться розглядати кілька різних *оптимальності принципів*. Сфера застосовності кожного з уживаних в І. т. принципів оптимальності

обмежується порівняно вузькими класами ігор або стосується обмежених аспектів розгляду їх. В основі кожного з цих принципів лежать певні інтуїтивні уявлення про оптимум як про щось «стійке» або «справедливе». Формалізація цих уявлень дає вимоги, які ставлять до оптимуму і мають характер аксіом. Поміж цих вимог можуть виявитися й такі, що суперечать одна одній (напр., можна вказати на конфлікти, в яких сторони змушені задовольнятися скромними виграшами, бо великі виграші досягаються лише в нестійких ситуаціях); тому в І.т. і не можна сформулювати єдиного принципу оптимальності.

Ситуації (або множини ситуацій), що задовольняють у якійсь грі ті чи інші вимоги оптимальності, наз. **розв'язками** цієї гри. Оскільки уявлення про оптимальність не є однозначними, можна говорити про розв'язки ігор у різному розумінні. Вироблення визначень розв'язків ігор, докази існування їх і розробляння способів фактичного знаходження їх — троє осн. питань сучасної І.т. Близькими до них є питання про єдиність розв'язків ігор, про існування в тих або інших класах ігор розв'язків, що мають певні задані властивості.

І. т. як матем. дисципліна зародилася одночасно з теорією ймовірностей у середині 17 ст., але протягом майже 300 років практично не розвивалася. Першою істотною працею І. т. слід вважати статтю Дж. фон Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928), а після опублікування монографії амер. математиків Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» (1944) І.т. сформувалася як самостійна матем. дисципліна. На відміну від інших галузей математики, що мають переважно фізичне або фізико-технічне походження, І. т. з самого початку свого розвитку була спрямована на розв'язування задач, що виникали в економіці (а саме: в конкурентній економіці). Згодом І. т. почали застосовувати, хоч і порівняно рідко, в інших галузях знань, що мають справу з конфліктами: у військовій справі, в питаннях моралі, при вивченні масової поведінки індивідів, наділених різними інтересами (напр., у питаннях міграції населення або при розгляді біол. боротьби за існування). Теоретико-ігрові методи прийняття оптим. рішень в умовах невизначеності можна широко застосовувати в медицині, в економ. й соціальному плануванні й прогнозуванні, при розроблянні багатьох питань техніки тощо. Іноді І. т. відносять до матем. апарату *кібернетики*.

В І. т. використовують ті самі методи, що й у всіх інших галузях математики. Принципи оптимальності виробляють аксіоматично, існування розв'язків встановлюють шляхом абстрактних міркувань, а знаходять їх, застосовуючи аналітичний апарат (часто досить громіздкий і хитромудрий) чи наближені *чисельні методи* (іноді — при реалізації на ЕОМ). Крім того, в І. т. великого значення набувають експериментальні методи, що полягають у багаторазовому відтворенні досліджуваної гри шляхом фактичного розігрування її людьми (експериментальні ігри, ділові ігри) чи шляхом цифрового моделювання. Цифрове моделювання особливо часто застосовують, досліджуючи ігри автоматів.

Наук. результати, що їх досягнуто в І. т., численні й різноманітні. Сформульовано багато принципів оптимальності, які можна застосовувати до різних класів ігор. Деякі з них (напр., *здійсненності мети принцип*, що приводить до т. з. ситуацій рівноваги, індивідуальні відхилення від яких не можуть супроводитися збільшенням виграшу, його окремий випадок — максимуму принцип, характеристична функція в кооперативній грі, теорія Неймана — Моргенштерна, *Шеплі вектор* тощо) відображують природні уявлення про оптимальне («справедливе»), інші, поки що нечисленні (критерій Мілнора), задають вичерпно їхніми інтуїтивно зрозумілими рисами, але загалом вони мають «синтетичний» характер і не наочні. В І. т. доведено багато теорем існування, що встановлюють фактичну реалізовність принципів оптимальності для відповідних класів ігор. В стратегічних іграх ця здатність реалізуватися досягається не безпосередньо, а, як це типово для математики, за рахунок розширення наперед заданої множини стратегій. Саме на початкових множинах стратегій вводять для розгляду ймовірнісні міри, які оголошують «узагальненими» *стратегіями мішаними*. Коли й цього не досить, доводиться вводити скінченно-адитивні міри. Існування ситуацій рівноваги в мішаних стратегіях (і тим більше — в лічильно-адитивних стратегіях) задовольняє, по суті, всі практичні потреби. В нестратегічних іграх це можна сказати лише про вектор Шеплі, а також про K-ядро та n-ядро. Питання про те, чи має ця гра розв'язок за Нейманом — Моргенштерном, є одним з найскладніших: поряд з досить широкими класами розв'язних ігор відомі й приклади нерозв'язних ігор.

Задачу знаходження розв'язків ігор розв'язано лише для окремих вузьких, хоч і досить численних класів ігор. Немає єдиного способу знаходження розв'язків навіть для ігор на одиничному квадраті з неперервною ф-цією виграшу. Досягнуті успіхи одержано як результат використання складного матем. апарату. В теорії нестратегічних ігор лише намічається створення якоїсь єдиної матем. теорії, а більшість результатів одержано конкретними, щоразу індивідуальними, комбінаторними міркуваннями. А загалом уся проблема ускладнюється тим, що часто розв'язок гри виявляється неоднозначним і вичерпний аналіз гри потребує, щоб було повністю перелічено всі її розв'язки. Лише в окремих, виключних випадках розв'язок гри піддається описові з допомогою ф-л. Здебільшого його формулюють у вигляді *алгоритмів* (напр., для матричних ігор це — алгоритм розв'язку стандартної задачі лінійного програмуван-

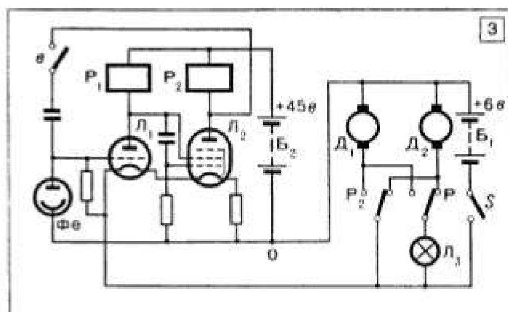
ня). Це утруднює оцінку залежності параметрів розв'язків гри від параметрів самої гри. Та ще й ця залежність, як правило, не є неперервною.

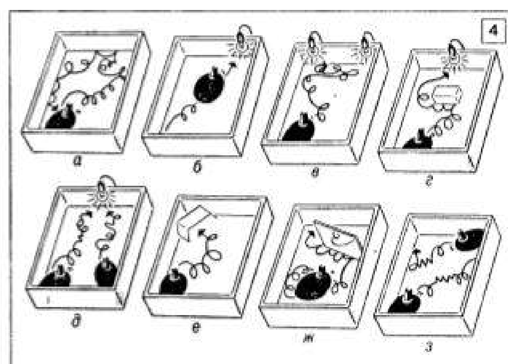
Останнім часом в І. т. дедалі більше займаються розроблянням різного роду обчислень ігор, алгебр ігор, просторів ігор тощо. Встановлюють закономірності, за допомогою яких аналіз одних ігор можна зводити до аналізу інших ігор, у тому або іншому розумінні простіше побудованих. Спрощення, яких при цьому досягають, мають здебільшого лише кількісний характер. Так, безкоаліційні ігри з великим числом гравців не вдається звести до послідовного аналізу системи ігор з меншим числом гравців кожна. Розробляють операції на ряді досить чітко окреслених класів ігор (напр., суми і добутку простих ігор). Розглядають випадкові ігри, тобто множини однотипових ігор з імовірнісними мірами на них. У випадкових іграх деякі властивості розв'язків (напр., існування у випадкових матричних іграх *сідлових точок* у *стратегіях чистих*) виявляються випадковими подіями, ймовірності яких піддаються обчисленню. Досліджують топологічні простори ігор та підмножини їх, які відрізняються властивостями сукупності розв'язків гри (напр., єдиністю розв'язку).

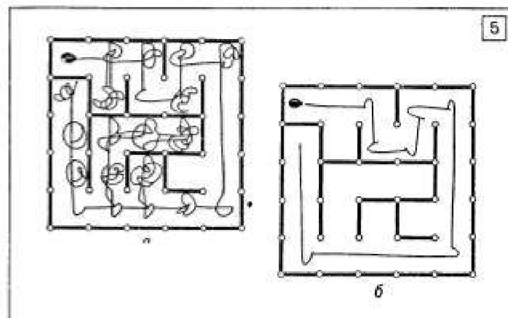
Літ.: Матричные игры. М., 1961; Бесконечные антагонистические игры. М., 1963; Позиционные игры. М., 1967; Первая Всесоюзная конференция по теории игр. Ереван, 1970; Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, № 2; Contributions to the theory of games, v. 1—3,6. Princeton, 1950—59; Льюс Р. Д., Райфа X. Игры и решения. Пер. с англ. М., 1961 [бібліогр. с. 608—625]; Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798—818]; Klaus G. Spieltheorie in philosophischer Sicht. Berlin, 1968; Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 695—702].

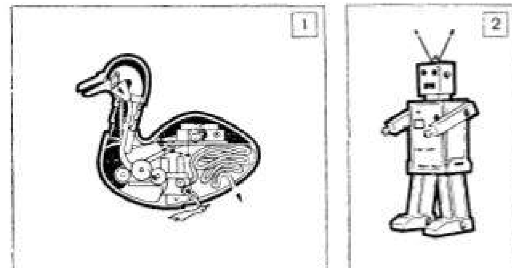
М. М. Воробйов.

ІГРАШКИ КІБЕРНЕТИЧНІ — кібернетичні пристрої (автомати), що наочно відтворюють ті чи інші властивості кібернетичних систем для проведення наукового експерименту або мають демонстраційний, учбово-методичний чи розважальний характер. Як правило, вони є прикладами пристроїв, які відтворюють відносно простими засобами різноманітні форми доцільної поведінки. Найпростіші І. к. — автомати з жорсткою програмою, які набули поширення у 18 ст., напр., годинники, обладнані додатковими механізмами, які приводять у дію фігурки людини, тварин і т. ін. Так, відомий годинник «яєчної фігури», що його виготовив видатний російський винахідник І. П. Кулібін, містив усередині мініатюрний іграшковий театр з фігурками, що









1. Схематичний розріз Вокансонової «качки».
2. «Робот».
3. Принципова схема Уолтерової «черепашки» ($Д_1$ — двигун стернової колонки; $Д_2$ — приводний двигун колеса).
4. Різні види поведінки Уолтерової «черепашки»: *а* — пошук за відсутності яскравого світла; *б* — прямування до не дуже сильного джерела світла; *в* — поведінка за наявності двох сильних джерел світла; *г* — обминання перешкоди при русі на світло; *д* — прямування до світла двох «черепашок»; *е* — відвідання «годівниці»; *ж* — «черепашка» перед дзеркалом; *з* — «знайомство» двох «черепашок».
5. Шлях «миші» в Шенноновому лабіринті: *а* — до «навчання»; *б* — після «навчання».

рухалися злагоджено; в годиннику Кокса — «павич», багато рухомих фігур («сова» в клітці, «півень», «павич» тощо), які з настанням заздалегідь встановленого часу приводяться у рух. До іншого виду І. к. належать автоматичні (заводні) іграшки, здатні виконувати дуже складні послідовності фіксованих дій. Такими є, напр., дотепні Вокансонові моделі: «флейтист» — фігура на зріст людини, що відтворювала на справжніх муз. інструментах 11 різних мелодій, та «качка» (мал. 1), здатна відтворювати складний комплекс рухів. До цього ж класу І. к. належать і т. з. андроїди — автомати, що мають вигляд фігурок (ляльок) з вбудованими всередину механізмами, які давали їм змогу виконувати фіксований набір дій. Перші андроїди виготовили швейц. годинникар П'єр-Жак Дро та його син Анрі Дро (на їхню честь і запроваджено поняття «андроїди»). Найвідоміші андроїди — «писар», «малювальник» і «музикантка».

Складнішим різновидом І. к. є іграшки, побудовані на базі т. з. рефлекторних автоматів. Як правило, це системи, здатні виконувати досить багато різних дій. Вибір необхідної в кожному конкретному випадку послідовності дій (керування автоматом) здійснюється на відстані за допомогою голосу, світлового або електричного (радіо) сигналу. Автомат розпізнає різні значення керуючого сигналу, напр., різні слова голосових команд, реагуючи на них відповідною послідовністю дій. Такі І. к. звичайно виконують у вигляді зовні стилізованих пристроїв, трохи схожих на людину, які наз. рóботами (мал. 2). Різноманітні, часто дуже складні рóботи будували й будують заради реклами, вони є й предметом творчості дитячих тех. станцій і гуртків. До цього ж класу рефлекторних автоматів належить і багато діючих моделей, керованих на відстані. Іграшки цього типу, напр., телекеровані моделі літаків, морських суден тощо, мають велике навчально-пізнавальне значення, вони дуже поширені.

як модель тропізмів. Широко відомі три «черепахи», які розробив англ. біофізик і нейрофізіолог Г. Уолтер у 1950—51. Вони являють собою саморушні електромех. пристрої, здатні відтворювати такі види поведінки: прямувати на світло або рухатися від нього, обминати перешкоди, шукати що-небудь, заходити до «годівниці», щоб підзарядити розряджені акумулятори, і т. ін. «Черепашок» приводять у рух два електродвигуни, що живляться від акумулятора. Перший двигун забезпечує поступальний рух пристрою, другий, розміщений на стерновій колонці, повертає його, змінюючи тим самим напрям руху.

Чутливими елементами перших двох «черепашок» Г. Уолтера були фотоелемент, розміщений на стерновій колонці, і механічний контакт, що замикався при наїзді на перешкоду. Керування поведінкою здійснюється за допомогою нескладної електронної схеми зі *зворотним зв'язком* (мал. 3). Схему відрегульовано в такий спосіб, що низький потенціал анода лампи $Л_1$ замикає другу лампу $Л_2$, перекидаючи при цьому реле $Р_2$ так, щоб виключалася можливість перебування під струмом водночас обох реле $Р_1$ та $Р_2$. Якщо фотоелемент Фе не освітлено, то лампу $Л_1$ замкнено, а $Л_2$ відкрито. При помірному освітленні фотоелемента лампа $Л_1$ трохи відкривається, проте струму, який вона проводить, недостатньо для спрацьовування реле $Р_1$, хоч зменшення напруги на її аноді досить для відпускання реле $Р_2$. Дальше збільшення освітленості Фе («засліплення») веде до спрацювання реле $Р_1$ при відпущеному $Р_2$. Внаслідок замикання мех. контакту *в* схема перетворюється на мультивібратор, який поперемінно вмикає й вимикає реле $Р_1$ та $Р_2$. Поводження «черепашки» залежно від зовнішньої дії й, отже, від станів реле $Р_1$ та $Р_2$ характеризується таблицею.

При русі з малою швидкістю у верхній частині «черепашки» засвічується лампочка $Л_3$, яка може бути «принадою» для іншої черепашки. При сумісному діянні двох под-

Подразнення	Стан реле		Стан двигуна	
	$Р_1$	$Р_2$	$Д_1$ (стерно)	$Д_2$ (привод)
Темрява	Вимкнено	Ввімкнено	Нормальна швидкість	Мала швидкість
Світло	Вимкнено	Вимкнено	Нерухомий	Нормальна швидкість
Засліплення	Ввімкнено	Вимкнено	Мала швидкість	Нормальна швидкість
Дотик	Вимкнено	Ввімкнено	Нормальна швидкість	Мала швидкість
	Ввімкнено	Вимкнено	Мала швидкість	Нормальна швидкість

Найвідомішими серед І. к. стали представники т. зв. «кібернетичного звіринця» — пристрої, що відтворюють різні форми поведінки певних тварин (черепах, жуків, білок, собак і ін.) і зовні трохи схожі на них. Перші найпростіші схеми таких пристроїв, здатні рухатися до світла («міль») або віддалятися від нього («клоп»), розробив Н. Вінер

разників пристрій реагує на сильніший. Різні види поведінки «черепашок» зображено на мал. 4.

Третя Уолтерова «черепашка» — «Кора» мала трохи складнішу конструкцію. До її схеми додатково входив мікрофон та ємнісний елемент пам'яті з великою сталою часу забування. Схему зібрано так, що звуковий сиг-

нал, коли його сприймає мікрофон, спричинює короткочасну зупинку «черепашки». Поява звукового сигналу водночас з наїздом на перешкоду спричинює короткочасний заряд конденсатора пам'яті. Після кількох наїздів на перешкоду, що супроводилися звуковим сигналом, заряд конденсатора досягав певної величини, й звуковий сигнал починав спричинювати таку саму реакцію, як і наїзд на перешкоду. Зазначена поведінка аналогічна відомим моделям умовного рефлексу. Відомі різноманітні конструкції «черепашок» та інших «звіряток», як правило, відрізняються одна від одної лише конструктивними деталями. Так, у деяких пристроях ємнісну пам'ять замінено на термореле з великою інерційністю, в інших — керуючі схеми побудовано на самих тільки реле. І. к. описаного виду дають змогу демонструвати різні форми поведінки й найпростіші умовні рефлекси, одержувані в моделях за допомогою дуже простих засобів.

До І. к. можна віднести й кілька спеціалізованих пристроїв, призначених для розв'язування деяких задач. Відома, наприклад, конструкція, яку запропонував К. Шеннон для «навчання» розв'язувати лабіринтні задачі. Цей пристрій, що має назву Шеннонового лабіринта («Шеннонова миша»), являє собою спеціалізований релейний логіко-мех. пристрій з дошкою з 5×5 клітинок, між якими можна довільно встановлювати перегородки — утворювати лабіринт. Щуп у вигляді невеликої металевої «мишки» вміщується в довільну клітку. Після численних спроб і блукання «миша» потрапляє до заданої клітки — досягає мети. При цьому відбувається «запам'ятовування» правильного шляху. Тепер «миша» потрапляє в клітку, в якій вона вже побувала, без блукання (мал. 5).

Іншими представниками пристроїв, що розв'язують деякі види розважальних задач, є автомат для гри в нім (де програє той, хто бере останній предмет із трьох купок), найпростішу модель якого розробив З. Хенісій, та кілька спеціалізованих пристроїв для гри в хрестики й нулики, розв'язування простих шахових задач тощо. Кількість «іграшкових» задач, що їх розв'язують різні автоматичні пристрої з пізнавальною метою, тепер безперервно зростає, проте розвиток програмування дає змогу, не створюючи для кожної задачі спеціального пристрою, використовувати для розв'язування чи моделювання їх універсальну ЦОМ. Ідеї, що набули спочатку свого втілення в І. к., знаходять застосування у ряді практично важливих систем і пристроїв — автомат. маніпуляторах, *роботах*, *роботах промислових*, автомат. наукових лабораторіях тощо.

Літ.: Полетаев И. А. Сигнал. М., 1958 [бібліогр. с. 401—402]; Крементуло Ю. В. Кібернетична «черепаха» «Тортіла-2». «Автоматика», 1959, № 2; Гаазе-Рапопорт М. Г. Автоматы и живые организмы. М., 1961 [бібліогр. с. 210—219]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820].

М. Г. Гаазе-Рапопорт.

ІГРИ АНТАГОНІСТИЧНІ — ігри двох учасників з прямо протилежними інтересами. Формально ця протилежність (антагоністичність) інтересів виражається в тому, що при переході від однієї ситуації до іншої зі збільшенням (зменшенням) виграшу одного з гравців чисельно однаково зменшується (збільшується) виграш другого гравця. Отже сума виграшів гравців у будь-якій ситуації в І. а. є сталою (звичайно можна вважати, що вона дорівнює нулеві). Тому І. а. називають також і г р а м и д в о х о с і б з н у л ь о в о ю с у м о ю (іноді — «нульовими іграми»). Матем. визначення поняття антагоністичності (рівність за величиною і протилежність за знаком *виграшу функцій* гравців) є формальним поняттям, яке відрізняється від змістового філософського поняття, але зберігає його осн. рису — непримиренність суперечності.

Для багатьох явищ І. а. є задовільною моделлю. До них належать деякі (але не всі) воєнні операції, спортивні та салонні ігри, прийняття ділових рішень в умовах конкуренції. Прийняття рішень в умовах невизначеності, напр., ігри проти природи, можна також моделювати як І. а., припустивши, що справжня, але невідома закономірність природи приведе до дій, найменш сприятливих для гравця. Це припущення не означає, проте, що природа наділена свідомістю, яка спрямована проти людини.

В І. а., за означенням, неможливі якісь переговори та угоди між гравцями. Справді, якщо в результаті якихось переговорів або угод один з гравців зміг би збільшити свій виграш на якусь величину, то виграш другого гравця зменшився б на таку саму величину, тобто для нього ці угоди були б невигідними.

Г. а. у нормальній формі (див. *Ігор теорія*) задають системою $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$, де A, B — множини стратегій відповідно 1-го і 2-го гравців, H — дійсна ф-ція, визначена на множині всіх ситуацій $A \times B$, яка є ф-цією виграшу 1-го гравця (ф-ція виграшу 2-го гравця дорівнює, за означенням Г. а., $-H$). Процес розігрування І. а. полягає в тому, що гравці вибирають свої стратегії $a \in A$, $b \in B$, після чого перший гравець одержує від другого суму $H(a, b)$. Розумна поведінка гравців в І. а. здійснюється на підставі *максиміну принципу*. Якщо

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \qquad (1)$$

то в кожного гравця існують *стратегії оптимальні*, тобто стратегії, на яких досягаються в (1) зов. *екстремуми*. Проте вже в найпростіших випадках рівність (1) може не мати місця. Напр., у *грі матричній* з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

виявляється $\max_i \min_j a_{ij} = -1$, $\min_j \max_i a_{ij} = 1$. Щоб забезпечити застосовність принципу максиміну, множини стратегій гравців розши-

рюють до множини *стратегій мішаних*, які полягають у випадковому виборі гравцями своїх початкових стратегій, що наз. чистими, а ф-ція виграшу визначається як *математичне сподівання* виграшу в умовах застосування мішаних стратегій. У наведеному прикладі оптим. мішаними стратегіями гравців є вибори гравцями обох своїх стратегій з імовірностями 1/2, а *гри значення* дорівнює нулеві.

Якщо множини A та B скінченні, то г. а. наз. матричною грою; для неї завжди існують оптим. мішані стратегії в обох гравців. А якщо одна з множин A чи B нескінченна, то гру наз. нескінченною. Принцип максиміну для нескінченних І.а. може здійснюватись (якщо рівність (1) не має місця) у вигляді рівності

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} H(a, b) = \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} H(a, b).$$

В цьому випадку оптим. стратегії гравців не існують, проте для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують ε-оптимальні стратегії (тобто стратегії, що забезпечують досягнення значення гри з заданою точністю ε) в обох гравців. Якщо обидві множини A та B нескінченні, то оптим. мішані стратегії (і навіть ε-оптимальні) існують не завжди, напр., у грі з ф-цією виграшу

$$H(a, b) = \begin{cases} 1, & a > b; \\ 0, & a = b; \\ -1, & a < b \end{cases}$$

де стратегіями гравців є множини натуральних чисел. Див. також ***Гра на одиничному квадраті***.

О. Б. Яновська.

ІГРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ — напрям у теорії процесів, що їх описують диференціальними рівняннями. І. д. мають властивості характерні і для *оптимального керування теорії*, і для *ігор теорії*. Безпосередньою причиною розвитку теорії І. д. були прикладні задачі, зокрема, військові.

Так, типовою задачею І. д. є, напр., задача про перехоплення винищувачем ворожого бомбардувальника. Обидва об'єкти (і винищувач, і бомбардувальник) керовані, і їхня поведінка залежить від того, як діють пілоти. Однак керування здійснюють різні особи з протилежними інтересами: бомбардувальник уникає зустрічі, а винищувач переслідує його. Складність завдання керування для пілота винищувача полягає в тому, що йому бракує інформації про майбутнє керування ворога. Він знає тех. можливості літака, знає його положення в даний момент, але не може знати, яке рішення про своє керування прийме пілот бомбардувальника кожного наступного моменту часу. Тому його рішення базується на інформації про ситуацію, яка склалася до даного моменту.

Формально в заг. вигляді І. д. можна сформулювати так. Є об'єкт керування, поведінку якого описують системою дифер. рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v), \qquad (1)$$

де x — n-вимірний вектор з компонентами $x_1, \ldots, x_n$, а $f(x, u)$ — n-вимірна вектор-функція з компонентами $f_i(x, u)$, $i = 1, \ldots, n$, u і v — керуючі параметри, що являють собою r-вимірний і s-вимірний вектори відповідно, які можуть змінюватися на множинах U і V. Крім того, задано термінальну множину $M \subset E^n$, де E^n — n-вимірний простір (див. *Простір абстрактний*). Нехай вибрано дві якісь ф-ції $u(x)$ і $v(x)$ так, що $u(x) \in U$, $v(x) \in V$ і рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(x), v(x)) \qquad (2)$$

має розв'язок. Тоді для кожного початкового стану визначено траєкторію $x(t)$ системи (2) і визначено функціонал

$$I(u(\cdot), v(\cdot);\ x^0) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(x(t)), v(x(t)))\, dt,$$

де t_1 — перший момент часу, коли $x(t) \in M$. Якщо такого моменту немає, то вважають, що $I = +\infty$. Завдання теорії І. д. полягає тепер у з'ясуванні питання про те, за яких умов і для яких точок x^0 можна знайти такі ф-ції $u^0(x)$ і $v^0(x)$, що $I(u^0(\cdot), v(\cdot);\ x^0) \leqslant I(u^0(\cdot)\ v^0(\cdot);\ x^0) \leqslant I(u(\cdot),\ v^0(\cdot);\ x^0)$.

У такій постановці задачу розв'язано лише для небагатьох конкретних окремих прикладів. Для випадку, коли множина M співпадає з усім простором, а t_1 — фіксоване, доведено існування розв'язку гри в певному узагальненому розумінні. Для заг. випадку одержано результати, коли припустити певну дискримінацію другого гравця, який здійснює керування v. А саме: припускають, що приймаючи своє рішення, перший гравець знає майбутнє керування другого на певному малому відрізку часу. В цьому випадку вдається показати, що весь простір початкових положень можна поділити на дві області, так, що виходячи з першої області, перший гравець завжди може гарантувати собі закінчення гри зі скінченною ціною I, в той час як у точках другої області він не може гарантувати собі жодного скінченного значення ціни. Побудовано достатні умови можливості закінчення гри зі скінченною ціною. Ці умови можна застосовувати в основному для розв'язування задач з лінійним об'єктом керування.

Літ.: Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. «Успехи математических наук», 1966, т. 21, № 4; Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., 1970 [бібліогр. с. 413—420]; Айзекс Р. Дифференциальные игры. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 470—472].

Б. М. Пшеничний.

ІГРИ МАТРИЧНІ — *ігри антагоністичні*, що в них обидва гравці мають скінченну кількість чистих стратегій. Якщо 1-й гравець має m стратегій, а 2-й гравець — n стратегій, то І. м. можна задати $m \times n$-матрицею $A = \|a_{ij}\|$, де a_{ij} — виграш 1-го гравця, якщо він обрав свою стратегію, $i = 1, \ldots, m$, а гравець 2-й обрав свою стратегію $j = 1, \ldots$

..., n. Доцільно, щоб, вибираючи стратегію, гравці керувалися *максиміну принципом.* І. м. завжди має розв'язок у *стратегіях мішаних.*

За приклад І. м. може правити гра в «хованки», яка полягає ось у чому. 2-й гравець ховається в одну з n комірок, а 1-й обстежує одну з них. Якщо він обрав комірку i й 2-й гравець там, то 1-й гравець виявляє 2-го гравця з імовірністю p_i; в противному разі ймовірність знайдення дорівнює нулеві. Метою 1-го гравця є максимізація (метою 2-го — мінімізація) імовірності знайдення. Цю гру описують діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Стратегії оптимальні гравців полягають в обиранні комірок з імовірностями, обернено пропорційними відповідним імовірностям виявлення.

І. м. моделюють широке коло антагоністичних конфліктних ситуацій з двома учасниками й скінченними множинами можливих дій у кожного з них. З цим пов'язане застосування І. м. під час вибору тактичних рішень. Іноді під одним із гравців розуміють «природу», тобто всю сукупність обставин, невідомих другому гравцеві, який приймає рішення. Такі ігри (їх часто наз. і г р а м и п р о т и п р и р о д и) виникають, напр., коли потрібно зважати на природні та ін. неконтрольовані фактори, що їх немає в розпорядженні якоїсь конкретної особи. При цьому природі приписують роль свідомого противника, антагоніста. *О. А. Корбут.*

ІГРИ НА ВИЖИВА́ННЯ — різновид *ігор динамічних* двох осіб. У таких іграх кожного моменту часу гравці володіють відповідно ресурсами r і $R - r$ $(0 < r < R)$ і грають у *гру матричну*. Виграші, одержані в цій грі, приєднують до тих ресурсів гравців, з якими вони починають гру наступного моменту часу. Гра закінчується, коли вичерпуються всі ресурси одного з гравців, причому переможець одержує одиницю виграшу. *В. К. Доманський.*

ІГРИ РЕФЛЕКСИ́ВНІ — клас ігор, у яких гравці вибирають стратегії на основі інформації про ранги рефлексії супротивників і матрицю платежів на відміну від класичної теорії ігор, де супротивники знають тільки про матрицю платежів. Ранги рефлексії гравців визначають так. Гравець має нульовий ранг рефлексії, якщо він приймає рішення про вибір стратегії лише на основі знання матриці платежів, тобто так само, як і в класичній *ігор теорії*. Гравець має перший ранг рефлексії, коли він вважає, що в його супротивників — нульовий ранг рефлексії. Взагалі гравець з k-им рангом рефлексії припускає, що його супротивники мають $k-1$-ий ранг рефлексії. Він здійснює за них необхідні міркування щодо вибору стратегій і обирає свою стратегію на основі знань про матрицю платежів і екстраполяцію дій своїх противників. Відомо, що у випадку гри двох осіб доцільно розглядати лише гравців з нульовим, першим і другим рангом рефлексії. Дальше збільшення рангу рефлексії в грі двох осіб не дає нічого нового. В іграх n осіб проблему оцінки максимального доцільного рангу рефлексії ще не розв'язано.

Літ.: Л е ф е в р В. А. Конфликтующие структуры. М., 1967 [бібліогр. с. 84—85]. *Д. О. Поспєлов.*

ІДЕНТИФІКА́ТОР — позначення об'єктів (напр., змінних, *масивів*, структур, *міток* та ін.) у *мовах програмування*.

ІДЕНТИФІКА́ЦІЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВА́ННЯ — процедура визначення оптимальної в певному розумінні математичної моделі об'єкта керування за реалізаціями його вхідних та вихідних сигналів. У заг. випадку І. о. к. передбачає розв'язання таких осн. задач: вибір класу *моделі математичної*, мови описання її, класу й типу вхідних сигналів, критеріїв відповідності (близькості) моделі й об'єкта, методу ідентифікації й розробку (або вибір) відповідних *алгоритмів*.

В и б і р к л а с у м о д е л е й провадять на основі теоретичного аналізу об'єкта керування ОК з використанням заг. закономірностей процесів (фіз., хім. та ін.), які перебігають в ОК, і (або) на підставі апріорної інформації про подібні об'єкти. Найефективнішим підходом є поєднання теоретичного й експериментального аналізу ОК; при цьому за допомогою експериментального аналізу роблять кількісне оцінювання характеристик ОК й перевірку відповідності моделі реальному об'єктові. За способом одержання експериментальних даних про ОК розрізняють методи активного й пасивного експерименту. При а к т и в н о м у експерименті на вхід ОК подають заздалегідь обране діяння (імпульсне, ступінчасте, гармонічне, псевдовипадкове та ін.), тоді як при пасивному експерименті використовують дані, одержані в процесі нормального функціонування ОК.

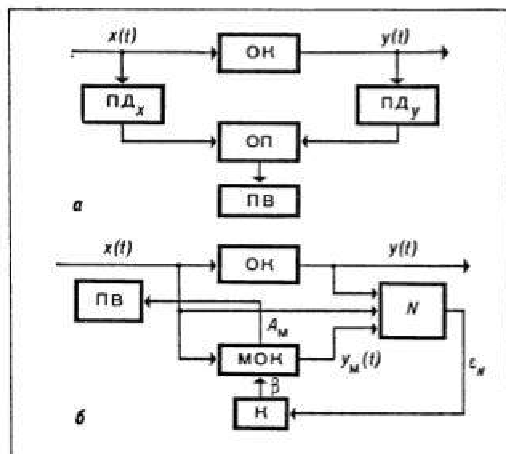
Як матем. моделі ОК використовують такі осн. характеристики ОК: статичну характеристику, *імпульсну перехідну функцію*, перехідну функцію, *передавальну функцію*, частотні характеристики (див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*), описувальні функції, дифер., різницеві, інтегральні й інтегро-дифер. рівняння, які зв'язують вхідні й вихідні сигнали ОК. Разом з цим широко застосовують представлення характеристик ОК у вигляді різних інтерполяційних рядів (Тейлора, Лягерра, Ерміта, Чебишова, Фур'є, Вольтерри та ін.).

При І. о. к. як к р и т е р і ї близькості ОК та його матем. моделі використовують: середньоквадратичну *похибку*, абсолютну похибку, максимум правдоподібності й інші оцінки.

Методи І. о. к. можна поділити на два великі класи: методи, за якими використовують досить заг. гіпотези про ОК (напр., лінійність, стаціонарність, детермінованість ОК) — т. з. методи н е п а р а м е т р и ч н о ї, або

функціональної, ідентифікації, і методи параметричної І. о. к., коли матем. модель ОК відома з точністю до параметрів, а завданням ідентифікації є кількісне оцінювання їх. Крім того, методи І. о. к. класифікують залежно від галузі їхнього застосування (типу сигналів, класу об'єктів), характеру використовуваної інформації (неперервної, дискретної), темпу видавання результатів (у темпі з процесом, періодично і т. ін.), виду визначуваних характеристик (напр., характеристик у часовій або частотній області), алгоритмів обчислень.

І. о. к. можна виконувати за розімкненою або замкненою схемою. Відмітною рисою І. о. к. за розімкненою схемою є те, що одержувані результати не використовуються безпосередньо для корекції (уточнення) прийнятої матем. моделі. І. о. к. за цією схемою передбачає виконання таких операцій: перетворення (ПД) вхідних $x(t)$ і вихідних $y(t)$ сигналів ОК, одержання необхідних співвідношень щодо невідомих параметрів моделі, використовуваних далі для обчислення (ОП) характеристик A і представлення (відображування) їх (ПВ) (див. мал., *а*). До групи методів, що використовують розімкнену схему, належать, наприклад, методи визначання: частотних характеристик ОК при гармонічних тестових сигналах, імпульсної перехідної функції з *Вінера — Хопфа рівняння*, т. з. інтегральні методи, що грунтуються на еквівалентному перетворюванні відправних дифер. рівнянь з метою одержати систему алгебр. (звичайно лінійних відносно невідомих коефіцієнтів) рівнянь, алгебричні методи визначання коефіцієнтів різницевих рівнянь.



Схеми ідентифікації об'єктів керування: *а* — розімкнена; *б* — замкнена.

І. о. к. за замкненою схемою (мал., *б*) передбачає оцінювання близькості $\varepsilon_N = N(y, y_м, x)$ моделі об'єкта керування МОК та ОК і корекцію К моделі, напр., корекцію параметрів β МОК. При цьому за характеристики ОК беруть характеристики $A_м$ МОК, скоригованої щодо оптимуму ε_N; тут N — у заг. випадку оператор або функціонал, $y_м$ — вихід моделі, решта позначень відповідають мал., *а*.

Часто при цьому ідентифікація за замкненою схемою (мал., *б*) зводиться до знаходження екстремуму вибраного (постульованого) критерію близькості ε_N моделі та об'єкта, залежного від шуканих коефіцієнтів β моделі. Щоб розв'язати цю задачу, використовують різні методи пошуку екстремуму (метод Ньютона, градієнтний, *найшвидшого спуску метод, стохастичної апроксимації метод*, методи випадкового пошуку та ін.). Зокрема, реалізацію градієнтних методів можна здійснити, використовуючи *допоміжного оператора метод* або функції чутливості (див. *Динамічних систем теорія чутливості*).

Побудова лінійних моделей об'єктів. При непараметричній ідентифікації визначають такі характеристики ОК: статичну характеристику, імпульсну перехідну функцію, перехідну функцію та частотні характеристики. Щоб підвищити точність оцінюваних характеристик, коли є завади, широко застосовують статистичні методи обробки експериментальних даних (див. *Експериментальних даних способи статистичної обробки*). Так, оцінюючи статичні характеристики, використовують методи регресійного аналізу, оцінюючи імпульсні перехідні функції й частотні характеристики — кореляційні методи, відповідно в часовій і частотній області (див. *Кореляційна функція*).

Параметрична ідентифікація ОК пов'язана з зображенням їхніх лінійних моделей звичайно у вигляді алгебр., дифер. і різницевих рівнянь або інтерполяційних рядів з наступним визначенням їхніх коефіцієнтів.

Ідентифікація нелінійних об'єктів. Для того, щоб описувати нелінійні ОК, використовують статичні характеристики, описувальні функції та різні інтерполяційні ряди. Визначаючи статичні характеристики, широко застосовують методи регресійного та дисперсійного аналізу. Досить заг. непараметричним зображенням моделі ОК є її описання у вигляді ряду Вольтерри — задача ідентифікації в цьому разі полягає у визначенні ядер цього ряду (багатовимірних імпульсних перехідних функцій). Нелінійні системи ОК можна описати різними системами ортонормованих функцій; так, в аналітичній теорії нелінійних систем амер. математик Н. Вінер (1894—1964) використав ряди Лагерра та Ерміта. Застосовують також описувальні функції, одержувані за даними активного експерименту при моногармонічному вхідному діянні, а також методи побудови лінеаризованих моделей нелінійних ОК — метод гармонічної лінеаризації і *статистичної лінеаризації метод*. При параметричній ідентифікації треба, щоб був відомим опис ОК у вигляді нелінійного рівняння, яке зв'язує його вхід і вихід. Оці-

нити коефіцієнти цього рівняння можна за розімкненою або замкненою схемою. При замкненій схемі використовують методи, аналогічні методам параметричної ідентифікації лінійних об'єктів.

Розглянуті постановки задач ідентифікації і методи розв'язування їх у багатьох випадках поширюють і на об'єкти керування зі змінними й розподіленими параметрами, а також на багатовимірні ОК. Проте ідентифікація об'єктів цих класів має специфічні особливості й часто пов'язана зі значними обчисл. труднощами.

З математичного погляду І. о. к. належить до класу обернених задач, які в багатьох випадках є некоректними. В зв'язку з цим при І. о. к. використовують методи регуляризації розв'язувань некоректно поставлених задач (див. *Некоректно поставлених задач способи розв'язування*).

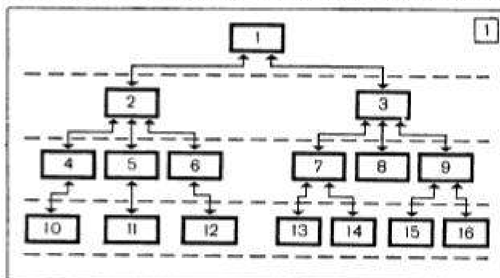
При постановці та розв'язуванні задачі І. о. к. важливе значення має область застосування (використання) одержуваних результатів. Так, основною метою дослідження об'єктів є одержання структури та оцінювання параметрів моделі, яка адекватно відбиває осн. закономірності процесів, що перебігають в об'єкті. В задачах керування І. о. к. необхідна для того, щоб виробити стратегію керування; при цьому часто не потрібно строгої адекватності моделі й об'єкта керування. Наприклад, у системах *дуального керування* І. о. к. є невід'ємною частиною процесу керування.

Методи І. о. к. є значною мірою універсальними, їх можна використати, щоб одержати матем. опис найрізноманітніших за своєю природою об'єктів у техніці, медицині, біології, геології, економіці та ін.

Літ.: Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. М., 1965 [бібліогр. с. 355—357]; Кулик В. Т. Алгоритмизация объектов управления. Справочник. К., 1968 [бібліогр. с. 335—343]; Райбман Н. С. Что такое идентификация? М., 1970; Идентификация систем (обзор). «Экспресс-информация. Системы автоматического управления», 1971, № 32; Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 170—174].

Ю. В. Крементуло, В. П. Яковлев.

ІЄРАРХІ́ЧНІ СИСТЕ́МИ КЕРУВА́ННЯ (ІСК) — системи довільної природи (технічні, економічні, біологічні, соціальні) та призначення, які мають багаторівневу структуру у функціональному, організаційному або якомусь іншому плані. ІСК вивчають у *кібернетиці технічній*, у *системотехніці*, *кібернетиці економічній* і *кібернетиці біологічній*. ІСК дуже різноманітні, трапляються вони в багатьох галузях діяльності людини і в природі. Типовими прикладами тех. ІСК є об'єднані енерг. системи, транспортні системи, системи зв'язку, пром. комплекси типу нафтопереробних і хім. заводів, гірничопромислових підприємств, які включають у себе шахти, збагачувальні фабрики тощо. Широке використовування електронних цифрових обчисл. машин (ЕЦОМ) для керування виробн. особливо вплинуло на різноманітність ІСК, з якими тепер доводиться стикатись (див. *Керуюча обчислювальна машина*). Класичним прикладом щодо цього може бути ІСК великими металург. підприємствами. На мал. 1 наведено такого роду систему керування металург. комбінатом, яка має чотирирівневу ієрархію ЕЦОМ. До комбінату входять коксові печі й цехи — шихтовий, чавуноплавильний, сталеплавильний, слябінговий, гарячої та холодної прокатки й обробки виробів. ЕЦОМ 4-го рівня (1) призначено розв'язувати генеральні завдання планування,

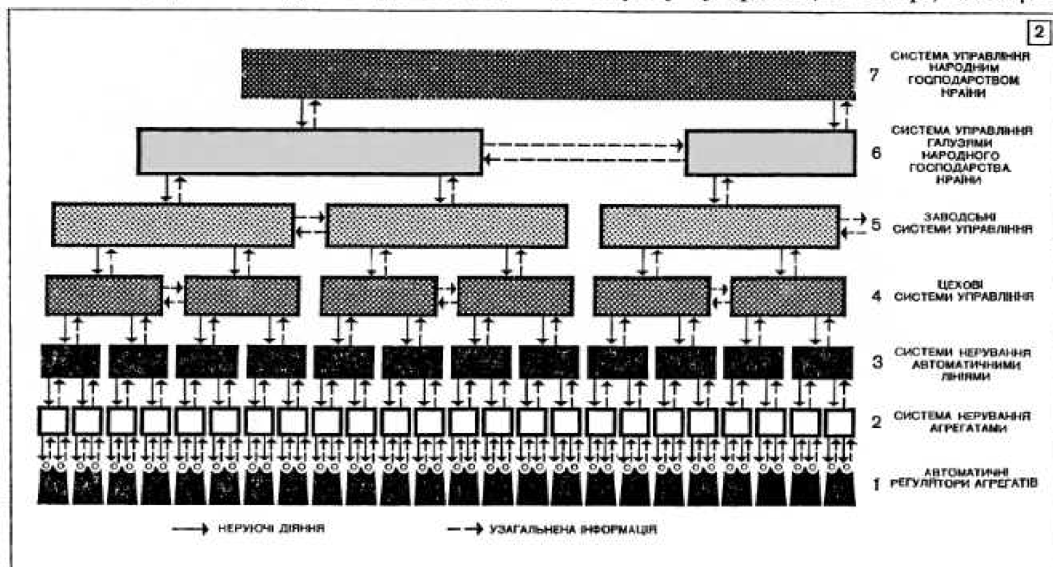


1. Ієрархічна система управління металургійним комбінатом.

економ. прогнозування, регулювання запасів та інші завдання суто організаційного, а не технологічного характеру. ЕЦОМ 3-го рівня (2 і 3) використовують, щоб складати довгострокові календарні плани роботи комбінату, причому одну з них (2) призначено планувати роботу підготовчих цехів (коксового, чавуноливарного і сталеливарного), а другу — (3) складати календарні плани роботи решти цехів і дільниць. За допомогою ЕЦОМ 2-го рівня ієрархії (4—9) здійснюється розробка короткострокових детальних календарних планів роботи кожного з цехів і провадиться збирання та обробка інформації, необхідної для проведення процесу автоматизованого керування роботою цехів та їхніх окремих дільниць. ЕЦОМ 1-го рівня (10—16) призначено для автомат. керування технологічними процесами й окремими агрегатами (шихтувальними машинами, домнами, конвертерами тощо).

Ієрархічні структури бувають і в найрізноманітніших системах адміністративного управління, системах управління воєнними операціями, а також при вивченні різноманітних проблем економіки. Напр., систему управління нар. господарством СРСР можна представити у вигляді семирівневої ієрархічної структури (мал. 2). Перші три нижні рівні належать до проблематики, яка стосується розв'язування завдань автоматичного або автоматизованого (тобто з участю людини) керування виробн. На цих рівнях велику роль у процесі керування відіграють автомат. засоби, а не людина. На решті рівнів (верхніх) здійснюється адміністративне й організаційне (планування економіки) управління, в якому більше значення мають люди, а не автомат. пристрої.

Часто ієрархічні структури трапляються й при розв'язуванні різних обчисл. задач, у *графів теорії*, в *логіці математичній*, *лінгвістиці математичній*, *програмуванні евристичному* й у багатьох інших випадках. Таке значне поширення ІСК та їхній універсальний характер зумовлені рядом переваг, які вони мають порівняно з системами централізованого (радіального) управління. Осн. переваги: 1) свобода локальних дій (протягом інтервалів часу, зумовлених моментами надходження керуючих діянь з боку



2. Ієрархічна структура системи управління народним господарством СРСР (за В. О. Трапезниковим).

вищого за ієрархією рівня); 2) можливість доцільно поєднувати різні для кожного рівня системи локальні критерії оптимальності і глобальний критерій оптимальності системи в цілому; 3) відсутність необхідності пропускати дуже великі потоки інформації через один пункт керування, бо при використовуванні ІСК інформація з нижчого рівня передається на верх. в усередненому (узагальненому) вигляді; 4) підвищена надійність системи керування й великі можливості введення елементної надлишковості до системи на необхідному рівні керування; 5) гнучкість системи керування й широкі можливості пристосування її до умов, що змінюються; 6) універсальність при розв'язуванні проблем керування, однотипних у цілому, але відмінних у деталях; 7) у ряді випадків економічна доцільність порівняно з системами керування іншої структури. Тому ІСК приділяють велику увагу, роблять спроби побудувати теорію, яка б дала змогу раціонально проектувати ІСК для найрізноманітніших цілей. Осн. розділами теорії ІСК, що певною мірою вже розроблено, є: а) структурний аналіз і синтез ІСК, б) проблема координації дій в ІСК, в) оптимізація функціонування ІСК.

Завдання **с т р у к т у р н о г о а н а л і з у т а с и н т е з у І С К** дуже різноманітні. Багато що в цих питаннях залежить від тієї ознаки, яку покладено в основу поділу складної системи на відповідні рівні ієрархії. При цьому одну й ту саму систему можна розчленувати на різну кількість рівнів ієрархії залежно від того, яку ознаку покладено в основу при побудові структури ІСК. Найчастіше такою є організаційна ознака, і це дає можливість відображати фактично існуючу субординацію. Напр., коли розглядають адміністративні або воєнні проблеми, такий підхід є цілком природним, та й у більшості інших випадків є підстави взяти його за осн. організаційний принцип. Це твердження справджується, зокрема, й при виборі структури керування багатьма виробн. і в інших випадках. Кожний рівень можна поділяти ще на ряд підрівнів уже за іншою ознакою. Як ознаку можна, зокрема, використати вибраний принцип керування: 1) з негативним *зворотним зв'язком*, 2) з самонастроюванням або взагалі адаптивний, 3) навчання, 4) самоорганізацію тощо. На мал. 3, *а* зображено схему, яка демонструє розчленування ІСК на осн. рівні за організаційною ознакою з подальшим розчленуванням кожного рівня на підрівні за вказаною ознакою — принципом керування. В інших випадках розчленування на осн. рівні або осн. рівнів на підрівні можна здійснювати за ознакою, яка характеризує певний аспект діяльності системи. Так., на мал. 3, *б* показано такого роду поділ на три рівні, які характеризують технологічний, інформаційний та економічний аспекти функціонування ІСК. Іноді процес членування на рівні за ознаками останнього роду наз. спец. терміном — **с т р а т и -**

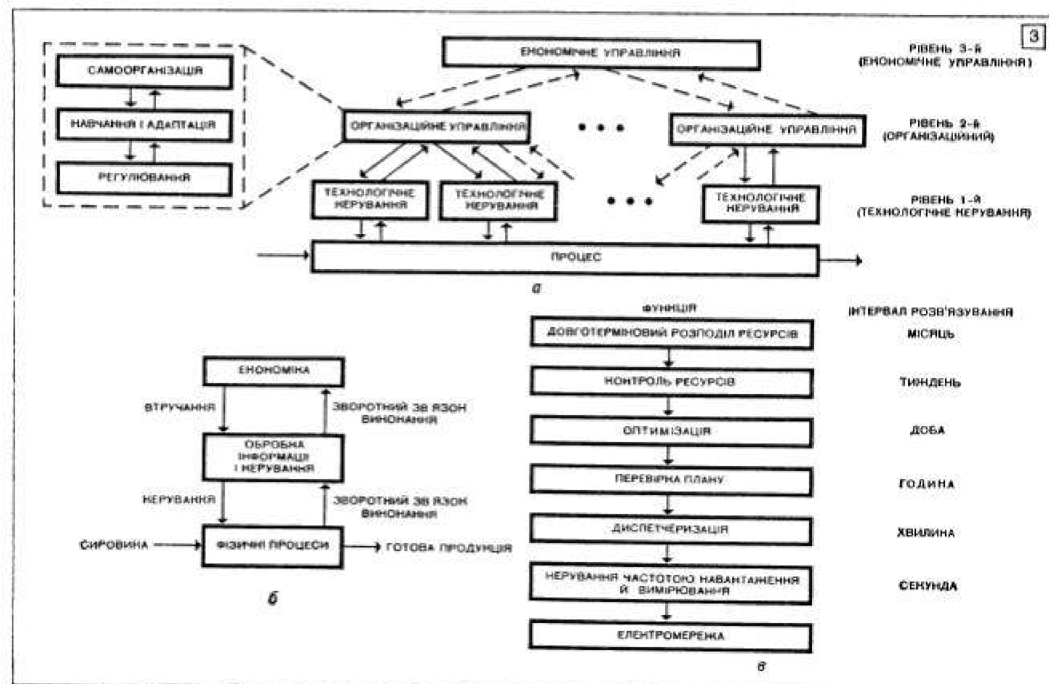
фікуванням системи, а самі рівні — стратами.

Поділяють системи на ієрархічно зв'язані один з одним рівні й за часовою ознакою. В цьому разі за основу віднесення елементів до того чи іншого рівня беруть величину інтервалу часу, через який необхідне втручання наступного рівня у процес керування попереднім рівнем, щоб забезпечити нормальне функціонування системи. На мал. 3, *в* наведено приклад поділу ІСК на рівні саме за такою ознакою щодо завдання керування енерг. системою. Поділ на рівні і за організаційною, і за часовою ознаками може приводити або до однієї й тієї самої структури, або до різних структур. Розчленування за часовою ознакою доцільне для проведення теоретичного дослідження ІСК, бо тоді кожний з рівнів можна вивчати незалежно від інших протягом проміжку часу, який минає від моменту подачі сигналу керування з верх. рівня на нижній до наступного такого моменту. Ця обставина й зумовлює відносну локальну незалежність *підсистем*, які входять до ІСК.

ІСК утворюються і в результаті розчленування якоїсь складної задачі на простіші підзадачі. Вважають, зокрема, що мозок людини побудований так, що в процесі прийняття рішення інтуїтивно складніша задача зводиться до ієрархії менш складних задач.

Наведені різні ознаки (або властивості) використовували для побудови ієрархічної структури «по вертикалі». При цьому безпосередньо елементи або один з одним зв'язані, або не зв'язані. Проте й у другому випадку між ними буде непрямий зв'язок через верхній рівень. Напр., це може бути в тому разі, якщо критерій оптимальності наступного рівня функціонально залежить від локальних критеріїв підсистем попереднього рівня. Цим системи з ієрархічною структурою істотно відрізняються від звичайних багатозв'язних систем, бо, коли в останніх немає безпосереднього зв'язку між елементами, вони розпадаються на окремі, не зв'язані одна з одною, частини. Кожний з елементів, які входять до того чи іншого рівня ІСК, може сам по собі мати досить складну структуру. Напр., це може бути самонастроювана, самонавчувана або самокерована система автомат. регулювання. Так, на мал. 4, *а* зображено дворівневу ІСК, яка складається з двох (може, й більше) самокерованих підсистем, з'єднаних у другому рівні ієрархії за принципом негативного зворотного зв'язку.

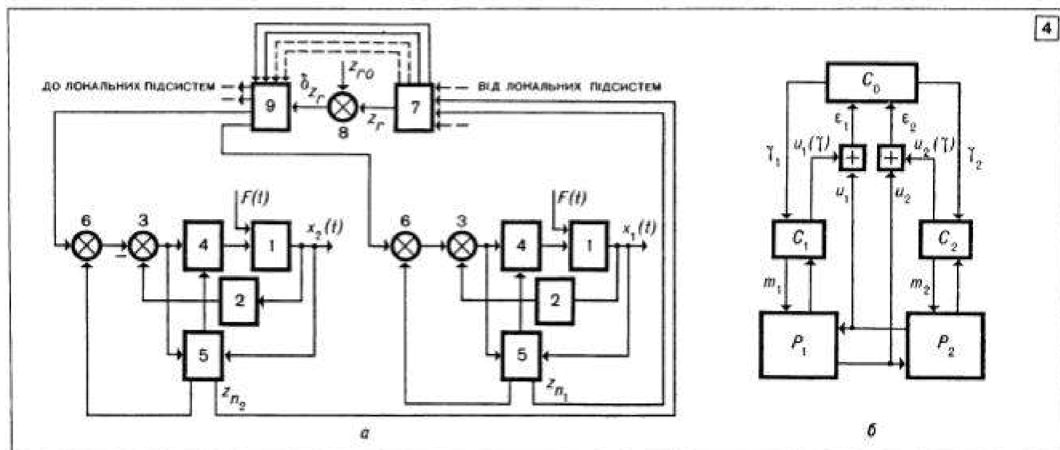
Всі ІСК, незалежно від їхньої природи, можна поділити на два великі класи: ІСК із зворотними зв'язками, коли інформація з нижнього рівня передається на найближчий верх. рівень (або кілька верхніх рівнів), та ІСК з прямими зв'язками керування, коли є лише сигнали керування, що йдуть з верх. рівня на найближчий нижній. У цьому разі структура ІСК має вигляд *«дерева»*. ІСК із зворотними зв'язками мають істотні переваги порівняно з ІСК без них.



3. Поділ ієрархічних систем управління: *а* — за організаційною ознакою і за принципами керування; *б* — за технологічною, інформаційною та економічною ознаками; *в* — за часовою ознакою.

Осн. задачами, які виникають при дослідженні ІСК, є задачі аналізу й задачі синтезу ієрархічних систем. Задачі аналізу трапляються, коли вивчають існуючі вже об'єкти, а задачі синтезу — коли проектують нові системи. В останньому випадку доводиться розв'язувати питання про необхідну кількість рівнів ієрархії, в зв'язку з чим і вдавалися до спроб розв'язати задачу про вибір оптимальної кількості рівнів ієрархії як задачу варіаційного характеру. Для розв'язування задач аналізу ІСК широко застосовують методи теорії графів.

Проблема координації керуючих діянь є специфічною для ІСК, хоч істотними є й стандартні задачі: визначення стійкості руху і якості *перехідних процесів*, визначення умов *автономності*, інваріантності, чутливості та ін. (див. *Стійкості дискретних систем теорія*, *Інваріантність систем автоматичного керування*). Задача координації ІСК зводиться до відшукування тих принципів (законів керування), які можна покласти в основу при визначенні діянь, що передаються з кожного верхнього рівня на підсистеми сусіднього нижнього рівня. Завжди також виникає необхідність шукати доцільний спосіб координації дій між підсистемами одного й того самого рівня в ІСК. Запропоновано кілька принципів, придатних для цієї мети. Один з них — принцип завбачень взаємодій — полягає в тому, що керуючі діяння з якогось верх. рівня розподіляються між підсистемами сусіднього нижнього рівня так, що кожна з підсистем стає автономною відносно всіх інших підсистем цього самого рівня. Фактично цей принцип, як і інші, розроблено лише стосовно дворівневих систем, але вважають, що можна багаторівневі системи поділити на дворівневі групи, і для кожної такої групи використати розроблений метод. Два інші відомі принципи координації наз. принципом балансу взаємодій і принципом оцінювання взаємодій. На мал. 4, *б* зображено дворівневу ІСК з двома підсистемами на першому рівні, за допомогою якої можна наочно продемонструвати сутність принципів координації. Перший рівень (регулятори C_1 та C_2) керує об'єктами P_1 та P_2, подаючи на їхній вхід відповідно керуючі діяння m_1 та m_2. Другий рівень (координатор C_0) керує регуляторами C_1 та C_2, подаючи на них координуючі діяння — відповідно γ_1 і γ_2. Втручання координатора проявляється в тому, що від значень γ_1 і γ_2 залежать керуючі діяння m_1 і m_2, цю залежність позначають у вигляді $m_1(\gamma_1)$ і $m_2(\gamma_2)$. В загальному випадку m_1 і m_2 можуть залежати одночасно від γ_1 і γ_2, що позначають як $m_1(\gamma_1)$ і $m_2(\gamma_2)$, де $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Систему наз. координованою, якщо знайдено такі значення $\hat{\gamma}$, що $m_1(\hat{\gamma})$ і $m_2(\hat{\gamma})$ задовольняють загальну мету, поставлену перед системою. Значення керуючих дій m_1 і m_2, що задовольняють умову координованості, позначають через $\hat{m}_1(\gamma)$ і $\hat{m}_2(\gamma)$. Для здійснення процесу координації істотне значення мають величини u_1 та u_2, які характеризують перехресні взаємодії між керованими об'єктами P_1 і P_2. Поточні значення цих величин u_1 і u_2 передаються до координатора C_0 і, зіставляючи їх із значеннями $\hat{u}_1(\gamma)$ й $\hat{u}_2(\gamma)$, які задовольняють умови координованості системи, визначають помилки розузгодження $\varepsilon_1 = u_1 - \hat{u}_2$ й $\varepsilon_2 = u_2 - \hat{u}_2$, які й використовують для побудови алгоритму функціонування координатора. Стратегію координації, при якій значення керуючих діянь $\hat{m}_1(\gamma)$ і $\hat{m}_2(\gamma)$ задовольняють загальну мету системи, коли $u_1(\gamma) = \hat{u}_1(\gamma)$ та $u_2(\gamma) = \hat{u}_2(\gamma)$, наз. принципом балансу взаємодії. Якщо ж останні співвідношення замінюються на $u_1(\gamma) \in U_1^{\gamma}$ та $u_2(\gamma) \in$



4. Дворівневі ієрархічні системи керування.

$\in U_2^\gamma$, де U_1^γ й U_2^γ — допустимий діапазон змін взаємодіянь u_1 й u_2, то принцип координації наз. принципом оцінки взаємодій.

Фактичний вибір тієї чи іншої стратегії координації провадиться на основі порівняння результатів теоретичних розрахунків, моделювання й евристичних міркувань. Теоретичні розрахунки зводяться до побудови відповідної ітераційної процедури, що базується на одному з відомих, але спеціально для цієї мети модифікованому методі оптимального керування. Зокрема, розроблено різні градієнтні й інтегральні процедури (подача сигналу про інтегральне значення величин u_i до координатора) для забезпечення умови координації $\varepsilon_i = 0$. Розглядали також питання збіжності цих процедур, вибору моменту закінчення ітераційного процесу та ін.

Коли досліджують складніші ІСК (понад два рівні), характер задач при переході від рівня до рівня істотно змінюється. Так, якщо для нижніх рівнів характерні саме описані вище методи координації, то для середніх рівнів (проблеми інформаційного характеру, пов'язані і з організаційним, і з адміністративним управлінням) задачі координації можуть бути вже іншими, а для верхніх рівнів, на яких розв'язують задачі суто економ. характеру й довготермінового планування та прогнозування, вони набувають ще й складнішого характеру. Вважають, що в міру переходу від нижніх рівнів до верх. розв'язування задач дедалі утруднюється, бо доводиться оперувати менш і менш вірогідною інформацією. Обсягу її звичайно не вистачає, щоб доброякісно здійснювати процес керування (див. *Керування з адаптацією*). Проте вже добре відомо, що тільки розв'язування задач для всіх рівнів, а не виключно для нижніх, дає змогу, використовуючи ІСК, досягти справді істотних економічних результатів.

Літ.: Коекин А. И. Оптимизация надежности и структуры иерархических систем управления. «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, в. 11; Кухтенко А. И. О теории сложных систем с иерархической структурой управления. В кн.: Сложные системы управления. К., 1966; Куликовский Р. Оптимальное управление сложными иерархическими системами. В кн.: Труды III Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 3. М., 1971; Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. Пер. с англ. К., 1973.

О. І. Кухтенко.

ІЄРАРХІЧНІСТЬ КЕРУВАННЯ — див. *Ієрархічні системи керування.*

ІМОВІРНІСНА МАШИНА — математична модель обчислювального пристрою, в роботі якого бере участь деякий випадковий процес. Різні варіанти поняття «І. м.» є узагальненнями понять *автомата детермінованого, Тьюрінга машини* й *автомата нескінченного.* Розглядали, напр., такі поняття І. м.: 1) Тьюрінга машина (або інший детермінований автомат) зі входом, до якого приєднано бернуллівський давач, що видає символи 1 та 0 з імовірністю p та $1-p$ відповідно ($0 < p < 1$); 2) І. м., яку одержують із Тьюрінга машини, коли для оглядуваного символу і внутрішнього стану задають не єдину комбінацію «символ, стан, рух», а таблицю ймовірностей виконання машиною кожної такої комбінації (якщо Тьюрінга машина є скінченним автоматом, то відповідна І. м. — це скінченний імовірнісний автомат. Такі автомати є найкраще вивченим класом І. м.); 3) нескінченний автомат з лічбовою множиною станів, для кожної пари станів якого зазначено ймовірність того, що автомат, перебуваючи в 1-му стані, перейде у 2-й. Різні варіанти поняття «І. м.» виражають різні рівні й мету абстракції. В наведених прикладах 2-е поняття є узагальненням 1-го, 3-є узагальнює 2-е. Можливі, звичайно, й інші поняття І. м., такі, напр., де використовують інші випадкові процеси або ж який-небудь із них використовують іншим способом.

І. м. можна використовувати для обчислювання функцій. Результат обчислення на І. м. для аргумента x виражається не однозначно: він залежить від реалізації випадкового процесу, який використовує машина. Різним можливим результатам природно відповідають імовірності того, що їх буде одержано в процесі роботи машини. Можна різними способами задавати «рівень імовірності», що виділяє єдину функцію, яка й вважатиметься функцією, яку можна обчислювати на цій машині. Наведемо двоє визначень обчисленності функції, аргументами й значеннями якої є натуральні числа: а) ф-ція $f(x)$ обчисленна на І. м. T, якщо для кожного x імовірність того, що машина T, будучи запущена на аргументі x, зупиниться, записавши число $f(x)$, — більша за α ($\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$); б) ф-ція $f(x)$ обчисленна на І. м. T, якщо ймовірність того, що для всіх x машина T зупиниться, записавши $f(x)$, — більша за α ($0 < \alpha < 1$). Роботу І. м. можна описувати й у термінах перелічності множин. Означення перелічності множини аналогічні означенням обчисленності функцій. Означенню б) напр., відповідає таке: множина D — перелічна на І. м. T, якщо ймовірність того, що всі елементи множини D і тільки вони з'являються на виході машини T, більша за α ($0 < \alpha < 1$). Можна фіксувати не одну множину, а цілий клас множин і цікавитися ймовірністю того, що І. м. перелічить яку-небудь множину цього класу (для різних реалізацій випадкового процесу на виході машини можуть з'являтися різні множини).

В теорії І. м. вивчають такі осн. питання: 1) розширення класу обчисленних функцій при переході від детермінованих машин до ймовірнісних (як саме цей клас залежить від імовірнісних параметрів, що беруть участь в означенні І. м.); 2) наскільки простіше й економніше можна одержати один і той самий результат, використовуючи І. м. замість детермінованих машин; 3) встановлення взаємозв'язку між різними означеннями І. м. та обчисленності на ній. У цих напрямах одержано низку результатів.

Перелічимо деякі з них (факти, що стосуються скінченних імовірнісних автоматів, див. у ст. *Автомат імовірнісний*): 1) означення обчислимості а) та б) еквівалентні в тому розумінні, що коли існує І. м. 1-го типу, яка обчислює функцію в розумінні а), то існує й І. м. того самого типу, яка обчислює ту саму функцію в розумінні б), і навпаки. Це справджується й для відповідних означень перелічності; 2) якщо на ймовірнісні параметри, які беруть участь в означенні І.м., не накладати ніяких обмежень, то будь-яку функцію можна обчислити на підходящій І. м. (перелічити будь-яку множину). Якщо ці параметри є обчисленними дійсними числами, то функція, обчислена на І. м., є обчисленною й на детермінованій машині (множина, перелічна на І. м., є перелічною й на детермінованій машині); 3) існують *рекурсивні функції*, обчисленні на І. м. у певному розумінні простіше, з меншою витратою часу (див. *Складність обчислювань*), ніж на будь-якій детермінованій машині; 4) існує така нескінченна множина, що детермінована машина не може перелічити нескінченну її підмножину, але підходяща І. м. з якою завгодно ймовірністю видає нескінченну підмножину, вміщу в ній. Причому ймовірнісні параметри І. м. є раціональними числами.

Теорія І. м. є так само абстрактною, як і взагалі *автоматів теорія*, і має таке саме відношення до вивчення реальних обчисл. машин та обчислювань, напр., обчислювань методом Монте-Карло (див. *Монте-Карло метод*). За аргументи й значення ф-ції, що її обчислює І. м., можна брати не лише записи натуральних чисел, а й взагалі слова в скінченному алфавіті, й розглядати цю ф-цію в широкому розумінні як поведінку машини. Щодо цього І. м. можуть правити за моделі при вивченні поведінки кібернетичних пристроїв та організмів, напр., у теорії навчання й адаптації. Див. також *Поведінка автоматів у випадкових середовищах*.

Літ.: Барздинь Я. М. О вычислимости на вероятностных машинах. «Доклады АН СССР. Серия математика, физика», 1969, т. 189, № 4; Леу К. де [та ін.]. Вычислимость на вероятностных машинах. В кн.: Автоматы. Пер. с англ. М., 1956; Рабин М. О. Вероятностные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник, № 9. М., 1964; Paz A. Introduction to probabilistic automata. New York — London, 1971.

В. М. Агафонов.

ІМОВІРНІСНИЙ ПРОЦЕС — те саме, що й *випадковий процес*.

ІМОВІРНІСТЬ — числова характеристика ступеню можливості настання якоїсь певної події за тих чи інших певних умов, які можуть повторюватися необмежене число разів. І. є характеристикою об'єктивно існуючого зв'язку між наведеними умовами і подією. Числове значення І. в деяких випадках можна одержати з т. з. «класичного» визначення І. Розгляньмо який-небудь дослід з n наслідками,— такими, що взаємно виключають один одного, й рівноможливими, тобто рівноправними по відношенню до умов досліду. Нехай A — подія, пов'язана з цим дослідом. Тоді І. $P(A)$ події A можна визначити за ф-лою: $P(A) = n(A)/n$, де $n(A)$ — число наслідків, що «сприяють» події A, тобто тих наслідків, які приводять до настання цієї події. Напр., при підкиданні гральної кості — кубика з однорідного матеріалу з пономерованими від 1 до 6 гранями — є 6 рівноможливих наслідків, що взаємно виключають один одного (випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок). І. $P(A)$ події A — випадання парної кількості очок — дорівнює $\frac{1}{2}$, поскільки тут $n(A) = 3$. Нагромаджені практикою численні спостереження дають змогу таким чином охарактеризувати І. як у розглянутому вище досліді з рівноймовірними (рівноможливими) результатами, так і в найзагальнішому випадку. Припустимо, що якийсь дослід можна повторити багато разів, так що в принципі серія однакових і незалежних один від одного дослідів, у кожному з яких залежно від випадку відбувається або не відбувається подія A, здійсненна. Нехай N — число всіх дослідів у серії, $N(A)$ — число тих дослідів, у яких настала подія A. Відношення $N(A)/N$ наз. частотою події A в цій серії дослідів. Як показує практика, при великих N частоти $N(A)/N$ у різних серіях дослідів виявляються приблизно однаковими, групуючись біля якогось числа $P(A)$, яке й наз. І. події A: $P(A) \sim N(A)/N$. Згідно з цією емпірично встановленою закономірністю І. $P(A)$ події A характеризує частку тих випадків у великій серії дослідів, у яких настає ця подія. Про аксіоматичний підхід до поняття І. див. у статті *Імовірностей теорія*.

М. П. Слободенюк.

ІМОВІРНІСТЬ УМОВНА — одне з основних понять *імовірностей теорії*. І. у. $P(A/B)$ події A за умови, що здійснилася подія B (припускається, що *імовірність* події B $P(B) > 0$), визначають за ф-лою: $P(A/B) = P(AB)/P(B)$. Якщо події A і B пов'язані з якимось дослідом із скінченним числом n рівноімовірних наслідків, що взаємовиключають один одного, а $n(B)$ і $n(AB)$ означають число тих наслідків, що приводять до настання відповідно подій B і AB, то

$$P(A/B) = \frac{n(AB)}{n} : \frac{n(B)}{n} = \frac{n(AB)}{n(B)},$$

тобто у «класичній» схемі І. у. $P(A/B)$ є відношення числа наслідків, що приводять до одночасного настання подій A і B, до числа тих наслідків, які приводять до настання події B.

На відміну від І. у. імовірність $P(A)$ події А, яку розглядають при фіксованому комплексі умов, наз. безумовною імовірністю.

М. П. Слободенюк.

ІМОВІРНОСТЕЙ РОЗПОДІЛ — див. *Розподіл імовірностей*.

ІМОВІРНОСТЕЙ ТЕОРІЯ — математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Під випадковим розуміють таке явище, яке при багаторазовому відтворенні всіх доступних фіксації умов його появи (умов досліду)

веде до різних результатів (наслідків досліду). Ці відмінності в перебігу явища зумовлені впливом численних факторів, які не підлягають точному обліку.

Випадкові явища, як правило, мають масовий характер — багаторазово повторюються в незмінних чи майже незмінних умовах. Тому кажуть також, що І. т. є наука про закономірності в масових явищах. Практика свідчить, що в масових випадкових явищах проявляються цілком певні закономірності, свого роду усталеності, властиві саме масовим явищам. Напр., коли підкидають монету, неможливо заздалегідь передбачити, який бік її (герб чи напис) випаде в цьому конкретному досліді. Однак зі збільшенням кількості кидань частота появи герба (тобто відношення числа появ герба до загального числа кидань) поступово стабілізується, наближаючись до числа 1/2.

Центральним поняттям І. т. є поняття *імовірності*. Імовірність тієї або іншої події можна оцінити на підставі наслідків довгої серії дослідів (спостережень). І. т. дає змогу відшукувати значення ймовірностей одних подій за відомими ймовірностями інших подій, пов'язаних якимсь чином з першими.

Найпростіше означити осн. поняття І. т. як матем. науки в рамках т. з. елементарної І. т. В елементарній І. т. виходять з припущення, що кожний дослід S завершується (залежно від випадку) однією й тільки однією з подій $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, які наз. **елементарними подіями** (або наслідками) досліду. Множину Ω всіх елементарних подій наз. **простором елементарних подій**. З кожною елементарною подією ω_k пов'язане додатне число p_k — імовірність даного наслідку; при цьому $\sum_k p_k = 1$. Кожну подію A, пов'язану з даним дослідом S, можна подати як подію, яка полягає в тому, що «настало або ω_{i_1}, або ω_{i_2}, ... або ω_{i_m}», де $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}$ — певні елементарні події (записуються так: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}$); про наслідки $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}$ кажуть, що вони «сприяють події A». Отже, множина всіх подій, пов'язаних з дослідом S, ототожнюється з множиною Ω всіх підмножин простору елементарних подій, зокрема, сама Ω наз. **достовірною** подією (вона відбувається за будь-якого наслідку досліду), а пуста підмножина $\varnothing$ простору Ω наз. **неможливою** подією (вона не відбувається ні за якого наслідку досліду). Імовірність $P(A)$ події $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$, за означенням, дорівнює сумі ймовірностей усіх тих елементарних подій, які сприяють A, тобто

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} P(\omega_{i_k}) = \sum_{k=1}^{m} p_{i_k}. \qquad (1)$$

З означення виходить, що $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$ і для будь-якої події A $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Зокрема, коли $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ (всі наслідки рівноможливі), одержуємо т. з. класичне означення ймовірності:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \qquad (2)$$

де $n(A)$ — число наслідків, які сприяють події A, а n — загальне число наслідків досліду. Класичне визначення зводить поняття ймовірності до невизначуваного поняття «рівноможливості».

Приклад. При підкиданні двох гральних костей (кубиків з однорідного матеріалу із занумерованими від 1 до 6 гранями) можливими є 36 наслідків, які взаємно виключають один одного. Їх можна позначити (i, j), де i — номер грані на першій кості, j — на другій. Природно вважати всі наслідки рівноймовірними. Події A — «сума очок дорівнює 6» — сприяють 5 наслідків, а саме (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) і (5,1), тому $P(A) = 5/36$.

Питання про вибір імовірностей p_k в кожній конкретній задачі лишається, власне, поза І. т. як матем. наукою. В одних випадках цей вибір можна зробити на основі обробки великої кількості спостережень, в інших (як, напр., у розглядуваному прикладі з гральною костю) — на основі існуючої об'єктивної симетрії зв'язку між умовами досліду та його наслідками тощо.

Об'єднанням (або сумою) подій A_1 і A_2 наз. подію A, яка полягає в настанні хоча б однієї з подій A_1 і A_2 (позначається $A = A_1 \cup A_2$). **Перетином** (або добутком) подій A_1 і A_2 наз. подію A, яка полягає в одночасному настанні й події A_1, й події A_2 (позначається $A = A_1 \cap A_2$, або $A = A_1 A_2$). Аналогічно означають об'єднання й перетин будь-якого числа подій $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (позначаються $\bigcup_{k=1}^{m} A_k, \bigcap_{k=1}^{m} A_k$, або $A_1 A_2, \ldots, A_m$). Події A_1 і A_2 наз. **несумісними**, якщо настання однієї з них виключає настання іншої (тобто, якщо A_1 і A_2 не можуть відбутися одночасно). Подія, яка полягає в ненастанні події A, наз. **протилежною** до A і позначають її $\overline{A}$.

Осн. положеннями елементарної І. т. є теореми додавання й множення імовірностей та *повної імовірності формула*. **Теорема додавання ймовірностей** полягає ось у чому. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_m$ є такими, що кожні дві з них несумісні, то ймовірність об'єднання їх дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто $P(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) = \sum_{1}^{m} P(A_k)$. Нехай проводяться N випробувань і при цьому події A, B і $A \cap B$ настають відповідно $N(A)$, $N(B)$ і $N(A \cap B)$ разів. Виділимо з загального числа випробувань ті, в яких настала подія B, і підрахуємо серед них частку тих, у яких настала й подія A. Ця частка (умовна частота настання події

A за умови B) дорівнює

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N} = \frac{\text{частота } (A \cap B)}{\text{частота } B}.$$

Зі збільшенням числа випробувань відношення $N(A \cap B) : N(B)$ наближатиметься до відношення $P(A \cap B) : P(B)$. Це останнє відношення й наз. умовною ймовірністю події A за умови B (позначається $P(A/B)$, тобто покладають за означенням

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3)$$

У випадку класичного означення ймовірності формула (3) веде до формули

$$P(A/B) = n(A \cap B)/n(B), \quad (4)$$

де $n(B)$ — число наслідків, які сприяють події B, а $n(A \cap B)$ — число наслідків, що сприяють сумісному настанню A і B. Відповідно до формули (2) рівність (4) визначає ймовірність події A в нових умовах, які виникають після настання події B. З (3) випливає т. з. **теорема множення ймовірностей** (для двох подій): $P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B) = P(A)\,P(B/A)$. Теорема множення узагальнюється на будь-яке число подій $A_1, A_2, \ldots, A_m$:

$$P\left(\bigcap_1^m A_k\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots \cdot P\left(A_m/\bigcap_1^{m-1} A_k\right).$$

Події A і B наз. **незалежними**, якщо $P(A/B) = P(A)$ (звідси завдяки теоремі множення виходить, що й $P(B/A) = P(B)$). Події $A_1, A_2, \ldots, A_m$ наз. **незалежними** (точніше: незалежними в сукупності), якщо умовна ймовірність будь-якої з них за умови, що настали якісь з решти подій, дорівнює безумовній імовірності цієї події. Для незалежних подій теорема множення ймовірностей означає, що $P\left(\bigcap_1^m A_k\right) = \prod_{k=1}^m P(A_k)$, тобто ймовірність сумісного здійснення незалежних подій дорівнює добуткові ймовірностей цих подій. У практичних питаннях, щоб визначити незалежність даних подій, рідко вдаються до перевірки рівностей типу $P(A/B) = P(A)$. Звичайно для цього користуються інтуїтивними міркуваннями, які основуються на досліді. Підставою для цього є концепція, згідно з якою події, що відбуваються в різних дослідах, мало пов'язаних у фіз. розумінні, є незалежними.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є незалежними, а ймовірності настання їх однакові й дорівнюють p, то ймовірність $P_n(k)$ настання точно k з них

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\,(1-p)^{n-k}. \quad (5)$$

Імовірність Q того, що число появ подій лежатиме у межах від k_1 до k_2, становить

$$Q = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\,(1-p)^{n-k}. \quad (6)$$

Для великих n наближене значення ймовірності Q можна одержати з т. з. граничної теореми Лапласа:

$$Q \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad (7)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

— нормальна функція розподілу (див. *Нормальний розподіл*).

Найважливішим поняттям І. т. є поняття про *випадкову величину*. Кажуть, що задано випадкову величину, якщо кожному наслідкові ω_k досліду поставлено у відповідність певне число y_k. Інакше кажучи, випадкова величина — це числова ф-ція, визначена на наслідках досліду. Якщо ξ — випадкова величина, то значення $y_k = \xi(\omega_k)$, яких вона набуває, наз. її можливими значеннями. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — усі різні можливі значення ξ. Позначимо $p_k = P\{\xi = x_k\}$, тоді $\sum_{k=1}^m p_k = 1$. Набір усіх можливих значень $x_1, x_2, \ldots, x_m$ і відповідних їм імовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_m$ наз. **розподілом випадкової величини**. *Розподіл імовірностей* випадкової величини дає її найповніший опис. Однак у ряді випадків про випадкову величину треба мати лише певне сумарне уявлення. Для цього використовують різні *числові характеристики випадкової величини*, з яких найпоширеніші *математичне сподівання* й *дисперсія*.

Схема досліду зі скінченним числом наслідків недостатня для застосовувань І. т. У практиці досліджень дуже часто трапляються явища, які не можна з задовільною точністю описати цією схемою. Такі ситуації виникають, напр., коли досліджують час безвідмовної роботи приладу, або коли вивчають випадкові шуми в радіотех. пристроях. У першому випадку як множину наслідків «досліду» природно вважати множину всіх додатних чисел, у другому — множину ф-цій часу (графіків шумів). Тому дуже важливе значення має формально-логіч. побудова загальної схе-

ми І. т., придатної, щоб описати всі ситуації, які виникають у даний момент, і водночас такої, що задовольняє запити практики.

Загальновизнаною є логіч. схема побудови основ І. т., яку запропонував 1933 рад. математик А. М. Колмогоров. Осн. риси цієї схеми такі. З кожним реальним дослідом (випробуванням, експериментом) пов'язується певна множина Ω елементарних подій (наслідків досліду) ω; сама Ω наз. **простором елементарних подій**. Будь-яку подію описують множиною елементарних подій, які сприяють їй, тобто розглядають як певну множину елементарних подій. Над подіями (підмножинами простору Ω) вводяться теоретикомножинні операції об'єднання, перетину та ін.; при цьому повністю зберігається термінологія елементарної І. т. Потім виділяють певний клас $\mathfrak{F}$ подій (клас спостережуваних у даному досліді подій), який утворює т. з. σ-алгебру (або борелівське поле) подій. В елементарній І. т. ймовірність визначалася формулою (1); при цьому за первісні правили ймовірності елементарних подій. У загальній схемі І. т. подія, кажучи взагалі, є нескінченною множиною елементарних подій, імовірність кожної з яких може дорівнювати нулеві. Тому в загальній схемі, за означенням, вважають заданими ймовірності всіх подій з $\mathfrak{F}$, причому властивість імовірності, яку в елементарній І. т. виражають теоремою додавання, тут не виводять з означення, а включають у неї. Точніше, припускають, що кожній події A з $\mathfrak{F}$ відповідає певне число $P(A)$, яке наз. імовірністю події A, причому виконуються такі умови: 1) $P(A) \geqslant 0$; 2) $P(\Omega) = 1$; 3) якщо події $A_1, A_2, \ldots$ попарно несумісні, то $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Властивості невід'ємності (умова 1) й адитивності (умова 3) імовірності є осн. властивості міри множини. Отже, ймовірність є нормована (умовою 2) цілком адитивна міра, визначена на σ-алгебрі $\mathfrak{F}$ підмножин простору Ω; тому з формального погляду І. т. можна розглядати як розділ теорії міри. За такого підходу осн. поняття І. т. набувають нового висвітлення: події з $\mathfrak{F}$ стають вимірними множинами простору Ω, випадкові величини — вимірними відносно $\mathfrak{F}$ ф-ціями, матем. сподівання випадкових величин — абстрактними інтегралами Лебега тощо. Виклад І. т., оснований на простій системі аксіом [типу 1), 2), 3)], вносить повну ясність у розуміння формальної побудови цієї теорії і сприяє розвиткові не тільки самої І. т., а й схожих на неї формальною будовою матем. теорій.

Осн. пізнавальну цінність І. т. розкривають граничні теореми. Найпростішим прикладом таких теорем є теорема (закон) Бернуллі, яка твердить, що за великої кількості незалежних випробувань частота появи якоїсь події A лише ненабагато відхиляється від її ймовірності $p = P(A)$. Якщо ξ_k — число появ події A при k-му випробуванні, то загальне число появ цієї події при n випробуваннях дорівнює сумі $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$; тут величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ є незалежними, кожна з них набуває лише двох значень: 1 з імовірністю p і 0 з імовірністю $1 - p$. В цих позначеннях теорема Бернуллі стверджує, що за будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \to 1$$

при $n \to \infty$. Теорема Бернуллі є найпростішим окремим випадком *великих чисел закону*. Прикладом граничної теореми іншого типу є вже згадана вище теорема Лапласа, яка в запроваджених тут позначеннях стверджує, що за $n \to \infty$

$$P\left\{x_1 < \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x_2\right\} \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $\Phi(x)$ — нормальна ф-ція розподілу; теорема Лапласа оцінює ймовірність відхилень частоти настання події A від імовірності її настання p і є найпростішим окремим випадком *центральної граничної теореми*.

Граничні теореми для сум випадкових величин тісно пов'язані з важливим розділом І. т. — *випадкових процесів теорією*. Ті закони розподілу, які виконують роль граничних для наростаючих сум випадкових величин, у теорії випадкових процесів є точними законами розподілу відповідних характеристик. Використовуючи це, за допомогою відповідних *випадкових процесів* вдається довести багато граничних теорем.

І. т. широко використовують у багатьох розділах природознавства й техніки (переважно в теорії похибок спостережень); її покладено в основу *ігор теорії, інформації теорії, масового обслуговування теорії* та *математичної статистики*.

І. т. як матем. наука виникла в середині 17 ст. Перші праці з І. т., які належать франц. ученим Б. Паскалю (1623—62) і П. Ферма (1601—65) і голл. вченому Х. Гюйгенсу (1629—95), з'явились у зв'язку з підрахунком різних імовірностей в азартних іграх. Значний вклад у І. т. зробив швейц. математик Я. Бернуллі (1654—1705), який сформулював закон великих чисел для схеми незалежних випробувань з двома наслідками (опубл. 1713). Дальший розвиток І. т. пов'язаний з іменами англ. матем. Муавра (1667—1754), франц. вченого П. Лапласа (1749—1827), нім. матем. К. Гаусса (1777—1855), франц. матем. С. Пуассона (1781—1840). Наступний етап у розвитку І. т. пов'язаний переважно з іменами рос. математиків П. Л. Чебишова (1821—94), О. М. Ляпунова (1857—1918) та А. А. Маркова (1856—1922). Чебишов 1867 довів закон великих чисел при досить загальних припущеннях; він уперше сформулював центр. граничну теорему для

сум незалежних випадкових величин (1887) і розробив один з методів доведення її. Ляпунов іншим методом одержав (1901) розв'язок цього питання, близький до остаточного. Марков уперше розглянув (1907) один випадок залежних випробувань, який згодом назвали ланцюгами Маркова. І. т. стала однією з матем. наук, які швидко розвиваються і тісно пов'язані з потребами практики. Значний вклад у її розвиток зробили рад. математики С. Н. Бернштейн (1880—1968), О. Я. Хінчин (1894—1959) і А. М. Колмогоров (н. 1903).

Літ.: Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.— Л., 1936 [бібліогр. с. 80]; Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.—Л., 1946 [бібліогр. с. 547—549]; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [бібліогр. с. 481—487]; Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1969 [бібліогр. с. 390—395]; Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1970; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Пер. с англ., т. 1—2. М., 1967.

М. П. Слободенюк.

ІМПЛІКА́ЦІЯ в алгебрі логіки — одна з *логічних операцій*, якій у природній мові відповідає зв'язка «якщо..., то» і яка утворює з двох висловлювань A і B умовне висловлювання «якщо A, то B». В *алгебрі логіки* І. записують $A \to B$ (або $A \supset B$).

ІМПЛІКА́ЦІЯ СТРО́ГА — імплікація, вільна від так званих парадоксів матеріальної імплікації (м. і.): «з хибності випливає все що завгодно», «істина випливає з чого завгодно». Найвідоміший вид І. с. — І. с. Льюїса, яку він запровадив 1932. У модальних численнях К. Льюїса І. с. виражається через м. і. і модальний оператор необхідності: «якщо A, то B» означає «неможливо, щоб A і не B виконувалися водночас». Проте в численнях Льюїса виникають «парадокси І. с.»: «необхідне висловлювання випливає з будь-якого», «з неможливого висловлювання випливає будь-яке». Числення І. с., у якому не можна вивести «парадокси» як м. і., так і І. с. Льюїса, описав В. Аккерман 1956. У 1958 запропоновано деяку модифікацію числення Аккермана — еквівалентне числення E. Схеми аксіом і правила виведення такі:

$$(1)\ ((A \to A) \to B) \to B,\ (2)\ (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),\ \ (3)\ (A \to (A \to B)) \to (A \to B).$$

$$(4)\ A \,\&\, B \to A,\ \ (5)\ A \,\&\, B \to B,\ \ (6)\ (A \to B) \,\&\, (A \to C) \to (A \to B \,\&\, C),\ \ (7)\ NA \,\&\, NB \to N(A \,\&\, B),\ \text{де}\ NA = df\,((A \to A) \to A),\ \ (8)\ A \to A \vee B,\ \ (9)\ B \to A \vee B,\ \ (10)\ (A \to C) \,\&\, (B \to C) \to (A \vee B \to C),\ \ (11)\ A \,\&\, (B \vee C) \to B \vee (A \,\&\, C),\ \ (12)\ (A \to \overline{A}) \to \overline{A},$$

$$(13)\ (A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A}),\ \ (14)\ \overline{\overline{A}} \to A,$$

$$(R1)\ \frac{A,\ A \to B}{B},\quad (R2)\ \frac{A,\ B}{A \,\&\, B}.$$

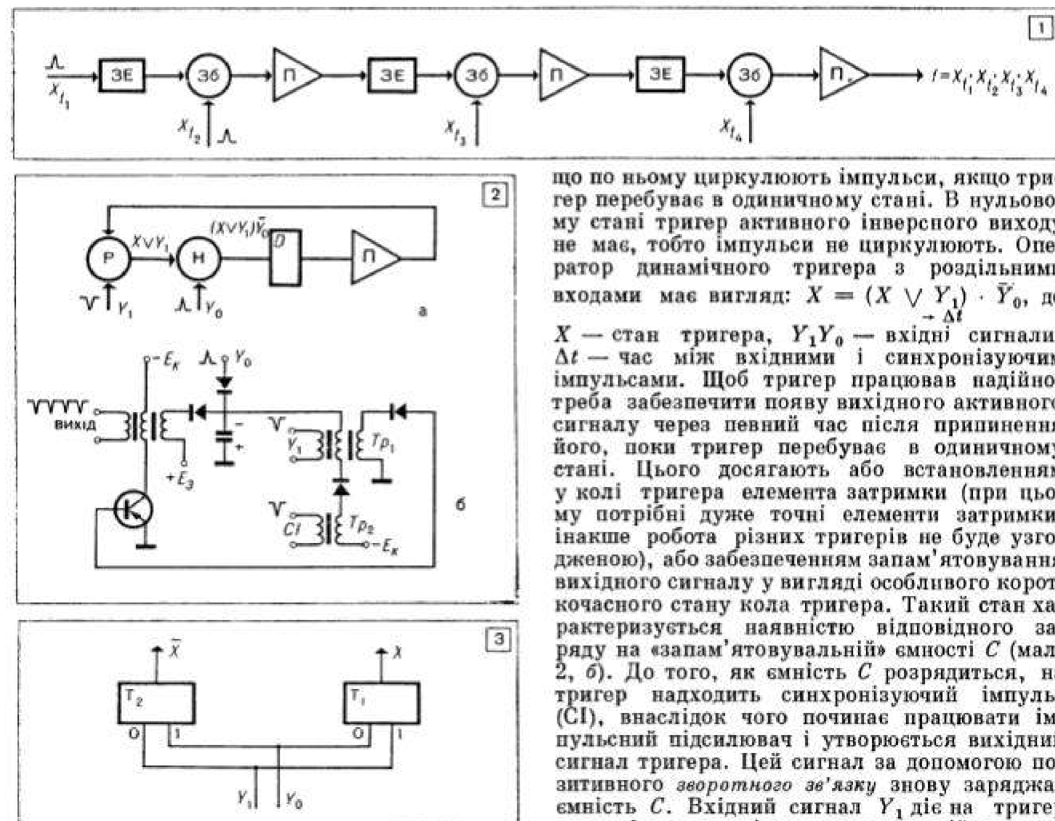
У численні E для вивідності І. с. $A \to B$ необхідним є певний зв'язок між A та B. Напр., формула $A \to B$ є невивідною, якщо A і B не мають спільної літери (теорема Белнапа — Донченка). На відміну від м. і., для І. с. немає скінченної таблиці істинності. Важливим у численні E є числення 1-го ступеня, у формулах якого немає імплікації під знаком іншої імплікації. Такі формули допускають досить просте семантичне тлумачення. Крім того, побудовано *алгоритм*, який дає змогу для будь-якої формули 1-го ступеня визначити, чи вивідна вона в E. У зв'язку з труднощами семантичної інтерпретації і проблемою розв'язування для всього E було побудовано ще одне числення І. с. sE. Це числення, як слабше, ніж E, збігається з E на формулах 1-го ступеня. Крім того, воно є розв'язним. Знайдено алгоритм розпізнавання вивідності для деяких інших числень, подібних до E. Найцікавіше з них імплікативно-негативне числення E_{Γ} з аксіомами (1) — (3), (12) — (14) і правилом виведення (R1).

Л. Л. Максимова.

ІМПУЛЬСНА ЕЛЕМЕ́НТНА СТРУКТУ́РА — структура елементів, яка забезпечує виконання логічних перетворень над інформаційними сигналами імпульсного вигляду. Імпульсний сигнал на відміну від потенціального характеризується відсутністю керування його спадом, що виникає без зовн. діяння через певний час, який характеризує тривалість сигналу (див. *Елементна структура ЦОМ*). В основу побудови І. е. с. покладено два принципи: для першого з них характерним є використання *тригерів динамічних* та імпульсних вентилів, які не мають властивості запам'ятовувати, для другого — використання *логічних затримувальних елементів* (див. також *Елементні структури на логічних затримувальних елементах*). В І. е. с. першого типу утворення й передавання сигналів мають бути жорстко синхронізовані в межах часток тривалості сигналів, бо інакше порушується потрібна фіз. взаємодія сигналів у *логічних елементах ЦОМ*. Цього досягають утворенням інформаційних сигналів на входах тригерів за допомогою спец. синхронізуючих імпульсів, відсутністю довгих комбінаційних кіл, застосуванням затримки сигналів та їхнього короткочасного запам'ятовування на ємностях та ін. способами. І. е. с. на логіч. затримувальних елементах відрізняються від І. е. с. на динаміч. тригерах тим, що в них синхронізація сигналами опитування провадиться на кожному логіч. елементі. Це майже зовсім усуває розузгодження інформаційних сигналів у часі, бо обмежує ділянки, де воно може виникнути, лише одним каскадом.

В І. е. с. на динамічних тригерах «1» кодується серією імпульсів, «0» — їхньою відсутністю. Як логічні елементи в цій І. е. с. застосовують імпульсні збіги, імпульсні незбіги й імпульсні розділювачі. Імпульсні збіги здебільшого застосовують двовходові та багатовходові. При цьому синтез багатовходових збігів за допомогою комбінації двох входових, як правило, утруднений, бо не збігається в часі надходження сигналів з виходу одних

логіч. елементів на вхід інших. Щоб реалізувати багатовходові збіги сигналів, які надходять у певній послідовності, провадиться короткочасне запам'ятовування інформації (напр., на ємностях динаміч. тригерів), бо кожний сигнал окремо має зберігати стан «1» в елементі до приходу наступного сигналу (мал. 1). У більшості схем намагаються обійтися двовходовими імпульсними збігами. Імпульсні незбіги реалізує оператор типу $X\bar{Y}$. При цьому використовують різні (як правило, протилежні) способи відображення вхідної змінної величини, що стоїть під знаком інверсії $\bar{Y}$, і вхідної змінної X. Напр., одиничне значення змінної Y відображується імпульсом протилежної полярності щодо імпульсу, який представляє одиничне значення X. Такий спосіб кодування сприяє підвищенню надійності елемента, оскільки взаємодія (збіг) двох активних сигналів відбувається лише тоді, коли на виході не повинен з'явитися сигнал.



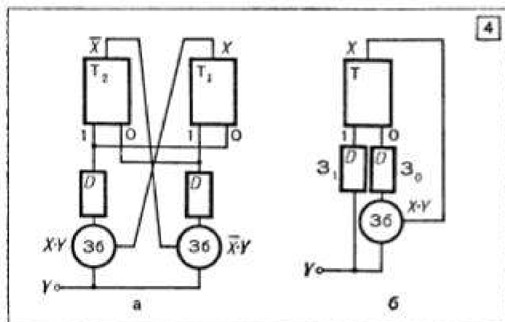
1. Блок-схема багатовходового імпульсного збігу: Зб — двовходовий збіг; ЗЕ — запам'ятовувальний елемент; П — підсилювач.
2. Тригер динамічний: а — блок-схема; б — принципова схема: Р — імпульсний поділ; Н — імпульсний незбіг; D — затримка; П — підсилювач; $E_к$ — напруга колекторна; $E_з$ — напруга зміщення; Tp_1, Tp_2 — трансформатори; CI — серія імпульсів.
3. Тригерний каскад з прямим і інверсним виходами.

З імпульсних логіч. елементів найпростішими й найнадійнішими є імпульсні розділювачі. В І. е. с. безпосередня заміна одних логіч. елементів іншими за допомогою перетворень за відомими правилами не завжди можлива, бо в ній немає елемента, що здійснює пряме інвертування, тобто елементного оператора $\bar{X}$. Щоб виконати цю операцію, треба застосувати пристрій незбігу, підставивши замість неінвертовуваного аргументу константу «1», або використати *тригер*. Динамічний тригер в І. е. с. являє собою замкнене коло (мал. 2, *а*), що по ньому циркулюють імпульси, якщо тригер перебуває в одиничному стані. В нульовому стані тригер активного інверсного виходу не має, тобто імпульси не циркулюють. Оператор динамічного тригера з роздільними входами має вигляд: $X = (X \vee Y_1)_{\to \Delta t} \cdot \bar{Y}_0$, де X — стан тригера, $Y_1 Y_0$ — вхідні сигнали, Δt — час між вхідними і синхронізуючим імпульсами. Щоб тригер працював надійно, треба забезпечити появу вихідного активного сигналу через певний час після припинення його, поки тригер перебуває в одиничному стані. Цього досягають або встановленням у колі тригера елемента затримки (при цьому потрібні дуже точні елементи затримки, інакше робота різних тригерів не буде узгодженою), або забезпеченням запам'ятовування вихідного сигналу у вигляді особливого короткочасного стану кола тригера. Такий стан характеризується наявністю відповідного заряду на «запам'ятовувальній» ємності C (мал. 2, *б*). До того, як ємність C розрядиться, на тригер надходить синхронізуючий імпульс (СІ), внаслідок чого починає працювати імпульсний підсилювач і утворюється вихідний сигнал тригера. Цей сигнал за допомогою позитивного *зворотного зв'язку* знову заряджає ємність C. Вхідний сигнал Y_1 діє на тригер аналогічно, внаслідок цього пристрій встановлюється в одиничний стан. Коли надходить вхідний сигнал Y_0, відображуваний імпульсом зворотної полярності, ємність розряджається. Внаслідок цього, коли надходить наступний СІ, імпульсний підсилювач не спрацьовує і циркуляція імпульсів припиняється. Тригер переходить у нульовий стан.

Така організація нульового стану тригера утруднює побудування схем, бо часто потрібно мати не лише пряме, але й інверсне значення аргументу. Щоб здійснити цю можливість, застосовують тригерний каскад, що складається з двох тригерів (мал. 3). В цьому каскаді тригер T_2 перебуває в стані, інверсному станові тригера T_1, тобто фактично реалізує операцію інвертування. Певна модифікація цієї схеми приводить до реалізації лічильного

каскаду за mod 2 з прямим та інверсним виходами X і $\bar{X}$ відповідно (мал. 4, *а*).

Якщо лічильний каскад побудовано на одному тригері, то треба застосовувати різночасові імпульсні затримки на його входах, щоб правильно відбувався обмін інформацією з тригером. Треба, щоб сигнал, який визначає потрібне діяння, надходив на вхід тригера останнім. Для цього затримка сигналу на нульовому вході $З_0$ (мал. 4, б) має бути більшою від затримки $З_1$ на одиничному вході. Коли тригер перебуває в нульовому стані, вентиль



4. Тригерний лічбовий каскад: *а* — на двох тригерах; *б* — на одному тригері.

не пропускає сигнал Y на нульовий вхід. На одиничний вхід сигнал проходить з затримкою, якої досить, щоб закінчити імпульс до того моменту, коли тригер перемкнеться й відкриє вентиль. Коли тригер перебуває в одиничному стані, то внаслідок зазначеної різниці затримки вхідний сигнал Y спочатку пройде на одиничний вхід і лише підтвердить наявний стан, а потім уже перейде на нульовий вхід і перемкне тригер.

Перевагами І. е. с. розглянутого типу є: велика швидкодія елементів, велика потужність сигналів при відносно малій витраті потужності живлення. Проте в цій структурі ставлять жорсткі вимоги до синхронізації сигналів, а це ускладнює забезпечення високої надійності.

Літ.: Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301].

В. М. Коваль.

ІМПУЛЬСНА ПЕРЕХІДНА ФУНКЦІЯ — реакція динамічної системи на діяння *дельта-функції*. Для систем, які описують звичайними лінійними дифер. рівняннями зі змінними коефіцієнтами, І. п. ф. $k(t, \tau)$ залежить від двох аргументів — поточного часу t і моменту τ прикладення імпульсного діяння. І. п. ф. лінійних стаціонарних систем із зосередженими параметрами залежить тільки від різниці аргументів $t - \tau$. І. п. ф. реальних систем дорівнює нулеві при $t < \tau$ (див. *Здійсненності фізичної критерії*).

Перетворення Лапласа І. п. ф. визначає *передавальну функцію*, а перетворення Фур'є — частотну характеристику (див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) і, навпаки, обернені перетворення цих характеристик дають І. п. ф. Реакція лінійної системи $y(t)$ на довільне діяння $x(t)$, прикладене в момент часу $t = t_0$, виражається через І. п. ф. так:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \quad (1)$$

Для стаціонарних систем, які описують дифер. рівняннями

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (2)$$

мають місце співвідношення:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} k(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t-t_0} k(\tau)\, x(t - \tau)\, d\tau; \quad (3)$$

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t k(\tau)\, d\tau, \quad (4)$$

де $h(t)$ — перехідна ф-ція (див. *Функція ступінчаста*).

І. п. ф. такого класу систем при $m < n$ можна визначити ще й як

$$k(t) = \begin{cases} w(t) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $w(t)$ — ф-ція Гріна, що задовольняє о д н о р і д н е дифер. рівняння $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i w(t)}{dt^i} = 0$ з т. з. е к в і в а л е н т н и м и початковими умовами

$$y^{(n-m-1)}(0) = \frac{1}{a_n} b_n;$$

$$y^{(n-m)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_{n-1} - a_{n-1} y^{(n-m-1)}(0)],$$

$$\ldots, y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_0 - a_0 y^{(n-m-1)} -$$

$$- \ldots - a_{n-1} y^{(n-2)}].$$

І. п. ф. широко використовують, досліджуючи системи автомат. керування, в теорії електр. кіл, радіотехніці тощо. Поняття І. п. ф. поширюється й на системи з розподіленими параметрами, імпульсні й нелінійні системи.

Літ.: Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., 1954 [бібліогр. с. 796—798]; Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [бібліогр. с. 743—763]; Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. Пер. с нем. М., 1971.

Ю. В. Крементуло.

ІМПУЛЬСНА СИСТЕ́МА КЕРУВА́ННЯ — один із різновидів *дискретної системи керування.*

ІНВАРІА́НТНІСТЬ ОЗНА́К — властивість ознак об'єкта розпізнавання не змінювати своїх значень при певних перетвореннях цього об'єкта. Припустимими вважають перетворення, що не впливають на належність об'єкта до заданого класу об'єктів (образу). Здебільшого ознаки, які мають властивість інваріантності, одержують у результаті певних матем. операцій над проміжними неінваріантними ознаками, які одержують прямими вимірюваннями. Вимірювання, що забезпечують І. о., можна провадити й безпосередньо на розпізнаваному об'єкті. Прикладом одержання ознак друкованого знака, інваріантних до переносів зображення знака в полі зору, є т. з. «центрування по краю знака», що його застосовують в ряді сучасних *читаючих автоматів.* Проміжними ознаками є двійкові сигнали «чорне» (1) чи «біле» (0), які відповідають розрізнюваним рівням яскравості точок зображення. Центрування зображення полягає в переміщуванні його в таке положення, при якому крайні нижня й ліва чорні точки суміщуються відповідно з нижньою й лівою межами поля зору. Ця операція забезпечує І. о. щодо будь-яких переносів зображення в полі зору. Другим прикладом одержання І. о. до переносів є двовимірна автокореляційна функція зображення. Проміжними ознаками тут є яскравість точок зображення. Такі інваріантні ознаки, як автокореляційна функція, вимірюють безпосередньо на розпізнаваних зображеннях за допомогою, наприклад, оптичного корелятора. Властивість І. о. іноді використовують, розв'язуючи задачі *розпізнавання образів.* Зокрема, при розпізнаванні зображень об'єктів стандартної конфігурації часто намагаються одержувати ознаки, інваріантні щодо перенесення, повертання, зміни масштабу тощо. Вадою переважної більшості відомих способів досягнення І. о. є мала завадостійкість: навіть незначні випадкові спотворення розглядуваного зображення можуть спричинити великі відхилення значень його інваріантних ознак (наочний приклад — розглянуте вище «центрування по краю знака» за умов, коли в полі зору з'являються окремі «шумові» чорні точки). Поки що невідомо жодної формальної постановки задачі розпізнавання, з якої б випливала потреба одержання І. о. Причиною цього є надмірна загальність поняття І. о., яке охоплює й самі шукані розв'язки задач розпізнавання. Справді, найменування класів об'єктів, зазначувані *алгоритмом розпізнавання,* можна назвати й інваріантними ознаками цих об'єктів (і при цьому найкращими із можливих з погляду задачі розпізнавання загалом).

Г. Л. Гімельфарб.

ІНВАРІА́НТНІСТЬ СИСТЕ́М АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — розділ *автоматичного керування теорії,* в якому вивчають методи й засоби досягнення незалежності (інваріантності) однієї чи кількох регульованих величин від зовн. (непараметричних) збурень, які діють на систему. Проблема інваріантності полягає в синтезі систем автомат. керування за умови, коли похибка, зумовлена дією зовн. збурень, дорівнює нулеві (умови інваріантності).

За лінійного трактування задачі автомат. систему можна описати такою системою дифер. рівнянь: $A(p)\,x(t) = F(t)$, де $x(t)$ і $F(t)$ — вектори-стовпці змінних відповідно системи й збурень, $A(p)$ — матриця, елементи якої $a_{ij}(p) = m_{ij}p^2 + l_{ij}p + k_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $p = \frac{d}{dt}$, m_{ij}, l_{ij}, k_{ij} — сталі величини. Необхідною й достатньою умовою незалежності, напр., величини $x_1(t)$ від зовн. діяння $F_1(t)$, (умовою інваріантності $x_1(t)$ щодо $F_1(t)$) є тотожна рівність нулеві мінора визначника системи рівнянь, відповідного елементові $a_{11}(p)$:

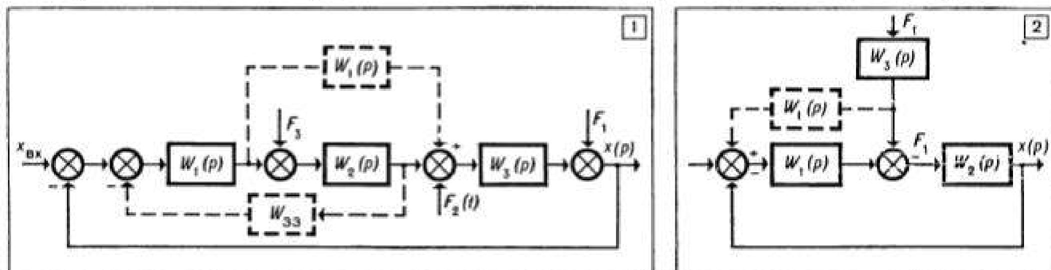
$$A_{11}(p) = \begin{vmatrix} a_{22}(p)\, a_{23}(p) & \ldots & a_{2n}(p) \\ a_{32}(p)\, a_{33}(p) & \ldots & a_{3n}(p) \\ a_{n2}(p)\, a_{n3}(p) & \ldots & a_{nn}(p) \end{vmatrix} = 0.$$

Умови інваріантності аналогічні й для інших змінних $x_2(t)$, $x_3(t)$ ... щодо збурень $F_2(t)$, $F_3(t)$ ... . Для методів теорії інваріантності, на відміну від інших методів, найважливішою і притаманною саме їм особливістю є те, що синтез незбурених систем можливий за майже повної відсутності інформації щодо зовнішніх збурень і непараметричних завад, які діють у системі. Осн. метою теорії інваріантності є визначення необхідної структури системи керування та її параметрів, при яких вплив збурень довільного виду, але обмежених за модулем (за своїм макс. значенням), не позначався б на відхиленні регульованих величин від заданих заздалегідь номіналів.

Ідею інваріантності вперше висловив 1939 рад. вчений Г. В. Щипанов. Потім рад. математик М. М. Лузін одержав необхідні й достатні умови інваріантності в найзагальнішому вигляді (умови інваріантності Щипанова — Лузіна).

Розв'язуючи задачі інваріантності, розрізняють системи, створені на основі принципу регулювання за відхиленням і принципу регулювання за збуренням, а також комбінованого принципу (на основі двох попередніх). Питання про фіз. здійсненність систем, які задовольняють умови інваріантності, є головним для всієї теорії інваріантності в цілому. В системах за відхиленням з однією регульованою координатою умову інваріантності в загальному випадку можна реалізувати не абсолютно точно, а лише з точністю до якоїсь величини ε, бо для такого роду систем автомат. регулювання умова інваріантності суперечить умовам стійкості. Це дало привід деяким дослідникам взагалі заперечувати можливість реалізації умов абсолютної інваріантності. Питання реалізовності умов інваріантності вивчив та висвітлив у своїх працях рад. вче-

ний у галузі автомат. керування Б. М. Петров (н. 1913). Він одержав необхідні умови реалізовності абсолютної інваріантності змінної $x_i(t)$ щодо якогось збурення $F_i(t)$, в разі виконання яких має місце тотожний збіг множини розв'язків рівнянь початкової системи автомат. керування й системи, розімкненої на виході елемента, визначуваного змінною $x_i(t)$, при виконанні умов інваріантності і коли нулеві дорівнює решта діянь. Необхідною і достатньою умовою є, крім зазначеного кількома регульованими змінними умови абсолютної інваріантності можна завжди реалізувати, якщо є два або більше паралельні канали для поширення одного й того самого збурення, щодо якого треба добитися інваріантності. Показано, що умову інваріантності можна виконати принципово іншим шляхом, коли в системі впровадити додаткові зв'язки за збуренням, тобто в класі систем за збуренням і в *комбінованих системах автоматичного керування*. Принципових труднощів при розв'язуванні задачі інваріантності



1. Структурна схема інваріантної системи регулювання за відхиленням.
2. Структурна схема комбінованої інваріантної системи.

вище, ще й вимога, щоб ланки, за допомогою яких досягається інваріантність, були фізично здійсненними. Петров встановив, що умова фіз. реалізовності виконується в тих системах, де є принаймні два канали поширення діянь між точкою прикладення збурень і точкою вимірювання регульованої координати, яка має бути інваріантною щодо цього збурення. Напр., для системи (мал. 1) умову абсолютної інваріантності координати $x(t)$ щодо збурення $F_3(t)$ можна реалізувати, якщо її структуру доповнити зв'язками, позначеними штриховою лінією, тобто якщо створити ще один канал поширення збурення $F_3(t)$ відносно $x(t)$. Справді, в цьому разі при $W_1(p) = \dfrac{1}{W_1(p)\,W_{33}(p)}$, $x(t) = 0$, тобто виконується умова абсолютної інваріантності, яка не суперечить критерієві стійкості, бо характеристичне рівняння не вироджується.

У *системах програмного керування* іноді ставиться завдання передати програмне керуюче діяння без спотворень та запізнення. Синтез такого виду систем здійснюється за умови, коли помилка відтворення дорівнює нулеві, і методи синтезу таких систем еквівалентні методам розв'язування задачі інваріантності для систем стабілізації, про які йшлося вище.

Проте два канали не завжди й не для всіх збурень, які діють на регульовану координату, можна створити в системах за відхиленням з однією регульованою координатою, напр., цього не можна зробити для $F_1(t)$ і $F_2(t)$ в системі, зображеній на мал. 1. І саме в цьому полягає складність, а подеколи й неможливість реалізації умов абсолютної інваріантності в такому класі систем.

У системах регулювання за відхиленням з для таких класів систем не виникає, бо в цьому разі немає суперечності між вимогами, які випливають з умов інваріантності й умов стійкості, тобто такі системи фізично реалізовні. В цьому — істотна перевага комбінованих систем керування. Вони є «грубими», і за невеликих відхилень від умов абсолютної інваріантності запас стійкості в них не зменшується. Але складність реалізації умов інваріантності в таких системах полягає в тому, що необхідно безперервно вимірювати величини збурень, а це досить часто є нездійсненним. Іноді застосовують непряме вимірювання збурень. Проте такі системи в більшості практично цікавих випадків належать до класу систем з принципом регулювання за відхиленням: їм тоді будуть властиві всі особливості систем цього класу, якщо виконано умови інваріантності.

На мал. 2 наведено структурну схему системи комбінованого регулювання, де штриховою лінією позначено зв'язок за збуренням $F_1(t)$. Якщо $W_1(p) = \dfrac{1}{W_1(p)}$, то $x(t) = 0$, тобто $x(t)$ інваріантне щодо $F_1(t)$.

Для систем, параметри яких змінюються в часі, виникають певні труднощі, проте для цих систем умови інваріантності теж можна одержати на основі застосування операторного методу аналізу розв'язань дифер. рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Осн. положення, що належать до теорії інваріантності систем, описуваних дифер. рівняннями з постійними коефіцієнтами, поширено на системи зі змінними параметрами з використанням цього та інших методів.

М. М. Лузін ще 1940 вказував на можливість побудувати і для нелінійних дифер. рівнянь теорію інваріантності, цілком аналогіч-

ну тій, яку розроблено для лінійних рівнянь, якщо замість мови визначників користуватися мовою якобіанів. З'явилося багато різних праць, присвячених розв'язуванню задач інваріантності для нелінійних систем керування. Ці праці можна поділити на дві групи. До першої належать усі ті нелінійні задачі, які або можна звести до лінійних, або ж для вивчання їх можна використати ідею симетрування двох каналів з нелінійними ланками, по яких проходить одне й те саме збурення. У другій групі задачі поставлено в загальнішому вигляді, причому розглядалися й неперервні, і розривні нелінійності. Найзагальнішим є метод, який зводиться до дослідження приростів якогось функціоналу, напр., виду $I = \sum_{i=1} C_i x_i$, що задовольняє задану систему нелінійних дифер. рівнянь $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}, t)$, $i = 1, \ldots, n$, які описують досліджувану систему керування. Тут $\mathbf{x}$ — вектор фазових координат, який характеризує стан системи; $\mathbf{f}$ — вектор зовн. збурювальних діянь; F_i — неперервно диференційовані (потрібну кількість разів) нелінійні функції; C_i — постійні коефіцієнти.

Постановка задачі при цьому полягає в тому, щоб функціонал I відповідно до рівнянь $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}, t)$ був інваріантний щодо збурень $\mathbf{f}$. У тому, що така постановка задачі інваріантності збігається із звичайною, неважко переконатись, якщо взяти окремий вид наведеного вище функціоналу, коли всі $C_i = 0$, крім одного $C_k = 1$. В цьому разі матимемо $I = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і, т. ч., ставиться звичайна вимога про незалежність однієї з координат системи $x_k(t)$ щодо якогось зовн. діяння $f_m(t)$. Запроваджено поняття про слабку та сильну інваріантність. Інваріантність наз. слабкою, якщо $x_k(t)$ не залежить від $f_m(t)$ тільки в якийсь заданий момент часу $t = T$, коли траєкторія руху зображальної точки у фазовому багатовимірному просторі, відповідному розглядуваній системі рівнянь $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}, t)$, досягає заданої гіперповерхні $M(x, t) = 0$. Інваріантність наз. сильною, якщо незалежність $x_k(t)$ від $f_m(t)$ матиме місце на всьому інтервалі руху від t_0 до $t = T$.

Розв'язують задачі для слабкої та сильної інваріантності по-різному. Різними виявляються й умови слабкої та сильної інваріантності, коли рівняння нелінійні, і тільки для лінійних задач ці умови збігаються. Для сильної інваріантності необхідно й достатньо, щоб функції $I_1(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \ldots, I_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ не залежали від $\mathbf{f}$ при будь-якому значенні x. Функції I_i при цьому визначаються так: $I_0 = I$, $I_1 = D(F) I_0, \ldots, I_s = D(F), I_{s-1}$, де оператор $D(F)$ такий, що $D(F) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial I}{\partial x_i} F_i$.

Загальність методу розв'язування задач інваріантності на основі дослідження приростів відповідного функціоналу полягає в тому, що одним і тим самим шляхом можна розв'язати і лінійні задачі зі сталими й змінними в часі параметрами, і нелінійні. Цей же шлях дає змогу вивчати не тільки неперервні системи, а й дискретні — імпульсні та цифрові. При цьому для імпульсних систем задачі розглядали в двох постановках: 1) здійснювався синтез систем за умови інваріантності для будь-яких моментів часу і 2) за умови інваріантності для дискретних моментів часу — моментів замикання імпульсного елемента.

Розглядали й задачі інваріантності для систем зі змінною структурою, для *систем керування з розподіленими параметрами*, досліджували структурні властивості інваріантних систем, вивчали питання інваріантності для самонастроюваних систем, теоретико-інформаційне трактування задач інваріантності тощо. Використовуючи методи теорії інваріантності й теорії чутливості (див. *Динамічних систем теорія чутливості*), можна створити динамічні системи, інваріантні не лише щодо зовн. збурень, які діють на систему, а й щодо зміни її параметрів.

Теорія інваріантності вже набула широкого практичного застосування. Розроблено або перебувають у стадії розробки інваріантні системи керування різними технологічними процесами (хім., термічними, металург., нафтопереробними тощо), енерг. установками й тепловими двигунами. Досягнення теорії широко використовують, створюючи гіроскопічні прилади та ін. навігаційні системи керування рухомими об'єктами.

Літ.: Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1939, № 1; Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. «Автоматика и телемеханика», 1940, № 5; Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. М., 1959; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 364—371]; Теория инвариантности в системах автоматического управления. М., 1964; Чувствительность автоматических систем. М., 1968; Величенко В. В. О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем. «Автоматика и телемеханика», 1972, № 4; Теория инвариантности и теория чувствительности автоматических систем. ч. 1—3. К., 1971.

О. І. Кухтенко, А. Г. Шевельов.

ІНВЕ́РТОР — логічний елемент, що реалізує логічне заперечення. Водночас І. посилює та формує електр. сигнали, які є носіями інформації в логіч. колах пристроїв обчисл. техніки. І. виконують здебільшого на електронній лампі, транзисторі або на магн. елементі. За функціональною ознакою І. поділяють на потенціальні й імпульсні. В потенціальному І. високий рівень напруги на його вході відповідає низькому рівневі напруги на виході, і навпаки, в будь-який момент часу, крім моменту перемикання І. (мал., *а*). Залежність між вхідним сигналом, що подається на базу, і вихідним сигналом, що знімається з колектора, відповідає логічному перетворенню «НЕ». В імпульсному І. в момент надходження сигналу на його вхід (з врахуванням часу спра-

цювання схеми) з'являється сигнал протилежної полярності на його виході (мал., *б*), або в момент надходження імпульсів тактуючої серії на виході І. з'являється сигнал лише тоді, коли немає сигналу на його вході (мал., *в*). При цьому після проходження сигналу І. повертається до вихідного стану.

У дискретному виконанні І.— один з осн. конструктивно самостійних елементів для побудови різних логіч. вузлів у засобах *обчислювальної техніки*. Після того, як почали застосовувати *інтегральні схеми* (особливо

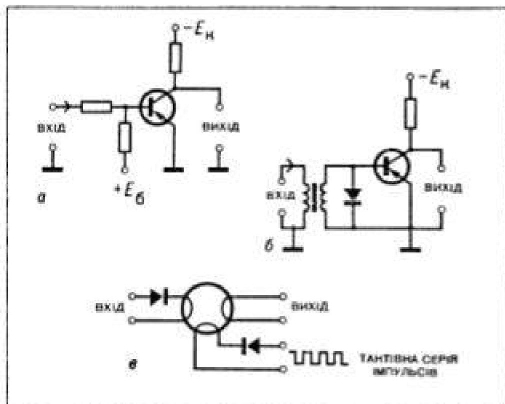


Схема інвертора: *а* — потенціальний інвертор на транзисторі; *б* — імпульсний інвертор на транзисторі; *в* — імпульсний інвертор на феритовому осерді

великі), І. перестає бути самостійною одиницею і стає невід'ємною структурною частиною в реалізації складніших логіч. ф-цій.

В АОМ функцію І. виконує *підсилювач операційний*, що реалізує перетворення $Y_{вих}(t) = - Y_{вх}(t)$.

Літ.: Бирман Н. Я., Синдилевич Л. М. Электронные цифровые машины и программирование, ч. 2. М., 1966. *Г. І. Корнієнко.*

ІНГВЕ ГІПОТЕЗА, гіпотеза глибини — гіпотеза, що пояснює одну кількісну закономірність, яка властива структурі речень багатьох природних мов. Ця закономірність стосується поняття глибини бінарного дерева складників — так зв. максимум числа лівих гілок дерева, які проходять під час руху від кореня до довільного вузла. Спостереження показують, що в ряді мов (у т. ч. в російській, англійській) глибина речення, як правило, не перевищує 7, тоді як довжина шляху по правих гілках у дереві складників теоретично необмежена. Амер. лінгвіст В. Інгве, який звернув увагу на цю закономірність, пояснює її заг. властивостями людської психіки. Легко переконатися, що глибина речення, яке будується зліва направо за допомогою правил безконтекстної граматики (див. *Граматика породжувальна*), дорівнює макс. числу допоміжних символів, що їх слід пам'ятати в кожний момент побудови. І. г. полягає в тому, що процес побудови речення людиною аналогічний породжуванню речення зліва направо в безконтекстній граматиці, а обсяг оперативної пам'яті, яка використовується при цьому, приблизно дорівнює 7 (за іншими даними — 9) символам. Це збігається з даними ряду психологічних експериментів, які приводять до висновку, що людина здатна миттю сприйняти й запам'ятати не більш як 7 (відповідно — 9) однорідних елементарних одиниць інформації (цифр, імен тощо). Дальшими дослідженнями в ряді мов (у т. ч. в російській) виявлено так і способи побудови речень, за яких глибина стає принципово необмеженою. Одночасно зазначено деякі мови (напр., угорську), в яких необмеженість глибини є нормою. Виявлені факти спростовують І. г. В категоричній формі її постановки цю гіпотезу більшість дослідників приймають з певними застереженнями.

Літ.: Ингве В. Гипотеза глубины. В кн.: Новое в лингвистике, в. 4. М., 1965.

ІНДЕКСУВА́ННЯ — присвоєння документові набору ключових слів чи кодів, які є покажчиком змісту документа й які використовують для пошуку його (переважно для документів з науково-тех. інформацією). Можливі два способи І.— вільне (коли безпосередньо з тексту документа вибирають *ключові слова*, не зважаючи на всі видозміни їхніх форм і відношень між ними) та І. контрольоване (коли в *пошуковий образ документа* включають лише ті слова, які зафіксовано у словнику ключових слів, де зазначено їхні синонімічні, родовидові та асоціативні відношення). Як правило, І. здійснюють досвідчені бібліотекарі чи спеціалісти певної галузі науки. Щоб зменшити витрати часу й засобів, розробляють методи автоматичного І.: статистичні, пермутаційні, бібліографічні й асоціативні. Статистичні методи І. грунтуються на гіпотезі про те, що частота вживання слова пов'язана з його значущістю для смислу документа. Здебільшого цей зв'язок занадто спрощують, зводячи зростання інформаційної значущості слів зі збільшенням частоти їх. Проте вважають, що інформаційна цінність рідкісних слів вища за інформаційну цінність слів, які повторюються часто. Це враховують, застосовуючи метод статистичних відхилень, коли вимірюють відхилення частоти слів у документі, що його індексують, від теоретично очікуваної частоти цих слів. Пермутаційне І.— І. словами з заголовка документа вміщенням їх до алфавітного словника стільки разів, скільки в ньому є різних слів; при цьому кожне ключове слово вміщують на своє місце алфавіту й супроводять усім контекстом заголовка. Пермутаційне І. широко застосовують в інформаційних службах.

Бібліографічне й асоціативне І. використовують ширше: бібліографічне — для І. документа посиланнями на ін. документи й публікації, що містяться в ньому (покажчик цитованої літератури дає змогу провадити пошук інформації і вивчати закономірності розвитку науки); асоціативне — для І. з використанням карт асоціатив-

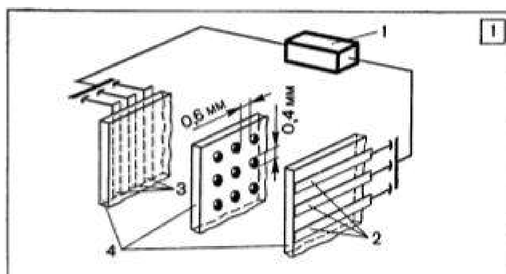
них зв'язків між ключовими словами, одержуваних за допомогою аналізу частоти повторення сполучень ключових слів у текстах. Залежно від інтервалу тексту, в якому реєструється ця частота, одержують різні карти асоціативних зв'язків. Див. також *Інформаційно-пошукова система документальна*, *Пошук інформації автоматичний*, *Анотування автоматичне*.

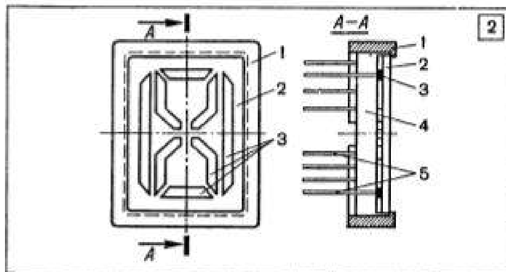
Літ.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]; Москович В. А. Статистика и семантика. М., 1969 [бібліогр. с. 294—301]. *В. А. Москович.*

ІНДИКА́ТОРИ ІНФОРМА́ЦІЇ — спеціалізовані елементи, які забезпечують наочне (візуальне) відтворення даних, що їх виводять з систем чи пристроїв. І. і. є частиною *систем відображення інформації* і їх ділять на аналогові, дискретні та гібридні. Аналогові І. і. за принципом дії ділять на механічні, гідравлічні, пневматичні, електромеханічні й електронні. Конструктивно оформляють їх у вигляді щитових вимірювальних приладів з рухомою стрілкою або шкалою. Ці І. і. широко застосовують у пром-сті. З електронних І. і. перспективними є лінійні газорозрядні індикатори. Вони являють собою скляні балони, наповнені інертним газом. Усередині балона міститься стрижневий катод і циліндричний анод. Площа світіння катода пропорційна силі струму, що протікає через І. і. Достоїнства індикаторів: наочність, можливість групування їх у вигляді порівняльних діаграм (гістограм), малі габарити, вага та вартість. Вади: велика сумарна похибка — близько 4%, короткий строк служби — до 1000 *год*, порівняно висока постійна напруга — 140 ÷ 170 *в* і значні величини постійного струму — 0 ÷ 10 *ма*.

У зв'язку з широким використанням ЦОМ особливого значення набувають дискретні І. і. До них належать елементи, виконані на лампах розжарювання й газорозрядних лампах, а також плазмові панелі, електролюмінесцентні, електромагн., ферооптичні, рідиннокристалічні й електрохім. елементи. Лампи можна використовувати як одиночні індикатори або сегментні (знакосинтезуючі) табло. З 5—8 сегментів формується будь-яка з цифр від 0 до 9, з 14—19 сегментів — цифра або літера російського алфавіту; можлива також сегментна організація мнемосхем. За допомогою ламп здійснене й почергове висвічування (вибір) знаків. Скляні пластини із знаками (кожний знак утворений групою отворів у пластині) розміщуються одна за одною (пакетом до 10—12 пластин) і можуть підсвічуватись лампами у торець. Знак візуалізується внаслідок заломлення світла в отворах. У газорозрядному цифровому індикаторі знаки висвічуються крізь дно або крізь стінку колби індикатора. Є й багаторозрядні індикатори з конструктивним і схемним суміщенням елементів.

Здійснюють розробку плазмових панелей (мал. 1). Панель складається з трьох скляних пластин, в середній з яких є отвори, заповнені сумішшю неону й азоту, а на зовн. нанесено напівпрозорі смужки золота (шини керування). На шини безперервно подається напруга підпору. Кожний газорозрядний елемент панелі розміщено на перетині двох взаємно перпендикулярних шин. Напруга керування, яка подається на них, додається до напруги підпору. Виникає світіння елемента, яке зберігається й після зняття керуючої напруги, бо на периферії елемента нагромаджується заряд. Для гасіння елемента передається через відповідну пару шин керуючий сигнал





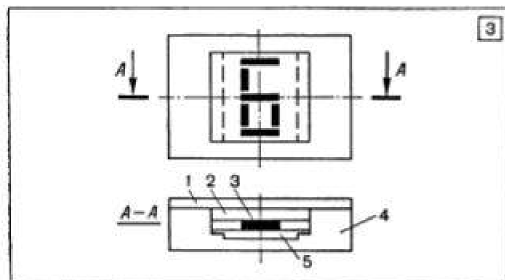
1. Будова плазмової панелі: *1* — джерело напруги підпору; *2* — горизонтальні керуючі шини; *3* — вертикальні керуючі шини; *4* — скляні пластини. 2. Будова електролюмінесцентного індикатора (сегментний цифровий індикатор): *1* — рамка; *2* — скло з шаром люмінофору на внутрішній поверхні; *3* — сегменти зображення; *4* — компаунд; *5* — електричні виводи.

протилежної полярності. Достоїнства плазмових панелей — можливість запам'ятовувати інформацію, великі густота елементів зображення (80—100 елементів на 1 *см*²) і яскравість (2000—7000 *нт*), малий час повного записування або стирання (40—80 *мксек*); вада — високі напруга живлення (200—250 *в*) і частота (50—500 *кгц*), що й ускладнює узгодження їх з ЦОМ.

Перспективні електролюмінесцентні індикатори, основані на світінні спец. матеріалів (електролюмінофорів), яке виникає, коли до них прикладають напругу. Сегментний цифровий індикатор показано на мал. 2. Матричний люмінесцентний екран складається з шару електролюмінофору, який міститься між взаємно перпендикулярними системами керуючих електродів, одна з яких прозора. Як і для плазмових панелей, для живлення електролюмінесцентних індикаторів та екранів

потрібні високі напруга й частота (200—500 *в*, 0,4 — 10 *кгц*). Осн. вада таких індикаторів — відсутність внутр. запам'ятовування, необхідність частої регенерації зображення. Завдяки компактності, універсальності й високій роздільній здатності екрани набувають дедалі більшого застосування в бортових системах.

У світловипромінювальних діодах використовується ефект світіння $p - n$ переходів у напівпровідниках (карбіді кремнію, фосфіді та арсеніді галію) при пропусканні через них струму. Світлові діоди придатні й для одиночних, і для сегментних індикаторів. З них також складають матриці густотою до 30—70 елементів на 1 *см*². Достоїнства світловипромінювальних діодів — низька напруга живлення (можливість узгодження з *інтегральними схемами*) і велика швидкість перемикання. Осн. вада — мала світлова віддача (2%).



3. Будова ферооптичного індикатора: *1* — скляний підклад (екран індикатора); *2* — шар алюмінію (фон); *3* — шар окису кремнію (сегменти зображення); *4* — компаунд; *5* — шар пермалою (проявлення зображення).

До дискретних І. і. належать і електромагнітні елементи (напр., поворотні покажчики положення). Крім одиночних, можливі ще й сегментні, пакетні, стрічкові та книжкові конструкції. Розроблено й електромагн. екран-матрицю густотою 10—25 елементів на 1 *см*². Елемент може мати форму кубика, диска, циліндра або кулі; його протилежні поверхні забарвлюють у взаємно контрастні кольори. Елементи підвішують на нитках або розміщують у комірках, заповнених прозорою рідиною. Керують елементами індивідуальні електромагн. (запам'ятовувальні) комірки.

Суміщення в одному елементі запам'ятовувальних та індикаційних якостей досягнуто у ферооптичних елементах. Такий елемент (мал. 3) складається із скляної пластини, на яку напилено послідовно шар алюмінію (фон), окиси кремнію (напр., сегменти для формування цифр) та пермалою (проявлення зображення). Здатність пермалою відбивати світло зумовлюється його намагніченістю (ефект Керра), а коерцитивна сила залежить від підкладу (велика — на алюмінії і мала — на окисі кремнію). Матричне керування тут дає змогу намагнічувати ділянки пермалою тільки над необхідними сегментами, після чого зображення стає видимим у відбитому світлі (темне на світлому фоні — мал. 3). Достоїнство ферооптичних елементів — зручність узгодження з ЦОМ, головна вада — низька контрастність (до 1 : 3).

При побудові систем відображення інформації дедалі ширше застосовують рідкі кристали — спец. органічні сполуки, які в нормальних умовах мають властивості і рідин, і твердих тіл. Тонкий шар рідинних кристалів (0,3 *мм* й менше) вміщують між двома скляними пластинами, де він зазнає впливу капілярних сил. Напруга керування (20—70 *в*, частота 10—100 *гц*) передається через електроди відповідної форми (напр., у вигляді сегментів). Вплив напруги змінює положення молекул рідкого кристала в зоні її прикладання, що зумовлює розсіяння світла (втрату прозорості) або зміну кольору на відповідних ділянках. Після зняття напруги прозорість (початковий колір) відновлюється (час перемикання — 10 ÷ 100 *мксек*). Достоїнства І. і. на рідких кристалах — висока контрастність зображення (тим вища, чим вища зовнішня освітленість), мале споживання енергії й довгий строк служби (10 000 *год* і більше).

Дискретні І. і. на основі ламп розжарювання й газорозрядних ламп, електролюмінесцентні й електромагн. індикатори випускає пром-сть, їх широко застосовують у практиці. Почали застосовувати й світловипромінювальні діоди — як точкові та сегментні індикатори, а також електролюмінесцентні екрани — як універсальні засоби відображення.

Матричні панелі (плазмові, світлодіодні, рідиннокристалічні) виготовляють поки що у формі багаторозрядних цифрових і знакових індикаторів (звичайно з растром 5 × 7 точок на знак.) Проведено успішні дослідження й випущено дослідні партії плазмових і рідиннокристалічних екранів з роздільною здатністю до 512 × 512 точок. Проводять роботи по одержанню за допомогою цих екранів напівтонових і кольорових зображень. У стадії досліджень перебувають також ферооптичні екрани.

Електрохімічні елементи являють собою плоскі прозорі кювети, заповнені електролітом. Коло задньої стінки кювета розміщено індикаторні електроди, відповідні майбутньому зображенню (напр., сегменти для формування цифри); крім того, в кюветі є й спільний електрод. При подаванні напруги відбувається електрохім. реакція, під час якої змінюється забарвлення електроліту біля відповідних електродів, тобто зображення проявляється. Реакція є оборотною — заряд на індикаторних електродах поступово розсіюється; видиме зображення може зберігатися протягом кількох десятків хвилин, після чого потрібна його регенерація. Щоб стерти інформацію, через індикатор пропускають струм протилежної полярності. Осн. вади електрохім. елементів: індикаторні електроди з'єднані між собою електролітом, а це обмежує число їх в елементі (до 3—4 на

см) і ускладнює схеми керування ними; в електроліті відбуваються необоротні зміни; час записування інформації порівняно невеликий (десятки мілісекунд).

Дискретний та аналоговий методи формування зображення використовують також у різних комбінаціях; так утворюються гібридні І. і. Напр., поєднання матриці з світлових діодів з фотохромним носієм або люмінесцентних панелей з лазерним скануванням дає змогу одержати перспективні варіанти індикаторних пристроїв. Див. також *Пристрої відображення інформації*.

Літ.: Деркач В. П., Корсунский В. М. Электролюминесцентные устройства. К., 1968 [бібліогр. с. 292—299]; Агейкин Д. И. [та ін.]. Линейные газоразрядные индикаторы. «Приборы и системы управления», 1969, № 9; Плоские индикаторы (Реферативный обзор). «Радиоэлектроника за рубежом», 1969, в. 41; Чачко А. Г. Методы преобразования информации для человека-оператора в сложных системах управления (на примере энергоблоков). «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1971, № 1.
О. Г. Чачко.

ІНЖЕНЕ́РНИХ РОЗРАХУ́НКІВ АВТОМАТИЗА́ЦІЯ — розробляння й досліджування математичних методів і різних видів математичного та технічного забезпечення для проведення інженерних розрахунків на *електронних обчислювальних машинах*. У широкому розумінні — це автоматизація за допомогою *обчислювальної техніки* розрахунків для пром. підприємств, транспорту, будівництва та ін. галузей нар. г-ва, зокрема й розрахунків, пов'язаних з плануванням і організацією виробництва. У вузькому розумінні під І. р. а. мають на увазі автоматизацію розрахунків у конструкторських бюро й НДІ шляхом залучання широкого кола користувачів. І. р. а. часто виконують в *обчислювальних центрах*, оснащених ЕОМ і *обчислювальними системами* колективного користування, в яких спеціалізовані й малі ЕОМ для інженерних розрахунків можна використовувати як термінали. І. р. а. з використовуванням ЕОМ, як правило, включає кілька етапів. 1-й етап — постановка задачі й визначення остаточної мети. На цьому етапі вибирають спільний підхід до розв'язання задач і визначають сукупності критеріїв, що їх повинні задовольняти результати. 2-й етап — математичне описування. Цей етап включає вибір одного з відомих способів або розробку нового способу розв'язування задач. Якщо використовувати матем. описування для постановки задачі на ЕОМ не можна і, крім того, якщо необхідно оцінити повну *похибку* одержаного результату, застосовують чисельний аналіз. 3-й етап — програмування для ЕОМ. 4-й етап — налагоджування програми. 5-й етап — обчислювання (лічба). Виконується після усунення всіх помилок з використанням відповідних первісних даних. 6-й етап — аналіз результатів.

І. р. а. безпосередньо пов'язана з задачею *взаємодії людини з обчислювальною машиною*, розв'язанню якої сприяє використання *мов програмування*, *трансляторів*, спеціалізованих ЕОМ і систем графічної оперативної взаємодії. Автоматизувати 1-й, 2-й і 6-й етапи на сучасному рівні розвитку обчисл. техніки і науки досить важко. Найбільше розроблено методи автоматизації 3-го і частково 4-го етапів. У 2-й пол. 60-х років для І. р. а. почали застосовувати переважно малі ЕОМ. Це пояснюється рядом заходів, які полегшують спілкування людини з машиною, передбачених при конструюванні цих машин. В машині «Промінь», напр., до набору операцій включено обчислювання елементарних ф-цій, множення векторів та розв'язування систем лінійних алгебр. рівнянь, у машині «МИР-1» вхідною мовою є *мова процедурно-орієнтована*, яку основано на АЛГОЛі й збагачено деякими символами та операторами, що часто трапляються в інженерних розрахунках; спрощення програмування передбачено і в ЕОМ «*Наїрі*».

При І. р. а. зручно використовувати ЕОМ з десятковою *системою числення* і довільною розрядністю (напр., «*МИР*»). Для ефективнішої організації роботи ЕОМ у *діалога режимі* доцільно виводити інформацію на телеекран (див. *Екранний пульт*). Найбільше значення при автоматизації 3-го й 4-го етапів мають бібліотеки стандартних *підпрограм* і пакетів програм для ЕОМ. Крім універсальних ЕОМ для І. р. а. використовують проблемно-орієнтовані й *спеціалізовані обчислювальні машини*, пристосовані для розв'язування вузьких підкласів задач.

Великі можливості для І. р. а. відкривають системи з розподілом часу, які дають змогу одночасно розв'язувати багато задач на одній обчислювальній системі (див. *Режим розподілу часу*, *Обчислювальних робіт методи організації*).

Літ.: Каган Б. М., Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М.— Л., 1964 [бібліогр. с. 588—592]; Глушков В. М., Летичевский А. А., Стогний А. А. Входной язык вычислительной машины для инженерных расчетов. «Кибернетика», 1965, № 1; Моцибович Б. Р., Попов Б. А. Программирование и стандартные программы для ЭЦВМ «Промінь» и «Промінь-М». К., 1969 [бібліогр. с. 318—323]; Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Справочник. К., 1970 [бібліогр. с. 765—792]; Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М., 1969.
Б. О. Попов, І. В. Сергієнко, Г. С. Теслер.

ІНЖЕНЕ́РНІ МЕ́ТОДИ СИ́НТЕЗУ ДИСКРЕ́ТНИХ АВТОМА́ТІВ — сукупність прийомів і правил, що їх використовують в інженерній практиці при логічному синтезі схем дискретної автоматики, телемеханіки та обчислювальної техніки, враховуючи реальні фізичні обмеження на елементи й структуру схеми. Ці прийоми й правила можна поділити на три групи: задавання роботи майбутнього пристрою та абстрактний синтез, блоковий синтез і структурний синтез з урахуванням реальних обмежень.

Мови задавання роботи пристрою. Класичні способи задавання у вигляді автоматних таблиць або таблиць істинності, коли проектують складні пристрої, не можна застосовувати, бо вони громіздкі. Тому в інженерній практиці для задавання закону функціонування майбутнього пристрою використовують спец. стиснуті способи

записування. Найпоширеніші — мови секвенцій, мова логічних схем алгоритмів і мова технологіч. графів. Задавання мовою секвенцій являє собою сукупність виразів вигляду $P \rightarrow Q$. У лівій і правій частинах цих виразів зазначено змінні або їхні заперечення, розділені комами чи об'єднані знаками *кон'юнкцій*. Кожний запис вигляду $P \rightarrow Q$ має такий зміст: якщо в об'єкті відбувається змінювання сигналів, яке перетворює хоча б один із виразів у лівій частині секвенції на одиницю, то відбувається відповідне змінювання і всіх сигналів, зазначених у правій частині секвенції. Напр., $x_1, \overline{x}_2\ x_3 \rightarrow y_1\overline{y_2}$ означає, що коли x_1 набуває значення, умовно зіставлюваного з 1, або x_2 набуває значення, умовно зіставлюваного з 0, а x_3 — з 1, то y_1 набуває значення 1, а y_2 — нуля. Задавання мовою логіч. схем алгоритмів являє собою, по суті, сукупність *мікропрограм*, що їх має реалізувати пристрій, та інформацію про порядок виконання цих мікропрограм залежно від зовн. умов. Задавання у вигляді технологіч. графу являє собою графіч. зображення процесу перевірки допустимості того чи ін. технологіч. режиму й процесу змінювання цих режимів. Напр., задається пара технологіч. графів, які відповідають процесам пуску й зупинення гідроагрегату, і граф перевірок допустимості пуску чи зупинення. Такі інженерні мови задавання роботи пристроїв потребують спец. методів переходу від них до явних виразів функцій переходу й виходу автомата чи до таблиці істинності функцій. У зв'язку з впровадженням автоматизації проектування за допомогою ЕОМ виникла потреба створювати спец. мови проектування. Прикладами мов такого типу можуть бути *ЛЯПАС*, АЛОС і АЛГОРИТМ.

Блоковий синтез. Проектування складного пристрою неможливе практично, якщо попередньо не поділити його на частини (блоки). Поділ на блоки проектувальник провадить інтуїтивно. За критерії поділу правлять: функціональна єдність, типізація і конструктивна завершеність блока. Перший критерій потребує, щоб блок мав явно виражену функцію. Виконання його забезпечує ясність заг. задуму пристрою й полегшує шукання пошкоджень у пристрої в процесі експлуатації його або під час модернізації та переробок. Типізація блока корисна з погляду здешевлення виробу й стандартизації контролю та діагностики в процесі експлуатації. Конструктивна завершеність блока дає змогу будувати пристрій за модульним принципом і полегшує експлуатацію. Поділ пристрою на блоки приводить до того, що описування роботи кожного блока відбувається незалежно від решти. Окремо відбувається й структурний синтез блоків. Тому з погляду кількості обладнання, витраченого на виготовлення пристрою, результат може бути дуже далекий від оптимуму.

Структурний синтез з урахуванням обмежень. Після того, як одержано функції переходу й виходу автомата, на етапі структурного синтезу (див. *Структурна теорія автоматів*), потрібно реалізувати ці функції на основі заданої сукупності елементів. Тому першим завданням, що виникає на інженерному етапі синтезу, є задача визначення аналітич. виразу ф-цій переходу й виходу через ф-ції, реалізовувані заданим набором елементів. Найпоширеніші набори елементів реалізують, як правило, або повну систему, що складається з кон'юнкції, *диз'юнкції* та заперечення, або систему, що складається з ф-цій Шеффера й заперечення. Крім того, практично в будь-яку з систем елементів входить або затримка, або *тригер*, і завдяки цьому систему елементів можна вважати повною і в класі *часових перемикальних функцій*. Проте іноді обрана для проектування система елементів може відрізнятися від зазначених. Якщо, напр., реалізація базується на ферит-транзисторних елементах, то треба використати повну систему, що складається з ф-ції $x_1\overline{x}_2$, констант і тригера. Коли реалізують схему на параметронах чи кріотронах, зручно використати повну систему, що складається з ф-ції заперечення та мажоритарної ф-ції від трьох або п'ятьох аргументів (для трьох аргументів ця ф-ція має вигляд $y = (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)$, і т. д. Визначення аналітичного виразу заданої ф-ції через ф-ції, реалізовувані заданим набором елементів, може являти собою досить складне завдання. Напр., якщо базис складається з елемента, що реалізує порогову ф-цію, то перехід від таблиці задавання ф-цій переходів і виходів автомата до відповідної мережі з порогових елементів дуже трудомісткий. Другим завданням цього етапу синтезу є врахування тих реальних обмежень на можливість увімкнення елементів у мережу, які визначаються специфікою цих елементів. За найважливіші обмеження такого роду правлять: кількість входів на елемент кожного типу, коефіцієнт розгалуження елемента, навантажувальна здатність елемента й часова затримка, яку вносить елемент. Кількість входів на елемент — це кількість аргументів у ф-ції, яку реалізує цей елемент. Коефіцієнт розгалуження показує, на скільки входів інших елементів можна приєднати вихід цього елемента. Навантажувальна здатність елемента визначає кількість елементів, які утворюють лінійний ланцюжок, який можна навішати на вихід цього елемента так, щоб не було необхідності вводити в цей ланцюжок спец. підсилювачі. Врахувати ці реальні обмеження в сукупності з мінімізацією схеми — це дуже складне завдання, що приводить до нелінійної задачі цілочислового програмування великої розмірності. Розв'язувати такі задачі за існуючого рівня обчисл. техніки для скільки-небудь складних схем (напр., для автоматів, у яких входів більше як 20, а станів — більше як 10) поки що неможливо. Враховувати обмеження ізольовано (напр., лише враховувати обмеження за кількістю входів) — це істотно простіша справа. Такі задачі приводять

до задач лінійного цілочислового програмування, розв'язування яких на ЦОМ відбувається ефективніше. Крім того, було запропоновано різні спеціальні методи розв'язування подібних задач, напр., побудова дужкових представлень *перемикальних функцій*, які мають глибину, не більшу за задану, а це еквівалентне врахуванню обмежень за навантажувальною здатністю елементів. Т. ч., урахування додаткових обмежень дає змогу ставити не лише класичну задачу про мінімізацію логіч. елементів, а й задачу мінімізації додаткового обладнання, напр. підсилювачів і балансуючих елементів, потрібних, щоб вирівняти час проходження сигналів по різних колах схеми.

Використання замість окремих елементів цілих модулів, що реалізують досить складні перемикальні ф-ції, приводить до того, що коли синтезують схеми автоматів на таких модулях, то виникають задачі, відмінні від задач синтезу на базі окремих елементів. Окрім мінімізації заг. кількості модулів, затрачуваних на синтез, і врахування обмежень за входами модулів, їхньою навантажувальною здатністю та коеф. розгалуження, а також за часовими співвідношеннями, у цьому разі треба ще враховувати й коеф. використовуваності модуля, тобто використовуваність його логіч. можливостей. Задачу синтезу схем на модулях ще не набули скільки-небудь заг. розв'язань. Нова технологія виготовлення елементів приводить до того, що роль модулів починають відігравати цілі стандартні вузли автоматики та обчисл. техніки: *регістри*, *лічильники*, *дешифратори* тощо. Це висуває задачу синтезу дискретного автомата на рівень *блоків ЦОМ типових*. За приклад такого підходу можуть правити методи синтезу ф-цій переходу й виходу автомата на зсувових регістрах. Окрім задач синтезу на реальних елементах, модулях чи вузлах, на етапі інженерного синтезу потрібно ще розв'язувати й завдання вибору структурного прийому реалізації автомата. Дискретний автомат можна реалізувати за класичною схемою, що складається з логіч. перетворювача й пам'яті, винесеної в *зворотний зв'язок*, яким охоплено цей логіч. перетворювач. Проте можливі й ін. реалізації: напр., реалізація дискретного автомата на основі схеми мікропрограмного керування Уїлкса чи на основі природних часових затримок у елементів логіч. перетворювача. Вибір тієї чи ін. структурної реалізації поки що провадять лише на рівні інтуїтивного досвіду конструктора.

Важливими є й проблеми кодування входів і виходів автомата, вибору тактності його роботи й вибір синхронної чи асинхронної схеми його. *Кодування станів автомата* провадиться ще на етапі між абстрактним синтезом автомата й структурним синтезом. А кодування вхідних і вихідних сигналів можна провадити на етапі інженерного синтезу. Це кодування має враховувати вимоги реальних давачів і виконавчих механізмів, з якими взаємодіє автомат. Як правило, в практичних задачах автомат є дуже недовизначеним. Задача довизначення тісно пов'язана з задачею кодування вихідних сигналів, бо технологічні обмеження можуть, напр., не дати змоги довизначити ф-ції переходу й виходу значенням «одиниця», якщо з цим значенням при кодуванні зіставлено високий потенціал або імпульс струму. Вибір того чи ін. кодування пов'язаний і з характером використовуваних при реалізації елементів, які можуть бути потенціальними, імпульсними чи імпульсно-потенціальними (див. *Імпульсна елементна структура*, *Потенціальна елементна структура ЦОМ*, *Потенціально-імпульсна елементна структура*).

Вибір робочого такту автомата й визначення того, як відбувається змінювання тактів,— ще одна з задач інженерного етапу синтезу. Під тактом розуміють інтервал дискретного часу, протягом якого встановлюється новий внутр. стан і значення вихідних сигналів автомата. Змінювання тактів може відбуватися або від генератора стандартних сигналів, або від спец. схеми, яка визначає тривалість асинхронного такту. У першому випадку частоту сигналів від генератора вибирають такою, що часовий інтервал між двома сусідніми тактовими сигналами більший за макс. час перехідного процесу, потрібного для переходу автомата з одного внутр. стану в ін. Доведено, що, створюючи синхронні автомати, в багатьох випадках вдається істотно простіше реалізувати автомат і зробити його більш відповідним до вимог реальних систем керування. Для *автоматів асинхронних* виникає багато проблем, невідомих для задачі синтезу синхронних автоматів. Одна з центр. проблем асинхронного автомата — проблема усунення змагань при змінюванні внутр. станів автомата, яка розв'язується спеціальним кодуванням внутр. станів автомата.

Нарешті, на етапі інженерного синтезу розв'язують коло проблем, пов'язаних з підвищенням надійності схеми. Крім вибору системи елементів, яка задовольняє вимоги надійності, щодо синтезовуваного автомата, можна підвищити надійність автомата й внаслідок структурної надмірності. Методи введення структурної надмірності можуть бути дуже різноманітними: резервування всього автомата або його частини, мажорування «найнебезпечніших» частин логіч. перетворювача або пам'яті, включення додаткових обхідних ланцюгів у логіч. схемі тощо. Є багато методів внесення структурної надмірності на основі аналізу й перетворення аналітич. виразів для ф-цій переходів і виходів автомата. Проте ці методи розроблено тільки для окремих випадків, коли накладено істотні обмеження на характер збоїв, що їх допускають у схемі: незалежність збоїв в окремих елементах, фіксований характер відмов та симетричний характер збоїв типу 0—1 і 1—0. Див. також *Автоматизація проектування ЦОМ*.

Літ.: Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964 [біблі-

огр. с. 252—257]; Якубайтис Э. А. Асинхронные логические автоматы. Рига, 1966; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [бібліогр. с. 324—328].

Д. О. Поспелов.

ІНСТИТУ́Т АВТОМА́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К КИРГИ́ЗЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Фрунзе; організований 1960. Осн. напрям досліджень —АСУП, комплексна автоматизація й телемеханізація зрошувальних систем. Ведеться розроблення давачів та різних приладів (для контролю, регулювання), пристроїв телемеханіки й диспетчеризації; дослідження з заг. теорії, синтезу й аналізу алгоритмів керування. При ін-ті є аспірантура. *Ю. Є. Неболюбов.*

ІНСТИТУ́Т АВТОМА́ТИКИ І ТЕЛЕМЕХА́НІКИ (ТЕХНІ́ЧНОЇ КІБЕРНЕ́ТИКИ) АКАДЕ́МІЇ НАУ́К СРСР — див. *Ордена Леніна Інститут проблем керування (автоматики й телемеханіки).*

ІНСТИТУ́Т ЕЛЕКТРО́НІКИ, АВТОМА́ТИКИ І ТЕЛЕМЕХА́НІКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К ГРУЗИ́НСЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Тбілісі. Створено його 1956. Осн. напрями роботи: дослідження стохастичних адаптивних систем; дослідження оптимальних систем; питання машинного перекладу; розроблення ітераційних методів ідентифікації багатовимірних процесів керування об'єктами зі змінними характеристиками; методи розпізнавання й перетворення мовних образів; розроблення гібридного обчислювального комплексу для дослідження систем автомат. керування; спеціалізовані обчислювальні машини; елементи й пристрої автоматики й телемеханіки тощо. При ін-ті є аспірантура. Видаються періодичні збірники.

Літ.: Мускелишвили Н. И. Наука в Советской Грузии. Тбилиси, 1961. *А. І. Еліашвілі.*

ІНСТИТУ́Т ЕЛЕКТРО́НІКИ ТА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНОЇ ТЕ́ХНІКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К ЛАТВІ́ЙСЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Ризі. Створено його 1960. Осн. напрями досліджень: теорія скінченних автоматів; теорія великих систем; теорія статистичної оптимізації; теорія моделювання дискретних пристроїв. Розв'язуються й завдання, що стосуються створення вимірювальних систем для автоматизації перевірки напівпровідникових приладів та інтегральних схем, розробляються різні автоматизовані системи обробки інформації. В експериментальному відділі виготовляються електронні пристрої, розроблені в ін-ті. Є аспірантура. Ін-т видає журнал «Автоматика и вычислительная техника».

Літ.: Леонтьев Л. П. Институт электроники и вычислительной техники Академии наук Латвийской ССР. «Автоматика и вычислительная техника», 1967, № 5; Кибернетика в Латвии. «Автоматика и вычислительная техника», 1970, № 2.

Е. А. Якубайтіс.

ІНСТИТУ́Т КІБЕРНЕ́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К АЗЕРБАЙДЖА́НСЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Баку. Створена 1965 на базі Обчисл. центру АН Аз. РСР. Осн. напрям досліджень — розроблення й застосування матем. методів і обчисл. техніки у нафтодобувній, нафтопереробній та нафтохім. пром-сті, в економіці й плануванні. В лабораторіях ін-ту розробляють числові методи розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, задач підземної гідрогазодинаміки, матем.-екон. задач планування й керування, матем. методи оптимізації технологіч. процесів, провадять дослідження щодо створення автоматизованих систем керування.

А. І. Гусейнов.

ІНСТИТУ́Т КІБЕРНЕ́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К ГРУЗИ́НСЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Тбілісі. Засновано її 1960. Осн. напрями досліджень: розроблення фіз. принципів створення киберн. систем, теорія моделювання природних і штучних киберн. процесів та структур. У відділах і лабораторіях ін-ту розробляють фіз., біологічні та функціонально-логічні основи створення киберн. систем та імітаційних моделей у нових реалізаціях, теорію автоматів, теорію нейронних сіток, теорію великих систем, евристичне та психоевристичне програмування, моделювання інформаційних процесів тощо, застосовуючи досягнення оптоелектроніки, голографії і квантової електроніки. При ін-ті є аспірантура. Ін-т видає випуски наук. праць.

В. В. Чавчанідзе.

ІНСТИТУ́Т КІБЕРНЕ́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К ЕСТО́НСЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Таллінi. Створено його 1960. Осн. наукові напрями: дослідження й створення одно- й багатоцільових систем; матем. моделювання виробничих процесів, проблем планування й керування; дослідження й побудова алгоритмічних мов і складання відповідних трансляторів; дослідження й розроблення спеціалізованих дискретних пристроїв на магнітних елементах; дослідження з теорії оболонок; дослідження процесів керування на молекулярному рівні в біоніці. Ін-т має обчислювальний центр і сектори: матем. методів, автоматики, дослідження операцій, механіки й прикладної математики, фізики, біохімії, наукової інформації, СКБ, бюро програмування. При ін-ті є аспірантура. Випускає збірники «Программы для ЭЦВМ Минск-2».

Літ.: Наука Советской Эстонии. Таллин, 1965.

І. М. Вейгель.

ІНСТИТУ́Т КІБЕРНЕ́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К УКРАЇНСЬКОЇ РСР — див. *Ордена Леніна Інститут кібернетики Академії наук Української РСР.*

ІНСТИТУ́Т КІБЕРНЕ́ТИКИ З ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНИМ ЦЕ́НТРОМ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К УЗБЕ́ЦЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Ташкенті. Його створено 1966. Осн. напрями досліджень: обчисл. математика, економ. кібернетика, тех. кібернетика, загальні й матем. питання обчисл. техніки й теорії інформації. Ін-т є головним у республіці щодо розробки автоматизованих систем оптим. планування й керування. У 1969 ін-т нагороджено орденом Трудового Червоного Прапора. В ін-ті є аспірантура. *В. К. Кабулов.*

ІНСТИТУ́Т ПРИКЛАДНО́Ї МАТЕМА́ТИКИ Й МЕХА́НІКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К УРСР — науково-дослідна установа в Донецьку. Організовано його 1970 на базі Донецького обчислювального центру Академії наук УРСР, створеного 1965. Осн. наук. напрями: нелінійні проблеми матем. фізики, що мають вільні границі; заг. теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних та її застосування; стохастичні дифер. рівняння і проблеми теорії ймовірностей та матем. статистики; метричні властивості багатовимірних відображень, екстремальні проблеми теорії функцій та їх застосування; проблеми руху твердих тіл з порожнинами, заповненими рідиною; матем. проблеми пружності й пластичності; теоретичні проблеми напруги гірських порід; дослідження щодо створення автоматизованих систем планування та керування пром. підприємствами. Створено відділ експлуатації електронних обчислювальних машин. При ін-ті є аспірантура. Видає збірники наук. праць.

Літ.: Данилюк І. І. Донецький обчислювальний центр. В кн.: Історія Академії наук Української РСР, кн. 2. К., 1967. *І. І. Данилюк.*

ІНСТИТУ́Т ТЕХНІ́ЧНОЇ КІБЕРНЕ́ТИКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К БІЛОРУ́СЬКОЇ РСР — науково-дослідна установа в Мінську. Створено його 1965. Осн. напрям досліджень — розроблення теорії і методів автоматизації процесів інженерної праці за допомогою засобів обчисл. техніки. В ін-ті два великі відділи — автоматизації інженерного проектування і тех. засобів автоматизації інженерного проектування. В лабораторіях відділів провадять дослідження з теорії автоматизації конструювання та технологічного проектування, автоматизації аналізу і синтезу схем керування, автоматизації проектування металорізального інструменту, оснащення та автоматизації нормативних розрахунків підготовки виробн., розробляють спеціалізовані прилади обчисл. техніки, інформаційно-довідкові системи, читаючі й креслярські автомати тощо. Ін-т видає збірники праць.

Літ.: Купревич В. Ф. Академия наук Белорусской ССР. Минск, 1968 [бібліогр. с. 234—237]. *О. І. Семенков.*

ІНСТИТУ́Т ТО́ЧНОЇ МЕХА́НІКИ ТА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНОЇ ТЕ́ХНІКИ АКАДЕ́МІЇ НАУ́К СРСР — науково-дослідна установа в Москві. Організовано його 1948. Осн. напрям робіт — створення та впровадження у пром-сть сучасних високопродуктивних універсальних електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦОМ). В ін-ті створено такі ЕЦОМ, як «БЭСМ», «М-20», «БЭСМ-2», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4», «БЭСМ-6». Лабораторії та відділи досліджують і розробляють самі ЕЦОМ, їхнє матем. забезпечення, елементи й окремі пристрої і досліджують ряд технологічних і конструкторських питань, пов'язаних із створенням ЕЦОМ. При ін-ті є аспірантура й вчена рада по захисту канд. і докторських дисертацій. Видаються збірники й випуски наук. праць. *І. В. Логинова.*

ІНСТРУМЕНТА́ЛЬНА ПОХИ́БКА, приладова похибка — похибка, що виникає внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, розв'язувальних елементів або складових частин обчислювальних машин (див. *Похибка розв'язувального елемента*, *Похибок обчислювань теорія*).

ІНТЕГРА́ЛІВ СПО́СОБИ ОБЧИ́СЛЮВАННЯ. Для обчислювання визначених і невизначених інтегралів є точні й наближ. способи. Визначеним інтегралом $I = \int_a^b f(x)\,dx$, що його розуміють у звичайному для курсів математики значенні (в значенні Рімана), наз. границю інтегр. суми

$$I = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\ [\delta = \max \Delta x_i,\ \ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ \ x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1},\ \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b].$$

1. Способи точного обчислювання визначеного інтеграла. Наведене визначення інтеграла дає одночасно і спосіб обчислення його прямим знаходженням границі інтегр. суми. Але такий спосіб є складним, і його майже не застосовують під час точних обчислювань. Частіше застосовують його для набл. знаходження інтегралів. Велике значення мають способи, осн

овані на встановленні зв'язку між шуканим визначеним інтегралом та іншими величинами, значення яких часто можна обчислити простіше, ніж границю інтегр. суми. Такі способи різноманітні, бо інтеграли пов'язані і між собою, і з багатьма іншими величинами. Наведемо лише кілька подібних прикладів. Якщо для інтегрованої ф-ції $f(x)$ існує первісна (примітивна) ф-ція $F(x)$, то справджується рівність $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, яка допомагає звести обчислювання інтеграла до відшукування первісної $F(x)$ і знаходження двох її значень $F(a)$ і $F(b)$.

В інших випадках використовують прості зв'язки між інтегралами від різних ф-цій. До такого виду зв'язків належить, напр., правило «інтегрування частинами»:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)] - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx,$$

яке допомагає інтеграл $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$ замінити інтегралом $\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$. За другий

приклад може правити правило інтегрування суми ф-цій

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n u_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b u_i(x)\,dx.$$

Це правило часто дає можливість звести інтеграл від ф-ції, яка має складну будову, до кількох простіших інтегралів від окремих доданків. Особливо широко застосовують аналог цього правила для нескінченних рядів: якщо $f(x)$ представлене у формі збіжного на $[a, b]$ ряду $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$, то при виконанні деяких умов щодо характеру збіжності справджується рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b u_i(x)\,dx.$$

Використовування її пов'язано з тим, що ф-ції дуже широкої множини можна подати у формі суми ряду, члени якого є простими й легко інтегровними ф-ціями, напр.,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{i!}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^1 x^{2i}dx = 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \dots$$

Під час розв'язування деяких теоретичних і практичних задач буває необхідно обчислювати інтеграли від однозначних аналітичних ф-цій по замкнених лініях $\int_l f(z)\,dz$. Відомо, що такий контурний інтеграл дорівнює добуткові числа $2\pi i$ на суму лишків ф-ції $f(z)$ в особливих точках її, що лежать усередині контура l. Ця рівність дає змогу звести обчислення контурного інтеграла до знаходження лишків, а це часто буває значно простіше, ніж знайти границю інтегр. суми, що відповідає інтегралові $\int_l f(z)\,dz$.

2. Способи наближеного обчислювання визначеного інтеграла. Більшість застосовуваних тепер способів набл. обчислювання визначених інтегралів грунтується на заміні інтегрованої ф-ції $f(x)$ простою й легко інтегровною ф-цією, такою, напр., як алгебр. многочлен або раціональна ф-ція. Ця заміна, як правило, дає тим більшу точність, чим вищим буде порядок диференційовності ф-ції $f(x)$ і чим «плавніша» її зміна. А коли $f(x)$ — розривна ф-ція або має розривні похідні невисокого порядку, то заміна може дати невисоку точність обчислення інтеграла, або зумовити потребу введення многочленів високого ступеня, якщо цю точність збільшити. Тому при побудові правил обчислювання часто буває доцільно розкласти інтегровану ф-цію на два множники $p(x)$ і $f(x)$ так, щоб $p(x)$ увібрав у себе всі особливості ф-ції, а $f(x)$ мав достатньо високий порядок «плавності», і потім звести інтеграл до виду $\int_a^b p(x) f(x)\,dx$. Множник $p(x)$ вважають фіксованим, його називають вагою або *ваговою функцією* в інтегралі. А ф-ція $f(x)$ може бути будь-якою з якоїсь широкої множини. Для обчислення інтеграла створюють правила виду

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = Q_n(f). \quad (1)$$

Такі правила залежать від $2n+1$ параметрів: від n вузлів x_k, n коеф. A_k і кількості n значень ф-ції f. Чим більше n, тим більшої точності можна досягти, використовуючи правила (1). Тому n вважають довільним, але фіксованим числом і розглядають задачу про вибір лише x_k і A_k. Їх намагаються вибирати так, щоб досягти можливо більшої точності правила (1).

Найпоширеніший і плідний принцип вибору x_k і A_k полягає в підвищенні ступеня точності правила. Розгляньмо його ідею на окремому прикладі. Нехай відрізок $[a, b]$ скінченний, і треба побудувати правило, яке забезпечувало б якомога більшу точність для будь-якої неперервної на $[a, b]$ ф-ції f. Відомо, що коли $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то для будь-якої скільки завгодно малої наперед заданої границі *похибки* ε існує такий алгебр. многочлен $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$, який при всіх значеннях $x \in [a, b]$ відрізняється від $f(x)$ за абс. значенням менше, ніж на ε. Це дає змогу сподіватися, що правило (1) даватиме задовільну точність для будь-якої неперервної ф-ції $f(x)$, якщо воно має малу похибку в тому разі, коли $f(x)$ — многочлен. Тому правило інтегрування (1) часто будують так, щоб воно було точним для алгебр. многочленів можливо вищого ступеня. Звичайно кажуть, що рівність (1) має алгебр. ступінь точності m, якщо вона є точною для різних многочленів $P_m(x)$ степеня m і не справджується точно для $f(x) = x^{m+1}$. Одночасно слід відзначити, що за інших умов доводиться мати справу з завданням досягнення високого ступеня точності для інших способів наближення. Так, якщо будують правила для інтегрування періодичних ф-цій, то прагнуть досягти можливо вищого тригонометричного ступеня точності і т. п. Параметри x_k і A_k правила (1) не завжди довільні. Напр., коли ф-ція $f(x)$ задається таблично, то вибір x_k досить обмежений: можна взяти або всі табличні вузли, або частину їх опустити, але неможливо надавати x_k довільних значень.

У проблемі підвищення ступеня точності правила (1) розглядають такі три задачі.

а) Нехай всі $2n$ параметрів x_k і A_k є довільними. Їх можна вибрати так, щоб правило стало точним для всіх алгебр. многочленів степеня $2n-1$. Можна показати, що коли вагова ф-ція $p(x)$ знакопостійна на $[a, b]$, цього справді можна досягти, обравши належним чином x_k і A_k. Більше того, можна показати, що за цих умов x_k і A_k визначають єдиним способом і що ступінь точності $2n-1$ є найвищим можливим. Вперше правило такого типу побудував нім. математик К.-Ф. Гаусс (1777—1855) для випадку скінченного відрізка $[a, b]$ й постійної вагової ф-ції $p(x) \equiv 1$. Його застосовують, щоб обчислювати інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, коли ф-ція $f(x)$ є достатньо гладкою.

б) Нехай вузли x_k правила (1) вибрані й фіксовані, а довільними є лише коеф. A_k. На такі умови побудови правила (1) натрапляють, напр., у задачі інтегрування таблично заданих ф-цій. Один з можливих способів побудови правила (1) полягає в тому, що ф-цію $f(x)$ інтерполюють за її значеннями $f(x_k)$ за допомогою многочлена степеня $n-1$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)} f(x_k),\ \omega = (x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)$$

і потім замінюють в інтегралі $\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx$ ф-цію $f(x)$ на многочлен P_{n-1}. Після почленного інтегрування одержують квадратурні формули виду

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),\ A_k = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}\,dx. \qquad (2)$$

За способом одержання ці ф-ли наз. і н т е р п о л я ц і й н и м и. Їх цілком характеризує умова, що рівність (2) справджується точно кожного разу, коли $f(x)$ є многочлен степеня $n-1$.

Особливо широко застосовують інтерполяційні ф-ли виду Котеса, в яких вузлами x_k вважають рівновіддалені точки відрізка $[a, b]$:

$$x_k = a_0 + kh\left(h = \frac{b-a}{n},\ k = 0, \ldots, n\right).$$

В цьому разі коеф. $A_k = (b-a)^{-1} B_k$,

$$\text{де } B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!\,(n-k)!}\int_0^n p(a + th)\,t\,(t-1)\cdots(t-k+1)\,(t-k-1)\cdots(t-n)\,dt.$$

Котес обчислив коефіцієнти B_k для $n = 1, 2, \ldots, 10$ при $p(x) \equiv 1$. Найпростіші ф-ли Котеса часто застосовують під час обчислень з невисокою точністю. При $n = 1$ інтерполяція виконується за двома значеннями $f(x)$ на кінцях відрізка a і b. Рівність (2) веде до ф-ли трапецій

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)]. \qquad (3)$$

При $n = 2$ ф-ція $f(x)$ інтерполюється за значеннями в трьох вузлах $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, ф-ла Котеса збігається з правилом парабол

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b)\right]. \qquad (4)$$

Рівності (3) і (4) мають невисоку точність і, щоб застосувати їх до обчислень, відрізок $[a, b]$ звичайно ділять на досить велику кількість малих частин довжини $h = \frac{b-a}{m}$, до кожної з яких застосовують правило (3) або (4) і потім складають результати по всіх відрізках. Одержані після цього «загальні правила» трапецій і парабол можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{m}\left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m\right],\quad f_k = f(a + kh),\quad h = \frac{b-a}{m};$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3m}\left[f_0 + f_m + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{m-1})\right].$$

в) В деяких випадках, напр., під час графічних розрахунків, доцільно користуватися правилами квадратур з рівними коеф.

$$\int_a^b p(x)\ f(x)\,dx \approx C_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k). \qquad (5)$$

Вони мають $n + 1$ параметрів C_n і x_k ($k = 1, \ldots, n$). Якщо параметри вибрано так, що рівність (5) справджується точно для будь-яких многочленів степеня n, такі правила наз. квадратурними ф-лами Чебишова. Першу ф-лу такого роду знайдено в середині XIX ст.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi\right). \qquad (6)$$

Тут рівність справджується точно, якщо $f(x)$ є довільний многочлен степеня $2n-1$. Ф-лу Чебишова можна побудувати за будь-якою n для всякої вагової ф-ції $p(x)$, для якої $\int_a^b p(x)\,dx \neq 0$, але серед її вузлів можуть опинитися вузли, що виходять за границю відрізка інтегрування $[a, b]$ і навіть комплексні. Так, для випадку постійної вагової ф-ції $p(x) \equiv 1$ у ф-лі Чебишова $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \approx \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ всі вузли будуть дійсними тільки за $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Для всіх інших значень n серед вузлів x_k будуть і комплексні. До 1965 вважали, що ф-ла (6) — єдина ф-ла Чебишова, в якій при будь-яких n усі вузли x_k дійсні. і лише 1965 знайдено вагові ф-ції $p(x)$, для яких можна побудувати ф-лу Чебишова з дійсними вузлами x_k при будь-яких n або для нескінченної кількості значень n.

3. Обчислювання невизначеного інтеграла. В задачі обчислювання невизначеного інтеграла $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, як правило, буває потрібно знайти ф-цію $y(x)$ для багатьох значень x, і це істотно відрізняє її від задачі обчислювання визначеного інтеграла. Нехай треба обчислити $y(x)$ у рівновіддалених точках з кроком h $x_k = x_0 + kh$, $(k = 0, 1, 2, \ldots N)$. Припустимо, що обчислення досягли точки $x_n = x_0 + nh$ і складено таблицю значень:

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\ldots$	$\ldots$
x_n	y_n
x_{n+1}	

Треба знайти y_{n+1}. Для цього можна використати кілька раніше знайдених значень y_k, $(k \leqslant n)$ і ті значення f, які можна вводити в обчислення.

В загальній формі розрахункове правило можна записати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} A_i y_{n-i} + h\sum_{j=1}^{q} B_{n_j} f(\xi_{n_j}). \qquad (7)$$

При побудові цього правила істотне значення має таке.

а) Правило має $p + 2q + 1$ параметрів A_i, B_{n_j} і ξ_{n_j}. Їх вибирають так, щоб правило мало достатньо високий або навіть найвищий можливий алгебр. ступінь точності. Ця умова така сама, як і в задачі обчислювання визначеного інтеграла. б) На кожному кроці обчислювань з'являється якась похибка. Від кроку до кроку похибки нагромаджуватимуться, і похибка обчислення зростатиме зі збільшенням кількості кроків. Закон зростання залежатиме від вибору правила (7); при цьому зростання може виявитися таким швидким, що правило стане непридатним для лічби навіть на невелике число кроків. Будуючи правило (7), слід дбати про те, щоб відповідне йому зростання похибок було достатньо повільним, щоб можна було обчислити за малих h ф-цію $y(x)$ з якою завгодно малою похибкою на всьому відрізку, де її треба знайти. Правило (7), що має цю властивість, часто наз. стійким щодо зростання похибки. Ознаки стійкості було з'ясовано в середині XX ст. в) Під час обчислень за ф-лою (7) найважче знаходити значення ф-ції $f(t)$. Можна спростити розрахунки й зберегти машинний час, якщо правило (7) будувати так, щоб кожне значення $f(t)$ застосовувалося для знаходження не одного, а кількох значень $y(x)$.

Нехай відома таблиця значень ф-ції $f(t)$ у рівновіддалених точках $x_0 + kh$, $(k = 0, 1, \ldots, N)$ і треба знайти значення $y(x)$ в тих самих точках. Для обчислень тут часто використовують правило

$$y_{n+1} \approx y_n + h\left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720}\,\frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \cdots + C_k\,\frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2}\right],$$

$$C_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 (u + k - 1)\ \ldots\ (u - k)\,du,$$

$$\Delta^i f_j = \Delta^{i-1} f_{j+1} - \Delta^{i-1} f_j, \quad \Delta f_l = f_{l+1} - f_l.$$

Воно є інтерполяційним, точним для випадку, коли $y(x)$ є довільним многочленом степеня $2k + 2$, стійким щодо зростання похибки і кожне значення f використовують для знаходження $2k + 2$ значень y.

В 40—60-х роках XX ст. було запропоновано інші принципи побудови правил інтегрування. Опишемо деякі з них. 1) Правила з найменшою оцінкою похибок у заданих множинах ф-цій. Такі правила побудовано для невеликої кількості найпростіших випадків. 2) Правила з найшвидшим зменшенням похибок у заданому класі ф-цій при необмеженому зростанні числа доданків в інтегр. сумі. Побудовано детерміновані й недетерміновані методи зі збіжністю порядку $O\left(AN^{-\frac{m}{s}}\right)$ і недетерміновані методи зі збіжністю за ймо-

вірністю порядку $O\left(AN^{-\frac{m}{s}-\frac{1}{2}}\right)$ на плані $C_s^m(A)$ ф-цій s змінних ($s > 1$), у яких усі похідні порядку m обмежені за модулем постійної A. Аналогічні результати одержано і в деяких інших класах ф-цій. 3) Метод статистичних випробувань або *Монте-Карло метод*, оснований на зведенні задачі обчислення потрібної величини до обчислення *імовірності* в процесах з *випадковими величинами*. Найпростіший приклад методу дає задача про обчислення інтеграла $p = \int_0^1 f(x)\,dx$ $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$. Якщо в квадраті $[0 \leqslant x \leqslant 1;$ $0 \leqslant y \leqslant 1]$ взяти випадкову точку $M(\xi, \eta)$, то ймовірність її попадання на площу S дорівнює інтегралові p. Нехай взято N випадкових точок $M_i(\xi_i, \eta_i)$, і нехай для L з них справджується рівність $f(\xi_i) \leqslant \eta_i$, тобто ці точки лежать на S. Тоді ймовірність p набл. відшукують за ф-лою $p = \int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{L}{N}$.

Літ.: Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966 [бібліогр. с. 324—360]; Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967; Бахвалов Н. С. Об оптимальных методах решения задач. «Aplikace mathematiky», 1968, sv. 13, № 1; Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., 1970.

В. І. Крилов.

ІНТЕГРА́ЛЬНА СХЕ́МА — функціональний вузол електронної апаратури, всі мікромініатюрні компоненти й з'єднувальні провідники якого виготовлено в об'ємі або на поверхні спільного підкладу з застосуванням групових операцій в єдиному технологічному циклі й герметизовано в одному корпусі як одне ціле. Перші І. с. з'явилися наприкінці 50-х рр. внаслідок пошуків, спрямованих на підвищення надійності, швидкодії, зниження вартості і на мініатюризацію електронних систем, які ускладнюються. За принципами побудови й особливостями технології розрізняють І. с. на активному й на пасивному підкладі. До першого класу відносять т. з. напівпровідникові (твердотілі, тверді) І. с., які виготовляють на монокристалах напівпровідника (здебільшого кремнію) методами планарної технології. В процесі виготовлення в об'ємі кристалу утворюють спеціально леговані мікроділянки й структури, що виконують роль транзисторів, діодів, резисторів, конденсаторів, ліній затримки тощо, необхідних для одержання потрібної функціональної схеми. Всі вони мають вихід на поверхню кристалу, на якій понад окисним шаром створюють контактні площадки й внутрішньосхемні з'єднання у вигляді плівкових металізованих доріжок. Напівпровідникові І. с. за способом електр. ізоляції компонентів поділяють на І. с. з ізоляцією $p - n$-переходом, зміщеним у зворотному напрямі, та І. с. з діелектр. ізоляцією. Окремий клас напівпровідникових І. с. становлять схеми з транзисторними структурами метал-діелектрик-напівпровідник (МДН-транзисторами). Характеристики таких І. с. наведено в табл.

Характеристики	Тип схем					
	Логічні комірки	Тригери	Зсувні регістри		Лічильники	Суматори
			статичні	динамічні		
Швидкодія, *Мгц*	1÷3	0,5÷4	~1	0,5÷10	2÷5	⩽1
Споживана потужність, *мвт*	1÷3	2÷5	0,5÷6 на розряд	0,02÷20 на розряд	20÷40 на розряд	~50 на розряд
Кількість транзисторів на кристалі	5÷20	10÷30	100÷500	300÷800	⩾100	⩾100

До І. с. на активному підкладі відносять і т. з. суміщені І. с., які відрізняються від напівпровідникових тим, що на поверхні напівпровідника понад окисним шаром виконують у вигляді плівок не тільки контактні площадки й з'єднувальні провідники, але й більшість пасивних компонентів.

З І. с. на пасивному підкладі найпоширенішими є т. з. гібридно-плівкові І. с., виготовлювані на діелектричному підкладі, причому пасивну частину схеми формують з плівкових компонентів, а активну — всередині мініатюрних напівпровідникових кристалів з балковими чи кульковими виводами, що їх монтують на плівковій схемі у вигляді навісних деталей. Залежно від товщини робочих шарів гібридно-плівкові І. с. поділяють на тонко- й товстоплівкові. Щоб виготовити тонкоплівкові компоненти, використовують такі процеси, як напилювання у вакуумі (термічне або за допомогою іонного бомбардування), хім. та електрохім. осаджування та вирощування, реактивне розпилювання. Виготовляючи товстоплівкові компоненти, застосовують шовкографію, центрифугування тощо. Щоб надати плівковим компонентам потрібної конфігурації, використовують маскування й фотолітографію. Гібридно-плівкові І. с. дають змогу повністю використати переваги пасивних тонкоплівкових і активних твердотілих елементів. Усі технологічні операції виготовлення І. с. є груповими, тобто в процесі виконання їх одночасно формують цілі масиви мікроелектронних компонентів та схем і з'єднання між ними. Це дає змогу створювати дуже надійні й водночас дешеві І. с. і випускати їх у великій кількості. Надійність І. с. 1965 характеризувалася інтенсивністю відмов $\sim 10^{-7}$ 1/*год*, а пізніше збільшилася на порядок і дорівнює надійності

найкращих зразків дискретних кремнієвих транзисторів.

За функціональним призначенням І. с. поділяють на цифрові (логічні) та лінійні. Цифрові І. с. застосовують у логіч. і запам'ятовувальних вузлах ЦОМ, а лінійні — для підсилювання, перетворювання і генерування радіо- та відеосигналів, струмів і напруг. Пром-сть випускає різні серії цифрових І. с., які виконують ф-ції *інвертора, тригера*, схем «НЕ — І», «НЕ — АБО» тощо. За особливостями схемного вирішення розрізняють діоднотранзисторні, транзистор-транзисторні, логічні І. с., транзисторні схеми з безпосередніми зв'язками, з емітерними зв'язками тощо. Від схемного й конструктивного вирішень та рівня розвитку технології залежать осн. характеристики цифрових І. с.: затримка поширення сигналу, споживана потужність, навантажувальна здатність чи коеф. розгалуження, завадостійкість тощо. Напр., для діодно-транзисторної логіч. схеми затримка поширення сигналу — $8 \div 50$ *нсек*, споживана потужність $5 \div 30$ *мвт*, навантажувальна здатність $4 \div 20$, завадостійкість $0{,}4 \div 1$ *в*.

З лінійних І. с. найпоширеніші операційні диференціальні підсилювачі постійного струму, стандартні низькочастотні й високочастотні підсилювачі, підсилювачі зчитування для ЗП та ін. За числом компонентів і складністю виконуваних ф-цій розрізняють І. с. з низьким ($10 \div 20$ компонентів), середнім ($50 \div \div 100$ компонентів) і високим (понад 100 компонентів) ступенем інтеграції. І. с., що мають тисячі компонентів і виконують ф-ції цілих вузлів електронної апаратури, наз. великими І. с. (ВІС). Збільшення ступеня інтеграції, перехід до ВІСів, підвищення надійності, зниження вартості, вдосконалювання й автоматизація технологічних процесів є осн. тенденціями розвитку техніки І. с.

Літ.: Наумов Ю. Е. Интегральные логические схемы. М., 1970 [бібліогр. с. 424—429]; Валиев К. А., Кармазинский А. Н., Королев М. А. Цифровые интегральные схемы на МДП-транзисторах. М., 1971.

В. М. Корсунський.

ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ. Багато задач матем. фізики та інженерної практики зводиться до розв'язування інтегр. рівнянь (і. р.) Фредгольма (1, 2) та інтегр. рівнянь Вольтерри (3, 4) 2-го та 1-го роду відповідно

$$K_1\varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^b k(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x); \quad (1)$$

$$K_2\varphi \equiv \int_a^b k(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x); \quad (2)$$

$$K_3\varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^x k(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x); \quad (3)$$

$$K_4\varphi \equiv \int_a^x k(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \quad (4)$$

з невідомою ф-цією $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$. Рівняння (3) є окремим випадком (1), коли $k(x, y) = 0$ для $y > x$; шляхом диференціювання від рівняння (4) можна перейти до рівняння (3). Рівняння (2) докорінно відрізняється від рівняння (1); воно містить у собі істотні внутр. труднощі і вивчене ще недостатньо.

Знайти точний розв'язок і. р. у замкненому вигляді вдається лише в окремих випадках. Для розв'язування рівняння (1) широко застосовують наближені методи (особливо в останні роки у зв'язку з використанням обчисл. техніки). Відомі такі методи наближеного розв'язування і. р., як метод простої ітерації, метод заміни ядра виродженим, метод скінченних різниць, варіаційні методи.

1. У методі простої ітерації за початкове наближення розв'язку рівняння (1) беруть довільну ф-цію $\varphi_0(x)$. Наступні наближення будують за ф-лою

$$\varphi_r(x) = \int_a^b k(x, y)\,\varphi_{r-1}(y)\,dy + f(x), \quad r = 1, 2, \ldots \quad (5)$$

Коли цей процес збіжний, наближеним розв'язком вважають $\varphi_n(x)$ при достатньо великому n, якщо всі інтеграли можна обчислити точно. Достатніми умовами застосовності методу простої ітерації є $q_1 = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |k(x, y)|\,dy < 1$ або $q_2 = \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} < 1$. При цьому якісні та кількісні оцінки похибки визначають за відповідними ф-лами:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leqslant q_1^n \|\varphi - \varphi_0\|_C \text{ і}$$

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leqslant q_1^n \frac{\|\varphi_n - \varphi_0\|_C}{1 - q_1^n}, \ \|\varphi - \varphi_i\|_C = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - \varphi_i(x)|;$$

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_2} \leqslant q_1^n \|\varphi - \varphi_0\|_{L_2}$$

та
$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_2} \leqslant \frac{q_2^n \|\varphi_n - \varphi_0\|_{L_2}}{1 - q_2^n},$$

$$\|\varphi - \varphi_i\|_{L_2} = \left(\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_i(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

У випадку і. р. (2) доведено теорему: якщо і. р. (2) розв'язне, а його ядро симетричне, інтегровне з квадратом і додатно визначене, то послідовність ф-цій $\varphi_r(x) = \varphi_{r-1}(x) + \lambda\left[f(x) - \int_a^b k(x, y)\,\varphi_{r-1}(y)\,dy\right]$, $0 < \lambda <$

$< 2\lambda_1$, $r = 1, 2, \ldots$, де λ_1 — найменше характеристичне число, а $\varphi_0(x)$ — будь-яка інтегровна з квадратом ф-ція, збігається в середньому до розв'язку рівняння (2).

Для рівняння (3) послідовні наближення у методі простої ітерації будуються за ф-лою

$$\varphi(x) = \int_a^x k(x, y)\,\varphi_{r-1}(y)\,dy + f(x),$$

$$r = 1, 2, \ldots,$$

причому цей процес завжди збігається. Похибку оцінюють за нерівністю

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leqslant \frac{M^{n+1}(b-a)^{n+1}\|f\|_C}{(n+1)!\left(1 - \frac{M(b-a)}{n+2}\right)},$$

$$M = \max_{a \leqslant x,\, y \leqslant b} |k(x, y)|.$$

Якщо в (5) інтеграли не можна відшукати точно, то для обчислення їх застосовують ті чи інші *квадратурні формули*. Якщо в рівнянні (1) ядро вироджене ($k(x, y) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\,B_i(y)$), то розв'язок цього рівняння знаходять у явному вигляді

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i A_i(x),$$

де $c_i = \text{const}$ — розв'язки системи лінійних алгебр. рівнянь

$$c_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} c_j = f_i; \quad \alpha_{ij} =$$

$$= \int_a^b A_j(y)\,B_i(y)\,dy;$$

$$f_i = \int_a^b f(y)\,B_i(y)\,dy;$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, при умові, що визначник системи не дорівнює нулеві.

2. У методі замінювання ядра виродженим довільне ядро $k(x, y)$ апроксимується виродженим ядром так, що $k(x, y) \approx K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\,B_i(x)$ і за наближений розв'язок $\bar{\varphi}(x)$ рівняння (1) беруть розв'язок рівняння з виродженим ядром. Апроксимацію заданого ядра виродженим ядром здійснюють різними способами. Зокрема, за вироджене ядро можна взяти відрізок ряду Тейлора, або відрізок ряду Фур'є, або інтерполяційне ядро Бетмена. Оцінку похибки методу здійснюють за такою теоремою: якщо

$$\int_a^b |k(x, y) - K(x, y)|\,dy < h,$$

$$\int_a^b |\Gamma(x, y)|\,dy < B, \quad 1 - h(1 + B) > 0,$$

де $\Gamma(x, y)$ — резольвента рівняння з ядром $K(x, y)$, то рівняння (1) має єдиний розв'язок, і

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_C < \frac{\|f\|_C h(1+B)^2}{1 - h(1+B)}. \tag{6}$$

$\Gamma(x, y)$ задовольняє співвідношення $f(x) - \int_a^b \Gamma(x, y)\,f(y)\,dy = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$. При конструюванні виродженого ядра бажано одержати добре наближення при невеликій кількості доданків, бо збільшення числа доданків утруднює використання резольвенти.

3. У варіаційних методах наближений розв'язок рівняння (1) знаходять у вигляді апроксимуючої ф-ції , що залежить від m параметрів

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x), \tag{7}$$

де $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — лінійно незалежні координатні ф-ції (здебільшого перші m ф-цій з повної системи ф-цій на відрізку $[a, b]$). Важливим прикладом таких ф-цій є $\varphi_j(x) = k_i^j \varphi_0 = k_i(k_i^{j-1}\varphi_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Підставивши рівняння (7) у рівняння (1), одержимо якусь величину $\varepsilon(x, c_1, \ldots, c_m)$, що її наз. відхилом:

$$\varepsilon(x, c_1, \ldots, c_m) = \tilde{\varphi}(x) - \int_a^b k(x, y)\,\tilde{\varphi}(y)\,dy - f(x). \tag{8}$$

Параметри c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ визначаються з таких умов, за яких відхил у певному розумінні був би щонайменшим. Залежно від способу мінімізації відхилу одержують той чи інший конкретний метод наближеного розв'язування рівняння (1). Але для кожного з них спільним буде те, що для визначення числових значень параметрів c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, одержують систему рівнянь. Так, за методом найменших квадратів невідомі c_i відшукують з умови мінімізації відхилу рівняння (1) у метриці простору $L_2([a, b])$. У методі Гальоркіна необхідно, щоб відхил був ортогональний до координатних ф-цій $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (або до ф-цій $\Psi_i(x)$ з іншої повної системи координатних ф-цій). У методі збігу треба, щоб відхил перетворювався на нуль у точках $x_i \in [a, b]$, тобто, крім варіаційних ідей, використовують і ідеї методу скінченних різниць. У методі підобластей відрізок $[a, b]$ поділяють точками $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant b$ на m частин, при цьому необхідно, щоб

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(x, c_1, \ldots, c_m)\,dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Відомо, що більшість варіаційних методів зводиться до методу заміни ядра виродженим, тому на основі оцінки (6) $\varphi_m(x) \to \varphi(x)$ при $m \to \infty$.

Теоретичний і практичний інтерес до і. р. сприяв створенню нових методів наближеного розв'язування їх. До цих методів належать у певному розумінні універсальний метод послідовних наближень, метод усереднення функціональних поправок, метод смуг, метод моментів, метод заміни ядра кусково-виродженим, комбіновані методи, метод регуляризації при розв'язуванні і. р. (2) та інші. Ці методи у певних співвідношеннях комбінують з параметрами описаних вище класичних методів. Напр., комбінуючи методи заміни ядра виродженим і простої ітерації розв'язування рівняння (1), добирають такі ф-ції $A_i(x)$, $B_i(y)$ і таке m, щоб залишковий член $r(x, y) = k(x, y) - K(x, y)$ мав властивість

$$q = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |r(x, y)|\, dy < 1. \qquad (9)$$

Розв'язком рівняння (1) у цьому випадку буде ф-ція

$$\varphi(x) = \Psi_0(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i \Psi_i(x), \qquad (10)$$

де $\Psi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ — розв'язки рівнянь $\Psi_i(x) = A_i(x) + \int_a^b r(x, y)\, \Psi_i(y)\, dy$; $A_0(x) = f(x)$, які на основі умови (9) знаходять методом простої ітерації. Величини c_i, що входять до рівняння (10), визначають із системи рівнянь

$$c_i = \int_a^b \Psi_0(x)\, B_i(x)\, dx + \sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b \Psi_j(x)\, B_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

На практиці бажано мати якомога малі q і m. Ці суперечливі вимоги приводять до необхідності побудови *алгоритмів*, у певному розумінні оптимальних. Вводять величину, яка характеризує оптимальність

$$E(N, L_1, L_2, \gamma) = \inf_{M(N)} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C,$$

$$\|k(x, y)\|_C \leqslant L_1, \quad \|f\|_C \leqslant L_2,$$

де $\gamma > 0$ — мінім. відстань від 1 до власних значень ядра $k(x, y)$, $M(N)$ — множина всіх методів наближеного розв'язування рівняння (1), при яких здійснюється не більше як N арифм. дій, норма $\|\Psi\|_r$ для кожної r разів диференційованої ф-ції Ψ означає суму максимумів модулів Ψ і всіх її похідних аж до r-го порядку включно. Доводять, що $M_1 \leqslant E(N, L_1, L_2, \gamma)\, N^{\frac{r}{2}} \leqslant M_2^r$, де M_1, M_2 — додатні сталі, що залежать лише від r, γ, L_1, L_2. Метод, для якого $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C = E(N, L_1, L_2, \gamma)$ є оптимальним за числом арифм. дій, а метод, для якого $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C \leqslant M_2 N^{-\frac{r}{2}}$ — оптимальним за порядком. Обчисл. схема оптимального за порядком методу полягає ось у чому. Нехай

$$K\varphi = \int_a^b k(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \quad k_i \varphi \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{m_i} A_j^{(i)} k(x, x_j^{(i)})\, \varphi(x_j^{(i)}), \quad \tilde{R}f = f(x) + \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} k(x, x_j^{0})\, \tilde{\varphi}(x_j^{(0)}),$$

де $\tilde{\varphi}(x_j^{(0)})$ — розв'язки системи рівнянь $\tilde{\varphi}(x_i^{(0)}) = f(x_i^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} k(x_i^{(0)}, x_j^{(0)})\, \tilde{\varphi}(x_j^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, m_0$, і квадратурні ф-ли вибрано так, що $\|(K - k_i)\varphi\|_0 \leqslant \dfrac{M_3}{m_i^r}\|\varphi\|_r$. Послідовні наближені розв'язки рівняння (1) будують за ф-лами $\varphi_i = R(k_i - k_0)\, \varphi_{i-1} + \tilde{R}f$, $i = 1, 2, \ldots, l$, де l має порядок $\ln N$, $\varphi_0 = \tilde{R}f$. Числа m_i, $i = 0, 1, \ldots, l$ вибирають так, щоб

$$\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot 2M_5}{m_0^r} < q < 1, \quad m_i = [(m_0 - 1)\, q^{-\delta i}] + 1, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2r}, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

де $\|\tilde{R}f\|_0 \leqslant M_4\|f\|_0$, $\|\tilde{R}f\|_r \leqslant M_4\|f\|_r$, $\|K\varphi\|_r \leqslant M_5\|\varphi\|_0$, $\|k_i\varphi\|_r \leqslant M_5\|\varphi\|_0$, $[\cdot]$ — ціла частина відповідного числа.

На основі розглянутих методів без принципових труднощів можна скласти алгоритми та *програми* розв'язування цих рівнянь на ЕОМ. У деяких випадках досить ефективною є реалізація цих методів з допомогою АОМ і гібридних обчисл. машин. Укажемо деякі особливості такої реалізації. Користуючись методом послідовних наближень, вибирають інтервал дискретизації $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, за змінною x. Рівняння (1) і (3) розв'язують відповідно за ф-лами

$$\varphi_r(x_i) = \int_a^b k(x_i, y)\varphi_{r-1}(y)\, dy + f(x_i), \qquad (11)$$

$$\varphi_r(x_i) = \int_a^{x_i} k(x_i, y)\, \varphi_{r-1}(y)\, dy + f(x_i). \qquad (12)$$

При цьому аналогові інтегратори обчислюють інтеграли за ф-лами (11) і (12) без похибок методу, які властиві квадратурним ф-лам, з точністю до інструментальної похибки (див. *Похибок обчислювань теорія*). Інтервал $[a, b]$ (або $[a, x_i]$) представляють часом, за якого і визначають i-е значення нового (r-го) наближення. За n таких циклів нове наближення визначають цілком. Наближення шуканого розв'язку, які надходять під інтеграли правих частин, одержують, провадячи якого-небудь вигляду інтерполяцію за окремими обчисленими раніше значеннями. Якщо, зокрема, $k(x, y) \approx \sum_{i=1}^{m} A_i(x) B_i(y)$, то для рівняння (1) одержують ф-лу послідовних наближень $c_{r,i} = \int_a^b B_i(y) [f(y) + \sum_{j=1}^{m} c_{r-1,j} A_j(y)] \, dy$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для значень, а не для ф-цій, що дає змогу спростити обчисл. апаратуру. На кожному кроці ітерації одночасно визначають чергове наближення шуканого розв'язку $\varphi_r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} c_{r-1,j} A_j x$. Для рівняння (3), замінивши ядро виродженим, одержують наближений розв'язок $\tilde{\varphi}(x)$ з рівняння

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i(x) \int_a^x B_i(y) \tilde{\varphi}(y) \, dy + f(y), \quad (13)$$

яке розв'язують протягом інтервалу часу $[a, x]$ безпошуковим шляхом, тобто шляхом побудови електронного аналога рівняння (13) та вимірювання в ньому напруги $\tilde{\varphi}(x)$. Реалізуючи метод скінченних різниць, систему (6) при невеликому m (15—20) можна ефективно розв'язати на АОМ тоді, коли задано одне й те саме рівняння з різними правими частинами $f(x)$. З допомогою варіаційних методів можна простими засобами реалізувати процес мінімізації відхилів (8) при апроксимації (7) з невеликим числом (до 4—6) координатних ф-цій. У комбінації з заміною ядра виродженим одержують ефективні алгоритми, які полягають у мінімізації відхилів

$$\mu_{r,i} = = c_{r,i} - \int_a^b B_i(y) \left[f(y) + \sum_{i=1}^{m} c_{r-1,j} A_i(y) \right] dy$$

різними способами і в різних метриках.

Використання АОМ розширює можливості машинних методів при розв'язуванні рівнянь (3) і (4) в окремому, але важливому випадку, коли ядро залежить від різниці аргументів. Тоді рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x-y) \varphi(y) \, dy, \quad (14)$$

$$\int_a^x k(x-y) \varphi(y) \, dy = f(x) \quad (15)$$

при звичайних обмеженнях розв'язують безпошуковим шляхом за час $[a, x]$. У деяких випадках необхідно з умов відтворюваності на АОМ апроксимувати різницеве ядро іншим $k(x-y) \approx \tilde{k}(x-y)$, якому відповідає наближений розв'язок $\tilde{\varphi}(x)$. Апроксимувати можна як шляхом обчислювання, так і добираючи параметри обчисл. блоків. При цьому потрібно враховувати можливу некоректність задачі розв'язування рівняння (15) з наближеними даними. Розглянуті методи з невеликими видозмінами можна застосовувати для розв'язування багатовимірних лінійних інтегральних рівнянь зазначеного типу та систем таких рівнянь. Про розв'язування особливих лінійних інтегр. рівнянь див. *Інтегральних лінійних сингулярних рівнянь способи розв'язування.*

Літ.: Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959 [бібліогр. с. 671—680]; Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., 1962 [бібліогр. с. 698—708]; Положий Г. Н., Чаленко П. И. Решение интегральных уравнений методом полос. В кн.: Вопросы математической физики и теории функций, ч. 1. К., 1964; Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965 [бібліогр. с. 373—379]; Емельянов К. В., Ильин А. М. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 4.

А. Ф. Верлань, В. В. Іванов, П. Й. Чаленко.

ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ. Сингулярні інтегральні рівняння (с. і. р.) виникають на основі інтегр. представлень розв'язань багатьох задач математичної фізики. Ці рівняння застосовують і в *автоматичного керування теорії (Вінера — Хопфа рівняння)*, в теор. фізиці (теорія дисперсійних співвідношень) та інших галузях. Багато окремих типів с. і. р. розв'язують у замкненій аналітичній формі. Як один з важливих прикладів розглянемо одержаний І.-Н. Векуа розв'язок у замкненій формі т. з. характеристичного с. і. р.

$$K_0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t}, \; t \in \Gamma, \quad (1)$$

в якому $\varphi(t)$ — шукана ф-ція, Γ — замкнена гладка проста крива; $a, b, f \in H(\alpha, \Gamma)$, тобто неперервні за Гельдером на Γ з показником α ($\psi \in H(\alpha, \Gamma)$, якщо $|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant \text{const}|t_1 - t_2|$ $t_1, t_2 \in \Gamma$), при цьому $a^2 - b^2 \neq 0$ на Γ. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що початок координат знаходиться всередині Γ. Впровадимо інтеграл типу Коші $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z}$, $z \overline{\in} \Gamma$.

Граничні значення $\Phi(z)$ ($\varphi^+(t)$, коли $z \to t$, залишаючись усередині Г, і $\varphi^-(t)$, коли $z \to t$, залишаючись поза), пов'язані формулами Сохоцького — Племеля так:

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t), \quad S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \varphi^+(t) + \varphi^-(t). \quad (2)$$

За цими ф-лами рівняння (1) перетворюють до вигляду

$$\varphi^+ = G\varphi^- + g \quad \left(G = \frac{a-b}{a+b},\ g = \frac{f}{a+b}\right). \quad (3)$$

Задача визначення $\Phi(z)$ та $\varphi^\pm(t)$ із співвідношення (3) наз. *крайовою задачею* Рімана. Заг. її розв'язок у замкненій формі вперше дали італ. математик І. Племель і рад. математик Ф. Д. Гахов. Введемо індекс

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\ln G(t).$$

Тоді ф-ція $\psi = \ln[G(t)\,t^{-\varkappa}]$ буде однозначною на Г. Застосувавши до неї ф-ли (2), одержимо

$$\psi^\pm = \pm \frac{1}{2} \ln[G(t)\,t^{-\varkappa}] + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln[G(\tau)\,\tau^{-\varkappa}]\,d\tau}{\tau - t},\ G(t) = t^\varkappa \frac{\exp\psi^+}{\exp\psi^-}.$$

Підставивши в (3) замість G його представлення і здійснивши прості перетворення відповідно до відомих властивостей аналітичних ф-цій, матимемо

$$\frac{\varphi^+}{\exp\psi^+} - g_1^+ = t^\varkappa \frac{\varphi^-}{\exp\psi^-} - g_1^- \equiv P_{\varkappa-1}(t), \quad g_1 = \frac{g}{\exp\psi^+}, \quad (4)$$

де $P_{\varkappa-1}(t)$ — довільний многочлен степеня $\varkappa - 1$, $P_{\varkappa-1}(t) = 0$ при $\varkappa \leqslant 0$. З ф-ли (4) одержуємо

$$\varphi^+(t) = g_1^+(t)\exp\psi^+ + P_{\varkappa-1}(t)\exp\psi^+,$$

$$\varphi^-(t) = g_1^-(t)\frac{\exp\psi^-}{t^\varkappa} + P_{\varkappa-1}(t)\frac{\exp\psi^-}{t^\varkappa},\ \varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t) \quad (5)$$

Оскільки $\Phi(z)$ має перетворюватися на нуль на нескінченності, при $\varkappa < 0$ рівняння (5) буде шуканим розв'язком рівняння (1) лише за умови, що $\int\limits_{\Gamma} \frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$ має на нескінченності нуль порядку, не меншого як $-\varkappa + 1$. При $\varkappa \geqslant 0$ (5) дає $\varkappa + 1$ лінійно незалежних розв'язків рівняння (1) і відповідної крайової задачі (3). З (5) випливає, що для доведення розв'язку до числа треба вміти обчислювати індекс $\varkappa$ та ряд сингулярних інтегралів. Нехай $t = t_1(s) + it_2(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \gamma)$ — рівняння контура Г. Тоді $G(t) = G[t_1(s) + it_2(s)] = \xi(s) + i\eta(s)$. Співвідношення $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$ являє собою параметричне рівняння якоїсь кривої L. Через те, що $G(t)$ неперервна і Г — замкнена, крива L буде замкненою. Кількість витків кривої L навколо початку координат (порядок кривої Г відносно початку координат) буде індексом ф-ції $G(t)$. Якщо, напр., $G(t)$ — дійсна або суто уявна ф-ція, яка не перетворюється на нуль, то L — відрізок прямої (такий, що проходиться парне число разів), і індекс $G(t)$ дорівнює нулеві. Якщо $G(t)$ є аналітичною ф-цією всередині Г, крім скінченного числа точок, де вона може мати полюси, то індекс дорівнює різниці між числом нулів і числом полюсів $G(t)$ всередині Г. У заг. випадку індекси можна обчислювати за ф-лою

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\gamma} \frac{\xi(s)\,\eta'(s) - \eta(s)\,\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)}\,ds. \quad (6)$$

Оскільки $\varkappa$ є ціле число або нуль, то, щоб правильно визначити $\varkappa$ під час числового інтегрування (див. *Інтегралів способи обчислювання*) за ф-лою (6), досить забезпечити абсолютну обчисл. *похибку* L 1/2. Сингулярні інтеграли можна обчислити наближеними способами, що їх наведено нижче.

Рівняння Вінера — Хопфа 2-го роду

$$\tilde\varphi(x) + \int\limits_{0}^{\infty} K(x-y)\,\tilde\varphi(y)\,dy = \tilde f(x), \quad x > 0, \quad (7)$$

продовживши на всю вісь ($x \in (-\infty, +\infty)$), застосувавши перетворення Фур'є та замінивши аргумент, можна звести до рівняння виду (1), в якому $a(t) = 1 + \sqrt{2\pi}\,k(\omega)$, $b(t) = \sqrt{2\pi}\,k(\omega)$, $f(t) = F(\omega) = \frac{1}{1-t}$, $k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x)\,e^{-ix\omega}dx$, $\tilde F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ix\omega}dx$, $\omega = i\,\frac{1+t}{1-t}$. Застосувавши формули (5), одержимо замкнену форму розв'язку рівняння (7) у вигляді

$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right) \frac{2i}{\omega + i} e^{i\omega x} d\omega, x >$ > 0. Отже, щоб довести розв'язання рівняння (7) до числа, треба обчислити ще й інтеграли Фур'є (див. *Фур'є інтегралів способи обчислювання*). Рівняння Вінера — Хопфа 1-го роду $\int_0^\infty K(x - y)\tilde{\varphi}(y)\,dy = \tilde{f}(x), x > 0$, також зводиться до рівняння вигляду (1), але при цьому має місце т. з. винятковий випадок, коли $a^2 - b^2$ в окремих точках Г має нулі цілих порядків. Цей випадок також піддається розв'язуванню в замкненій формі, як і багато інших випадків ослаблення та поширення початкових вимог на Г, a, b та f. Особливе значення в теорії пружності, гідро- та аеродинаміки має випадок, коли Г є сукупністю розімкнених неперетинних дуг, a, b — кусково-неперервні ф-ції.

Повне лінійне с. і. р. вигляду

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\varepsilon - t} + $$
$$+ \lambda \int_\Gamma K(\tau, t)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), t \in \Gamma, \qquad (8)$$

де a, b, f та Г — ті самі, що й в (1), λ — комплексний параметр, а ядро $K(\tau, t)$ — фредгольмівське (див. *Інтегральні рівняння*) взагалі кажучи, не можна розв'язати в замкненій аналітичній формі. Один із способів розв'язування цього рівняння полягає в його регуляризації, тобто в зведенні його до випадку інтегр. рівняння Фредгольма 2-го роду. Це останнє розв'язують багатьма способами (див. *Інтегральних лінійних рівнянь способи розв'язування*). Регуляризацію оператора K дає, напр., оператор

$$K_0^{0'}\psi \equiv a_0(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{b_0(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - t},$$

$$a_0(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad b_0(t) = \frac{bt}{a^2(t) - b^2(t)};$$

прості обчислення приводять до ф-л

$$K_0^{0'}K\varphi \equiv \varphi + T\varphi, \quad KK_0^{0'}\varphi \equiv \varphi + T\varphi,$$

$$T = -\frac{1}{\pi i}T_{ab_0} - \frac{1}{\pi i}T_{bb_0}S + K_0^{0'}K,$$

$$\tilde{T} = -\frac{a}{\pi i}T_{b_0} + \frac{b}{\pi i}T_{a_0} + KK_0^{0'},$$

$$T_\omega\varphi = \int_\Gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t},$$

$$K\varphi = \int_\Gamma K(\tau, t)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Проте регуляризація с. і. р. не завжди можлива. Крім того, вона може приводити до нееквівалентних рівнянь і до надто складних обчислень. Слушно шукати наближений інтегр. розв'язок с. і. р. без їх регуляризації. Набір способів розв'язування рівняння (8) без його регуляризації одержують, виходячи з таких міркувань. З одного боку, рівняння (8) є окремим випадком лінійних операторних рівнянь у гільбертовому чи банаховому просторах і тому до нього можна застосувати методи розв'язування таких рівнянь (див. *Операторних рівнянь способи розв'язування*). Специфіка застосування заг. методів до рівняння (8) полягає в необхідності обчислювати ряд сингулярних інтегралів і враховувати деякі особливості теорії с. і. р. Зокрема, умова $a^2 - b^2 \neq 0$ на Г забезпечує коректність задачі розв'язування рівняння (8), якщо λ не є характеристичне число і $\varkappa = 0$; якщо $a^2 - b^2$ може перетворюватися на нуль на Г, то задача розв'язання рівняння (8) є *некоректно поставленою задачею* і треба застосовувати методи розв'язування некоректних задач (див. *Некоректно поставлених задач способи розв'язування*). Випадок будь-якого індекса $\varkappa$ зводиться до випадку нульового індекса впровадженням рівняння

$$K\tilde{\varphi} \equiv \tilde{\varphi}^+ + (a + b) - \tilde{\varphi}^- - (a - b)\,t^{-\varkappa} +$$
$$+ \lambda\int_\Gamma K(\tau, t)\left[\tilde{\varphi}^+(\tau) - \tilde{\varphi}^-(\tau)\tau^{-\varkappa}\right]d\tau = f(t),$$

$t \in \Gamma$. Ф-ція $\varphi = \tilde{\varphi}^+ - t^{-\varkappa}\tilde{\varphi}^-$ буде тим розв'язком рівняння (8) (якщо воно розв'язне), у якого φ^- має найвищий можливий порядок нуля на нескінченності. Якщо λ не є характеристичне число і $\varkappa > 0$, то $\varphi_\nu = \tilde{\varphi}_\nu^+ - t^{-\varkappa}\varphi_\nu^- - \frac{1}{t^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa$, де розв'язок $\tilde{\varphi}_\nu = \tilde{\varphi}_\nu^+ - \tilde{\varphi}_\nu^-$ рівнянь $\tilde{K}\tilde{\varphi}_\nu = Kt^{-\nu}$ — всі лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння $K\varphi = 0$. З другого боку, до рівняння (8), яке є узагальненням фредгольмівських рівнянь, формально можна застосувати багато методів розв'язування таких рівнянь без регуляризації с. і. р. Детальне дослідження показує, що ряд методів: типу Рітца — Гальоркіна, збігу, заміни ядра на вироджене тощо (див. *Чисельні методи*) можна обгрунтувати щодо с. і. р. А дуже поширений метод розв'язування фредгольмівських рівнянь 2-го роду, що грунтується на апроксимації розв'язування у вигляді кусково-лінійної ф-ції, не можна обгрунтувати щодо с. і. р. у заг. випадку. При достатній гладкості розв'язання рівняння (8) дуже ефективним виявляється метод найменших квадратів, за яким наближений розв'язок шукають у вигляді $\varphi_n = \sum_0^n \alpha_k t^k + \sum_n^{-1} \alpha_k t^{k-\varkappa}$, приче-

му шукані α_k, що мінімізують $\int\limits_\gamma |\tilde{K}(\sum\limits_{-n}^{n} \alpha_k t^k) - f|^2 dt$, знаходять як розв'язок алгебр. системи

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (\tilde{y}_k, \tilde{y}_j) = (f, \tilde{y}_j), \quad j = -n, -n+1, \ldots, n, \qquad (9)$$

де $(\tilde{y}_k, \tilde{y}_j) = \int\limits_0^\gamma \tilde{y}_k(t) \overline{\tilde{y}_j(t)}\, ds$, $(f, \tilde{y}_j) = \int\limits_0^\gamma f(t) \overline{\tilde{y}_j(t)}\, ds$, $y_k = \tilde{K} t^k =$

$$= \begin{cases} (a+b) t^k + \lambda \int\limits_\Gamma K(\tau, t) \tau^k d\tau, & k > 0, \\ (a-b) t^{k-\varkappa} + \lambda \int\limits_\Gamma K(\tau, t) \tau^{k-\varkappa} d\tau, & k < 0, \end{cases}$$

$\overline{\tilde{y}_j}$ — комплексно спряжена функція до $\tilde{y}_j$. Алгебр. систему (9) доцільно розв'язувати методом квадратного кореня (при заміні n на $n+1$ вигідно застосовувати метод обведення). На практиці зручно, замінивши змінну t, звести рівняння (8) до випадку, коли Г є колом одиничного радіуса з центром у початку координат (про спосіб одержання апріорної оцінки похибки методу і похибки за рахунок неточності початкових даних див. у ст. *Наближених методів загальна теорія;* про оцінку похибки заокруглення при розв'язуванні алгебр. системи вигляду (9) див. у ст. *Лінійних алгебричних систем рівнянь способи розв'язування*). На практиці зручно ступінь похибки наближеного розв'язку оцінювати, обчислюючи норми відхилу рівняння $\int\limits_\Gamma \left| \tilde{K} \left(\sum\limits_{-n}^{n} \alpha_k t^k \right) - f \right|^2 dt$ або $\max\limits_t \left| \tilde{K} \left(\sum\limits_{-n}^{n} \alpha_k t^k \right) - f \right|$. Із зростанням n перша норма завжди наближається до нуля, а друга наближається до нуля при достатній гладкості вихідних даних рівняння (8). У загальнішому випадку, коли про гладкість розв'язування рівнянь (8) нічого не відомо, доцільніше застосовувати ітеративні методи розв'язування с. і. р. *Обчислювальна схема* одного з завжди збіжних ітеративних методів типу найшвидшого спуску така:

$$\varphi^{j+1} = \varphi^{(j)} + \frac{\| f - K\varphi^{(j)} \|^2}{\| K^* (f - K\varphi^{(j)}) \|^2} K^* (f - K\varphi^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (10)$$

де $\varphi^{(0)}$ — довільна функція, спряжений оператор $K^* \psi = a\overline{\psi} + \overline{\frac{t'(s)}{\pi i}} \int\limits_0^\gamma \frac{\overline{b}(\tau) \psi(\tau)\, du}{\overline{\tau}(u) - F(s)} + \int\limits_0^\gamma \overline{K}(t, \tau) \overline{t'}(s) \psi(\tau)\, du$ і знак норми ($\| \, \|$) означає $\|\psi\|^2 = \int\limits_0^\gamma |\psi(\tau)|^2 ds$. При цьому в разі потреби інтеграли беруть числово. Зазначений ітеративний метод і метод найменших квадратів можна перенести на заг. випадок рівняння вигляду (8), коли коефіцієнти цього рівняння кусково-неперервні і Г складається з скінченної кількості неперетинних гладких дуг. Тепер під нормою треба розуміти $\|\psi\|^2 = \int\limits_0^\gamma \rho |\psi|^2 ds$, де вага ρ має забезпечувати обмеженість $\|\varphi\|$ для потрібного розв'язку φ. Цю умову буде, напр., виконано, якщо покласти, що $\rho = \prod\limits_{k=1}^{s} |t - d_k|^{1-\xi}$ з достатньо малим $\xi > 0$, де d_k — всі точки розриву ф-ції a, b і всі кінці дуг, що входять до Г. Значно ефективнішим щодо кількості операцій, потрібних для досягнення заданої точності, може бути комбінований метод, коли початкову ф-цію $\varphi^{(0)}$ для ітеративного методу (10) знаходять за методом найменших квадратів. Щоб одержати наближений розв'язок з великою точністю, економічно вигідно застосовувати обчисл. схему ітераційного уточнення, за якою заново застосовується той самий наближений метод для відшукання поправки δ до раніше одержаного розв'язку φ: $K\delta = f(t) - K\varphi$. При цьому треба подбати про зростаючу точність обчислення відхилу $f(t) - K\varphi$. Узагальненням рівнянь Вінера — Хопфа є повне с. і. р. типу згортки

$$\delta\varphi(x) + \eta \operatorname{sign} x \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y) \times \varphi(y)\, dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_2(x-y) \operatorname{sign} y \varphi(y)\, dy + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \varphi(y)\, dy = f(x), \qquad (11)$$

де δ та η — задані константи. Рівняння (11) перетворенням Фур'є і заміною аргумента зводять до рівняння вигляду (8). Рівняння (11) також є окремим випадком лінійних операторних рівнянь у гільбертовому чи банаховому просторах, і його можна розв'язувати заг. наближеними методами для таких рівнянь. На практиці нерідко трапляються системи рівнянь вигляду (1), (8) та (11). Теорія систем лінійних с. і. р. аналогічна теорії одного рівняння, тому до розв'язування систем можна застосовувати аналогічні способи наближеного розв'язування. Проте система

рівнянь вигляду (1) не завжди розв'язується в замкненій аналітичній формі. Причина цього полягає в тому, що для матриць a та b не завжди справджується властивість $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$. При розв'язуванні систем с. і. р. високого порядку наближеними методами мають справу з питаннями економії пам'яті й часу обчислювань на ЦОМ. З точки зору економії пам'яті ітеративному методові вигляду (10) слід віддати перевагу перед методом найменших квадратів. Проте в разі повільної збіжності ітерацій можна використати й метод найменших квадратів, знаходячи шукані коефіцієнти α_k не з алгебр. системи вигляду (9), а безпосередньо мінімізуючи норми відхилу рівняння одним з алгоритмів типу швидкого спуску (координатного спуску, найшвидшого спуску тощо). Сказане вище про системи с. і. р. значною мірою справджується й щодо лінійних багатовимірних с. і. р.

Літ.: Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959 [бібліогр. с. 616—628]; Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963 [бібліогр. с. 628—635]; Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965 [бібліогр. с. 373—379]; Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968 [бібліогр. с. 488—511]; Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. К., 1968 [бібліогр. с. 281—285]; Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970 [бібліогр. с. 372—379].

В. В. Іванов.

ІНТЕГРА́ЛЬНИХ НЕЛІНІ́ЙНИХ РІВНЯ́НЬ СПО́СОБИ РОЗВ'Я́ЗУВАННЯ. Задача відшукування числового розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (н. і. р.) досі є однією з найскладніших задач *обчислювальної математики.* Багато які з найпоширеніших у практиці н. і. р. та їхніх систем є окремими випадками рівняння типу Урісона (див. *Інтегральні рівняння*)

$$x(s) = \lambda \int_{\Omega} K[s, t, x(t)]\, dt, \quad s \in \Omega, \qquad (1)$$

де $x(s)$ — невідома ф-ція, λ — числовий параметр, Ω — обмежена замкнена область у n-вимірному евклідовому просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі), $K(s, t, x)$ — задана функція. Розв'язок цього рівняння, як правило, можна знайти лише наближено. Розгляньмо методи розв'язування таких рівнянь.

Метод невизначених коефіцієнтів полягає в тому, що коли в рівнянні (1) ф-цію $K(s, t, x)$ представлено рядом

$$K(s, t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(s, t)\, x^p, \qquad (2)$$

де ф-ції $K_p(s, t)$ — неперервні, то розв'язок рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \qquad (3)$$

Підставимо цей ряд у рівняння (1), скориставшись розкладом (2), а також рядом для $x^p(t)$ виду

$$x^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+p} x^{(p,n)}(t),$$

коеф. якого визначено рекурентно ($x^p = x \cdot x^{p-1}$)

$$x^{(p,n)}(t) = \sum_{q=0}^{n} x^{(1,q)}(t)\, x^{(p-1,\, n-q)}(t). \qquad (4)$$

Прирівнюючи коеф. при однакових степенях λ, одержимо ф-ли для послідовного знаходження коеф. ряду (3)

$$x^{(1,0)}(s) = \int_{\Omega} K_0(s, t)\, dt, \quad x^{(1,n)}(s) =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{p=1}^{n} K_p(s, t)\, x^{(p,\, n-p)}(t)\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

($x^{(p,\, n-p)}(t)$ знаходять із співвідношень (4)). Ряд (3) за певних умов збіжний. Напр., коли справджуються умови

$$\left| \int_{\Omega} K_0(s, t)\, dt \right| \leqslant B, \quad \int_{\Omega} |K_p(s, t)|\, dt \leqslant \frac{B}{r^p},$$

$$p = 1, 2, 3, \ldots, \quad s \in \Omega,$$

де B і r — сталі, інтегр. рівняння (1) має в крузі $|\lambda| < \frac{r}{4B}$ єдиний розв'язок, який можна подати рядом (3), що збігається регулярно. Швидкість збіжності характеризується оцінкою ($k \to +\infty$)

$$|x(s) - x_k(s)| = 0\left(k^{-\frac{3}{2}} \gamma^{k+1}\right), \quad s \in \Omega,$$

де

$$\gamma = |\lambda| \frac{4B}{r}, \quad x_k(s) = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \qquad (5)$$

За набл. розв'язок рівняння (1) беруть часткову суму виду (5). *Похибку* такого розв'язку можна апріорно оцінити за допомогою нерівності

$$|x(s) - x_k(s)| \leqslant \frac{r}{2}\Bigg(1 - \sqrt{1-\gamma} -$$

$$- \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!\,(n+1)!} \gamma^{n+1}\Bigg), \quad s \in \Omega.$$

У методі послідовних наближень вибираємо яким-небудь способом початкове наближення $x_0(s)$ до шуканого розв'язку рівняння (1) й будуємо ітераційний процес виду

$$x_n(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)]\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6)$$

Якщо відомо, що послідовні наближення (6) зійдуться до розв'язку рівняння (1), то, зупинивши процес на останньому кроці, одержимо набл. розв'язок цього рівняння.

Наведемо один з результатів щодо збіжності процесу (6). Нехай ф-ція $K(s, t, x)$ є неперервною разом з похідною $K'_x(s, t, x)$ за сукупністю змінних $s,\ t \in \Omega,\ |x| \leqslant \rho$ і нехай

$$|\lambda| \int_\Omega \sup_x |K(s, t, x)|\, dt \leqslant \rho,$$

$$|\lambda| \int_\Omega \sup_x |K'_x(s, t, x)|\, dt \leqslant \alpha, \quad s \in \Omega,\ |x| \leqslant \rho,$$

де $\alpha < 1$. Тоді при будь-якій неперервній ф-ції $x_0(s)$ з області

$$|x| \leqslant \rho, \quad s \in \Omega, \qquad (7)$$

послідовні наближення (6) сходяться рівномірно до неперервного розв'язку $x^*(s)$ рівняння (1), який міститься в області (7) і є єдиним тут. Швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x^*(s) - x_n(s)| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \sup_s |x_1(s) - x_0(s)|, \quad s \in \Omega. \qquad (8)$$

При $n > 1$ нерівність (8) дає апріорну оцінку похибки n-го наближення. Апостеріорна, і, взагалі кажучи, точніша оцінка має вигляд

$$|x^*(s) - x_n(s)| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \sup_s |x_n(s) - x_{n-1}(s)|, \quad s \in \Omega.$$

Труднощі обчислювання квадратур, що виникають під час реалізації процесу (6), можна подолати за допомогою деяких способів набл. інтегрування. Узагальненням процесу (6) є *алгоритм* осереднювання функціональних поправок.

А н а л о г   м е т о д у   Н ь ю т о н а розв'язування алгебр. рівнянь є одним з ефективних методів розв'язування н. і. р. (1). Уведемо ітераційний процес ($\lambda = 1$):

$$x_n(s) = x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (9)$$

$$\Delta_{n-1}(s) = \varepsilon_{n-1}(s) + \int_\Omega K'_x[s, t, x_{n-1}(t)]\, \Delta_{n-1}(t)\, dt,$$

де $\varepsilon_{n-1}(s) = \int_\Omega K[s, t, x_{n-1}(t)]\, dt - x_{n-1}(s)$, що його запропонував рад. математик Л. В. Канторович і який має надшвидку збіжність 2-го порядку. Тут на кожному кроці відносно поправки $\Delta_{n-1}(s)$ розв'язується лінійне інтегр. рівняння (див. *Інтегральних лінійних рівнянь способи розв'язування*). Якщо ф-ція $K(s, t, x)$ є неперервною разом з похідними $K'_x(s, t, x)$ і $K''_{x^2}(s, t, x)$ за сукупністю змінних $s,\ t \in \Omega,\ |x - x_0(t)| \leqslant \rho$ і якщо виконано умови:

а) для початкового наближення $x_0(t)$ ядро $K'_x[s, t, x_0(t)]$ має резольвенту $\Gamma(s, t)$, причому $\int_\Omega |\Gamma(s, t)|\, dt \leqslant B,\ s \in \Omega$;

б) відхил $\varepsilon_0(s)$ рівняння (1) на наближенні $x_0(t)$ задовольняє нерівність $|\varepsilon_0(s)| = |\int_\Omega K[s, t, x_0(t)]\, dt - x_0(s)| \leqslant \eta,\ s \in \Omega$;

в) в області $|x - x_0(t)| \leqslant 2(1 + B)\eta \leqslant \rho,\ t \in \Omega$, маємо $\int_\Omega \sup_x |K''_{x^2}(s, t, x)|\, dt \leqslant K,\ s \in \Omega$;

г) сталі B, η і K підлягають умові $h = (1 + B)^2 K_\eta \leqslant \frac{1}{2}$, то процес Ньютона — Канторовича (9) сходиться рівномірно до розв'язку $x^*(s)$ рівняння (1), розміщеного в області

$$|x - x_0(s)| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}(1 + B)\eta, \quad s \in \Omega \qquad (10)$$

і єдиного в області $|x - x_0(s)| \leqslant 2(1 + B)\eta$, $s \in \Omega$. Швидкість збіжності визначається оцінкою

$$|x^*(s) - x_n(s)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n - 1}(1 + B)\eta, \quad s \in \Omega. \qquad (11)$$

Такі твердження, окрім того, що встановлюють збіжність алгоритму, ще й являють собою теореми про існування області розміщення і області однозначності розв'язку н. і. р. Відшукання початкового наближення $x_0(s)$, яке задовольняє зазначені умови і є грубим наближенням розв'язку рівняння (1), — це самостійна задача, для розв'язування якої загальних рецептів немає. Вибір того чи іншого способу одержання $x_0(s)$ залежить від виду рівняння (1) або характеру досліджуваної проблеми. Якщо потрібне $x_0(s)$ знайдено, то велика швидкість збіжності процесу (9) забезпечує одержання набл. розв'язку рівняння (1) з достатньою для практики точністю після невеликої кількості ітераційних кроків. Апріорну оцінку похибки наближення $x_n(s)$ можна знайти за ф-лою (11). Точнішу, апостеріорну оцінку дасть нерівність (10) ($x = x^*(s)$), якщо у відповідних виразах замінити $x_0(t)$ на $x_n(t)$ і перерахувати відповідні сталі.

Іншим ефективним методом розв'язування н. і. р. є а н а л о г   м е т о д у   Е й т к е н а — С т е ф ф е н с е н а розв'язування алгебр. рівнянь. Уведемо ітераційний процес ($\lambda = 1$):

$$x_n(s) = x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (12)$$

$$\Delta_{n-1}(s) = \varepsilon_{n-1}(s) + \int_\Omega \frac{K[s, t, \bar{x}_{n-1}(t)] - K[s, t, x_{n-1}(t)]}{\bar{x}_{n-1}(t) - x_{n-1}(t)} \times \Delta_{n-1}(t)\, dt,$$

де $\varepsilon_{n-1}(s) = \tilde{x}_{n-1}(s) - x_{n-1}(s)$, $\tilde{x}_{n-1}(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)]\,dt$. Теореми збіжності цього методу за загальною ідеєю є видозмінами відповідних теорем для методу Ньютона. Алгоритм (12) має надшвидку збіжність 2-го порядку, але не потребує обчислювання на кожному ітераційному кроці похідної $K'_x[s, t, x_{n-1}(t)]$. При цьому, грунтуючись на ідеї інтерполяції, він іноді збігається фактично швидше за алгоритм Ньютона.

Метод *кубатурних формул* дає можливість, розв'язуючи н. і. р. (1), заздалегідь уникати точного обчислювання інтегралів та необхідності розв'язувати лінійні інтегр. рівняння. Для цього користуються методом заміни інтеграла в самому рівнянні скінченною сумою за якою-небудь кубатурною формулою. Нехай для спрощення вважатимемо рівняння (1) за одновимірне

$$x(s) = \lambda \int_a^b K[s, t, x(t)]\,dt, \quad s \in [a, b], \quad (13)$$

в якому ф-ція $K(s, t, x)$ є неперервною за сукупністю змінних. Візьмімо квадратурну ф-лу

$$\int_a^b F(t)\,dt = \sum_{j=1}^{m} A_j F(t_j) + R, \quad (14)$$

де вузли $t_j \in [a, b]$. Користуючись цією ф-лою, рівняння (1) запишемо у вигляді

$$x(s) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j K(s, t_j, x_j) + \lambda R(s), \quad (15)$$

де

$$x_j = x(t_j),$$

$$R(s) = \int_a^b K[s, t, x(t)]\,dt - \sum_{j=1}^{m} A_j K(s, t_j, x_j);$$

($x(t)$ — точний розв'язок рівняння). Беручи в рівнянні (15) $s = t_i$, $i = 1, 2, ..., m$, одержуємо:

$$x_i = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j K(t_i, t_j, x_j) + \lambda R(t_i), \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Відкинувши тут малу величину $\lambda R(t_i)$, одержимо нелінійну систему

$$\tilde{x}_i = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j K(t_i, t_j, \tilde{x}_j), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (17)$$

Її невідомі $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_m$ приймаємо за набл. значення шуканого розв'язку $x(s)$ у вузлах квадратурної ф-ли. Подальше завдання полягає в тому, щоб розв'язати систему (17); для цього можна використати всі відомі способи розв'язування систем нелінійних алгебр. рівнянь. Потім, коли чисельний розв'язок рівняння (1) знайдено, його можна проінтерполювати (див. *Інтерполяція функцій*) на весь проміжок $[a, b]$, виходячи з рівності (15), відкинувши в ній $\lambda R(s)$ і замінивши x_j, $j = 1, 2, ..., m$ розв'язком системи (17). В результаті одержуємо набл. розв'язок рівняння (1)

$$\tilde{x}(s) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j K(s, t_j, \tilde{x}_j). \quad (18)$$

Якщо (14) — узагальнена квадратурна ф-ла з кроком h і рівновіддаленими вузлами, то деяке уявлення про похибку розв'язку системи (17), зумовлену відкиданням у системі (16) величини $\lambda R(t_i)$, можна одержати, порівнюючи цей розв'язок з аналогічним розв'язком для кроку $\frac{h}{2}$ у збіжних вузлах. Знайдено й строгу апостеріорну оцінку похибок розв'язку (18) для випадку довільної квадратурної ф-ли.

Викладені методи є придатними й для рівнянь із змінною межею інтегрування, тобто для нелінійних рівнянь Вольтерри, і їх можна реалізувати на ЦОМ. Для багатьох типів одновимірних інтегральних рівнянь ефективними засобами розв'язування є аналогові й гібридні обчисл. машини (АОМ і ГОМ). Напр., для рівняння $x(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t) F[x(t)]\,dt$ при заміні $k(s, t) \approx \sum_1^m A_i(s) B_i(t)$ процес пошуку розв'язку полягає в мінімізації будь-якої норми для суми відхилів $\mu_{ki} = c_{ki} - \int_a^b B_i(t) F\left[f(t) + \sum_{j=1}^{m} c_{k-1,j} A_j(t)\right] dt$ ($k = 1, 2, \ldots$ — номер наближення); кожне наближення відтворюється автоматично за інтервал часу $[a, b]$ на кожному кроці мінімізації.

Зручність відтворювання нелінійних залежностей і многочленів на АОМ і ГОМ дозволяє реалізувати багато алгоритмів варіаційних методів для досить складних н. і. р. При цьому незалежна змінна подається як час $[a, b]$, забезпечується періодичне відтворювання мінімізовуваного функціоналу, а процес мінімізації можна автоматизувати або доручати операторові, який керує вільними параметрами, стежачи за поведінкою мінімізовуваного функціоналу по осцилографу. Рівняння Вольтерри з виродженими й різницевими ядрами розв'язують неалгоритмічно, будуючи їхні електронні моделі-аналоги й вимірюючи напруги, змінні в часі за законом $x(t)$. Розв'язуючи нелінійні рівняння Вольтерри з ядром загального виду, моделюють *оператор* виду

$\int_{a}^{x_i} k(s_i, t) F[x(t)]\, dt$, що дає можливість реалізувати метод послідовних наближень з невеликою затратою апаратури або одержати набл. розв'язок у вигляді кусково-ламаної ф-ції за допомогою безпосереднього аналого-дискретного моделювання з використанням інтеграторів у кількості, яка дорівнює кількості відрізків $\Delta_{s_i} = s_{i+1} - s_i$ дискретизації.

Літ.: Назаров Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. «Труды Среднеазиатского университета. Серия 5-а. Математика», 1941, в. 33; Мысовских И. П. О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях. «Вестник Ленинградского университета. Серия математики, физики и химии», 1953, № 11, в. 4; Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959 [бібліогр. с. 671—680]; Мысовских И. П. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений. «Вестник Ленинградского университета. Серия математики, механики и астрономии», 1962, № 7, в. 2; Ульм С. Алгоритмы обобщенного метода Стеффенсена. «Известия АН Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук», 1965, № 3; Бельтюков Б. А. Аналог метода Рунге — Кутты для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерры. «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 4; Бельтюков Б. А. Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1965, т. 5, № 5; Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. К., 1967 [бібліогр. с. 327—328]; Забрейко П. П. [та ін.]. Интегральные уравнения. М., 1968 [бібліогр. с. 432—444]; Красносельский М. А. [та ін.]. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969 [бібліогр. с. 437—452]; Верлань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений на аналоговых вычислительных машинах. К., 1972 [бібліогр. с. 211—217].

Б. А. Бельтюков, А. Ф. Верлань.

ІНТЕГРА́ЛЬНІ РІВНЯ́ННЯ — рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтеграла. І. р. бувають лінійні й нелінійні. Лінійні І. р. мають вигляд:

$$\alpha(x)\varphi(x) - \mu \int_D k(x, y)\varphi(y)\, dy = f(x),\ x \in D, \quad (1)$$

де параметр μ, коефіцієнт $\alpha(x)$, ядро І. р. $k(x, y)$, права частина $f(x)$ і область інтегрування D відомі; потрібно визначити невідому ф-цію $\varphi(x)$ так, щоб рівняння (1) задовольнялось тотожно для всіх (або майже всіх) значень x в області D. Вигляд (1) приймають і системи лінійних І. р. (тоді $\alpha(x)$ і $k(x, y)$ — матриці; f і φ — вектор-функції) та багатовимірні І. р. (тоді D — багатовимірна область). Розв'язок $\varphi(x)$ І. р. (1) знаходять у тому класі функцій, для якого ліва частина (1) з урахуванням властивостей $\alpha(x)$ і $k(x, y)$ має ті самі властивості, що й права частина $f(x)$. Рівняння (1) при $f(x) \equiv 0$ наз. однорідним, у протилежному випадку, тобто коли $f(x) \neq 0$ на множині додатної міри,— неоднорідним. Якщо $\alpha(x) \equiv 0, 1$, то (1) наз. відповідно рівнянням 1-го і 2-го роду. Якщо однорідне рівняння 1-го або 2-го роду має відмінні від нуля розв'язки — власні ф-ції, то значення параметра μ наз. характеристичним, при цьому $1/\mu = \lambda$ для рівнянь 2-го роду наз. власним значенням.

При фредгольмівських ядрах $k(x, y)$, тобто ядрах, у яких *оператори* $k\varphi = \int_D k(x, y) \times \varphi(y)\, dy$ цілком неперервні, І. р. (1) наз. рівняннями типу Фредгольма. Прикладами таких ядер є неперервні ф-ції $k(x, y)$, ф-ції з умовою $\iint_D |k(x, y)^2|\, dxdy < \infty$, а також усілякі ф-ції зі слабкими особливостями, для яких $\sup \int |k(x, y)|\, dx < \infty$. Якщо в рівнянні (1) типу Фредгольма $k(x, y) = 0$ для $y \geqslant x$, то (1) наз. рівнянням Вольтерри. Рівняння вигляду $\int_0^x \frac{\varphi(y)\, dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad (0 < \alpha < 1)$ наз. рівнянням Абеля.

І. р. (1), відмінні від рівнянь Фредгольма 2-го роду, наз. особливими. До них належать: І. р. Фредгольма 1-го роду, сингулярні І. р. з ядром Коші ($D \equiv \Gamma$ — скінченна сукупність кусково-гладких дуг, що не перетинаються, і зімкнених кривих $k(x, y) \equiv \frac{k_1(x, y)}{x-y}$) і ядром Гільберта ($D$ $[0, 2\pi]$, $k(x, y) \equiv k_1(x, y) \times \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2}$); сингулярні І. р. типу згортки ($D \equiv [-\infty, \infty]$, $k(x, y) \equiv a_1(x-y) + a_2(x-y) \operatorname{sign} y + k_1(x, y)$); І. р. Вінера—Хопфа ($D \equiv [0, \infty]$, $k(x, y) \equiv a(x-y)$) та ін. Ядро $k_1(x, y)$ тут припускається фредгольмівським, а ф-ції a_1, a_2 і a звичайно припускаються інтегровними або інтегровними разом зі своїм квадратом. Особливими І. р. є й численні рівняння інтегральних перетворень: рівняння Фур'є $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\varphi(y)\, dy = f(x)$, Лапласа $\int_0^{\infty} e^{-xy}\varphi(y)\, dy = f(x)$, Мелліна $\int_0^{\infty} y^{x-1} \times \varphi(y)\, dy = f(x)$, Ханкеля $\int_0^{\infty} \sqrt{xy}]\nu(yx) \times \varphi(y)\, dy = f(x)$, де $]\nu$ — ф-ція Бесселя 1-го роду порядку ν, та ін.

Нелінійні І. р. ще не мають докладної класифікації. Вкажемо па деякі типи таких рівнянь, що мають першорядне значення. Рівняння Гаммерштейна $\varphi(x) = \int k(x, y) f(y, \varphi(y))\, dy$, де $k(x, y)$ — фредгольмівське ядро, f—нелінійна ф-ція відносно шуканої φ. Загальнішими є рівняння Урисона $\varphi(x) = \int_D k(x, y, \varphi(y))\, dy$, де $k(x, y, \varphi)$ — звичайно неперервна ф-ція при $x, y \in \overline{D}$ і $|\varphi| \leqslant C$ (C — якась достатньо велика константа, $\overline{D}$ — замикання D). Рівняння Ляпунова

$$\sum_{\alpha,\beta} \int_D \ldots \int_D k_{\alpha,\beta}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(\rho)}) \times$$

$$\times\varphi^{\alpha_0}(x)\varphi^{\alpha_1}(y^{(1)})\ldots\varphi^{\alpha_\rho}(y^{(\rho)})v^{\beta_0}(x)\,v^{\beta_1}(y^{(1)})\ldots$$
$$\ldots v^{\beta_\rho}(y^{(\rho)})\,dy^{(1)}\,dy^{(2)}\ldots dy^{(\rho)}=0, \quad (2)$$

в яких ф-ція v — відома, число ρ — фіксоване, а підсумовування поширено на будь-які вектори $\alpha\ (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho)$, $\beta\ (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\rho)$ з невід'ємними цілочисловими компонентами. Ліва частина рівності (2) наз. інтегростепеневим рядом. Нелінійне одновимірне сингулярне І. р. можна зобразити у вигляді $F\ (x, \varphi\ (x), S\varphi, T_1\varphi, T_2\varphi, \ldots, T_n\varphi = 0$, де сингулярний інтеграл $S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}$, T_j — цілком неперервні оператори, F — задана нелінійна ф-ція. Багатовимірне нелінійне сингулярне І. р. може мати вигляд $F\ (x, \varphi\ (x), \sigma_1\varphi, \sigma_2\varphi, \ldots, \sigma_{n_1}\varphi; T_1\varphi, \ldots, T_{n_2}\varphi) = 0$, де $\sigma_i\,\varphi \equiv \int\limits_S \frac{f_i(x,\theta)}{(y-x)^m}\,\varphi\,(y)\,d_y s$, $\theta = \frac{y-x}{|y-x|}$. S — m-вимірна поверхня, $f_i\ (x, \theta)$ — диференційовні ф-ції.

І. р. здебільшого відіграють допоміжну роль і виникають на основі інтегр. зображень розв'язків багатьох задач матем. фізики. Перевагою такого підходу є зниження розмірності області визначення розв'язків І. р. Точно розв'язати аналітично І. р. або розв'язати їх у замкненій області, як правило, неможливо. Тому до появи ЕОМ більшість І. р. досліджували лише якісно. З розвитком обчисл. техніки й математики для розв'язування широких класів І. р. розроблено багато ефективних наближених методів (див. *Інтегральних лінійних сингулярних рівнянь способи розв'язування*, *Інтегральних нелінійних рівнянь способи розв'язування*).

Літ.: Забрейко П. П. [та ін.]. Интегральные уравнения. М., 1968 [бібліогр. с. 432—444]; Трикоми Ф. Интегральные уравнения. Пер. с англ. М., 1960 [бібліогр. с. 292—296]. *В. В. Іванов.*

ІНТЕГРА́ТОР — див. *Пристрій інтегрувальний.*

ІНТЕ́ГРО-ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНІ РІВНЯ́ННЯ — клас рівнянь у математиці. Див. *Рівнянь класифікація.*

ІНТЕГРУВА́ННЯ СИ́МВОЛЬНЕ, інтегрування аналітичне — знаходжування первісної функції, якщо її можна записати в аналітичному вигляді. Методи І. с. вперше було опубліковано в працях І. Ньютона (1643—1727) і Г.-В. Лейбніца (1646—1716). Подальшого розвитку ці методи набули в працях Л. Ейлера (1707—83), В. П. Остроградського (1801—62), Ш. Ерміта (1822—1901) та ін. Процес інтегрування, оснований на цих методах, не є однозначним, він розрахований на те, щоб використовувати евристичні здібності людини.

Поява розвинених *алгоритмічних мов* і ЦОМ з великими можливостями щодо символьних перетворень дала змогу в 60-х роках 20 ст. взятися за створення великих універсальних *програм* І. с. Ці програми мають евристичний характер. Метою створення їх є вивчення питань, пов'язаних з проблемою «штучного інтелекту», а також практичне використовування при розв'язуванні деяких задач, які потребують інтегрування поблизу полюсів та інтегрування швидкоколивних ф-цій. Ці програми застосовують, використовуючи асимптотичні методи, а також у тих випадках, коли необхідно одержати загальний розв'язок, що залежить від буквених параметрів.

Програма SAINT, яку створено на основі тих самих принципів, що й широко відому програму «Логік-теоретик», є спробою при розв'язуванні задачі І. с. моделювати людський спосіб мислення. Щоб одержати безпосередній розв'язок, програма використовує таблицю з 26 стандартних форм. Якщо інтеграл не табличний, то роблять спробу звести його до табличного вигляду за допомогою одного з 18 передбачених програмою перетворень. До числа таких перетворень належать перетворення виду

$$\int (F(x)+\varphi(x))\,dx = \int F(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx$$

тощо, а також різні підстановки. Перебір застосовуваних перетворень здійснюється евристично відповідно до таблиці ознак (характеристики), складеної для кожного виду інтегрованого виразу. Після перетворення знову пробують застосувати таблицю. Цю програму було написано мовою *ЛІСП* і реалізовано на машині «ІВМ-7090».

Програму SIN, створену 1967, було написано теж мовою ЛІСП, але для роботи на машині «ІВМ-7094». Ця програма складається з трьох рівнів. Перші два рівні передбачають застосування таблиці й деяких евристичних перетворень, з яких найважливішу роль відіграють підстановки $u = u\ (x)$ для інтегралу виду

$$\int F(u(x))\,u'(x)\,dx, \quad (1)$$

де F — одна з тригонометричних ф-цій, а $u\ (x)$ — довільна ф-ція. До 2-го рівня належить також інтегрування частинами. Якщо 1-й або 2-й рівні не забезпечують успіху, то за допомогою підстановок Ейлера $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$; $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ або підстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ та інших роблять спробу звести трансцендентні підінтегральні вирази до дробово-раціонального вигляду. Після цього, щоб виділити раціональну частину, використовують метод Остроградського. В останніх варіантах програми для цього застосовували ще алгоритм Рітча. Процедуру І. с. було використано як складову частину внутрішнього матем. забезпечення машини «МИР-2» зі вхідною мовою *АНАЛІТИК*. Процедуру (програму) розділено на три рівні. 1-й рівень містить таблицю з десяти табличних інтегралів. Завдяки властивостям мови АНАЛІТИК ця таблиця є досить місткою, тобто містить дуже загальні форми, такі, як $\int x^k e^{\alpha x}\sin bx dx$. Такі форми застосовують і в вироджених ви-

падках, коли параметри дорівнюють 0 або 1. В цьому разі машина автоматично спрощує громіздкі праві частини. 2-й рівень програми передбачає використання тотожних перетворень і застосування різних підстановок. Центр. роль при цьому відіграє зведення виразів до вигляду (1). Проте ф-ція F є довільною. 3-й рівень передбачає застосування різних тотожних перетворень, які збільшують однозначність запису підінтегральних виразів. До них належать тотожності виду $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, знищування ірраціональності в знаменнику тощо. Ці перетворювання не мають принципового характеру, проте значно збільшують імовірність успіху при інтегруванні. Розв'язуючи практичні задачі, які потребують масового інтегрування на машині «МИР-2», застосовують спеціалізовані програми, розраховані на швидке інтегрування відповідних класів інтегралів.

Літ.: Фишман Ю. С. Интегрирование функций на машине, выполняющей аналитические преобразования. «Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем», 1968, в. 2; Слэйджл Д. Эвристическая программа, решающая задачи символьного интегрирования в объеме первого курса университета. В кн.: Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967.
Ю. С. Фішман.

ІНТЕГРУВА́ННЯ ЧИСЕ́ЛЬНЕ — див. *Інтегралів способи обчислювання.*

ІНТЕНСИ́ВНІСТЬ ПОТО́КУ в теорії масового обслуговування — *математичне сподівання* числа подій із стаціонарного потоку однорідних подій, що настали за одиницю часу. У випадку нестаціонарних потоків миттєву І. п. визначають рівністю

$$\mu(t) = \lim_{s \downarrow t} \frac{\mu(t, s)}{s - t},$$

де $\mu(t, s)$ — матем. сподівання числа подій, що настали за проміжок часу (t, s). У випадку стаціонарного потоку І. п. постійна. Для будь-якого стаціонарного потоку зі скінченною інтенсивністю $\mu < \infty$ необхідною та достатньою умовою ординарності цього потоку є рівність $\lambda = \mu$, де λ — параметр потоку (теорема В. С. Королюка). З усіх стаціонарних потоків без післядії тільки найпростіші потоки задовольняють цю умову. Див. також *Потік випадковий.* *С. М. Броді.*

«ІНТЕРНЕ́ЙШЕНАЛ БІ́ЗНЕС МАШІ́НЗ КОРПОРЕ́ЙШЕН», ІБМ (International Business Machines Corporation, IBM) — найбільша в світі корпорація по розробці, виробництву й збуту електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦОМ), зовнішніх пристроїв і систем обробки даних. Засновано її в 1911, нинішню назву вона має з 1924. Наук. дослідження й розробки провадяться в 30 лабораторіях корпорації (в США й за кордоном), 16 її заводів випускають обчисл. машини й системи, пристрої, обладнання й елементи. В 1970 корпорація структурно складалася з 11 великих підрозділів — відділів.

Обчисл. пристрої ІБМ почала створювати 1929. В 1944 інженери корпорації разом з ученими Гарвардського ун-ту створили першу в світі автомат. електромех. обчисл. машину «*Марк-1*», 1948 ІБМ випустила першу серійну електронну машину «ІВМ-604», 1949 — розробила першу *обчислювальну систему* з програмою на перфокартах, яка складалася з двох машин; 1952 створено систему обробки даних «ІВМ-701», а 1954 — «ІВМ-650», що широко застосовувалась у промисловості. В 1956 корпорація випустила машину «ІВМ-704» з запам'ятовувальним пристроєм на магн. осердях на 32 тисячі слів, а 1960 — напівпровідникову ЕЦОМ відомої 7000-ї серії — «ІВМ-7090», швидкодія якої зросла в 5 раз порівняно з аналогічними ламповими машинами. В 1965 ІБМ випустила першу модель сімейства обчисл. систем «*IBM-360*», що поклали початок електронним *обчислювальним машинам* 3-го покоління. Логіч. структура цих систем послужила основою для розробки в 1967 сімейства бортових машин «4 Pi» (на *інтегральних схемах*).

Нижче в таблиці наведено осн. тех. дані найвідоміших серійних машин, що їх випускає ІБМ (до неї не включено дані унікальних машин і систем, таких, як система керування на космодромі в Х'юстоні, бортова обчисл. машина космічного корабля «Джемінай» тощо, і десятків систем стратегічного призначення).

Літ.: Зейденберг В. К., Матвеенко Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1969 г. М., 1970. *П. В. Походзіло.*

«ІНТЕРНЕ́ЙШЕНАЛ КОМП'Ю́ТЕРЗ ЛІ́МІТЕД» (International Computers Limited, I. C. L.) — провідна англійська фірма по випуску ЕЦОМ і периферійного обладнання до них. Створена 1968. При розробці нових ЕЦОМ науково-дослідні лабораторії фірми тісно співпрацюють з Манчестерським ун-том. З 1965 випускає серію суміщуваних машин на інтегральних схемах «System 4». З 1964 випускає сімейство ЕЦОМ «ICL 1900 Series» (з 1968 почато випуск цієї серії машин на інтегральних схемах — «ICL 1900A Series»). 1969 почато випуск машини серії 1900 А на інтегр. схемах моделі «ICL 1906 A» зі швидкодією порядку мільйона операцій за 1 *сек* (ємність ЗП на магн. осердях — до 524 тис. 24-розрядних слів з можливим нарощуванням до 4 196 тис. слів і з часом циклу до 0,75 *мксек*; ЗП на магн. барабанах ємністю до 8 × 2 млн. знаків; час виконання арифм. операцій: додавання й віднімання — 0,9 *мксек*; множення — 2,6 *мксек*; ділення — 7 *мксек*).

1971 фірма розробила ЕЦОМ «MU-5» (спільно з Манчестерським ун-том), що поступається потужністю лише перед амер. «*CDC-7600*» (середній час виконання команди — бл. 0,1 *мксек*).

Літ.: Иньков Ю. И. Электронная вычислительная техника и капиталистическая экономика. М., 1968; Зейденберг В. К., Матвеенко Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.
С. Ф. Козубовський.

Основні характеристики найвідоміших машин фірми ІБМ

Назва	Дата виготовлення	Основні елементи	Час додавання/множення, *мксек*	Тип і ємність ОЗП (тис. слів)	Середній цикл, *мксек*	Введення — виведення	Максимальна ємність зовнішнього ЗП з довільним вибиранням, млн. десяткових знаків
IBM-603	1948	лампи	500/	тригери		перфокарти	
IBM-701	1952	»		електронно-променеві трубки 2	12	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій	
IBM-650	1954	»	700/	барабани 1—4, магн. осердя 60	4800 100	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій	48 (диски)
IBM-705-III	1956	»	86/	осердя 20—80	9	перфокарти, друк. пристрій	
IBM-704	1956	»	12/228, фікс. 72/192 плав.	осердя 4—32 барабани 4—16	12	перфокарти, друк. пристрій, екран індикатора	
IBM-303 RAMAK модель I	1957	»	30 000/	осердя 0,1 барабани 2	10 000	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій	5—40
IBM-709	1958	»	24/	осердя 4—32 барабани 4—16	12, 7000	перфокарти, друк. пристрій, екран індикатора	
IBM-1620	1959	транзистори	560/	осердя 20—100	20	перфокарти, перфострічки	10
IBM-7090	1960	»	4,4/ 4,4—30,5	осердя 32	2,2	перфокарти, друк. пристрій	234 (диски) 0,83(барабани)
IBM-1401	1960	»	230/	осердя 1,4—4	11,5	перфокарти, друк. пристрій	
IBM-7030 STRETCH	1961	»	1,5/	осердя 16—262	2,2	перфокарти, друк. пристрій	710 (перфок.) 256 (блоків магн. стрічок)
IBM-7072	1962	»	12/64	осердя 5—30	6	перфокарти	
IBM-7044	1963	»	5/22,5—33	осердя 8—32	2,5	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій	0,73 (барабан) 234 (диски) 50 (блоків стрічок)
IBM-7700	1964	»	6/	осердя 16—49	2	перфокарти	
IBM-360	1965	»					
IBM-1130	1965	»	8/	осердя 8	3,6	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій, графопобудовник	150 (диски)
IBM-1800	1966	»	10/	осердя 4—32	2	перфокарти, перфострічки, друк. пристрій	75 (диски)
IBM-4Pi	1967		5—10/29,6—34,6	осердя 8—3	2,5 (час вибирання з ОЗП)		
IBM-360 модель 85	1969	»	0,08, 05	тонкі плівки 4—6	1	перфокарти, друк. пристрій	

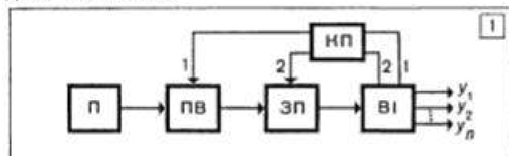
Примітка: характеристики систем «IBM-360» див. у ст. *«IBM-360»*.

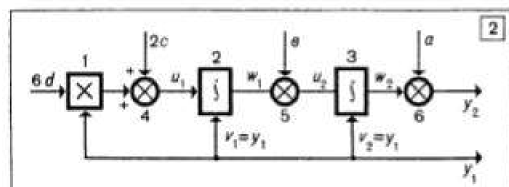
ІНТЕРПОЛЯТОР — пристрій, призначений для інтерполювання функцій. Блок-схему І. зображено на мал. 1, де ПВ — пристрій введення, за допомогою якого інформація, записана у програмі П, вводиться в *запам'ятовувальний пристрій* ЗП і ВІ — вузол інтерполяції, який власне і здійснює інтерполяцію, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — вихідні сигнали І. Часто в І. входить пристрій, що керує в процесі роботи введенням програми, і ЗП (КП та зв'язки 1, 2 на мал. 1). У програмі звичайно записують координати вузлів інтерполяції або інші характерні точки чи параметри інтерполяційної кривої ІК (поверхні), вид інтерполяційної формули, а іноді й інші дані (напр., діаметр фрези та швидкість її руху по контуру, а також інші технологічні команди при роботі І. в *системі програмного керування* фрезерним верстатом або ознаку графіка — номер, колір тощо — у графопобудовниках).

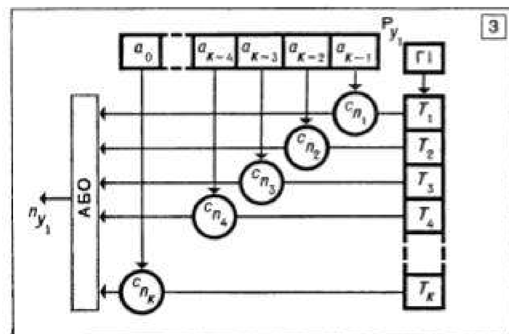
Розрізняють: залежно від характеру ІК (поверхні) — лінійні, параболічні, кругові та інші І.; від системи координат — І., що використовують декартову, полярну та інші системи координат; від числа координат — дво-, три- і т. д. координатні І.; від характеру зображення змінних — І. неперервної дії й дискретні; від способу представлення ІК — І., що використовують представлення ІК в явному вигляді, тобто у вигляді $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ або в параметричному вигляді, тобто $y_1 = f_1(t)$, $y_2 = f_2(t)$, $\ldots$, $y_n = f_n(t)$; від використовуваних елементів і конструкції — мех., електромех. та електронні І.

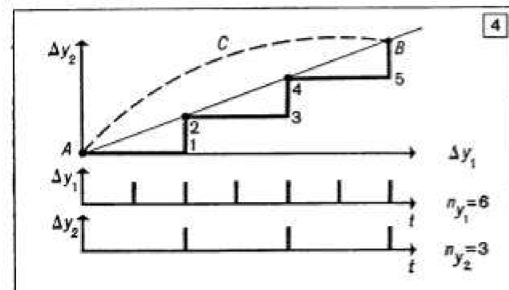
Як ВІ в І. неперервної дії (ІН) використовують потенціометри (лінійні або нелінійні), автотрансформатори (з лінійним або нелінійним законом зміни вихідної напруги), сельсини, інтегратори, конденсатори, гнучкі сталеві стрічки тощо.

Блок-схему двокоординатного ІН, який використовує як ВІ інтегратори і здійснює параболічну інтерполяцію в явному вигляді за законом $y_2 = a + by_1 + cy_1^2 + dy_1^3$, наведено на мал. 2.









1. Блок-схема інтерполятора.
2. Блок-схема параболічного інтерполятора неперервної дії: 1 — блок множення на коефіцієнт $6d$; 2, 3—інтегратори, які здійснюють операцію $w = \int_{x_0}^{x} u\,dv$ (показано випадок $x_0 = 0$); 4, 5, 6—суматори.
3. Блок-схема вузла інтерполяції лінійного дискретного інтерполятора.
4. Графік лінійної дискретної інтерполяції: ACB — ділянка інтерпольованої кривої; пряма AB — лінійна неперервна інтерполяція; $A12345B$ — дискретна лінійна інтерполяція ACB.

Дискретні (цифрові) І. (ІД) являють собою спеціалізовані обчисл. пристрої. Вихідні сигнали ІД мають вигляд дискретних сигналів. Як ВІ в ІД застосовують цифрові інтегратори, схеми, що використовують підсумовування скінченних різниць, та інші обчисл. схеми. Блок-схему одного з варіантів ВІ двокоординатного ІД з задаванням ІК в параметричному вигляді подано на мал. 3. Завданням такого І. є видавання по двох вихідних каналах y_1 та y_2 серій імпульсів, кількість яких $n_{y_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta l}$ та $n_{y_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta l}$ має бути пропорційною відрізкам інтерполяції по координатах y_1 та y_2 (тут Δl_1, Δl_2 — ціна одного імпульсу за відповідною координатою).

При цьому здійснюється лінійна дискретна інтерполяція (мал. 4). Число n_{y_1} записується у двійковому коді ($n_{y_1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$) в ЗП (регістр P_{y_1}). Сигнали дозволу (якщо $a_i = 1$) або заборони (якщо $a_i = 0$) з виходів P_{y_1} подаються на один з входів схем збігу C_{n_1} — — C_{n_k} (логічні схеми «І»); на другі входи надходять продиференційовані сигнали з виходів тригерів T_1 — T_k лічильника. Якщо на вхід лічильника від генератора ГІ подати 2^k імпульсів, то к-сть імпульсів на виході логіч. схеми «АБО» дорівнюватиме кількості, записаній в P_{y_1}, тобто дорівнюватиме n_{y_1}. Аналогічний вузол використовується й для координати y_2.

І. застосовують у системах програмного керування металорізальними верстатами, газорізальними апаратами й електроннопроменевою обробкою матеріалів (див. *«Київ-67»*), у *пристроях відображення інформації*, моделюючих установках і т. ін.

Літ.: Чернышев А. В., Яхин А. Б. Автоматизация обработки на металлорежущих станках с применением программного управления. М., 1959 [бібліогр. с. 191—195]; Карибский В. В. Специализированное вычислительное устройство для задания движения объекта по прямой, параболе и окружности. В кн.: Автоматическое регулирование и управление. М., 1962; Коцюба Ю. Т., Харченко А. Ф., Петрушенко Л. А. Гамма интерполирующих устройств для систем цифрового программного управления. «Информационно-управляющие системы», 1967, в. 2. *Ю. В. Крементуло.*

ІНТЕРПОЛЯ́ЦІЯ ВИПАДКО́ВОГО ПРОЦЕ́СУ — одна з задач *завбачення випадкових процесів теорії*. Лінійна І. в. п. $\xi(t)$ полягає в побудові оцінки $\tilde{\xi}(\tau)$ значення процесу $\xi(t)$ в момент часу τ $(0 < \tau < T)$, яку лінійно виражають через спостереження $\xi(t)$ при $t \leqslant 0$ та $t \geqslant T$. При цьому звичайно шукають оцінки $\tilde{\xi}(\tau)$, для яких середньоквадратична *похибка* $\sigma^2(\tau) = M[\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)]^2$ є мінімальною. Явні формули для розв'язування задачі І. в. п. одержано для стаціонарних випадкових процесів з дробово-раціональною *спектральною щільністю*. Напр., якщо спектральна щільність процесу $\xi(t)$ дорівнює

$f(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \alpha^2}$, то $\tilde{\xi}(\tau) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha T}\{\xi(0) \times \times \mathrm{sh}\,\alpha(T-\tau) + \xi(T)\,\mathrm{sh}\,\alpha\tau\}$. Вперше задачу лінійної І. в. п. для стаціонарної послідовності ξ_n із спектральною щільністю $f(\lambda)$, що спостерігається при всіх n, крім $n = 0$, розглянув рад. математик А. М. Колмогоров. Виявилося, що середньоквадратична похибка інтерполювання ξ_0 дорівнює $\sigma^2 = 2\pi \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} \right|^{-1}$ (зокрема, інтерполювання буде безпомилковим, якщо $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} = +\infty$).

М. Й. Ядренко.

ІНТЕРПОЛЯ́ЦІЯ ФУ́НКЦІЙ — наближена заміна функції $f(x)$, заданої на всьому відрізку $[a, b]$ або, в усякому разі, в окремих його точках x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ функцією $F(x)$ якогось класу, значення якої в точках x_j збігаються з відповідними значеннями функції $f(x)$. Точки x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, наз. в у з л а м и інтерполяції (в. і.), а $F(x)$ — інтерполюючою ф-цією. В деяких випадках вимагають, щоб заданих значень у в. і. набувала не тільки інтерполююча ф-ція, а й її похідні.

В обчисл. практиці застосовують інтерполяцію, коли оперують з ф-ціями $f(x)$, заданими в скінченній кількості точок x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ відрізка $[a, b]$, а треба взнати $f(x)$ для проміжних значень аргумента. Іноді для $f(x)$ відоме й аналітичне представлення, проте знаходження кожного значення її вимагає великого обсягу обчислень. У цьому разі при знаходженні значень ф-ції для багатьох значень аргумента також застосовують інтерполяцію — за кількома обчисленими значеннями $f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ будують просту інтерполюючу ф-цію, за допомогою якої й обчислюють набл. значення $f(x)$ в решті точок.

Звичайно $F(x)$ відшукують у вигляді узагальненого многочлена

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x), \qquad (1)$$

де $\varphi_i(x)$ — лінійно незалежна на $[a, b]$ система ф-цій і c_i — дійсні коеф. Побудова конкретної інтерполюючої ф-ції $F(x)$ для $f(x)$ зводиться до відшукання c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ з умов

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Узагальнений многочлен, який має властивість (2), наз. у з а г а л ь н е н и м і н т е р п о л я ц і й н и м м н о г о ч л е н о м (і. м.) для $f(x)$ за заданою системою вузлів. Визначник Δ системи (2) відмінний від нуля при будь-якому виборі попарно різних точок x_j відрізка $[a, b]$, якщо система ф-цій $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ є системою Чебишова на $[a, b]$, тобто якщо будь-який узагальнений многочлен (1), у якого хоча б один з коеф. відмінний від нуля, має на $[a, b]$ не більше як n нулів. З цього випливає існування і єдиність узагальненого і. м.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta} \varphi_i(x), \qquad (3)$$

де Δ_i — визначник, одержуваний з Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів системи (2). Якщо розкласти Δ_i по елементах i-го стовпця ($\Delta_i = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\Delta_{ji}$, де Δ_{ji} — алгебр. доповнення елементів i-го стовпця визначника Δ), то узагальнений і. м. (3) набуде вигляду

$$F(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\Phi_j(x),$$

де $\Phi_j(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x)$ — узагальнені многочлени, незалежні від $f(x)$, цілком визначувані вибором системи в. і. З виконання умов (2) випливає, що

$$\Phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j \neq k, \\ 1, & \text{якщо } j = k. \end{cases} \qquad (4)$$

Найчастіше на практиці застосовують інтерполяцію алгебр. многочленами (параболічну інтерполяцію), тобто многочленами за системою функцій $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Такий спосіб наближування грунтується на гіпотезі, яка твердить, що на невеликих відрізках зміни x ф-цію $f(x)$ можна достатньо добре наблизити за допомогою параболи якогось порядку, аналітично вираженої алгебр. многочленом. Система ф-цій $1, x, x^2, \ldots, x^n$ являє собою систему Чебишова, і тому і. м. існує, і він єдиний. Для його побудови треба насамперед знайти многочлен, який набуває в одній вузловій точці значення 1, в решті — 0. Таку властивість має многочлен

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}) \times (x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1}) \times (x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)};$$

він дорівнює 1, якщо $x = x_i$, і 0, якщо $x = x_j$, $j \neq i$; отже,

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}) \times (x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1}) \times (x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Цей многочлен наз. і. м. Лагранжа і позначають звичайно $L_n(x)$. В разі рівновіддалених в. і., тобто, коли $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, він має вигляд

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) =$$

$$= (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i f(x_i)}{t-i}, \text{ де } t = \frac{x - x_0}{h},$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Якщо всі обчислення проведено точно, то $L_n(x)$ збігається з $f(x)$ у в. і. В решті точок вони, загалом кажучи, відрізнятимуться один від одного (див. *Заокруглення похибка*, *Похибка*, *Похибок обчислювань теорія*). Виняток становить лише випадок, коли $f(x)$ є многочленом ступеня, не вищого за n. У цьому разі $f(x)$ та $L_n(x)$ тотожно співпадають.

Загалом кажучи, довільна ф-ція $f(x)$, співпадаючи з і. м. у вузлах інтерполяції, може як завгодно відрізнятися від нього в решті точок. Але, якщо $f(x)$ має на $[a, b]$ неперервні похідні до n-го порядку і похідна $f^{(n)}(x)$ диференційовна на $[a, b]$, то

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \quad (6)$$

де $x_0 \leqslant \xi \leqslant x_n$. Величину $R_n(x)$ наз. з а л и ш к о в и м ч л е н о м інтерполяції або похибкою інтерполяції (похибка методу). Поклавши $M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, одержимо

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1)\dots$$

$$\dots(x - x_n)|. \quad (6')$$

Права частина виразу (6) для заданої ф-ції $f(x)$ залежить тільки від многочлена $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, який повністю визначається в. і. В деяких випадках є можливість вибирати в. і. на свій розсуд і збільшувати точність інтерполяції. Так, якщо за в. і. взяти нулі полінома Чебишова $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$, $|x| \leqslant 1$, то похибка інтерполяції на відрізку $[-1, 1]$ для даної ф-ції $f(x)$ буде найменшою. В цьому разі оцінка (6') набуде вигляду

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}.$$

Якщо інтерполяція здійснюється на довільному відрізку $[a, b]$, то його можна перевести в $[-1, 1]$ лінійною заміною змінного.

Інтерполяційна ф-ла Лагранжа (5) має деякі вади. Її побудова, а також обчислення за нею вимагають великої обчисл. роботи. Крім того, якщо відомий $L_n(x)$, побудований за значеннями в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, і треба побудувати $L_{n+1}(x)$ за його значеннями в $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$, то всі обчислення треба здійснювати знову. В зв'язку з цим, щоб спростити обчисл. процес, треба було видозмінити і. м. Існують різні форми запису і. м., які мають ті чи інші переваги. Простим перегрупуванням членів і. м. Лагранжа (5) можна перетворити на інтерполяційний многочлен Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0) \times$$
$$\times (x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x - x_0) \times$$
$$\times (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_n), \quad (7)$$

де

$$f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}}$$

— поділені різниці $(k+1)$-го порядку,

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \dots,$$

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

— поділені різниці 1-го порядку. Многочлен Ньютона має порівняно з многочленом Лагранжа ту перевагу, що додання нових в. і. зумовлює у формулі (7) лише додавання нових доданків без зміни початкових.

В разі рівновіддалених в. і. ф-ла (7) спроститься. Так, коли як вузли $x_0, x_1, \dots, x_n$ взяти точки $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$, то з інтерполяційної ф-ли Ньютона (7) одержуємо т. зв. інтерполяційну ф-лу Ньютона для інтерполяції вперед

$$L_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x -$$

$$- x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0) \times$$

$$\times (x - x_1)\dots(x - x_{n-1}),$$

де $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$ — скінченні різниці k-го порядку, $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ — скінченні різниці 1-го порядку. Коли як в. і. виберемо точки $x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh$, то аналогічно одержимо інтерполяційну ф-лу Нью-

тона для інтерполяції назад

$$L_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f_{n+1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1).$$

Коли як в. і. оберемо точки x_0, $x_0 + h$, $x_0 - h$, ..., $x_0 + nh$, $x_0 - nh$ або x_0, $x_0 - h$, $x_0 + h$, ..., $x_0 - nh$, $x_0 + nh$, то з ф-ли (7) одержимо інтерполяційні ф-ли Гаусса для інтерполяції відповідно вперед і назад; півсума цих ф-л дає ф-лу Стірлінга. Можна вказати ще багато інтерполяційних ф-л, але всі вони є іншою формою запису і. м. Лагранжа (звичайно, в припущенні, що в них використано одні й ті самі в. і.). Проте в різних випадках застосовують різні ф-ли. Це пов'язано з тим, що звичайно зручніше здійснювати обчислення, якщо при інтерполяції спочатку використовуються найближчі до x вузли, а потім поступово підключаються все більш віддалені. При цьому перші члени інтерполяційних ф-л дадуть основний вклад у шукану величину, а решта даватимуть лише невеликі поправки. Відповідно до цього, напр., якщо x міститься близько до початку відрізка інтерполяції, то треба використати інтерполяційну ф-лу Ньютона для інтерполяції вперед, при x, близьких до кінця відрізка,— ф-лу Ньютона для інтерполяції назад, а при інтерполяції на середину відрізка — ф-ли Бесселя та Стірлінга.

Параболічна інтерполяція дуже зручна: многочлени прості за формою, їх легко обчислювати, диференціювати й інтегрувати; тому її застосовують найчастіше. В деяких окремих випадках доцільно використовувати інші види інтерполяції. Так, якщо інтерпольована ф-ція $f(x)$ — періодична, то можна інтерполюючу ф-цію $F(x)$ шукати в класі тригонометричних многочленів, якщо інтерпольована ф-ція перетворюється в нескінченність у заданих точках або поблизу них, то $F(x)$ доцільно шукати в класі раціональних ф-цій. Поряд з відзначеними перевагами параболічна інтерполяція для рівновіддалених в. і. має ту істотну ваду, що з зростанням кількості вузлів похибка заміни відправної ф-ції і. м. в точках між вузлами не обов'язково зменшуватиметься. В околі кінця інтервалу інтерполяції така похибка може зростати навіть до нескінченності. Цієї вади не має тригонометрична інтерполяція: для кожної ф-ції з обмеженою варіацією інтерполююча ф-ція, одержана у вигляді тригонометричного многочлена з рівновіддаленими вузлами, необмежено прямує до заданої ф-ції в кожній точці даного інтервалу, коли кількість вузлів нескінченно зростає. Ця перевага тригонометричної інтерполяції робить її дуже важливою, бо для такої інтерполяції вимога періодичності інтерпольованої ф-ції не обов'язкова.

Широко застосовують також інтерполяцію кусково-аналітичними ф-ціями (сплайнами). Найважливішим представником цього класу є, мабуть, кубічний сплайн, який на інтервалах $[x_{j-1}, x_j]$ записують у вигляді $S(x) = A_j x^3 + B_j x^2 + C_j x + D_j$. Він є кусково-кубічною кривою, яка має неперервні першу та другу похідні на всьому відрізку інтерполяції.

На практиці часто виникає задача про відшукання за заданим значенням ф-ції значення аргумента. Цю задачу розв'язують методами оберненої інтерполяції. Якщо задана ф-ція є монотонною, то обернена інтерполяція здійснюється шляхом заміни ф-ції аргументом і навпаки й наступної інтерполяції. Якщо задана ф-ція не є монотонною, то за заданими значеннями аргумента для неї записують той чи інший і. м., прирівнюють його до заданого значення ф-ції й розв'язують одержане рівняння відносно аргумента.

Інтерполяційні многочлени побудовано й для випадку, коли потрібен збіг у в. і. не тільки значень інтерпольованої ф-ції та і. м., а й їхніх похідних до деякого порядку. Досліджено також задачу І. ф. багатьох змінних, хоч вона має багато принципових труднощів, порівняно з тією самою задачею для ф-ції однієї змінної, причому для цього випадку є ряд результатів щодо оптимізації інтерполяційних ф-л з метою зменшення їхніх похибок.

Літ.: Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954 [бібліогр. с. 321—325]; Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М., 1963 [бібліогр. с. 214—216]; Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961; Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 267—269, 307—309].

Л. І. Березовська, А. І. Березовський.

ІНТЕРПРЕТА́ЦІЯ МО́ВИ СТРУКТУ́РНА — процес, що здійснює переведення робочої (виконуваної) програми з програмного рівня ($P^{(B)}$) на мікрокомандний рівень ($M^{(B)}$) внутрішньої мови (B). Цей процес складається здебільшого з ряду послідовних перетворень *програми,* результати яких зображуються поступово на проміжних рівнях $R_j^{(B)}$ внутр. мови і, кінець кінцем, у вигляді мікрокоманд (тобто на рівні $M^{(B)}$). Виконання останніх відбувається безпосередньо в міру утворення їх.

Алгоритми інтерпретації фіксують структурно (див. *Математичне забезпечення ЦОМ внутрішнє*), тому викладене поняття іноді визначають як структурну інтерпретацію, на відміну від програмної інтерпретації, що передбачає спец. етап динамічного перетворювання первісної (а не робочої) програми на програмний рівень внутр. мови. Це останнє перетворення, на відміну від трансляції первісної програми, здійснюють у процесі виконання її, і тоді на програмному рівні внутр. мови програма в оперативній *пам'яті ЦОМ* уже попередньо не фіксується,

а відображується динамічно. Оскільки відображення у внутр. мові елементів і конструкцій вхідної мови означає інтерпретацію цих елементів, іноді говорять про інтерпретацію вхідних алгоритм. мов, маючи при цьому на увазі не програмну інтерпретацію вхідної мови, а структурну інтерпретацію внутр. мови, програмний рівень якої відповідно наближено до алгоритм. мови.

Класи систем інтерпретації ЦОМ аналогічні класам внутр. мов ЦОМ (див. *Мова ЦОМ внутрішня*), тобто системи інтерпретації поділяють за парами альтернативних ознак: «традиційна» або «розвинута» та «елементарна» або «процедурна». Ознака системи інтерпретації збігається з ознакою програмного рівня внутр. мови (якою фіксують інтерпретовувані робочі програми), тобто розвинутій внутр. мові відповідає розвинута система інтерпретації, елементарному — елементарна й т. д.

Кожна система інтерпретації як множина алгоритмів (зафіксованих структурно) має підмножини алгоритмів, що забезпечують переведення виконуваних програм з кожного рівня внутр. мови (крім мікрокомандного рівня) на наступний нижчий. Результати цього переведення як відповідного етапу процесу інтерпретації динамічно фіксуються у структурному устаткуванні машини на час, потрібний щоб виконати задані операції (в т. ч. й для дальшої деталізації виконуваної програми) аж до мікрокоманд. Множину алгоритмів системи інтерпретації поділяють на дві гол. підмножини — аналізуючу й виконавчу, які переводять робочу програму з програмного на виконавчий, а з виконавчого — на мікрокомандний рівні внутр. мови. Відповідно до характеристик рівнів внутр. мови лише в розвинутих системах інтерпретації є аналізуюча частина; у процедурних системах інтерпретації в складі виконавчої частини є спец. підмножина, що реалізує переведення з виконавчого на деталізовано-виконавчий рівень внутр. мови.

Етапи процесу інтерпретації виділяють відповідно до реалізовуваних на них підмножин алгоритмів системи інтерпретації. Гол. з них є аналізуючий та виконавчий процеси. Ф-ції цих етапів визначають за програмним рівнем внутр. мови: у аналізуючого — цілком за програмним рівнем, у виконавчого — ще й за мікрокомандним.

Відповідно до міри наближення на рівні, не нижчому за подібність внутр. мови до алгоритм. мови (тобто для розвинутої процедурної внутр. мови), осн. ф-ції аналізуючого етапу в заг. випадку такі: динамічний аналіз робочої програми і динамічне адресування всіх величин (позначених і непозначених), що його виконують у ході аналізу програми. Мета динамічного аналізу — визначити черговий операційний знак (чи ідентифікатор процедури), що його можна виконати, та його зміст у відповідності з контекстом програми.

Аналіз програми здебільшого виконують, зіставляючи суміжні операційні знаки (з урахуванням контексту). При цьому в ході зворотно-поступального руху за програмою використовують оперативно організовувані магазини в пам'яті, за допомогою яких здійснюється адресування непозначуваних проміжних результатів обчислень. Адресування позначуваних у програмі величин грунтується на встановленні відповідності між позначеннями та поточними адресами й використанні при цьому системи відносних і базисних адрес.

Ф-ції виконавчих етапів інтерпретації — керувати процесом виконання операцій на всіх його рівнях. У зв'язку з застосуванням умовної (віртуальної) пам'яті для адресування величин і використанням у внутр. мовах широкого класу стандартних процедур з цих ф-цій особливого розвитку набула ф-ція динамічного переведення робочої програми з виконавчого на деталізовано-виконавчий рівень внутр. мови. Реалізуючи сучасні системи структурної інтерпретації, застосовують, як правило, ступінчасте побудування засобів її. При цьому за швидкодією (пов'язаною зі способом реалізації) перевагу надають скрізь застосовуваним елементарним мовним конструкціям, з яких уже складають конструкції складніші й такі, що відносно рідше зустрічаються (приклади перших — алгоритми арифм. операцій та операцій звертання за символічними адресами, приклади других — алгоритми елементарних ф-цій та матрично-векторних операцій). До більш швидкодіючих належать схемні (апаратні) засоби, до менш швидкодіючих — *довгочасний запам'ятовувальний пристрій*. Розвиток систем структурної інтерпретації — одна з визначальних властивостей найсучасніших і найперспективніших обчисл. машин.

Літ.: Глушков В. М. [та ін.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [бібліогр. с. 254—257].

З. Л. Рабинович.

ІНТЕРПРЕТУЮЧА СИСТЕМА — система, яка за програмою, записаною певною зовнішньою мовою, реалізує припис, заданий програмою, за допомогою її поетапного (звичайно пооператорного) перекладу внутрішньою мовою ЦОМ. І. с. можна реалізувати програмними і схемними засобами. На кожній ЦОМ реалізовано певну систему безпосередньої інтерпретації, для якої зовн. мова збігається з внутр. мовою ЦОМ (див. *Інтерпретація мови структурна, Мова ЦОМ внутрішня*).

ІНТУЇЦІОНІЗМ — напрям у сучасній математиці, з якого випливає потреба повної перебудови всієї математичної науки і яке приводить до радикального відторгнення значної частини класичної математики. Засновник І.— голл. математик Л.-Е. Брауер (1881—1966), його послідовники — переважно теж голл. вчені. Філософською основою І. є картезіанська вимога цілковитої очевидності змісту матем. суджень. Об'єкти математики конструктивно подають у розумових побудовах. Не довівши можливості такої побудови, не можна ні в якому разі ствер-

джувати, що об'єкт існує. Будь-які доведення існування, які не дають методу побудови, спростовуються як неслушні.

Логіка й арифметика. Брауер вважав логіку за вторинний продукт матем. думки, скерованої в першу чергу безпосередньо на матем. об'єкти й утримувався від формалізації загальних способів міркування. Однак 1930 голл. математик А. Гейтінг запропонував формалізацію відомих інтуїціоністських логіч. способів міркувань за допомогою т. з. інтуїціоністського числення предикатів. Характерною властивістю цього числення є невивідність *виключеного третього закону*. І. не визнає справедливості цього логіч. принципу, бо немає універсального методу розпізнавання, який з його членів (A чи «не A») є справедливим. Твердження не «не A» нерівноцінне A, з твердження «не для всіх x не $A(x)$» не випливає «існує такий x, що $A(x)$». Інтуїціоністське числення предикатів і його звуження до *числення висловлювань* вивчено добре. Для числення висловлювань зазначено процедуру розпізнавань вивідності. Для обох числень створено еквівалентні секвенційні числення й доведено усувність розрізу; доведено також інтерполяційну теорему. З погляду класичної математики виявилися цікавими алгебр. й топологічна інтерпретації цих числень та їхній зв'язок з модальними численнями. Було дано інтерпретацію числень, яка відповідає розумінню інтуїціоністської логіки математиками-класиками, й доведено повноту числень з погляду цієї інтерпретації. Інші інтерпретації виявилися неповними. Інтуїціоністська арифметика грунтується на змістовому розумінні принципу індукції. Ясна річ, повністю її не можна формалізувати, але часткову формалізацію здійснено і її успішно вивчають.

Аналіз і теорія видів. Інтуїціоністський аналіз пов'язаний, в основному, з поняттям вільно утворюваної послідовності натуральних чисел, кожний член якої визначається актом довільного вибору або вибраним наперед законом утворення. Континуум складається з вільно утворюваних послідовностей раціональних чисел, підпорядкованих природним обмеженням. Функції — це обчисленні функціонали над такими послідовностями. Як незаперечний принцип, Брауер висунув положення: значення обчисленного функціоналу залежить від певного початку послідовності. Другий принцип аналізу — т. з. бар-індукція (з класичного погляду еквівалентна індукції до лічбових трансфінітів). На цій основі розвивається система, в якій, зокрема, всяка задана на сегменті ф-ція виявляється рівномірно неперервною. Інтуїціоністський аналіз було вивчено і як формальну систему. Слід окремо відзначити, що в останніх своїх роботах Брауер впроваджує вільно утворювані послідовності, які залежать від розв'язання проблем на момент вибору. Ці прийоми потрібні лише для побудови контрприкладів. Осн. поняттям інтуїціоністської теорії множин є поняття виду, тобто властивості матем. об'єктів, побудова яких передує самому виду. Зрозуміло, одержана теорія не може бути скільки-небудь повною паралеллю класичної *множин теорії*.

І. став, мабуть, першим критичним напрямом у математиці, який радикально відхилив уявлення про актуально нескінченне. Це споріднює І. з гільбертівським фінітизмом і марковським конструктивізмом — напрямами, які, безперечно, зазнали на собі інтуїціоністського впливу. І. відрізняється від них певним припущенням абстрактного елемента в понятті вільно утворюваної послідовності. Тим самим припускається не тільки потенціальна лічбова й потенціальна континуальна нескінченність. На відміну від марковського конструктивізму І. обминає тезу Черча, не вважаючи її за самоочевидне твердження. За змістом це веде до аналізу, відмінному від конструктивістського.

З другого боку, абстракцію в І. припускають тільки при побудові континууму. Наступні рівні будують за допомогою предикативної ієрархії видів. Класичною паралеллю І. є предикативізм Бореля — Лебега — Лузіна, що припускає актуальний (тобто класичний) континуум, але такий, що на вищих ступенях потребує предикативності визначень. Для практичного застосування І. не має великої цінності. Але безкомпромісність його ідей, висунутих під час кризи основ математики, відіграла плідну стимулюючу роль. Частково під їхнім впливом Д. Гільберт і розробив формалістську програму обгрунтування математики (див. *Формалізм у математиці*).

Слід окремо відзначити, що в І. вперше почали вживати поняття ефективної обчисленності ще до того, як воно стало об'єктом систематичного вивчання. Інтуїціоністський конструктивізм був одним з джерел конструктивізму в матем. філософії.

Літ.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952; Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 152—160, 194—195]; Kleene S. C., Vesley R. E. The foundations of intuitionistic mathematics especially in relation to recursive functions. Amsterdam, 1965; Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. Пер. с англ. М., 1972 [бібліогр. с. 568—578].

В. А. Янков.

ІНФОРМАТИ́ВНІСТЬ ОЗНА́К — величина, яка кількісно характеризує придатність ознак (чи набору їх) X для розпізнавання класів об'єктів. При цьому припускають, що подані для розпізнавання об'єкти представлено сигналами x у просторі ознак X. У *розпізнаванні образів* як І. о. використовують умовну ентропію, ймовірність помилки розпізнавання, дивергенцію Кульбака, дисперсійну міру та інші величини. Найчастіше трапляється умовна ентропія H:

$$H(K/X) = -\sum_x p(x) \sum_k P(k/x) \log P(k/x),$$

де K — множина класів, X — ознаки, k — номер класу, x — сигнал у просторі ознак X, $p(x)$ — щільність імовірності появи сигналу

x, $P(k/x)$ — апостеріорна ймовірність класу k за умови, що спостерігається сигнал x. У разі, якщо за ознаками X можна безпомилково вказати на клас, умовна ентропія дорівнює нулеві. При порівнюванні двох наборів ознак більш інформативним є той, що характеризується меншою умовною ентропією. На практиці використання І. о. утруднено через невідомі ймовірності $p(x)$ та $P(k/x)$. Вибираючи інформативні ознаки, найчастіше беруть до уваги властивості тих сигналів, що їх збираються класифікувати. Враховуючи властивості сигналів, можна наближено робити висновки про розподіли $p(x)$ та $P(k/x)$ і знаходити досить інформативні ознаки. Інформативність набору ознак слід відрізняти від інформативності окремих ознак набору. Тільки в тому випадку, коли ознаки незалежні при умові окремих класів, інформативність набору ознак дорівнює сумі інформативності окремих ознак. У цьому випадку на підставі інформативності окремих ознак можна складати найінформативніші набори їх. Якщо ознаки залежні, то І. о. не виражається через інформативність окремих ознак і вибір найінформативніших наборів за інформативністю окремих ознак стає неможливим.

Літ.: К о в а л е в с к и й В. А. Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики. В кн.: Читающие автоматы и распознавание образов. К., 1965; К у л ь б а к С. Теория информации и статистика. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 364—381].

Т. К. Вінцюк.

ІНФОРМА́ТИКА — наукова дисципліна, що вивчає структуру й загальні властивості *інформації наукової*, а також закономірності всіх процесів наукової комунікації — від неформальних процесів обміну науковою інформацією під час безпосереднього усного й письмового спілкування вчених і спеціалістів до формальних процесів обміну за допомогою наукової літератури. Значну частину цих процесів становить *науково-інформаційна діяльність* щодо збирання, аналітико-синтетичного перероблення, зберігання, пошуку й поширення наук. інформації.

І. не здійснює науково-інформаційної діяльності, якою належить займатися спеціалістам у відповідних галузях науки й техніки, а вивчає внутр. механізми реферування документів природними мовами, яке здійснює людина. Вона розробляє заг. методи такого реферування, але не займається практичним реферуванням *документів наукових* з конкретних галузей науки або техніки. Основою дослідження І. є діалектичний та історичний матеріалізм; для дослідження часткових проблем І. застосовуються окремі методи, що їх використовують інші наук. дисципліни. І. розглядають як один із розділів *кібернетики*, причому іноді вважають, що до кібернетики входять проблеми автоматизації інформаційної служби, перекладу й реферування наук.-тех. літератури, побудова *інформаційно-пошукових систем* і *інформаційно-логічних систем* та інші задачі. Проте ряд проблем, що їх розв'язує І. (оптимізація системи наук. комунікації, структура наук. документа, збільшення ефективності наук. дослідження шляхом застосування науково-інформаційних засобів тощо), виходить за межі кібернетики. В І. широко використовують і методи *семіотики*, що їх іноді розглядають як теор. фундамент І. Семіотику за традицією поділяють на *прагматику*, *семантику* й *синтактику*. В межах прагматики можна провадити аналіз конкретної науково-інформаційної діяльності, а саме — створення інформаційно-пошукових систем, удосконалення системи початкових публікацій, *індексування* тощо. Методи семантики використовують в І., напр., будуючи та аналізуючи *мови інформаційно-пошукові* та вивчаючи такі перетворення структури тексту, які не змінюють його змісту. Методи синтактики застосовують в І., розв'язуючи завдання щодо формалізації та автоматизації деяких видів науково-інформаційної діяльності (індексування, *реферування автоматичне*, *машинний переклад*). Матем. *інформації теорію* використовують в І. для забезпечення оптимального кодування семантичної інформації, тривалого зберігання її, пошук і передавання на відстань. Семантика логічна істотно впливає на І., коли вивчають і розробляють нові способи записування (подання) наук. інформації. Методи *логіки математичної* використовують І., будуючи інформаційно-пошукові мови і формалізуючи процеси логічного висновку в тих чи ін. теоріях. В І. дедалі ширше використовують і методи психології, особливо таких порівняно нових її напрямів, як психологія праці, *психологія інженерна* та психолінгвістика. Методи психології мають важливі значення при вивченні процесів мислення, при розробці проблем індексування, реферування, інформаційного пошуку (див. *Пошук інформації автоматичний*) тощо. Книгознавство й, зокрема, історія книги дають І. цінні відомості про найважливіші етапи формування наук. документів, дають змогу зрозуміти історичну зумовленість методів і засобів наук. комунікації. З тех. науками І. взаємодіє при створенні багатьох засобів реалізації інформаційних систем.

Осн. теоретичне завдання І. полягає у визначенні заг. закономірностей, відповідно до яких створюється наук. інформація, відбувається перетворення її, передавання та використання в різних сферах діяльності людини. Прикладні завдання І. полягають у розробленні найефективніших методів і засобів здійснення інформаційних процесів, у визначенні способів оптим. наук. комунікації (у самій науці і між наукою та виробництвом) з широким застосуванням сучасних тех. засобів. Наук. дослідження в галузі І. провадять у таких напрямах: 1) вивчення осн. науково-інформаційних процесів — збирання, аналітико-синтетичного перероблення, зберігання, пошуку й поширення наук. інформації; 2) вивчення історії та організації науково-інформаційної діяльності в різних галузях і країнах; 3) визначення оптим. форм зображення (записування наук. інформації, розроблення типології наук. документів) та осн. ви-

мог до них; вивчення властивостей і закономірностей документальних потоків; 4) розроблення методів аналізу семантичної інформації, формалізації добування осн. змісту з наук. документів; 5) дослідження інформаційних мов і процедур перекладу з природних мов на інформаційні й навпаки; 6) створення систем інформаційного пошуку та обслуговування; 7) застосування маш. техніки для реалізації інформаційних систем і розроблення деяких спец. тех. засобів (див. *Інформаційно-пошуковий пристрій*).

І. не вивчає і не розробляє критеріїв оцінки істинності, новизни й корисності наук. інформації. Вони є невід'ємною частиною тих наук, у яких розглядають наук. інформацію. Багато питань, які входять тепер до І., давно розробляли в ін. дисциплінах (у бібліотекознавстві, книгознавстві, лінгвістиці тощо). Ще на поч. 20 ст. бельг. учений П. Отле запропонував об'єднати комплекс процесів збирання, оброблення, зберігання, пошуку й поширення документів під заг. назвою «документація», що іноді є синонімом поняття «І.». У 1945 амер. учений В. Буш уперше широко поставив питання про необхідність механізувати інформаційний пошук. Міжнародні конференції з наук. інформації (Лондон, 1948; Вашінгтон, 1958) становили перші етапи розвитку І. В СРСР І. почала розвиватися в 50-х рр., особливо після створення 1952 Ін-ту наук. інформації АН СРСР (тепер *Всесоюзний інститут наукової і технічної інформації* Держ. Комітету Ради Міністрів СРСР з науки й техніки та АН СРСР). Див. також *Інформація документальна*.

Літ.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]; Международный форум по информатике, т. 1—2. М., 1969; Annual review of information science and technology, v. 1—7. Washington, 1966—72. *Р. С. Гіляревський, А. І. Чорний.*

ІНФОРМА́ЦІЇ ЗБЕРІГА́ННЯ — відображення інформації у властивостях, конфігурації або розміщенні фізичних об'єктів, що в сукупності називаються носіями інформації. Історично найдавніші форми І. з. пов'язані з розвитком писемності: комбінації предметів (раковин, вузлів); графічне зображення на камені, глині, папірусі, папері. Величезне значення в розвитку цього способу І. з. мало винайдення друкарства. Сучасні форми І. з. грунтуються на широкому використанні фотографії та явища залишкового магнетизму й пов'язані з розвитком ЦОМ. Особливого розвитку набули методи й засоби зберігання дискретної інформації у вигляді послідовності двійкових символів. Осн. характеристиками носіїв інформації є тривалість зберігання інформації в них; їхня надійність, тривалість часу нанесення нової інформації на носій (записування) і тривалість часу знімання її з носія (читання) та вартість зберігання одиниці інформації. До дій, що забезпечують І. з. та відтворювання збережуваної інформації, належать кодування інформації символами, що застосовуються на вибраному носії інформації, записування й читання інформації, пошук потрібної одиниці інформації або місця для неї під час читання й записування. Сукупність взаємопов'язаних засобів і методів, яка забезпечує виконання цих етапів, становить систему І. з. До систем І. з. належать *запам'ятовувальні пристрої*, *інформаційно-пошукові системи* та *інформаційно-довідкові системи*. *С. Д. Міхновський.*

ІНФОРМА́ЦІЇ КІЛЬКІСТЬ — теоретико-інформаційна міра величини інформації, що міститься в одній випадковій величині відносно іншої випадкової величини. Якщо ξ і η — дискретні *випадкові величини* й $\{p_i\}$, $\{q_j\}$, $\{p_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ відповідно *розподіли імовірностей* випадкових величин ξ, η і пари (ξ, η), то І. к.

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \qquad (1)$$

У заг. випадку, коли випадкові величини ξ і η набувають значень у якихось вимірних просторах X і Y відповідно, І. к. $I(\xi, \eta)$ визначають так. Нехай $\varphi(x)$, $x \in X$ і $\Psi(Y)$, $y \in Y$ — вимірні ф-ції, що набувають скінченної кількості значень. Тоді $\varphi(\xi)$ і $\Psi(\eta)$ — дискретні випадкові величини і І. к. у ξ відносно η

$$I(\xi, \eta) = \sup_{\varphi, \Psi} I(\varphi(\xi), \ \Psi(\eta)), \qquad (2)$$

де верхню границю беруть за всіма парами $\varphi(x)$ та $\Psi(y)$, що набувають скінченної кількості значень. Якщо ξ й η — дискретні величини, визначення (2) зводиться до визначення (1). А якщо ξ й η — неперервні величини, що мають спільну щільність розподілу $p(x, y)$ з маргінальними щільностями $p(x)$ та $q(y)$, то з ф-ли (2) випливає, що

$$I(\xi, \eta) = \iint_{X \times Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)\, q(y)}. \qquad (3)$$

Хоча це визначення І. к. виявилося корисним з погляду проблем *інформації передавання*, воно не може бути єдиною мірою І. к., яку можна застосовувати в усіх випадках. Міру І. к. вибирають у кожному конкретному випадку, виходячи з конкретних обставин. Напр., не в усіх випадках доцільно задавати І. к. у термінах розподілу ймовірностей. Рад. математик А. М. Колмогоров визначає І. к. в об'єкті як складність його обчислювання за допомогою якогось універсального *алгоритму*. В деяких ситуаціях розумнішою мірою невизначеності, ніж *ентропія*, може бути, напр., *дисперсія* $D\xi$ випадкової величини ξ, тому різницю безумовної й серед. значення умовної дисперсії

$$I = D\xi - MD(\xi/\eta)$$

можна з однаковою підставою вважати мірою І. к. ξ відносно η. Деякі осн. властивості І. к. такі: 1) величина $I(\xi, \eta)$ не залежить від значень, що їх набувають випадкові величини ξ і η, а залежить лише від спільного розподілу цих величин; 2) величина $I(\xi, \eta) \geqslant 0$,

при цьому тоді й лише тоді, коли ξ й η незалежні, $I(\xi, \eta)$ може перетворюватися й на $+\infty$; 3) величина $I(\xi, \eta)$ симетрична відносно ξ й η, тобто $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$; це означає, що І. к. в ξ відносно η збігається з І. к. на η відносно ξ; 4) якщо $f(\cdot)$ — будь-яка ф-ція, задана на просторі X, то $I(\xi, \eta) \geqslant I(f(\xi), \eta)$, що цілком узгоджується з уявленням про те, що І. к. в ξ відносно η не менша за І. к. в якійсь ф-ції від ξ відносно η; 5) $I(\xi, \eta) \leqslant I(\xi, \xi)$, що теж узгоджується з інтуїтивним уявленням про І. к.; 6) у разі, якщо ξ — дискретна випадкова величина, І. к. $I(\xi, \xi) = H(\xi)$, де $H(\xi)$ — ентропія ξ. В решті випадків завжди $I(\xi, \xi) = +\infty$. Між І. к. $I(\xi, \eta)$ та ентропією в дискретному випадку (або дифер. ентропією в неперервному випадку) існує такий зв'язок. У дискретному випадку $I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta) = H(\xi) - MH(\xi/\eta)$, де $H(\xi)$, $H(\eta)$ і $H(\xi, \eta)$ — відповідно ентропії величин ξ, η й пари (ξ, η), а $MH(\xi/\eta)$ — середня умовна ентропія ξ при умові η

$$MH(\xi/\eta) = -\sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} p_{i/j} \log p_{i/j},$$

де $\{q_j\}$ — розподіл η, а $\{p_{i/j}\}$ — умовний розподіл ξ при фіксованому значенні η. Аналогічно цьому для неперервних ξ і η

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta) = h(\xi) - Mh(\xi/\eta),$$

де $h(\xi)$, $h(\eta)$ і $h(\xi, \eta)$ — відповідно дифер. ентропії величин ξ, η і пари (ξ, η), а $Mh(\xi/\eta)$ — середня умовна дифер. ентропія ξ при умові η

$$Mh(\xi/\eta) = -\int_Y q(y) \int_X p(x/y) \log p(x/y)\, dx dy,$$

де $q(y)$ — щільність розподілу величини η, а $p(x/y)$ — умовна щільність розподілу ξ при умові η. З інших властивостей І. к. важливо відзначити властивість «умовної інформації», виражену ф-лою:

$$I((\xi, \zeta), \eta) = I(\eta, \zeta) + MI(\xi, \eta/\zeta),$$

де $MI(\xi, \eta/\zeta)$ — середня умовна І. к., що її визначають аналогічно тому, як було визначено середню умовну ентропію, та властивість «потрійної інформації», виражену ф-лою:

$$I((\xi, \zeta), \eta) + I(\xi, \zeta) = I(\xi, (\eta, \zeta)) + I(\eta, \zeta).$$

Для гауссівського випадку можна навести ф-лу явного обчислювання І. к. Якщо ξ й η — n-вимірні гауссівські величини і при цьому пара (ξ, η) теж має гауссівський розподіл, то

$$I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \log \frac{D_{\xi\eta}^{(2n)}}{D_{\xi\xi}^{(n)} \cdot D_{\eta\eta}^{(n)}},$$

де $D_{\xi\xi}^{(n)}$, $D_{\eta\eta}^{(n)}$ і $D_{\xi\eta}^{(2n)}$ — відповідно визначники кореляційних матриць величин ξ, η і пари (ξ, η). Зокрема, в одновимірному випадку

$$I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \log (1 - r^2),$$

де r — коеф. кореляції ξ і η.

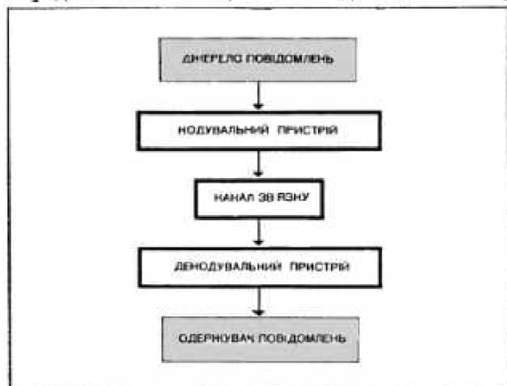
Літ. див. до ст. *Інформації передавання.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ІНФОРМА́ЦІЇ ПЕРЕДАВА́ННЯ — процес перенесення інформації від джерела повідомлень до споживача повідомлень (адресата). Теорія І. п. є складовою частиною *інформації теорії*. В теорії І. п. вивчають оптим. й близькі до оптимальних методи передавання *інформації* по *каналах зв'язку*, припускаючи, що можна в широких межах варіювати методи кодування повідомлень у сигнали на вході каналу зв'язку і декодування сигналів у повідомлення на виході цього каналу. Заг. схема системи І. п., яку вперше розглянув амер. математик К.-Е. Шеннон (н. 1916), подано на мал. *Джерело повідомлень* виробляє повідомлення, що підлягає передаванню по каналу зв'язку від джерела до споживача повідомлень. Звичайно припускають, що можливі повідомлення належать до якоїсь заданої множини повідомлень X, яка може мати різну природу, із заданими статистичними властивостями (тобто з заданим розподілом імовірностей на просторі можливих повідомлень X). Якщо відомі статистичні властивості джерела повідомлень, це значно полегшує конструювання системи І. п. І справді, вибираючи метод передавання, можна, напр., прагнути до того, щоб якнайшвидше і безперешкодно передавалися часті повідомлення. При конструюванні системи І. п. завжди припускають, що заданими є вимоги, які ставлять до точності відтворення повідомлень, бо коли множина X не є скінченною чи лічбовою, не можна домогтися повного збігу того повідомлення, яке надсилають, і того, яке одержують під час передавання по будь-якому «зашумленому» каналу зв'язку. Проте, вимога такого повного збігу є в багатьох випадках надмірною. Напр., не слід вимагати від конструктора системи радіомовлення, щоб точність відтворення радіоприймачем звукового сигналу перевищувала можливості людського вуха, що сприймає далеко не всі деталі звукових коливань. Математично і вимогу точності відтворення повідомлення формулюють здебільшого, як якесь обмеження, що виділяє клас допустимих сумісних розподілів імовірностей для того повідомлення, яке передають, і для того, яке приймають.

Повідомлення, що їх виробляє джерело, передають по каналу зв'язку. При цьому передаватися по каналу можуть тільки елементи з якоїсь фіксованої множини Y (множина Y відрізняється від множини X, бо сигнали й повідомлення, які передають, мають здебільшого різну природу, напр., повідомлення можуть бути дискретними, а сигнали — неперервними). В процесі передавання по каналу вхідний сигнал $y \in Y$ перетворюється на якийсь сигнал на виході каналу $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, де й $\tilde{Y}$ — фіксована множина. В найпростішому випадку безпомилкового передавання по каналу сигнал $\tilde{y}$ збігається з y. Але в будь-яких фізично реальних каналах під час передавання повідомлення з тих або інших причин проникають помилки, тому сигнал на виході відрізняється від сигналу, поданого на вхід каналу.

Щоб перетворити повідомлення на сигнал, який передається по каналу зв'язку, необхідно виконати операцію, яку наз. кодуванням повідомлення. Вона полягає в тому, що з кожним із можливих повідомлень зіставляють певний сигнал на вході каналу, тобто описують його математично як ф-цію, що відображує X в Y. У неперервних каналах зв'язку реально використовувані методи кодування часто наз. *модуляцією*. Коли повідомлення на вході набуває фіксованого значення, то по каналу передається сигнал, який відповідає цьому



Загальна схема системи передавання інформації.

повідомленню. За допомогою операції декодування за відповідним сигналом на виході каналу відновлюють певне значення повідомлення, яке наз. повідомленням на виході каналу. У неперервних каналах зв'язку реально використовувані методи декодування часто наз. демодуляцією. Математично декодування описують ф-цією, що відображує простір Y значень сигналу на виході в простір значень повідомлення X. Кодування й декодування використовують неодмінно, якщо множина X відрізняється за своєю природою від множини Y. При цьому передавати по каналу зв'язку самі повідомлення не можна. Один з осн. висновків теорії І. п. полягає в тому, що за допомогою досить складних відповідно дібраних методів кодування й декодування можна істотно поліпшити якість передавання й збільшити його швидкість.

Основну проблему, яку досліджують у теорії І. п., можна сформулювати так. Вважають відомими й фіксованими повідомлення із заданими умовами точності відтворення та канал зв'язку. Припускають, що методи кодування й декодування можна обирати довільно з певного досить широкого класу можливих методів. Треба знайти умови, за яких існують такі методи кодування й декодування, що задане повідомлення можна передати по заданому каналу зв'язку так, щоб задовольнялись фіксовані умови точності відтворення повідомлень. За цих умов треба ефективно побудувати ці методи, коли доведено, що вони існують. Розробленими раніше матем. методами цю проблему розв'язати не вдалося. Навіть для того, щоб наближено розв'язати її в найпростіших ситуаціях, треба поєднувати теоретико-ймовірнісні, алгебр. й комбінаторні методи. Наближені конструктивні розв'язки для найпростіших каналів зв'язку розглядають у *кодування теорії*. К.-Е. Шеннон встановив, що основну проблему теорії І. п. можна просто і остаточно розв'язати, якщо застосувати до неї асимптотичний підхід, заснований на припущенні, що кількість інформації, яка підлягає передаванню, і тривалість передавання по каналу прямують до нескінченності. За Шенноном C — пропускна здатність каналу зв'язку й H — *ентропія повідомлення* за заданих умов точності. Ці величини він визначив як максимум і мінімум відповідно якоїсь іншої величини, яку він наз. *інформації кількістю*. Шеннон показав, що коли $H > C$, то ніякі методи кодування й декодування не дають змоги передати повідомлення по каналу зв'язку із заданою умовою точності відтворення. З іншого боку, якщо $H < C$, і при цьому, коли ентропія H і тривалість передавання досить великі, то здійснювати передавання із заданою точністю відтворення можна, відповідно дібравши кодування і декодування.

Спочатку доведення теореми Шеннона мало якісний і нестрогий характер. Згодом під теорію Шеннона було підведено строгу матем. базу і зроблено узагальнення теорем Шеннона для каналів та повідомлень з невідомими параметрами. Інтерес до таких узагальнень викликаний тим, що на практиці, як правило, не можна вважати повністю відомими параметри джерела повідомлень і каналу зв'язку, тим більше, що ці параметри можуть іноді змінюватися в процесі передавання. Тому доводиться лише припускати, що джерело повідомлень і канал зв'язку належать до якогось класу можливих джерел повідомлень і каналів. При цьому вводять мінімаксний критерій якості передавання, при якому якість передавання оцінюють для найгірших можливих джерел повідомлень і каналів, які належать до цього класу. Зроблено й узагальнення теорем Шеннона для каналів зі *зворотним зв'язком*. Наявність повного зворотного зв'язку означає, що в момент часу t, тобто на вході каналу, вважають за відомі точні значення сигналів на виході каналу для всіх моментів часу $t' < t$. Зокрема, для каналів без пам'яті зі зворотним зв'язком осн. результат полягає в тому, що наявність зворотного зв'язку не збільшує пропускної здатності каналу. В зв'язку з цим можна використовувати не такі складні кодуючі та декодуючі пристрої. З-поміж інших узагальнень слід виділити канали з похибками синхронізації, де можуть бути випадкові збої синхронізації, внаслідок чого порушується однозначність відповідності між сигналами на вході й виході каналу, та двосторонні канали. У двосторонніх каналах є два потоки інформації, причому джерело повідомлень одного потоку суміщене з споживачем повідомлень іншого потоку, і при цьому передавання в зворотному напрямі можна використати як допоміжне — для передавання інформації в прямому напрямі.

З появою праць Шеннона почалися пошуки придатних для практичної реалізації варіантів методів передавання оптим. або близьких до оптим. Розроблено методи циклічного і згортального кодування, методи мажоритарного й послідовного декодування. Вони значною мірою грунтуються на тих самих доведеннях теорем Шеннона, хоча ці доведення спочатку здавались неефективними. Теор. досягнення в галузі теорії кодування і прогрес у техніці обчисл. пристроїв, потрібних для практичної реалізації алгоритмів кодування й декодування, розвиток техніки зв'язку, яка використовує для І. п. дедалі складніше й дорожче обладнання, підвищення вимог до дальності й надійності передавання (напр., у зв'язку з проблемами космічного радіозв'язку) — все це привело до того, що використання рекомендованих теорій досить складних методів кодування й декодування стає тепер економічно й технічно виправданим.

Літ.: Добрушин Р. Л. Теория оптимального кодирования информации. В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму, т. 3. М.— Л., 1966; Шеннон К. Математическая теория связи. В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965; Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 629—633].

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ІНФОРМА́ЦІЇ ТЕО́РІЯ — розділ кібернетики, який займається математичним описуванням та оцінкою методів передавання, зберігання, добування й класифікації інформації. Оскільки поняття «інформація» і застосування його досить багатоманітні, на даному етапі І. т. становить сукупність наук. дисциплін, у кожній з яких вивчають один з аспектів цього поняття.

І. т. в основному матем. дисципліна, яка використовує методи *імовірностей теорії, математичної статистики,* лінійної алгебри, *груп теорії, графів теорії, ігор теорії* та ін. розділи математики. Важливою рисою, яка об'єднує різні дисципліни, що їх відносять до І. т., є широке використовування в них статистичних методів. Це пояснюється тим, що процес добування *інформації* пов'язаний зі зменшенням невизначеності наших відомостей про об'єкт, а природною чисельною мірою невизначеності якоїсь події є її *імовірність.*

Найважливішою складовою частиною І. т. є теорія *інформації передавання.* Часто термін «І. т.» використовують як синонім терміна «теорія передавання інформації».

Основи І. т. заклав 1948—49 амер. математик К. Шеннон (н. 1916). Великий внесок у неї зробили рад. математики А. М. Колмогоров (н. 1903) і О. Я. Хінчин (1894—1959) і рад. радіотехніки В. О. Котельников (н. 1908). О. О. Харкевич (1904—1965) та ін.

Виникнення теорії передавання інформації пов'язане з розв'язанням у 1948 К. Шенноном осн. проблеми знаходження швидкості передавання інформації, якої можна досягнути при оптим. методі кодування й декодування так, щоб імовірність *похибки* при передаванні була як завгодно малою. Ця оптим. швидкість передавання, яку наз. пропускною здатністю *каналу зв'язку,* виражається через введену Шенноном величину, названу *інформації кількістю.* Задачі, пов'язані з оптим. способом зберігання інформації, принципово не відрізняються від задач оптим. передавання інформації, бо зберігання інформації можна розглядати як її передавання, але не в просторі, а в часі. Осн. теореми І. т. спочатку мали характер теорем існування, в яких доводили існування оптим. методів кодування й декодування, але не вказували способи побудови й тех. реалізації їх. Тому за останні десятиріччя набула широкого розвитку *кодування теорія,* присвячена побудові конкретних і відносно простих *алгоритмів* кодування й декодування, які своїми можливостями наближаються до оптим. алгоритмів, існування яких доводиться в теорії передавання інформації. Для теорії кодування характерним є те, що крім статистичних методів, вона використовує для побудови конкретних кодів алгебр. й комбінаторні ідеї.

До І. т. відносять і всі застосування статистичних методів до описування способів перетворювання сигналів на вході й виході каналів зв'язку. З погляду математики — це просто деякі застосування матем. статистики (у першу чергу статистики *випадкових процесів*), *завбачення випадкових процесів теорії,* теорії ігор та ін. До І. т. природно долучається теорія *розпізнавання образів,* що розробляє алгоритми розподілу об'єктів за певними класами, які описано лише на інтуїтивному рівні й які не допускають чіткого матем. задавання. Такі алгоритми завжди включають у себе процес навчання за певним списком об'єктів, які людина заздалегідь класифікувала. При будь-якому логіч. трактуванні І. т. важко залишити поза її межами матем. статистику, оскільки осн. задачею матем. статистики є задача описування алгоритмів добування інформації з дослідних даних і розподілу об'єктів за певними класами на основі спостерігання їхніх ознак. Те, що матем. статистику за традицією не розглядають як розділ І. т., можна історично пояснити тим, що виникла вона набагато раніше, ніж інші розділи І. т. До І. т. природно було б віднести й усю лінгвістику, бо вона є наукою, яка вивчає осн. спосіб передавання інформації в людському суспільстві — мову, й інформатику, яка вивчає записи інформації в різного роду документах.

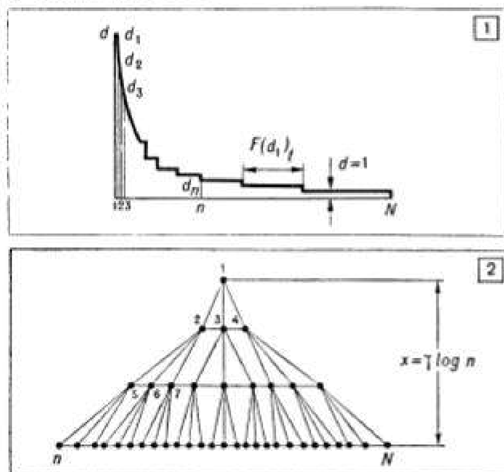
Літ. див. до ст. *Інформації передавання.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ІНФОРМАЦІЙНИХ РОБІТ АВТОМАТИЗА́ЦІЯ — див. *Пошук інформації автоматичний, Інформатика, Реферування автоматичне.*

ІНФОРМАЦІЙНІ ПОТО́КИ НАУ́КИ — системи зафіксованих наукових і технічних результатів, що містяться в книгах, періодичних виданнях, патентах, звітах та інших формах зберігання й передавання науково-технічних знань. І. п. н.— це не лише об'єкт дослідження, а й канали зв'язку науки, без яких вона

не могла б функціонувати як складна динамічна інформаційна система. За орієнтовними даними, в світі існує 30—40 тис. періодичних видань, щороку публікується 2 млн. статей, 75 тис. описів до патентів та авторських свідоцтв. І. п. н., як і наука загалом,— це складні системи з об'єктивно існуючими закономірностями. Вивчення закономірностей систем І. п. н. є одним із центр. завдань *інформатики* й *наукознавства*. При організації пам'яті *інформаційно-пошукових систем* (ІПС) і розробці алгоритмів їхньої роботи треба враховувати ці закономірності.



1. Інформаційний розподіл «гіперболічні сходи».
2. Структурна модель розподілу «гіперболічні сходи».

Інтегральна модель систем І. п. н. грунтується на статистичних розподілах учених за продуктивністю, статей — за журналами тощо. Ще 1926 доведено, що коли в якій-небудь галузі знань розмістити вчених за рангами, пропорційно кількості їхніх публікацій, то виходить розподіл у вигляді «гіперболічних сходів» (мал. 1), де d_1, d_2, d_3, ..., d_n — кількість публікацій ученого 1, 2, 3, ..., n-го рангу, N — загальна кількість елементів розподілу. В 1946 доведено, що аналогічний розподіл виходить, якщо впорядкувати журнали за кількістю публікацій з якої-небудь проблеми (т. з. закон розсіювання інформації). В 1949, вивчаючи розподіл частот слів у досить довгому тексті, одержали аналогічний розподіл $P_n = \frac{c}{n^\gamma}$(розподіл Ціпфа), де c — константа, n — ранг слова в словнику, $\gamma \approx \approx 1$ для природних мов. В інформаційному розподілі «гіперболічні сходи» відображено загальні властивості складних систем ієрархічного типу. Спільною для таких систем є деревовидна структура (мал. 2). Розподіл, показаний на мал. 1, відображено в структурній формі на мал. 2. Елементи, що на мал. 1 містяться в межах одного східця, на мал. 2 містяться в межах одного шару. Т. з. закон Бредфорда відповідає значенню $\gamma \approx 1$ і якісно формулюється так: «Якщо наукові журнали розмістити в порядку зменшення їхньої продуктивності, тобто кількості статей з певного питання, то їх можна розділити на основні періодичні видання, переважно присвячені цьому питанню, і на кілька груп, чи зон, у яких по стільки ж статей, як і в основній зоні. Кількості видань, що в основній групі і в наступних зонах, відноситимуться, як $1:k:k^2$». Точніше було б говорити не про «розсіювання», а про «концентрацію» публікацій у невеликій зоні «спеціалізованих» видань. Це підтверджує й нагромаджена статистика з розподілу публікацій з якої-небудь галузі знань у періодичних виданнях, яка свідчить, що в порівняно обмеженій кількості журналів (5—10%) сконцентровано близько 50% публікацій з обраної теми. Розподіл публікацій, розглядуваний у часі, відображає певні істотні закономірності розвитку самої науки. Відомості з «шкільної арифметики», напр., «розсіяні» по всіх журналах тому, що ця наука припинила існування як «система», і розподіл її публікацій у літературі досяг значення максимальної ентропії. І навпаки, в історії науки відомо чимало прикладів, коли який-небудь науковий напрям, що виник у якійсь одній науковій установі, відображається в публікаціях друкованого органу лише цієї установи. Між цими крайніми випадками є множина станів, які відображаються в реальних розподілах. Це приводить до зміни параметра γ від 0 до ∞. Проте в будь-якому випадку «розсіювання» інформації — це така сама об'єктивна закономірність, як, напр., і розподіл частот слів у тексті, і визначається вона не «хаосом» у документалістиці й видавничій справі. Цю закономірність доводиться брати до уваги при розробці інформаційних систем, комплектуванні фондів бібліотек тощо.

Велике практичне значення має прогнозування зростання І. п. н. Потреби планування роботи видавництв, центр. і галузевих інформаційних служб і керування науковими дослідженнями пов'язані з прогнозуванням не загалом зростання світового інформаційного масиву, а зростання публікацій в окремих галузях науки. В таких окремих галузях науки зростання кількості публікацій є функцією від кількості наукових працівників: $D = f(N)$. Проте лінійна залежність між ними існує лише в одному випадку — коли продуктивність усіх наукових працівників однакова. В загальному випадку вигляд цієї функції визначається законом розподілу вчених за продуктивністю.

Однією з важливих рис розвитку науки в період науково-тех. революції є збільшення «валентності» окремих наукових результатів, їхньої здатності збагачувати «чужі» галузі науки. Цей факт разом з величезним зростанням самих наукових досліджень і збільшенням у зв'язку з цим кількості публікацій іноді сприймається як переконливий доказ інформаційної кризи. Насправді цю ілюзію «поховання» вчених під масою статей

створюють не самі по собі потоки публікацій, а потік досягнень науки. За цих умов традиційні засоби зберігання й пошуку інформації вже не можуть задовольнити вчених, треба розробити й створити інформаційно-пошукові та *інформаційно-логічні системи*, що основані на нових принципах і враховують складні закономірності систем інформаційних потоків.

Літ.: Добров Г. М. Наука о науке. Введение в общее науковознание. К., 1966 [бібліогр. с. 258—267]; Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]; Козачков Л. С. О некоторых проблемах релевантности в информатике и науковедении.— Шрейдер Ю. А., Осипова М. А. О некоторых динамических моделях в информатике. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969, № 8; Козачков Л. С. Некоторые методологические вопросы теории информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969, № 12. *Л. С. Козачков.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ДОВІДКОВА СИСТЕМА — система реєстрації, переробки та зберігання інформації, призначена для забезпечування абонентів відомостями довідкового характеру. Зміст видаваної інформації визначається даними, нагромадженими в довідкових масивах (ДМ) системи. Функціонально типовий процес видавання довідки полягає в тому, щоб виконати асоціативний пошук у ДМ і потім здійснити потрібні змістові й (або) структурні перетворення й оформити одержані відомості у вигляді документа чи інформаційного повідомлення спец. виду. До інших функцій І.-д. с. належать тривале зберігання великих обсягів систематизованої інформації, яка має складну внутрішню структуру, поповнювання й оновлювання збережуваної інформації й забезпечування обміну інформацією з абонентами. Типовими прикладами І.-д. с. є довідкові міські служби, бібліографічні відділи в бібліотеках, оперативно-диспетчерські служби на підприємствах тощо. До складу І.-д. с. звичайно входять такі функціональні компоненти: сховище інформації або *запам'ятовувальний пристрій* (ЗП); пристрої перетворювання, передавання й відображування інформації; *канали зв'язку* й передавання даних і т. зв. процесор, який здійснює осн. ф-ції по обробці інформації (під процесором можна розуміти як ЕЦОМ, так і колектив людей, які виконують аналогічну роль в І.-д. с.). Зберігати та обробляти інформацію можна централізовано або в кількох взаємозв'язаних, але територіально віддалених один від одного пунктах; це відповідає двом осн. типам організації І.-д. с.

За характером представлення й інтерпретації виводжуваної та збережуваної інформації, розрізняють І.-д. с. документального й фактографічного типу. В документальній І.-д. с. інформація зберігається й видається абонентові у вигляді документів (напр., статей, патентів, тех. документації). В окремих випадках абонентові повідомляють перелік адрес документів у ЗП. Результатом роботи фактографічної І.-д. с. є, як правило, сукупність фактів, тобто значень кількісних величин і назв предметів, процесів, явищ тощо. На практиці часто трапляються системи, які видають інформацію й документального, й фактографічного характеру. Такі системи наз. документально-фактографічними. І.-д. с., особливо фактографічні, можуть відрізнятися одна від одної складністю виконуваної переробки інформації. Найпростішими щодо цього є *інформаційно-пошукові системи*, в яких формування довідки зводиться до пошуку потрібної інформації в ДМ. У найскладніших системах результати пошуку можуть зазнавати порівняно складної смислової обробки (напр., вилучання фактів з тексту знайдених статей).

Функціональні можливості, ефективність і галузь застосування І.-д. с. істотно залежить від ступеня автоматизації й механізації процесів обробки, введення — виведення й зберігання інформації. Найширші перспективи щодо цього пов'язуються з використанням автоматизованих І.-д. с. (АІДС), побудованих на базі ЕЦОМ і спряжених з нею засобів зберігання, передавання й відображення інформації. АІДС складається з таких осн. частин: тех. обладнання, матем. забезпечення та інформаційної бази.

До складу тех. обладнання АІДС входять: ЕЦОМ, яка є функціональною основою процесора системи; комплект периферійного обладнання для введення — виведення, передавання й підготовки інформації; пристрої для зв'язку абонента з ЕЦОМ і різних типів ЗП для зберігання великих обсягів різноманітної інформації. Як ЗП в АІДС використовують нагромаджувачі на магн. стрічках, дисках і барабанах та механізовані пристрої зберігання мікрофільмів, діамікроперфокарт тощо. Систему зв'язку АІДС з абонентами будують звичайно на базі стандартних пристроїв зв'язку (напр., *телетайпів*), з'єднуваних з ЕЦОМ через телеграфні або телефонні канали. Великого поширення тепер набули абонентські пульти, обладнані екранами, щоб відображати виводжувану з ЕЦОМ інформацію, та клавіатурою для введення даних та інформації керуючого характеру (див. *Екранний пульт*).

Інформаційна база АІДС являє собою сукупність ДМ, у яких зберігається інформація, яка становить предметну сферу визначення системи. Цю інформацію організовано в ЗП з урахуванням вимог до необхідного часу вибирання даних, до форми та виду подавання їх. Кількість ДМ залежить від змістової структури сфери призначення АІДС, прийнятого порядку внесення інформації при оновлюванні інформаційної бази й характеру підготовки первісних даних для розв'язування задач. Так, напр., організація ДМ у вигляді кількох однакових щодо змісту, але різними способами впорядкованих *масивів*, істотно скорочує час розв'язування типових довідкових задач. До складу матем. забезпечення АІДС включають: набір *програм*, які реалізують різні *алгоритми* переробки інформації й керування процесом функціонування АІДС; комплекс формалізованих мов (див. *Мови формальні*), призначених описувати ін-

формацію, яка циркулює в системі, й алгоритми обробки; сукупність масивів інформації службового характеру (словники, кодувальні таблиці тощо) й настановні матеріали по застосуванню матем. забезпечення. Ключовими компонентами матем. забезпечення АІДС є: *мова інформаційна*, зовнішня мова для формулювання запитів до системи, *бібліотека стандартних підпрограм*, *операційна система* з програмою-диспетчером, мова представлення вивідної інформації та блок реалізації асоціативного пошуку для заданого типу критерію смислової відповідності.

Продуктивність І.-д. с. багато в чому залежить від організації процесу функціонування системи, а це пов'язується з розподілом ресурсів; від вибору режимів роботи І.-д. с. (ретроспективний пошук, вибірковий розподіл інформації тощо) та заданої дисципліни обслуговування абонентів і забезпечення раціональної послідовності виконання окремих етапів і функцій обробки. Сучасна організація функціонування АІДС базується на використанні *мультипрограмування*, організації обчисл. процесу (див. *Обчислювальних робіт методи організації*) з одночасним розв'язуванням кількох задач і обслуговування абонентів і (або) задач у *режимі розподілу часу*. Специфічними особливостями АІДС є: широке використовування дисципліни пріоритетного обслуговування абонентів та задач; суміщання режимів інформування за розписом з оперативною обробкою нестандартних запитів, які надходять довільно в часі; реалізація одночасного багатоканального дистанційного зв'язку з абонентами. АІДС значно розширюють можливу сферу застосування І.-д. с. Напр., АІДС широко використовують і в складі *автоматизованих систем управління* в промисловості, економіці й на транспорті, а також для автоматизації управління підприємствами й науковими організаціями (див. *Автоматизовані системи управління підприємством*).

Літ.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]; Стогний А. А., Зайцев Н. Г. Автоматизированные информационно-справочные системы, их назначение, характеристики и основные требования к ним. «Кибернетика», 1969, № 4; Мидоу Ч. Анализ информационно-поисковых систем. Пер. с англ. М., 1970; Ланкастер Ф. У. Информационно-поисковые системы. Характеристики, испытание и оценка. Пер. с англ. М., 1972.

В. М. Афанасьєв.

ІНФОРМАЦІ́ЙНО-КЕРУ́ЮЧА СИСТЕ́МА — система, яка на основі інформації про стан об'єкта виробляє й приймає рішення щодо керування ним. За структурою І.-к. с. поділяють на дві *підсистеми:* підсистему забезпечення інформацією служби управління об'єктом і підсистему вироблянння й приймання рішень щодо управління. У реальних системах управління функції І.-к. с. виконує адміністративно-управлінський персонал: обліковці (реєстрація й облік даних), бухгалтерія (відображення поточного виду об'єкта, систематизація даних), конструкторський, плановий та ін. відділи (вироблення рішень), диспетчерський, технологічний та ін. відділи (прийняття рішень). Кожний відділ на основі систематизованих даних підготовляє необхідну інформацію, внаслідок чого потоки інформації в існуючих І.-к. с. часто дублюють один одного.

Наявність єдиної планової засади в управлінні нар. г-вом створює ієрархічну структуру з різних І.-к. с. Це значить, що І.-к. с. нижчого рівня виробляє й приймає рішення для досягнення керованим об'єктом мети, заданої І.-к. с. вищого рівня. Вироблення мети в І.-к. с. вищого рівня здійснюється за фактичною інформацією про стан об'єктів управління нижчого рівня й мету, задану І.-к. с. вищого рівня. Практично мету задають у вигляді переліку значень показників, яких повинен досягти об'єкт.

Підсистема забезпечення інформацією служб управління керованим об'єктом здійснює свої функції за допомогою різних масивів даних про цей об'єкт. Умовнопостійний масив даних характеризує структуру об'єкта керування (кількість елементів, їхні характеристики, взаємозв'язок тощо). Напр., структуру підприємства утворюють цехи осн. й допоміжного виробн., склади, випускана продукція, входження деталей у вузли, технологічні схеми проходження деталей по цехах і т. д. Масив, сформований за даними з первинних документів, відображає динаміку стану керованого об'єкта, напр., дані про міжцеховий рух деталей, про забезпеченість осн. виробництва деталями, робочою силою тощо, про реалізацію продукції, витрату деталей і запчастин і т. ін. Масив даних, нагромаджений за структурними елементами об'єкта керування, містить інформацію про трудові, матеріальні й грошові ресурси, фактично затрачені на виготовлення певної кількості або ваги кожного виду кінцевого продукту. Масив нормативних даних містить інформацію про витрати матеріальних, трудових і грошових ресурсів на виготовлення одиниці кінцевого продукту. Нормативні дані поділяють на розрахункові й статистичні. Розрахункові нормативи використовують, запускаючи у виробн. новий вид продукції, або вводять у директивному порядку. Такими є, напр., норми податків. Статистичні нормативи одержують внаслідок поділу сумарної величини витрат ресурсів (матеріальних, трудових і грошових) на кількість або вагу виготовленого продукту й використовують, щоб коректувати розрахункові нормативи. Залежно від запиту, який надходить у підсистему, за даними одного з масивів або за сукупністю масивів формується відповідь.

Підсистема вироблянння і приймання рішень займається прогнозуванням стану керованого об'єкта, виробляє й приймає рішення щодо досягнення заданої мети. Прогнозування в підсистемі реалізують за допомогою планування на різних рівнях: перспективного, річного, квартального, декадного і змінно-добового. Розвиток виробничих відносин, різноманітність випус-

каної продукції й великі швидкості перебігу виробничих процесів на підприємствах породжують багатоваріантність і невизначеність у досягненні поставленої мети. Це веде до необхідності використовувати екон.-матем. методи, що своєю чергою вимагає докладнішої й вірогіднішої інформації про керований об'єкт. Збільшення обсягів інформації про об'єкт і складність ручного розрахунку екон.-матем. моделей стали причиною запровадження в практику роботи І.-к. с. *автоматизованих систем управління*.

Літ.: Немчинов В. С. Экономическая информация. В кн.: Системы экономической информации. М., 1967; Ланге О. Целое и развитие в свете кибернетики. В кн.: Исследования по общей теории систем. М., 1969. *М. Хайрнасов.*

ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ ТЕХНІЧНЕ ОСНАЩЕННЯ — комплекс технічних засобів, якими оснащено *інформаційно-керуючі системи* і *автоматизовані системи управління підприємством* (див. також *Автоматизовані системи управління* в народному господарстві, *Системотехніка*).

ІНФОРМАЦІЙНО-ЛОГІЧНА МОВА — див. *Мова інформаційно-логічна*.

ІНФОРМАЦІЙНО-ЛОГІЧНА СИСТЕМА — автоматизована система, що на основі масиву фактичних даних, який зберігається в ній, здійснює алгоритмічне розв'язування різних задач щодо синтезу нових відомостей, які не існують у явній формі в цьому масиві. Таке розв'язування провадиться комбінаторним перетворенням сукупностей елементів інформаційного масиву, який моделює логічний чи евристичний висновок. Окремий випадок І.-л. с.— автоматизована *інформаційно-пошукова система фактографічна*, яка у відповідь на запити видає відомості, що їх немає в явній формі й її інформаційних масивах.

Під час функціонування будь-якої *інформаційно-пошукової системи* (ІПС), у т. ч. й *інформаційно-пошукової системи документальної*, моделюються деякі найпростіші види логічного висновку. Завдяки цьому під час пошуку відбираються й такі релевантні документи (див. *Релевантність документа*), зміст яких перебуває у відношенні семантичного проходження до інформації, якої вимагає запит. При цьому враховуються осн. факти, властиві відповідній предметній галузі. Здебільшого ці факти зображено в термінах *мов інформаційно-пошукових* дескрипторного типу, в найпростішому випадку — в термінах *відношень парадигматичних* між дескрипторами, що відіграють роль дескриптивних аксіом предметної галузі. Дескриптивні аксіоми можна також вважати включеними до *алгоритму* перевірки *критерію семантичної відповідності*. Аналогічно цьому при алгоритм. розв'язуванні обчисл. задач перетворення вихідних даних задачі на шуканий числовий розв'язок рівносильне моделюванню процедур логіч. висновку, аксіоматику й правила яких включено до алгоритму розв'язування задачі. Таке саме буває й під час машинного доведення теорем. Характерною особливістю І.-л. с. є те, що для розв'язування задач (крім деякої незмінної аксіоматики й сукупності правил виведення) використовують набори елементів інформаційного масиву змінного складу, застосування до яких згаданих правил і дає розв'язання поставленої задачі. Розв'язувані так задачі наз. **інформаційно-логічними**, на відміну від інформаційно-пошукових задач, що їх розв'язує ІПС. Але якщо з'єднати кон'юнкціями всі різні висловлювання, що становлять інформаційний масив якоїсь фактографічної ІПС, і розглянути одержану кон'юнкцію як запис одного «складного факту» (або аналогічно розглянути сукупність документів з інформаційного масиву документальної ІПС як фрагменти одного «наддокумента»), то відмінність між інформаційно-пошуковими та інформаційно-логіч. задачами стирається в тому розумінні, що при цьому для розв'язування і тих, і других згаданий «складний факт» (або «наддокумент») є поряд з інформаційним запитом чи формулюванням інформаційно-логіч. задачі незмінним вихідним «словом», до якого застосовують відповідні алгоритми розв'язування задач, і тому його можна вважати включеним до складу цих алгоритмів.

Суть різниці між інформаційно-логічними та інформаційно-пошуковими задачами й відповідними системами полягає в складнішому характері модельованих в І.-л. с. умовивідних процедур. Щоб забезпечити можливість такого моделювання в І.-л. с., треба застосувати багаті й значною мірою формалізовані *мови інформаційно-логічні*.

Напр., простою реалізованою моделлю І.-л. с. є програма «Бейсбол», яка автоматично відповідає на різноманітні питання щодо цієї гри. Прикладом експериментальної І.-л. с., що розв'язує практично важливу задачу, є машинний пошук т. з. «хім. аналогій» шляхом синтезу хім. сполук на евристичній основі.

У зв'язку з тенденціями, що накреслилися щодо алгоритмізації процесів створення тех. виробів заданого призначення, можна сподіватися в майбутньому на застосування І.-л. с. для розв'язування різноманітних проектних і конструкторських задач. Вважають, що перспективними сферами застосування І.-л. с. в майбутньому є складання аналітичних і критичних тематичних оглядів літератури, виявлення закономірностей і евристичний синтез робочих гіпотез під час наук. досліджень, вірогідне прогнозування нових фактів тощо. Попередньою умовою для створення І.-л. с., що могли б виконувати такі ф-ції, є створення відповідних великомасштабних фактографічних ІПС.

Літ.: Вл э дуц Г. Э., Финн В. К. Проблематика создания машинного языка для органической химии. В кн.: Сообщения лаборатории электромоделирования, в. 1. М., 1960; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 491—546]; Рейтман У. Р. Познание и мышление. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 378—395]; Corey E. J., Wipke W. T. Computer-assisted design of complex organic syntheses. «Science», 1969, v. 166, № 3902. *Г. Е. Влэдуц.*

ІНФОРМАЦІЙНО - ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЦЕНТР ПІДПРИЄМСТВА — основна ланка *автоматизованих систем управління підприємством* (АСУП). І.-о. ц. п., який працює в складі АСУП, виконує функції збирання, нагромаджування й централізованої обробки *даних*, розраховує й видає планові завдання цехам та дільницям, веде облік виробн. й матеріально-тех. забезпечення, організовує розв'язування задач оптим. планування, прогнозує виробничо-госп. діяльність підприємства на різні періоди на основі єдиної інформаційної бази АСУП.

У різних автоматизованих системах управління функції персоналу І.-о. ц. п. за характером виконуваних робіт близькі між собою, а кількісний склад може бути різний; він залежить від обсягу виконуваних робіт. Обслуговують будь-який І.-о. ц. п. адміністративний персонал, на який покладено керівництво його повсякденною діяльністю, планування й контроль за дотриманням графіка виконання робіт та облік усіх робіт, і персонал, який приймає початкові дані від служб підприємства, готує проміжні *носії запису інформації* для введення в ЕОМ, оформляє результати обробки інформації, обслуговує обладнання, бібліотеку стандартних і типових *програм* тощо, тобто забезпечує безперебійне функціонування АСУП.

І.-о. ц. п.— це своєрідний «цех» обробки інформації, готовою продукцією якого є результати розв'язуваних задач. Такі центри в складі АСУП координують роботу підприємства, керують нею. Тому І.-о. ц. п. наз. к о о р д и н а ц і й н о - к е р у ю ч и м и ц е н т р а м и. *А. Г. Сірченко.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ПЛАНУЮЧА СИСТЕМА — те саме, що й *інформаційно-керуюча система.* Див. також *Автоматизовані системи управління підприємством.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА МОВА— див. *Мова інформаційно-пошукова.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА — сукупність мовно-алгоритмічних і технічних засобів для зберігання, пошуку й видавання необхідної інформації. І.-п. с. забезпечує *пошук інформації автоматичний.* На вхід І.-п. с. надходить інформація двох видів: що відображає досягнутий рівень знань про який-небудь клас об'єктів (пристроїв, технол. процесів, хім. сполук, реакцій, теорем тощо) і що відображає інформаційну потребу абонентів І.-п. с. Інформація першого виду наз. і н ф о р м а ц і й н и м м а с и в о м, або пошуковим масивом, а другого—і н ф о р м а ц і й н и м и з а п и т а м и. Елементи інформаційного масиву та інформаційні запити надходять в І.-п. с. природною мовою, далі їх перекладають формалізованою *мовою інформаційно-пошуковою* (див. *Індексування*). Осн. функцією І.-п. с. є виявляння елементів інформаційного масиву, які відповідають на запит, що його поставлено системі. І.-п. с. складається з двох осн. компонентів — абстрактної І.-п. с. та *інформаційно-пошукового пристрою.* Абстрактна І.-п. с.— це сукупність інформаційно-пошукової мови, правил індексування та критерію семантичної відповідності. Абстрактна І.-п. с. реалізується за допомогою або інформаційно-пошукового пристрою, в якому як носій інформації можуть застосовуватись каталожні картки, перфокарти різного типу, що обробляються вручну або лічильно-аналітичними машинами, або пошукового пристрою типу універсальної цифрової обчислювальної машини. До засобів реалізації абстрактної І.-п. с. належать і інструкції щодо обробки інформаційних запитів та елементів інформаційного масиву, програми для ЕЦОМ тощо. За характером інформаційного масиву (отже, й за характером інформації, що її видають) І.-п. с. поділяють на *інформаційно-пошукові системи документальні* (або документографічні) та *інформаційно-пошукові системи фактографічні.* Інформаційний масив документальної І.-п. с. складається з елементів, кожний з яких передає осн. зміст документа (статті, книги, тех. звіту, патента тощо), незалежно від того, скільки об'єктів описано в документі. Такий елемент наз. *пошуковим образом документа.* Інформаційний масив фактографічної І.-п. с. складається з елементів, кожний з яких відповідає безпосередньо певному об'єкту, незалежно від того, чи описано його в одному документі, чи в кількох. Щоб зручніше було зберігати й обробляти інформацію, елементи інформаційного масиву в інформаційно-пошуковому пристрої розчленовують на складові частини й об'єднують один з одним у різних сполученнях. Документальна І.-п. с. у відповідь на поставлений запит видає множину документів, що містять шукану інформацію, або вказує на адреси зберігання цих документів. Фактографічна І.-п. с. у відповідь на запит видає безпосередньо шукану інформацію. За видом інформаційного забезпечення І.-п. с. можуть бути використані як системи вибіркового розподілу інформації, так і системи довідкового (або ретроспективного) пошуку або можуть поєднувати обидві функції.

Літ.: Б е р н ш т е й н Э., Л а х у т и Д., Ч е р н я в с к и й В. Вопросы теории поисковых систем. М., 1966 [бібліогр. с. 130—131]; М и х а й л о в А. И., Ч е р н ы й А. И., Г и л я р е в с к и й Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]. *Е. Ф. Скороходько.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА ДОКУМЕНТАЛЬНА — інформаційно-пошукова система, призначена для пошуку науково-технічних документів (статей, книг, науково-технічних звітів, описів до авторських свідоцтв і патентів тощо), в яких є необхідна інформація. У відповідь на інформаційний запит, поданий системі, І.-п. с. д. видає адреси зберігання релевантних документів, тобто таких, які відповідають на запит. Адреса зберігання — це код, який однозначно визначає місце перебування документа у сховищі. Роль адреси зберігання може відігравати бібліографічний опис документа (автор, назва, джерело), каталожний, інвентарний чи порядковий номер документа тощо. Деякі І.-п. с. д. здійснюють і видавання самих документів чи копій

ДОНОР

РЕЦИПІЄНТ

ФУНКЦІОНАЛЬНА СХЕМА БАГАТОКАНАЛЬНОЇ БІОЕЛЕКТРИЧНОЇ КЕРУЮЧОЇ СИСТЕМИ „МИОТОН–2"(ДЛЯ ОДНОГО КАНАЛУ)

ПІДСИЛЮВАЧ

ІНТЕГРАТОР

МОДУЛЯТОР

ПІДСИЛЮВАЧ СТИМУЛЮЮЧОГО СИГНАЛУ

МАГНІТОФОН

ГЕНЕРАТОР СТИМУЛЮЮЧОГО СИГНАЛУ

СХЕМА ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ

ІНДИНАТОР

ІНТЕГРАТОР

ПІДСИЛЮВАЧ

„МИОТОН-2"



До ст. Біоелектричне керування.

5

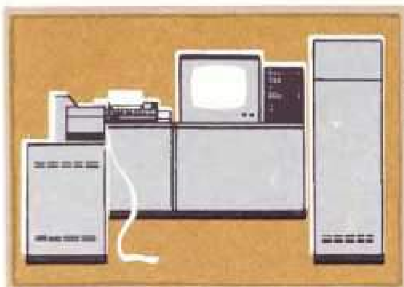
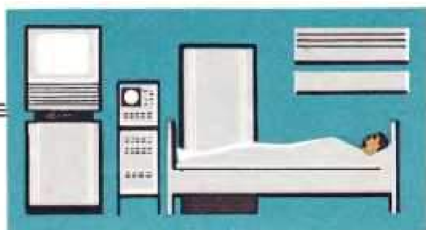


СХЕМА АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ЛІКАРНЕЮ

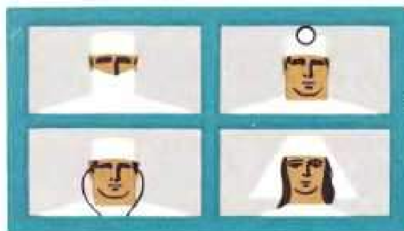
1 ЕЛЕКТРОННА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА
2 ІНФОРМАЦІЙНИЙ ЦЕНТР, ТЕРМІНОВА ІНФОРМАЦІЯ
3 ЕЛЕКТРОННИЙ АРХІВ
4 СЛІДКУЮЧІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ, ДІАГНОЗ, СТАН, РЕКОМЕНДАЦІЇ
5 МОДЕЛЮЮЧИЙ КОМПЛЕКС (МАЛА ЕОМ), ДІАГНОЗ, ПРОГНОЗ, ЛІКУВАННЯ
6 ВІДОМОСТІ ПРО ХВОРИХ, ДІАГНОЗ, ПРОГНОЗ, ЛІКУВАННЯ
7 ВІДДІЛЕННЯ ДЛЯ ПРИЙОМУ ХВОРИХ, ДІАГНОЗ
8 КЛІНІКИ РІЗНОГО ПРОФІЛЮ, ДІАГНОЗ, ПРОГНОЗ, ЛІКУВАННЯ
9 ДІАГНОСТИЧНІ ЛАБОРАТОРІЇ, МЕДИЧНІ ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ДАНІ
10 АПТЕКА, ВІДОМОСТІ ПРО ЛІКИ
11 ПРИЗНАЧЕННЯ ДІЄТИ, ЇДАЛЬНЯ, ДІЄТИЧНЕ ХАРЧУВАННЯ
12 ВІДДІЛЕННЯ РЕАБІЛІТАЦІЇ, БІОТЕЛЕМЕТРИЧНІ ДАНІ
13 ГОЛОВНИЙ ЛІКАР, ВЧЕНА РАДА АСУЛ, УПРАВЛІННЯ
14 ПАЛАТИ ІНТЕНСИВНОГО НАГЛЯДУ



9



10

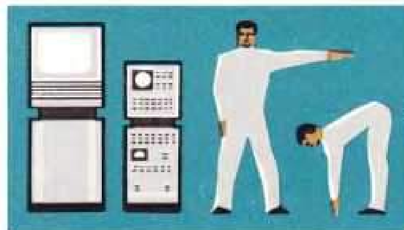


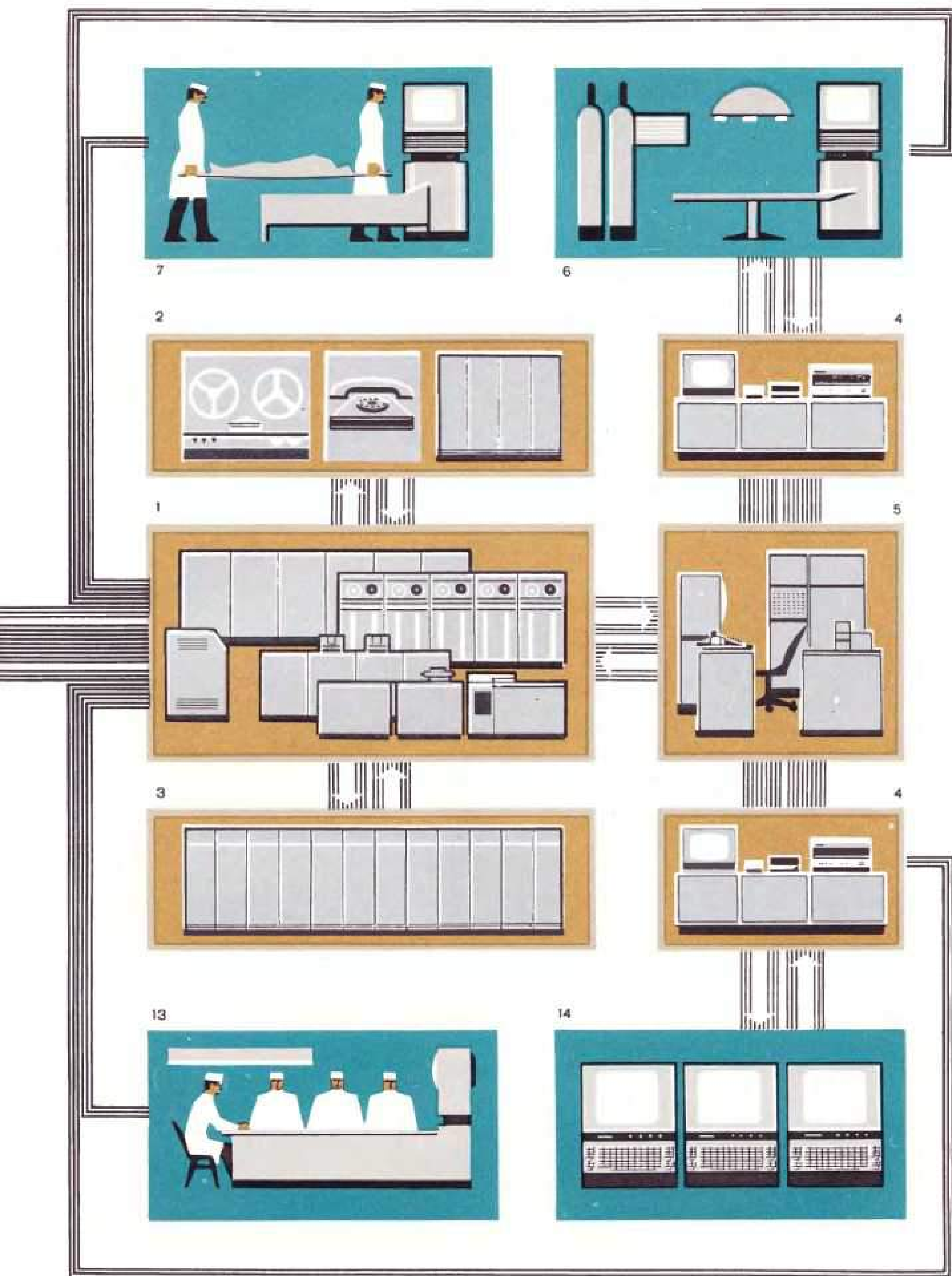
8

11

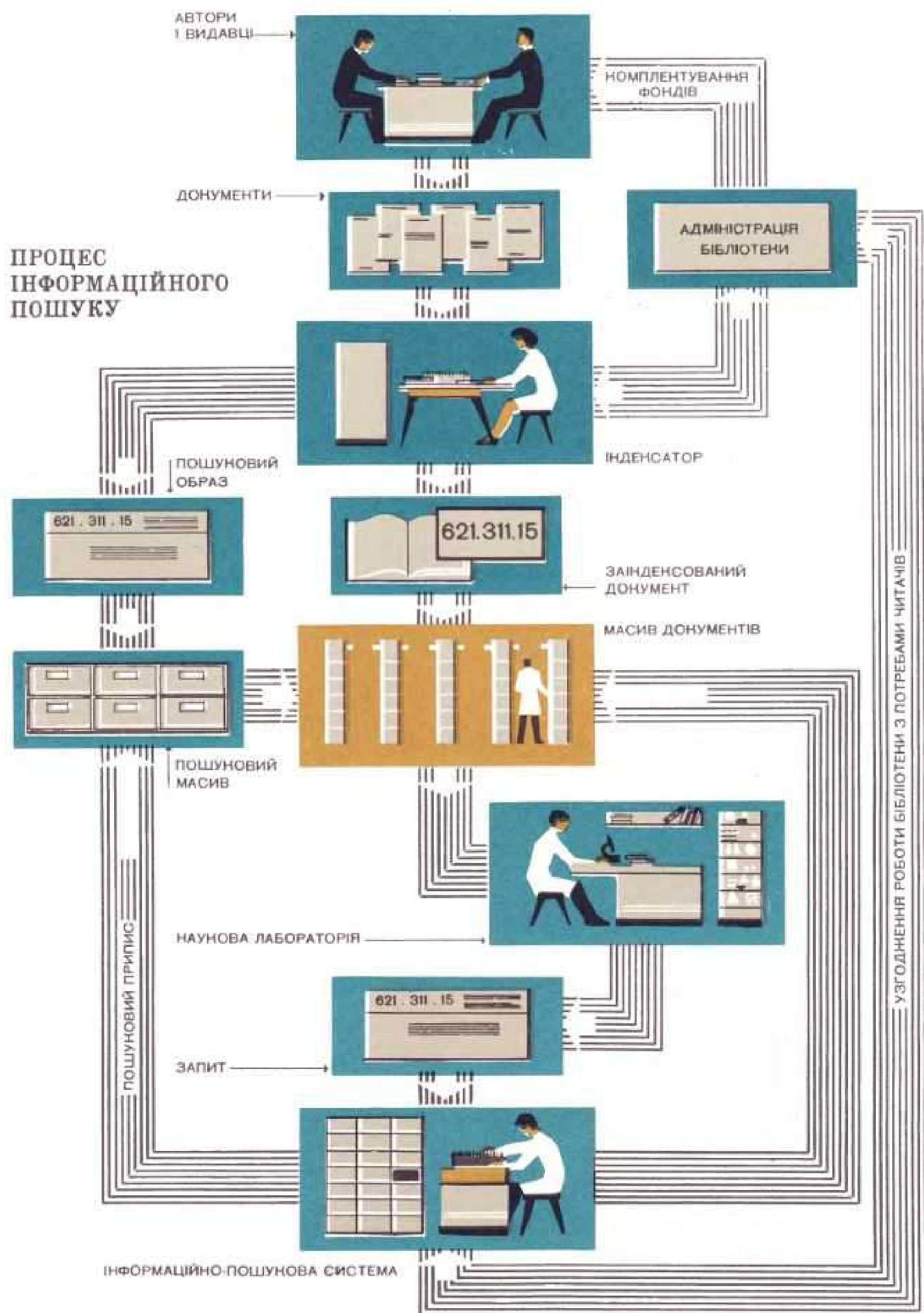


12



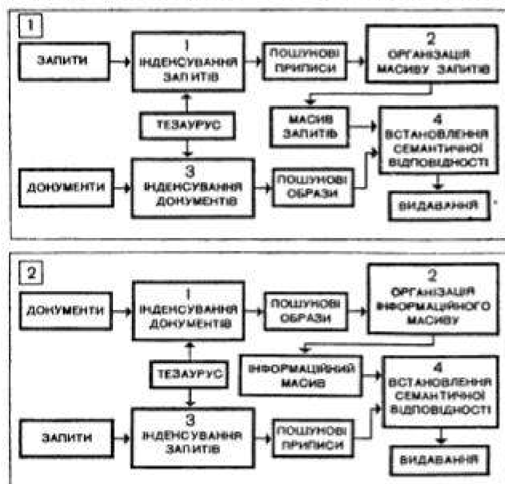


До ст. Медична інформаційна система



До ст. Інформаційно-пошукова система документальна

їх, але здебільшого це відбувається поза І. -п. с. д. (вручну або за допомогою спец. *інформаційно-пошукових пристроїв*). І.-п. с. д. можуть виконувати функції вибіркового розподілу інформації і довідкового (ретроспективного) пошуку або поєднувати ці функції (див. *Пошук інформації автоматичний*). До складу І.-п. с. д. входять блоки, що виконують осн. операції пошуку інформації — *індексування* документів і запитів і встановлення семантичної відповідності між запитами і документами (мал. 1 і 2). *Ефективність*



1. Спрощена блок-схема документальної інформаційно-пошукової системи, яку використовують для вибіркового розподілу (1-й і 2-й блоки працюють у режимі формування й поповнювання масиву запитів, 3-й і 4-й — у режимі пошуку).
2. Спрощена блок-схема документальної інформаційно-пошукової системи, яку використовують для довідкового (ретроспективного) пошуку (1-й і 2-й блоки працюють у режимі формування й поповнювання інформаційного масиву, 3-й і 4-й — у режимі пошуку).

інформаційного пошуку в І.-п. с. д. оцінюють в основному *коефіцієнтом точності пошуку* і *коефіцієнтом повноти пошуку*.

Прикладом І.-п. с. д. є системи «Пусто — Непусто». Ці системи розроблено для пошуку документів з галузі електротехніки. *Мову інформаційно-пошукову* цих систем створено на основі слів природної мови. В І.-п. с. д. «Пусто — Непусто-4» застосовують дескрипторну мову з одним видом *відношень парадигматичних* і без *відношень синтагматичних*. У цих системах процес індексування документів полягає в тому, що з *реферату* документа вибирають усі слова, які є в російсько-дескрипторному словнику (інформаційно-пошуковому *тезаурусі*), потім ці слова замінюють вручну чи автоматично *дескрипторами*. Запити індексують аналогічно, але коли в запиті є однорідні члени речення, його поділяють на підзапити (напр., «Розрахунок і конструювання трансформаторів» дає «Розрахунок трансформаторів» і «Конструювання трансформаторів»). *Критерій семантичної відповідності* системи формулюють у термінах пустоти й непустоти множин М1, М2, М3 і М4, створених дескрипторами зі складу пошукового припису та пошукового образу: М1 — множина дескрипторів *пошукового образу документа*, які збігаються з дескрипторами *пошукового припису;* М2 — множина дескрипторів пошукового образу документа, для яких у складі пошукового припису перебувають підпорядковані їм дескриптори; М3 — множина дескрипторів пошукового образу документа, для яких у складі пошукового припису є дескриптори, що підпорядковують їх; М4 — множина дескрипторів пошукового припису, що не мають у складі пошукового образу документа дескрипторів, що збігаються чи пов'язані з ними відношенням підпорядкованості. Документ вважається релевантним і таким, що підлягає видачі, якщо певна множина чи певна комбінація множин М1, М2, М3 і М4 непуста (непусті), а решта множин пуста (звідси й назва системи). Так, напр., якщо множина М1 непуста, а решта множин пусті, документ вважається релевантним. Документ вважається релевантним і тоді, коли множини М1 і М3 непусті, а М2 й М4 — пусті. В цьому разі кожен дескриптор пошукового припису або є в пошуковому образі, або має там підпорядкований йому дескриптор. Систему можна реалізувати на ЕЦОМ і на суперпозиційних картах.

Літ.: Белоногов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [бібліогр. с. 169—175]; Влэдуц Г. Э. О некоторых сторонах исследований по созданию информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация», 1961, № 1; Информационно-поисковая система «БИТ». К., 1968 [бібліогр. с. 215—217]; Труды III Всесоюзной конференции по информационно-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации, т. 1—4. М., 1967; Шрейдер Ю. А. Лингвистический подход в теории информационных систем. «Научно-техническая информация», 1962, № 9; Alouche F. [та ін.]. Économie général d'une chaine documentaire mécanisée. Paris, 1967; Сэлтон Г. Автоматическая обработка, хранение и поиск информации. Пер. с англ. М., 1973.
Е. Ф. Скороходько.

ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКО́ВА СИСТЕ́МА ФАКТОГРАФІ́ЧНА — інформаційно-пошукова система (ІПС), що забезпечує видавання відповідей на інформаційні запити фактів, які цікавлять споживача. Такі інформаційні запити наз. **ф а к т о г р а ф і ч н и м и**. І.-п. с. ф. спеціалізується, як правило, на видаванні фактичних відомостей якогось одного роду. Осн. відмінності їх від *інформаційно-пошукових систем документальних:* інформаційний масив І.-п. с. ф. складається не з інформаційних документів, а з записів фактів розглядуваного типу (взятих з документів чи з ін. джерел), у відповідь на запит відбувається безпосереднє видавання шуканих відомостей або вказуванням на адреси зберігання відповідних записів фактів, або (в досконаліших І.-п. с. ф., до яких належать застосовувані в практиці сучасні автоматизовані І.-п. с. ф.)—шляхом безпосереднього видавання записів цих фактів тією чи іншою зрозумілою споживачеві мовою (бажано, щоб зазнача-

лись і документи, з яких ці факти взято). Автоматизовані І.-п. с. ф. реалізуються за допомогою ЦОМ.

Традиційним неавтоматизованим аналогом І.-п. с. ф. є довідники фіз. властивостей речовин і матеріалів, каталоги тех. параметрів виробів певного роду, картотеки адрес пром. підприємств тощо. Як неавтоматизовані І.-п. с. ф. широко використовують перфокартотеки, що складаються з перфокарт з крайовою перфорацією, на яких записують відомості про відповідні об'єкти. Ці відомості кодуються крайовими перфораціями у вигляді наборів пошукових ознак, які дають змогу механічно відбирати потрібні записи за допомогою ручних пристосувань чи засобів малої механізації інформаційного пошуку.

Фактографічні відомості — це здебільшого записи, що складаються з назви об'єкта розглядуваного роду (предмета, хім. сполуки, тех. виробу, виробничого процесу тощо) і властивих об'єктові характерних властивостей (ознак, які часто бувають виражені числами). В інформаційно-пошукових мовах (ІПМ), що їх використовують в автоматизованих І.-п. с. ф. для представлення записів фактів, повинні бути засоби для позначення всіх елементів відомостей згаданого виду. Записи фактів *мовами інформаційно-пошуковими*, призначені для алгоритм. пошуку за фактографічними запитами, є пошуковими образами відповідних фактичних відомостей, первинні записи яких (природними мовами) становлять інформаційний масив І.-п. с. ф. (див. *Пошуковий образ документа*). Масив пошукових образів фактичних відомостей, реалізованих на тому чи іншому носії (здебільшого на *стрічках магнітних* або на *дисках магнітних* у *запам'ятовувальному пристрої* ЕЦОМ, що реалізує І.-п. с. ф.), є активним сховищем *інформаційно-пошукової системи*.

У багатьох випадках зручно організовувати масив пошукових образів фактичних відомостей у вигляді т. з. інформаційних чи об'єктно-характеристичних таблиць, які являють собою таблиці з двома входами. На одному вході таких таблиць перелічуються об'єкти розглядуваного роду, на другому — класи характеристик (властивостей, ознак), а конкретні значення (словесні або числові) характеристик записуються на перетині рядків і стовпців. В «активному сховищі» І.-п. с. ф. інформаційні таблиці можуть розгортатися по рядках або стовпцях. У першому випадку значення характеристик групуються за об'єктами, в другому — за назвами характеристик.

Як ІПМ в автоматизованих І.-п. с. ф. можна використати й дескрипторні ІПМ, що мають досить розвинуту структуру й засоби вираження текстуальних відношень, зокрема, мову RX-кодів і мову «стандартних фраз». Останні є способами запису багатомісних предикатів, місця яких заповнюють терміни-дескриптори, причому місце, що його займає *дескриптор*, точно визначає її контекстуальну ф-цію.

В ІПМ останнього типу кожен вид «стандартної фрази» використовується для записування відомостей певного роду, тому в конкретній І.-п. с. ф. досить використати один відповідний вид «стандартної фрази». Крім того, «активне сховище» документальної ІПС, яке складається з пошукових образів документів, що являють собою набори «стандартних фраз» різного виду, може служити для пошуку за тими фактографічними запитами, які відповідають видам «стандартних фраз», що є в ІПМ. При цьому загалом пошук відбуватиметься хоч і повільніше, ніж в аналогічній спеціалізованій І.-п. с. ф., але з тією ж ефективністю. Щоб оцінити *ефективність інформаційного пошуку* фактографічного в І.-п. с. ф., використовують коеф. втрати інформації та пошукового шуму, цілком аналогічні відповідним коеф. для документального пошуку. Тому у випадку застосування досить розвинутих ІПМ різниця між ІПС документальними та І.-п. с. ф. не принципова: І.-п. с. ф. можна розглядати як окремий випадок ІПС документальних, спеціалізованих для пошуку певного типу текстів (тобто фрагментів документів), які описують факти певного роду.

Як правило, значення коеф. повноти І.-п. с. ф. перевищують відповідні значення для документальних ІПС і наближаються до одиниці (100%). Узагальнена функціональна схема І.-п. с. ф. незначною мірою відрізняється від відповідної схеми документальної ІПС. При введенні відомостей в І.-п. с. ф. та формуванні її інформаційного масиву провадяться додаткові «логічні» операції: відбирання та добування (з документів чи ін. джерел) фактичних відомостей заданого роду, можлива оцінка вірогідності цих відомостей, зокрема, виявляння можливо суперечливих аналогічних відомостей в раніше нагромадженому інформаційному масиві ІПС; замість «пасивного сховища» документів в І.-п. с. ф. може бути «пасивне сховище» первинних записів фактичних відомостей природними мовами, релевантну частину яких, після того як її виявлено за пошуковими образами, може бути видано як відповідь. Той самий фактографічний масив пошукових образів можна застосовувати для пошуку різного роду (напр., для пошуку об'єктів за заданими наборами значень характеристик або для видавання відомостей про значення характеристик заданого об'єкта). При цьому кожен такий тип інформаційно-пошукових задач розв'язується за особливим алгоритмом, який виконує роль спеціалізованого *критерію семантичної відповідності*. Масив пошукових образів І.-п. с. ф. можна застосовувати й для алгоритм. розв'язування логічних задач, пов'язаних з моделюванням умовивідних процедур ін. типу, ніж ті, з якими пов'язано моделювання інформаційного пошуку. В цьому разі І.-п. с. ф. виконує роль *інформаційно-логічної системи*. До найбільш великомасштабних автоматизованих І.-п. с. ф. належать І.-п. с. ф. для хім. сполук.

Літ.: Белоногов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [бібліогр. с. 169—175]; Влэдуц Г. Э. О некоторых сторонах исследований по созданию

информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация», 1961, № 1; Сейфер А. Л., Шурова С. С. Автоматическая информационная система по свойствам веществ. «Стандартизация», 1965, № 1; Скороходько Э. Ф. Проект фактографической информационно-поисковой системы. В кн.: Труды III Всесоюзной конференции по информационно-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации, т. 1. М., 1967; Мидоу Ч. Анализ информационно-поисковых систем. Пер. с англ. М., 1970. *Г. Е. Влєдуц.*

ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВИЙ ПРИСТРІЙ — пристрій чи сукупність засобів, використовуваних для реалізації інформаційно-пошукової системи. І.-п. п. класифікують за застосовуваними в них матеріальними *носіями запису інформації*, що їх умовно ділять на дискретні і неперервні (табл.)

Класифікація інформаційно-пошукових пристроїв за типами носіїв запису інформації.

Носії запису інформації	Інформаційно-пошукові пристрої
Дискретні	
Каталожні картки	Каталоги й картотеки
Унітерм-карти	Картотеки
Перфораційні карти з крайовою перфорацією з внутрішньою перфорацією	Пристрої для інформації, сортування карт ручного обертання й перегляданя просвітних карт Лічильно-інформаційні машини
Діамікрокарти Магнітні карти Мікрофільми форматні	Спеціалізовані інформаційно-пошукові пристрої
Неперервні	
Мікрофільми рулонні	Мікрофільмові селектори
Перфораційні стрічки	Оргавтомати. ЕЦОМ
Магнітні стрічки	ЕЦОМ. Спеціалізовані інформаційно-пошукові пристрої
Магнітні диски Магнітні барабани	ЕЦОМ

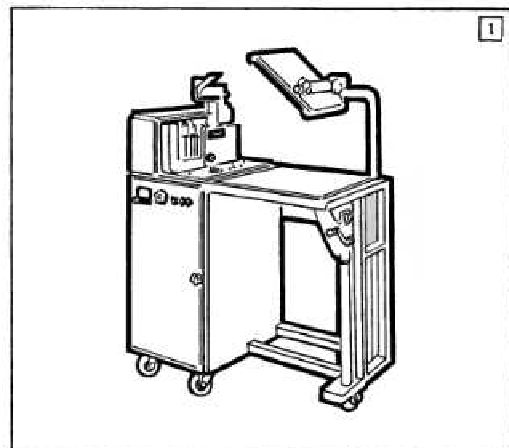
1. Дискретні носії запису інформації історично з'явилися раніше за неперервні, відзначаються простотою реалізації І.-п. п. й набувають широкого застосування в практиці.

Каталожні (бібліографічні) картки застосовують для складання каталогів і картотек. У каталожних ящиках за спец. роздільниками збирають картки з описами документів, прізвища авторів або заголовки яких починаються з певної букви (алфавітний каталог) або ж їхній зміст присвячено якомусь небудь предметові (предметний каталог), тій чи іншій галузі знання (систематичний каталог). Ці картки виготовляють із цупкого паперу, вони стандартного формату 75 × × 125 *мм* і мають біля нижнього краю отвір для стрижня, який закріплює масив карток у ящику. Каталожні ящики поміщають у гнізда спец. шаф.

Унітерм-карти розроблено 1951 (США) й призначено для реалізації *інформаційно-пошукових систем* (ІПС), основаних на принципі координатного індексування. Це картки формату 75 × 125 *мм* або 203 × × 125 *мм*, на які нанесено спец. сітку однієї горизонтальної і десятьох вертикальних граф. У верхній горизонтальній графі записують унітерм — ключове слово, яке виражає одиничне поняття, власне ім'я, географічну назву чи назву фірми. У вертикальних графах записують адресні шифри (номери) документів, пошукові образи яких включають унітерм, зазначений у верхній вертикальній графі. Запис робиться за останньою цифрою кожного номера, напр., 294 записується в графі 4, 135 — у графі 5 і т. д. Така система записування полегшує процедуру виявлення номерів документів, які одночасно містяться в кількох порівнюваних унітерм-картах. Це виявлення збіжних номерів документів рівнозначне операції логіч. множення понять, позначених відповідними унітермами.

Перфораційні карти являють собою прямокутники з цупкого паперу, уздовж їхніх країв попробивано отвори або ж по всьому полю нанесено позиції для пробиття таких каліброваних отворів (перфорацій). Уперше такі карти з'явились у 80-х роках 18 ст. (Франція), коли їх застосували для керування роботою ткацьких верстатів. На початку 90-х років 19 ст. в США винайшли перфоратор і електр. *табулятор* для карт з внутр. перфорацією. Карти з перфорацією по краях найчастіше обробляють вручну. На кожну з них наносять пошуковий образ і текст одного документа. Пошукові ознаки цього документа кодують вирізками між відповідною перфорацією й зовнішнім краєм карти. Пошук необхідних карт у їхньому невпорядкованому масиві здійснюється введенням однієї або кількох сортувальних спиць у відповідні пошуковій ознаці перфорації та струшуванням масиву вручну або за допомогою спец. вібратора. При цьому карти з вирізами цих отворів випадають. Карти з внутрішньою перфорацією можна обробляти вручну (щілинні й просвітні карти) й за допомогою спец. машин. Щілинні перфокарти відрізняються від карт з крайовою перфорацією тим, що вони не випадають з масиву, а висуваються на величину щілини (віддаль між двома суміжними отворами). Це дає змогу вести пошук у кілька етапів і полегшує застосування складних *кодів*. Просвітні перфокарти є ніби варіантом унітерм-карт, у яких механізовано процедуру виявлення збіжних номерів. Записування в них виконується пробиванням перфокарти в точці, координати якої відповідають номерові документа. Під час пошуку відібрані перфокарти, на яких записано пошукові ознаки цього інформаційного запиту, накладають одну на одну й проглядають на просвіт, щоб виявити збіжні пробивки, які відповідають номерам шуканих документів. Найширшого застосування набули перфокарти машинного сортування, що мають формат 187,4 × 82,5 *мм*. На лицьовому боці на них по всьому полю, за винятком вузької

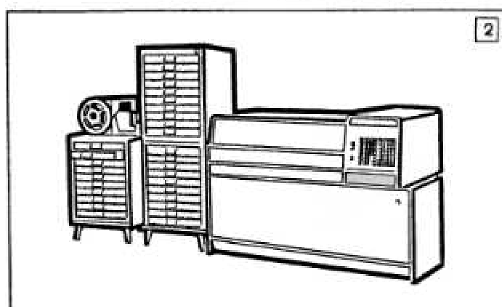
горизонтальної смуги згори, надруковано колонки цифр, які виконують роль матриці. Як правило, використовують 45-, 80- і 90-колонкові перфокарти. Щоб обробляти їх, застосовують стандартні лічильно-перфораційні машини. ІПС, створені на базі цих машин, придатні для роботи з масивами документів обсягом понад 200 тис., а то й кілька мільйонів документів (за умови попереднього підсортовування їх). Застосовують і апертурні перфокарти, в яких є каліброване вікно (апертура) для вклеювання мікрокопії документа на фотоплівці.

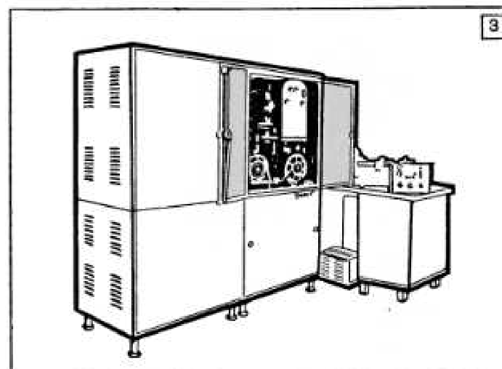


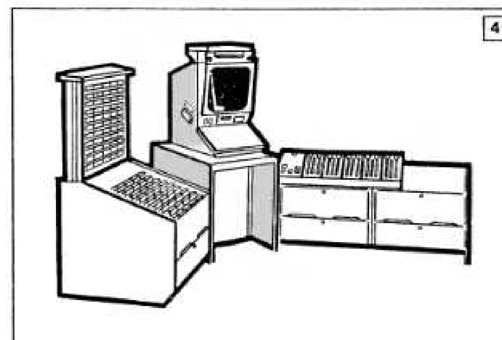
1. Селектор системи «Фільморекс».

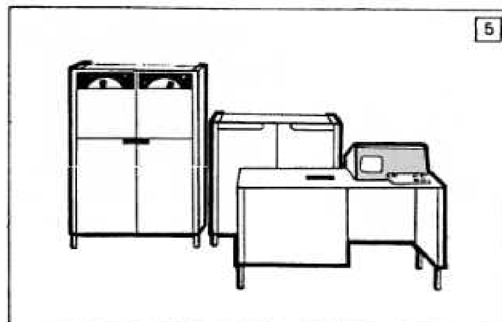
Діамікрокарта (мікрофіша) є найперспективнішим з усіх дискретних носіїв запису інформації. Вона являє собою прямокутник негативної або позитивної фотоплівки з зображеннями документів або частин їх, на відміну від епімікрокарти (мікропринту), яку виконують на непрозорій основі (фотопапері). Частину діамікрокарти, як правило, відводять або для фотооптичного запису пошукового образу документа, або для його бібліографічного опису. Текст документа подають у мікрокопії, його можна прочитати або скопіювати в натуральну величину за допомогою спец. апаратури. Залежно від призначення діамікрокарти та її розміру й від кратності зменшення на ній розміщується від однієї до 200 сторінок тексту. На основі діамікрокарт створюють досить складні електромеханічні, електронні й фотооптичні І.-п. п.

Прикладом може служити комплекс пристроїв «Фільморекс» (створено у Франції, 1950, не раз модифіковано). Його характеристики: розмір негативної карти — 60 × 35 *мм*, ємність карти — 1 кадр, кратність зменшення — від 4 : 1 до 30 : 1, ємність кодового поля — 400 двійкових одиниць, швидкість сортування — 4—6 карт за 1 *сек*, час пошуку — 5 *хв.*, місткість сховища — 5 × 10^5 карт (мал. 1). А такий пристрій як «МЕДІА» (США, 1960) використовує позитивні карти розміром 32 × 10 *мм*, кратність зменшення —









2. Інформаційно-пошуковий пристрій на діамікрокартах «МЕДІА».
3. Мікрофільмовий селектор «Поиск ДВ».
4. Мікрофільмовий селектор «Лоудстар».
5. Інформаційно-пошуковий пристрій на відеомагнітній стрічці «Відеофайл».

30 : 1, ємність кодового поля — 69 двійкових одиниць, швидкість сортування — 10 карт за 1 *сек*, час пошуку — 1 *хв*, місткість сховища — 4×10^5 карт (мал. 2). Аналогічні І.-п. п. створено на основі магн. карт, напр., «Магнакард» (США, 1957), у яких значно більші ємність кодового поля (5 тис. двійкових знаків), швидкість сортування (90 карток за 1 *сек*) і менший середній час пошуку (30 *сек*).

Мікрофільми форматні є невеликими відрізками рулонних мікрофільмів, їх можна розглядати як різновид діамікрокарт. На їхній основі створюють І.-п. п. різних ступенів складності.

2. Неперервні носії запису інформації поступаються перед дискретними щодо зручності й простоти впорядкування їхніх масивів, проте основані на них І.-п. п. мають значно більшу швидкодію. Найбільше поширеними є І.-п. п. для пошуку документів, записаних на рулонних мікрофільмах. Їх почали розробляти в 30-х роках 20 ст. й назвали мікрофільмовими селекторами. Ці пристрої часто використовують для реалізації 2-го контура ІПС із порівняно невеликими масивами документів. Є тенденція спрощувати їх до рівня читально-копіювальних апаратів з автомат. протягуванням мікрофільму й найпростішими пристроями для потоку окремих його кадрів. Осн. мікрофільмові селектори мають такі характеристики: «Поиск ДВ» (СРСР, 1967) використовує негативний неперфорований 35-*мм* мікрофільм з 15-кратним зменшенням, в 1 *м* вміщується до 19 кадрів, ємність кодового поля — 30 двійкових одиниць, швидкість протягування фільму — 1 *м/сек*, місткість бобіни — 150 *м*, час пошуку — 75 *сек* (мал. 3); «Лоудстар» (США, 1961) використовує негативний неперфорований 16-*мм* мікрофільм з 24-кратним зменшенням, в 1 *м* вміщується до 115 кадрів, ємність кодового поля — 1 двійкова одиниця, швидкість протягування фільму — 3 *м/сек*, місткість бобіни — 30,5 *м*, час пошуку — 5 *сек* (мал. 4).

Перфораційні стрічки застосовують в оргавтоматах типу «Супертайпер» і «Дюра-мач» (США) й «Оптима» (НДР), що їх використовують як ввідні пристрої в ЕЦОМ при реалізації на них різних інформаційних систем. у т. ч. й ІПС.

Стрічки магнітні, диски магнітні й *барабани магнітні* застосовують в основному для реалізації зовнішніх запам'ятовувальних пристроїв в ЕЦОМ, рідше — в спец. І.-п. п., у т. ч.— з відеомагнітним записуванням зображень документів. Прикладом такого спец. І.-п. п. може бути І.-п. п. на відеомагнітній стрічці «Відеофайл» (США, 1958—64, мал. 5). При реалізації І.-п. п. на ЕЦОМ ці машини можна використовувати не тільки для видавання відповідей на разові інформаційні запити, а й для вибіркового поширювання інформації, для підготовки оригінал-макетів друкованих покажчиків бібліографічного й координатного типів та в інших видах інформаційного забезпечення.

Літ.: Воробьев Г. Г. Перфокартный метод документального учета в народном хозяйстве. М., 1967 [бібліогр. с. 116—126]; Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [бібліогр. с. 728—735]; Белоногов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [бібліогр. с. 169—175]; Перфорированные карты и их применение в науке и технике. Пер. с англ. М., 1963.

Р. С. Гіляревський, А. І. Чорний.

ІНФОРМА́ЦІЯ (лат. informatio — роз'яснення, виклад, обізнаність) — одне з найзагальніших понять науки, яке означає певні відомості, сукупність якихось даних, знань і т. ін. Поняття І. звичайно передбачає наявність двох об'єктів — джерела І. та споживача І. (адресата). І. можна розглядати як філософську категорію, і в сучас. вченні про І. можна бачити конкретизацію ленінської тези про властивість відображення, притаманну всій матерії. Відображення не зводиться до простої фіз. взаємодії двох об'єктів. І., яку переносить сигнал, як правило, має певний смисл (для споживача), відмінний від смислу самого факту надходження сигналу. Це досягається за рахунок спец. угод, за якими, скажімо, один удар барабана свідчить про наближення противника. Для людини, яка не знає про таку угоду, цей звук такої І. не несе. Іншими словами, І. буває про щось, і сигнал про це, який приймає споживач, може і не мати прямого фіз. зв'язку з подією чи явищем, що про нього він сповіщає. В цьому розумінні І. виступає як властивість об'єктів і явищ (процесів) породжувати різноманітність станів, які шляхом відображення передаються від одного об'єкта до іншого і зберігаються в його структурі (можливо, у зміненому вигляді).

При вивченні І. виникають технічні, семантичні й прагматичні проблеми. Технічні проблеми стосуються питань точності, надійності, швидкості передавання сигналів зв'язку і т. ін. Семантичні проблеми спрямовано на дослідження того, як точно можна передавати смисл тексту за допомогою *кодів*. У цьому випадку адресат звичайно має можливість визначати вигідність свого становища і вважає ціннішою ту І., яка дає йому можливість перейти в вигідніший стан. Прагматичні проблеми полягають у тому, наскільки ефективно І. впливає на поведінку адресата. Поняття І. є одним з осн. понять *кібернетики* (подібно до поняття енергії у фізиці). При будь-якому процесі керування або регулювання, який здійснює живий організм чи автоматично діюча машина або пристрій, відбувається переробка вхідної І. на вихідну. Для того, щоб І. могла надійти від джерела до адресата, треба, щоб стани джерела було якимсь чином відображено у зовн. (щодо джерела й адресата) середовищі, яке впливає на приймальні органи адресата. Отже, І. в зовн. середовищі виражається за допомогою якихось матеріальних об'єктів (носіїв І.), асортимент і спосіб розміщення яких задають І. Відображення множини станів джерела у множину станів носія наз. способом кодування, а образ стану при обраному

способі кодування — **кодом цього стану** (або кодом І., що задається цим станом). Абстрагуючись від фіз. сутності носіїв І. й розглядаючи їх як елементи якоїсь абстрактної множини, а спосіб їхнього розміщення — як відношення у цій множині, приходять до абстрактного поняття коду І. як способу її представлення. При такому підході код І. можна розглядати як *модель математичну*, тобто абстрактну множину з заданими на ній предикатами. Ці предикати визначають тип елементів коду і їхнє взаємне розміщення.

Найчастіше кожний окремий стан джерела представляє одна буква якогось скінченного алфавіту A, а послідовність змінних у часі станів — послідовність букв, тобто слово, записане алфавітом A. Залежно від того, яким кодом задано одну й ту саму І., передавання та переробка її становлять різні тех. труднощі. Так, напр., у ЦОМ зручніше представляти числа в двійковій *системі числення*, а не в десятковій, числову І. зручніше передавати спец. телеграфним кодом, а не за допомогою телефону. Різні способи представляння І., спеціально пристосовані для конкретних випадків, пов'язаних з передаванням, зберіганням і переробкою її, розглядає *кодування теорія* (див. також *Кодування автоматне*).

Тепер найбільше досліджено тех. проблеми І. Розділ науки, присвячений цим проблемам, наз. *інформації теорією* (див. також *Інформації передавання*). Основи цієї науки заклав амер. вчений Р. Хартлі в 1928, визначивши міру кількості І. для деяких задач *каналів зв'язку*. Пізніше іншу, загальнішу, міру кількості І. для цих самих задач запропонував амер. вчений К.-Е. Шеннон (н. 1916), запровадивши як міру невизначеності системи *ентропію* $H = -\sum_i p_i \log p_i$, де p_i — *імовірність* того, що система перебуває в i-му стані. Величину усуненої невизначеності системи в результаті одержання І. прийнято як кількісну міру І. Запроваджена таким чином *інформації кількість* не збігається з загальноприйнятим поняттям кількості І. як кількості й важливості одержаних відомостей, бо при дослідженні тех. проблем не враховуються ні семантичні, ні прагматичні аспекти. Запроваджене в теорії І. поняття кількості І. служить лише для розв'язування тех. питань, напр. оптим. кодування І., при цьому абстрагуються від її смислу.

Запроваджене К.-Е. Шенноном поняття кількості І. не адекватне інтуїтивному уявленню про І. і є уточненням останнього для певного класу ситуацій, що виникають при вивченні каналів зв'язку. Поняття кількості І. виникло з задач теорії зв'язку і по суті застосовне тільки до цих задач. Недостатність такого уявлення про І. проявляється при спробі зв'язати кількість одержуваної І. з поведінкою одержувача, що розв'язує якусь задачу. В цьому разі треба мати міру І., яка відображає корисність повідомлення для одержувача. Тут ентропія не завжди прийнятна як міра невизначеності. Для задач, у яких система характеризується складнішою мірою невизначеності, вимірювана І. має нові якісні сторони.

Розрізняють кілька видів І. **Повна І.** — це кількість І., що набувається при повному з'ясуванні стану якоїсь системи й дорівнює ентропії цієї системи. **Окрема І.** — кількість І., що міститься в окремому повідомленні, яке стверджує, що система перебуває в певній множині станів. **Повна взаємна І.** — зменшення невизначеності системи X у результаті того, що стають відомими положення системи Y. **Окрема взаємна І.** про систему — це кількість І. про систему X, яка міститься в окремому повідомленні і вказує, що система Y перебуває в певній множині станів. **Корисна І.** — кількість І., яка міститься в окремому повідомленні і зменшує невизначеність відомостей про систему. Зміну невизначеності відомостей про систему під впливом відомостей у повідомленнях, що надходять, інтерпретують як процес запасання корисної І. про систему. Негативні значення корисної І. розцінюють як **дезінформацію**. Повідомлення, які не змінюють невизначеності системи, не несуть у собі корисної І. У даній постановці задачі може виявитися, що одне й те саме повідомлення містить різну кількість корисної І. для різних одержувачів. Якщо одержувачі виходять з різних гіпотез, то одне й те саме повідомлення може уточнити уявлення про систему для одного з одержувачів і не додати нічого нового до відомостей другого одержувача. Такі якісні сторони вимірюваної І. більше відповідають нашому інтуїтивному уявленню про неї. Але для розглянутих означень І. істотною є статистична модель ситуації, яку не завжди можна створити. Дуже важливою характеристикою І. є її доступність для одержувача. Кількість І., яку нервова система людини здатна подати в мозок, напр., під час читання тексту, становить приблизно 1 *біт* за 1/16 *сек*. Ця порція І. затримується у свідомості приблизно 10 *сек*, тобто людина сприймає 16 *біт* за 1 *сек*, і водночас у її свідомості утримується 160 *біт*. Щодо інших видів І., то пропускна здатність нервової системи може бути значно більшою. Для задач аналізу текстів (напр., *машинного перекладу*) ця характеристика здатності одержувача до сприймання І. є однією з найважливіших.

Машинний переклад неможливий без наявності в машині певних відомостей. В результаті аналізу великої кількості текстів цей обсяг відомостей збільшується, і здатність машини сприймати І. зростає. Такий процес інтерпретують як поповнення та перебудову машинного довідника (*тезауруса*) в результаті аналізу текстів. Тезаурус — опис множини станів якоїсь моделі зовн. середовища. Текст розглядається як якийсь оператор над **тезаурусом**. **Кількістю семантичної І.**, яка міститься в тексті відносно тезауруса, називають міру зміни тезауруса в результаті аналізу тексту. Подібна концепція семантичної І. здатна обслужити ситуації,

де виникає потреба в оцінці прагматичної цінності І. Поняття семантичної І. може набути соціального характеру, якщо створити тезауруси, які є моделлю суспільного мислення.

Літ.: Колмогоров А. Н. Предисловие к русскому изданию. В кн.: Эшби У. Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959; Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М., 1960 [бібліогр. с. 309—312]; Шрейдер Ю. А. О количественных характеристиках семантической информации. «Научно-техническая информация», 1963, № 10; Бонгард М. М. Проблема узнавания. М., 1967; Урсул А. Д. Природа информации. М., 1968; Хартли Р. В. Л. Передача информации. В кн.: Теория информации и ее приложения. М., 1959; Бриллюэн Л. Наука и теория информации. Пер. с англ. М., 1960; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965. *Д. К. Лісенбарт, Ю. П. Скокан.*

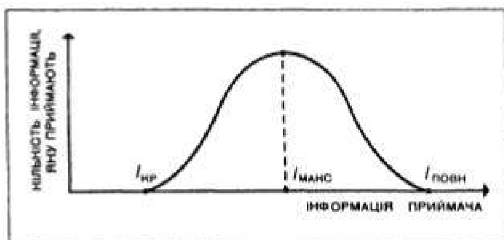
ІНФОРМА́ЦІЯ ДОКУМЕНТА́ЛЬНА — інформація, закріплена на якому-небудь матеріальному носії. Прикладом І. д. може бути та частина *інформації наукової*, яку зафіксовано в наукових документах, а також різні бухгалтерські відомості, банківські документи тощо. В кібернетиці це поняття вживають у зв'язку з автоматизацією обробки й пошуку документальної інформації. *Л. Е. Пшенична.*

ІНФОРМА́ЦІЯ НАУКО́ВА — логічна інформація, що адекватно відображує об'єктивні закономірності природи, суспільства й мислення. Прикладом І. н. можуть бути закони фізики, хімії, математики тощо, встановлені в ході розвитку цих наук. Оскільки основу процесу пізнавання становить суспільно-істор. практика — матеріальне виробництво, класова боротьба тощо, то джерелом І. н. є не лише наук. дослідження, й усі види діяльності людей щодо перетворювання природи й суспільства. І. н. поділяють на види: за галузями одержування та (або) використання її (біол., політ., тех., управлінська, хім., фіз., тощо) й за призначенням (масова й спеціальна).

І. н. є результатом переробки й узагальнення абстрактно-логіч. мислення, відомостей і даних, одержуваних безпосередньо в процесі пізнавання. Під адекватністю відображення І. н. об'єктивних закономірностей природи, суспільства й мислення розуміють ступінь правильності відображення, зумовлений досягнутим рівнем науки. Наукові гіпотези та прогнози є І. н., яка підлягає перевірці на практиці, внаслідок цього вони перетворюються на теорії або ж їх відкидають як помилкові. Критерій використовування в суспільно-істор. практиці дає змогу відрізняти І. н. від побутової інформації, тривіальних істин, наук. фантастики тощо. В кібернетиці І. н. застосовують здебільшого в зв'язку з автоматизованим пошуком, оскільки великий обсяг І. н. утруднює пошук і використання її. Див. також *Документ науковий, Інформатика, Інформація документальна, Науково-інформаційна діяльність.*

Р. С. Гіляревський, Л. Е. Пшенична, А. І. Чорний.

ІНФОРМА́ЦІЯ СЕМАНТИ́ЧНА — смисл або зміст повідомлення. На відміну від статистичних характеристик *інформації* для І. с. немає загальноприйнятої кількісної міри. Смисл повідомлення описується шляхом співвіднесення з І. с., що зберігається у приймачі *(тезаурусі)*. Один з важливих методів описування І. с. полягає в перекладі повідомлення на стандартизовану семантичну мову, властиву цьому тезаурусові. Відомості, що їх одержано в повідомленні, змінюють початковий тезаурус. Величину такої зміни і обирають за характеристику кількості І. с., яка міститься в цьому повідомленні відносно цього приймача. Недостатньо розвинутий тезаурус



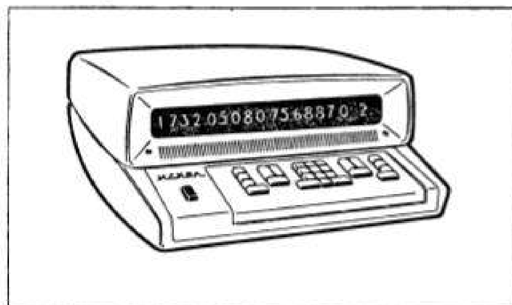
дістане або нульову, або дуже малу І. с. з цього повідомлення (не зможе «зрозуміти» його). Занадто повний тезаурус також не зможе дістати багато І. с. (інформація не буде для нього новою). Кількість І. с., що її приймає тезаурус з фіксованого повідомлення, залежить від кількості І. с., яка є в тезаурусі (приймачі) (як показано на мал.). Методи декодування І. с. тісно пов'язані з методами аналізу смислової структури текстів природною мовою, що їх розробляють у зв'язку з автоматизацією перекладу, *індексування*, реферування тощо. Див. *Анотування автоматичне, Машинний переклад, Реферування автоматичне.* *Ю. А. Шрейдер.*

IPL-V — спискова *мова програмування.* В IPL-V первісну інформацію задають у вигляді *спискових структур.* Для обробки інформації є бл. 150 базисних процесів (операторів), які включають арифм. процеси («додати», «помножити», «перевірити $a > b$»), спискові процеси («вставити символ у список», «стерти список», «скопіювати список»), процеси обміну з зовн. пам'яттю, процеси введення й виведення та ін. Для виконання циклічно повторюваних операторів є спец. тип процесів, що їх наз. генераторами, які забезпечують перегляд спискових структур. Програму мовою IPL-V подають у вигляді спискових структур. Див. *Мови спискові.*

Літ.: Newell A., Tonge F. An introduction to information processing language V. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1960, v. 3, № 4. *Т. О. Грінченко.*

«ЙСКРА» — настільна електронна *обчислювальна машина клавішна,* призначена для виконання науково-технічних та обліково-статистичних обчислювань. Розробили її в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1966. Відрізняється від аналогічних машин вищим ступенем автоматизації обчисл. і допоміжних операцій, логічною будовою, яка дає змогу автоматично й напівавтоматично виконувати обчислюван-

ня складних формул, прямих і обернених елементарних функцій тощо без записування проміжних результатів, має високу надійність і технологічність. Може виконувати з урахуванням знаків і ком такі операції над 16-розрядними десятковими числами: алгебричне додавання — віднімання, алгебр. додавання з константою, множення, множення на постійний множник, ділення, ділення на постійний дільник, нагромаджування — алгебр. підсумовування результату дії із вмістом нагромаджувального регістра та добування квадратного кореня. Обчислювання елементарних



Настільна клавішна електронна обчислювальна машина «Искра».

функцій (sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th, cth, e^x, ln, lg тощо) провадиться напівавтоматично, після кількох натискань на клавіші, без записування проміжних результатів. Числа подано в машині з природним розміщенням коми в десятковій системі числення. Арифм. і запам'ятовувальних регістрів — 5. Результати виконаних дій можна спостерігати на індикаторних пристроях двох варіантів: на 16-розрядному індикаторі з цифровими індикаторними лампами, який показує вміст одного з регістрів, або на індикаторі з електроннопроменевою трубкою, який показує вміст будь-яких трьох із п'ятьох регістрів. У машині передбачено можливість виводити на друк і на перфострічку вихідні дані, результати обчислень з їхніми знаками та спец. ознаки, які не підлягають обчислюванням на машині. Споживана потужність — 80 *ва*. Вага машини — 25 *кг*. Габаритні розміри 540 × 490 × × 210 *мм*. Машину випускають серійно. Є кілька модифікацій: «Искра-11», «Искра-12», «Искра-22», «Рось» і «Орбита».

Літ.: Корниенко Г. И. Настольная электронная клавишная вычислительная машина для научно-технических и учетно-статистических расчетов. В кн.: Механизация и автоматизация инженерного и управленческого труда. Кишинев, 1967.

Г. І. Корнієнко.

«ІТЕРА́ТОР» — спеціалізована *аналогова обчислювальна машина* для розв'язування лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} + AX - F = 0, \qquad (1)$$

$$\Gamma_0 X_0 - \gamma_0 = 0, \qquad (2)$$

$$\Gamma_i X_i + \Gamma_k X_k - \gamma = 0, \qquad (3)$$

де $X = X(t)$ — вектор шуканих ф-цій, $X_0 = X(t_0)$, $X_i = X(t_i)$, $X_k = X(t_k)$. Розв'язок відшукують в інтервалі $[t_0, t_k]$, t_i — внутр. точка інтервалу, $A = A(t)$, Γ_0, Γ_i, Γ_k — задані матриці, $F(t)$, γ_0, γ — задані вектори; порядок дифер. рівняння $n \leqslant 8$, кількість умов у системі (3) $m \leqslant 4$. Задача (1) — (3) розв'язується «І.» сукупно з АОМ, яка реалізує систему (1) з початковими умовами, що їх задає «І.», крайові умови (2) і (3) реалізують на «І.». Розроблено «І.» в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1962. Складається він з аналогів крайових умов (2) й (3), блока перетворення нев'язок, генератора програми роботи АОМ та блоків «І.».

Задачу розв'язують ітераційним методом Ньютона, що зводить її до серії задач Коші. Застосування методу Ньютона дає змогу швидко відшукувати розв'язок, ітерування зумовлюється похибками аналогових обчислень і, як правило, має 2—4 кроки. *Алгоритм* складається з двох частин: визначення матриці перших похідних за компонентами вектора початкових умов і автомат. відшукання розв'язку крайової задачі з використанням одержаної матриці перших похідних. «І.» задовольняє крайові умови з похибкою, не більшою як 3%. «І.» може працювати сукупно з АОМ «МН-7», «МПТ-9», «ИПТ-5»; призначений він для використання в проектних орг-ціях, н.-д. інститутах, обчисл. центрах тощо.

Літ.: Пухов Г. Е., Грездов Г. И., Верлань А. Ф. Методы решения краевых задач на электронных моделях. К., 1965 [бібліогр. с. 142—144].

Г. І. Грездов.

ІТЕРАЦІЙНІ МЕ́ТОДИ — методи наближеного розв'язування задач прикладної математики, побудовані на послідовному наближенні до розв'язку шляхом багаторазового застосування якої-небудь обчислювальної або аналітичної процедури. При цьому відправними даними для кожної наступної процедури є результати застосування попередніх процедур (див., напр., *Операторних рівнянь способи розв'язування*). Наслідком цього процесу є послідовність, яка при виконанні деяких умов сходиться до розв'язку задачі, тобто є можливість одержати наближення, як завгодно мало відмінне від справжнього розв'язку. Напр., для розв'язування довільного рівняння $f(x) = 0$ його зображують у вигляді $x = \varphi(x)$ (це можна зробити багатьма способами, напр., $x = x + Cf(x)$, де C — довільна стала), і будують послідовність: x_0 — довільне, $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$... Ця послідовність сходиться до розв'язку вихідного рівняння, якщо, напр., $\varphi(x) > x$ і $0 < \varphi'(x) < 1$.

І. м. застосовують і в теор. дослідженнях. За їхньою допомогою доводять, напр., теореми існування та єдиності розв'язків різних класів рівнянь.

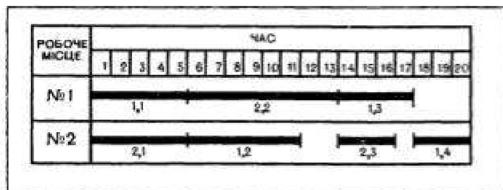
А. І. Березовський.

К

КАЛЕНДА́РНЕ ПЛАНУВА́ННЯ — впорядковування в часі певного ряду робіт, що їх виконують відповідно до заданих обмежень, коли ресурси, що їх використовують для виконання цих робіт, обмежені. Задачі К. п. становлять клас комбінаторних задач цілковитого впорядкування в часі різних дискретних процесів, великої кількості робіт, що їх попередньо частково впорядковано згідно з технологією виконання — з технологічними маршрутами.

Завдання побудування календарного плану-графіка полягає у встановленні найкращої послідовності виконання робіт згідно з заданим критерієм оптимізації. К. п. виробництва є осн. засобом узгодження планів виробничих дільниць і підрозділів, що обслуговують ці дільниці, в часі. Календарний план-графік можна розглядати як своєрідну *модель виробництва*. Кінцевою метою побудування календарного плану на виробн. є зазначення строків виконання окремих планових робіт, операцій по кожній бригаді, оператору, робочому місцю. К. п. полегшує й завдання служб постачання потрібної сировини й напівфабрикатів, бо заздалегідь відомо, на який момент часу та в якій кількості потрібно постачати їх для кожної виробничої дільниці, для кожного робочого місця. Завданням К. п. є й вибирання того з допустимих графіків, який найбільше відповідає конкретній виробничій обстановці. Як прогноз ходу виробничого процесу календарний графік дає виразну картину можливого використання устаткування й трудових ресурсів, указує, де може виникнути «вузьке місце», дає змогу заздалегідь передбачити можливі збої у виробн. і своєчасно вжити заходів, щоб ліквідувати їх. З роботою підприємства за календарним планом зв'язані організації ощадливого й дійового обліку, чіткіша постановка роботи з технологічного проектування й розрахунку цілком реальних нормативів. Робота за календарним планом створює передумови для точнішого визначення розмірів страхових запасів матеріалів, деталей, напівфабрикатів, інструментів, для підтримування на належному рівні запасів незавершеного виробн.

З появою ЕОМ робота підприємств за єдиним календарним планом стала реальною можливістю. Матем. методи розв'язування задач К. п. розробляють у межах матем. теорії розкладів, яка бурхливо розвивається останнім часом. Точні методи розв'язування задачі побудування календарного плану-графіка можна застосовувати, як правило, лише для задач малої розмірності. Для розв'язування деяких окремих задач К. п. застосовували методи *програмування лінійного*, цілочислового лінійного програмування та *програмування динамічного*. В заг. випадку динамічність виробництва, різні відхилення, неоднозначно визначені критерії оптимізації потребують побудування такої схеми розв'язування, яка була б досить універсальна, забезпечувала більшу гнучкість, допускала легко реалізований перехід від одного критерію оптимізації до іншого; забезпечувала б прийнятний час розрахунків, давала змогу одержувати досить близький до оптимального наближений розв'язок і вносити зміни в одержаний розв'язок, тобто здійснювати коректування плану-графіка. Ці вимоги задовольняють *алгоритми*, що використовують методи моделювання, та ідеї *послідовного аналізу варіантів*.



Графік роботи дільниці.

Є різні способи наочного зображення календарних планів роботи дільниць. Найпоширенішими з них є графічні способи. На графіку роботи дільниці (мал.) видно завантаження кожного робочого місця по змінах. Кожну операцію на такому графіку зображують відрізком, який за довжиною дорівнює тривалості виконання операції у вибраному масштабі часу. Під відрізком записано осн. характеристики операції (номер деталі, номер операції, розмір партії тощо). Великого поширення набули особливі форми зображення як самих «технологічних маршрутів», так і календарних планів у вигляді т. з. стрілкових діаграм або сіткових графіків (див. *Сіткові методи планування й управління*). Такі форми зображення використовують при К. п. в разі складних розробок, при проектуванні унікальних об'єктів в обмежені строки тощо. Можна не тільки наочно графічно зображувати календарні плани, а й по-іншому зображувати у вигляді таблиць дані, що характеризують календарні плани.

Задачі К. п. зустрічаються в *алгоритмів теорії* та *автоматів теорії*, при конструюванні ЦОМ та в ін. розділах дискретної прикладної математики. При цьому розглядувані дискретні процеси можна ототожнювати з технологічними маршрутами оброблюваних деталей, а задану обмежену множину перетворювачів — з множиною одиниць устаткування (робочих місць).

Літ.: Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., 1964 [бібліогр. с. 361—362]; Танаев В. С. К теории расписаний. «Доклады АН БССР», 1964, т. 8, № 12; Моделирование про-

цессов производства и управления. Новосибирск, 1966; Шкурба В. В. [та ін.]. Задачи календарного планирования и методы их решения. К., 1966 [бібліогр. с. 152—153]; Важоньи А. Научное программирование в промышленности и торговле. Пер. с англ. М., 1963; Календарное планирование. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 450—464].

Т. П. Подчасова.

КАНА́Л МАШИ́ННИЙ — пристрій, за допомогою якого провадиться обмін даними між центральним *процесором* і периферійним обладнанням. Див. також *Пристрій обміну*.

КАНА́ЛИ ЗВ'ЯЗКУ́ — 1) Сукупність технічних пристроїв, які забезпечують незалежне передавання повідомлень від передавача до приймача по одній фізичній лінії зв'язку. Лінія зв'язку являє собою середовище, в якому поширюються сигнали від передавача до приймача. По цій лінії організовують одночасне передавання кількох незалежних *повідомлень*, кожне з яких іде своїм каналом. На одній лінії каналів може бути дуже багато. Канали, по яких зв'язок здійснюється лише в одному напрямі, наз. односторонніми, або симплексними, а канали з одночасним двостороннім зв'язком у прямому й зворотному напрямах — дуплексними.

К. з. разом з відправником і одержувачем становлять систему зв'язку (мал.). Незалежні повідомлення $П_1 \div П_N$ багатоканальної системи зв'язку від N джерел (відправників) надходять на входи передавачів і там перетворюються на сигнали $S_1 \div S_N$, які відповідають цим повідомленням. Сигнали всіх передавачів надходять у лінії зв'язку. З виходу лінії зв'язку суміш сигналів усіх N каналів надходить на входи приймачів, там ці сигнали розділяються за допомогою спец. роздільних пристроїв (селекторів), перетворюються на повідомлення й видаються одержувачеві. Операція перетворювання повідомлення на сигнал наз. *модуляцією* сигналу.

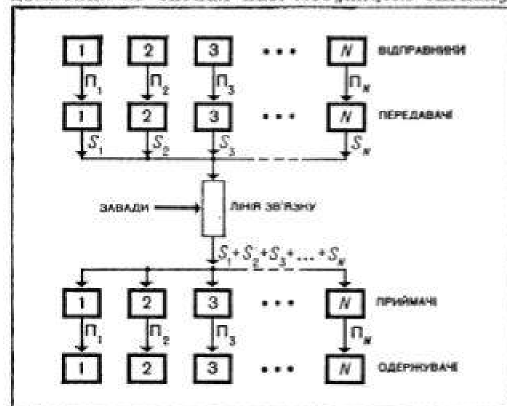


Схема багатоканальної лінії зв'язку.

а зворотне перетворювання — демодуляцією сигналу. За частотного способу розділяння сигнали різних каналів розміщуються в неперетинних частотних смугах і розділяються за допомогою набору смугових фільтрів, кожен з яких пропускає смугу частот свого каналу; а за часового — передавання відбувається так, що елементи сигналу, який належить певному каналові, передаються в певні проміжки часу, вільні від передавання сигналів інших каналів. Для розділення сигналів на приймальному кінці встановлюють комутатор, який працює синхронно з розподільником на передавальному кінці.

Найважливіші характеристики К. з.: ступінь спотворень, яких зазнає передаваний сигнал, рівень *завад* у каналі й загасання сигналу. Лінійні спотворення складаються з частотних і фазових, вони визначаються перехідною характеристикою каналу або (це еквівалентне) комплексним коефіцієнтом передавання каналу. Щоб зменшити фазові спотворення, в К. з. включають фазокоректуючі кола. Нелінійні спотворення виникають внаслідок дії нелінійних елементів і вузлів (дроселі й трансформатори з осердями, підсилювачі, контакти, які окислилися, тощо). За наявності нелінійних спотворень у складі сигналу з'являються вищі гармонічні складові й комбінаційні частоти.

Внаслідок впливу завад сигнал спотворюється, й умови розділяння сигналів погіршуються. Джерелами синусоїдальних, імпульсних і флуктуаційних завад є сусідні передавачі, пром. установки, лінії електропередачі, атмосферні завади, внутр. шуми в апаратурі зв'язку тощо. Завади в реальних системах зв'язку обмежують нижній рівень потужності сигналу й вірогідність (надійність) зв'язку.

Згасання К. з. характеризується втратою потужності в ньому (зниженням рівня потужності сигналу), його вимірюють у децибелах і визначають з виразу $b = 10 \log \frac{P_0}{P_к}$, де P_0 — потужність на початку каналу при ідеальному узгодженні каналу з передавачем, $P_к$ — потужність на виході реального каналу.

За характером передаваних повідомлень К. з. поділяють на телеграфні, телефонні, фототелеграфні, радіомовні, телевізійні, телемеханічні, передавання *даних*, радіолокаційні тощо. Вони відрізняються один від одного гол. чин. діапазоном і смугою частот. Повітряні лінії проводять з біметалевого, мідного, а іноді з сталевого дроту. По лінії з біметалевими дротами (сталевий дріт, укритий шаром міді) можна передавати сигнали до 150 *кгц*. Це дає змогу організувати 15 високочастотних каналів по одній парі дротів. Одним з осн. засобів проводового зв'язку є кабелі з симетричними парами. В кабельних лініях використовують систему ущільнювання, яка дає змогу створювати 24 телефонні канали при діапазоні частот до 108 *кгц*, або 60 каналів з верхнім діапазоном частот до 250 *кгц*. По коаксіальних кабелях можна передавати високі частоти аж до 8—12 *Мгц*, а це дає змогу створювати до 2700 телефонних каналів чи 1200 телефонних і один телевізійний канал. До проводових ліній слід віднести й системи з передаванням сигналів зв'язку по лініях електр. передачі (ЛЕП). К. з., побудовані на цих лі-

ніях, використовують в енергосистемах для диспетчерського телефонного зв'язку, телеметрії, телекерування й релейного захисту.

Для створення К. з. широко використовують радіо- й радіорелейні лінії. В радіорелейних лініях зв'язок здійснюється на надвисоких частотах у діапазоні дециметрових і сантиметрових хвиль, де є змога виділити широкі смуги частот і розмістити багато каналів. У багатоствольній системі радіорелейного зв'язку, яка містить до 8 стволів, на кожному з них створюють 2220 телефонних каналів чи 700 телефонних і один телевізійний канал. Можна домогтися значного збільшення кількості К. з., якщо працювати в більш високочастотному діапазоні. Тому для створення К. з. починають використовувати хвилеводні лінії, по яких можна передавати частоти до $2 \cdot 10^{11}$ *гц*. Дуже широкі можливості відкриваються при використанні для побудови систем зв'язку оптичного й ультрафіолетового діапазонів хвиль.

2) В теорії *інформації передавання* К. з. наз. матем. описи розглянутих вище реальних (фізичних) К. з. Одно з загальноприйнятих визначень К. з. з дискретним часом грунтується на таких положеннях.

а) Задають монотонно зростаючу послідовність дійсних чисел $t_1, t_2, \ldots$, які наз. моментами передавання, тобто припускають, що сигнал передається по К. з. в окремі наперед задані моменти часу $t_1, t_2, \ldots$. При цьому вважають, що сигналові, який надійшов на вхід каналу в момент t_i, відповідає сигнал на виході каналу, одержаний у той самий момент t_i. В реальних (фізичних) К. з. передавання сигналу ніколи не відбувається миттю, а має якусь скінченну тривалість. Тому матем. модель К. з. з дискретним часом найбільше пристосована для описування тих реальних К. з., в яких передавання провадиться в окремі неперетинні проміжки часу.

б) Вважають заданими простори Y і $\tilde{Y}$ значень сигналів на вході й виході каналу відповідно. Щоб матем. модель К. з. була описом для якомога більшої кількості різних фізичних К. з., природно вважати, що простір значень сигналів на вході каналу в кожен момент передавання t_i і простір значень сигналу на виході каналу в той самий момент часу є довільними множинами Y і $\tilde{Y}$. Каналом, де Y і $\tilde{Y}$ не співпадають, є, напр., канал зі стиранням, у якому внаслідок діяння шумів переданий сигнал може бути спотворено так, що його не можна з певністю ототожнити ні з одним із можливих значень сигналу на вході (тобто внаслідок передавання по каналу сигнал «стирається»). Порівняно з простором значень Y сигналу на вході простір значень $\tilde{Y}$ сигналу на виході для каналу зі стиранням містить додаткове значення, яке відповідає «стиранню» сигналу під час передавання. Можливі й такі випадки, коли сигнал на вході набуває скінченної чи лічбової кількості значень, а сигнал на виході може набувати будь-якого дійсного значення (випадок т. з. напівперервних каналів). Так буде, якщо сигнал на вході набуває, напр., усього двоє значень $+1$ і -1, а під час передавання на нього впливає адитивний шум, що в момент t_i є *випадковою величиною* ζ_i, яка набуває будь-яких дійсних значень.

в) У будь-яких фізично реальних К. з. в передаванні з тих чи інших причин трапляються похибки, які призводять до того, що сигнал на виході каналу відрізняється, власне, від сигналу на вході каналу. Математично такі похибки в каналах описують, задаючи системи перехідних імовірностей $Q_n(\tilde{A}/y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де $y_1, \ldots, y_n \in Y$, а A — довільна множина n-вимірних векторів $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$, де $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$, які при будь-яких n є умовними розподілами в просторі n-вимірних векторів $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ — значень сигналів на виході каналу, за умови, що було передано сигнали $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ця система перехідних імовірностей повинна задовольняти двоє природних обмежень. Перше з них наз. вимогою відсутності випереджання. Його наочний смисл полягає в тому, що статистичні властивості значень сигналів на виході, які з'явилися до якогось моменту t, цілком визначаються сигналами на вході до моменту t і не залежать від значень сигналів, що їх передають після моменту t. Друге обмеження полягає у вимозі узгодженості умовних розподілів, а ця узгодженість полягає в тому, що умовний розподіл сигналу на виході в моменти $t_1, t_2, \ldots, t_m$, який обчислено за умовним розподілом імовірностей сигналу на виході в моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $n > m$ і який згідно з вимогою відсутності випереджання, не залежного від $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$, повинен збігатися з заданим умовним розподілом для сигналів у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

г) Реальні сигнали, що їх передають по К. з., завжди підлягають певним обмеженням (напр., обмежено потужність передавача і приймача, напругу електр. мереж тощо). Є різні способи матем. відображення цих обмежень, проте, матем. теорія виявляється істотно простішою, якщо припустити, що обмеження накладають не на простір значень сигналу, а на його статистичні властивості. Найзагальніший спосіб введення таких обмежень задають за допомогою певних множин V_n, $n=1, 2, \ldots$ —«допустимих» розподілів імовірностей на множині відрізків вхідних сигналів завдовжки n, тобто на просторі n-вимірних векторів $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де $y_i \in Y$. Прикладом такого обмеження може бути вимога, щоб розподіли ймовірностей сигналів на вході $\eta_1, \eta_2, \ldots$, які є послідовністю випадкових величин, відповідних моментам передавання $t_1, t_2, \ldots$, задовольняли нерівність $M\eta_i^2 \leqslant p^2$, $i = 1, 2, \ldots$, яку наз. обмеженням на потуж-

ність сигналу на вході в кожен момент часу. Часто використовують ще й нерівність виду $\frac{1}{n} M \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right] \leqslant p^2$, що її наз. обмеженням на середню потужність сигналу.

Наведене вище визначення К. з. з дискретним часом можна узагальнити й на К. з. з неперервним часом, тобто на випадок, коли передавання провадиться в усі моменти часу t. У неперервному К. з. сигнали на вході й виході є випадковими процесами з неперервним часом. Крім того, так само, як і для К. з. з дискретним часом, треба, щоб було задано систему допустимих розподілів на просторі значень сигналу на вході каналу в кожен момент часу t.

До найважливіших класів К. з. належать такі канали (наведені далі визначення для К. з. з дискретним часом здебільшого природно узагальнити й на канали з неперервним часом). Стаціонарний канал без пам'яті зі скінченною кількістю сигналів на вході $y_1, y_2, \ldots, y_k$ й на виході — $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_l$ цілком визначається матрицею перехідних імовірностей

$$Q = \| p_{ij} \|, \; i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

де $p_{ij} = P\{\tilde{\eta}_m = \tilde{y}_j / \eta_m = y_i\}$, $m = 1, 2, \ldots$, — ймовірність того, що сигнал на вході каналу y_i перейде внаслідок передавання по каналу в сигнал $\tilde{y}_j$ на виході каналу. При цьому має місце рівність

$$P\{\tilde{\eta}_1 = \tilde{y}_{i_1}, \ldots, \tilde{\eta}_k = \tilde{y}_{i_k} / \eta_1 = y_{i_1}, \ldots, \eta_k = y_{i_k}\} = P\{\tilde{\eta}_1 = \tilde{y}_{i_1} / \eta_1 = y_{i_1}\} \ldots P\{\tilde{\eta}_k = \tilde{y}_{i_k} / \eta_k = y_{i_k}\},$$

яка означає, що кожен переданий по каналу сигнал спотворюється незалежно від решти передаваних сигналів (тобто в каналу немає пам'яті).

Найчастіше розглядають симетричні канали без пам'яті, для яких кількість символів на виході $l = k$ збігаються з кількістю символів на вході, а матриця $\| p_{ij} \|$ така, що

$$p_{ii} = p, \; i = 1, \ldots, m; \quad p_{ij} = \frac{1-P}{m-1}, \quad i \neq j, \quad 0 < p < 1.$$

Прикладами каналів з неперервним простором сигналів на вході й виході є гауссівські канали, в яких сигнал на вході $\tilde{\eta}_k$ в момент k, $k = 1, 2, \ldots$, дорівнює сумі $\tilde{\eta}_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} \eta_j + \zeta_k$, де η_j — значення сигналів на вході каналу, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots)$ — гауссівська випадкова послідовність, яка не залежить від η_k, $k = 1, 2, \ldots$, а a_{kj} — невипадкові числа. Зокрема, якщо $\tilde{\eta}_k = \eta_k + \zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots$ і компоненти адитивного шуму ζ_k є незалежними, то гауссівський канал з дискретним часом є каналом без пам'яті.

Інтенсивно вивчають К. з. зі *зворотним зв'язком*. Наявність повного зворотного зв'язку означає, що на вході каналу в момент t вважають за відомі не лише значення вхідних сигналів до моменту t, а й значення сигналів на виході для всіх моментів $t' < t$. Канали зі зворотним зв'язком можна інтерпретувати як канали, в яких поряд з передаванням (з похибками) в прямому напрямі може бути й передавання (безпохибкове) у зворотному напрямі. Наявність зворотного зв'язку здебільшого дає змогу поліпшити осн. характеристики передавання в прямому напрямі.

З інших узагальнень К. з. слід відзначити К. з. із похибками синхронізації. В таких К. з. може відбуватися вставляння й випадання символів, так що внаслідок передавання кожному символові на вході каналу відповідає група символів на виході каналу випадкової (можливо, й нульової) довжини; при цьому на виході каналу неможливо встановити, якому вхідному символу відповідає цей вихідний символ. Як останній приклад узагальнень наведеного вище визначення К. з. слід відзначити двобічні К. з., в яких є два зустрічні потоки інформації, причому *джерело повідомлень* одного потоку суміщене з одержувачем повідомлень другого потоку. Математично двосторонній К. з. без пам'яті можна описати сукупністю перехідних імовірностей $P\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 / y_1, y_2\}$, де y_1 і $\tilde{y}_1$ — відповідно вхідні й вихідні сигнали на першому, а y_2 і $\tilde{y}_2$ — на другому кінці каналу, ймовірностей, які задають імовірності появи вихідних сигналів $\tilde{y}_1$ і $\tilde{y}_2$ на відповідних кінцях каналу за умови, що вхідними сигналами на відповідних кінцях каналу були y_1 і y_2.

Літ.: Харкевич А. А. Очерки общей теории связи. М., 1955 [бібліогр. с. 265—266]; Босый Н. Д. Каналы связи. К., 1963 [бібліогр. с. 387—388].

А. М. Лучук, Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНА́ЛІВ ЗВ'ЯЗКУ́ ПРОПУСКНА́ ЗДА́ТНІСТЬ — теоретико-інформаційна міра можливості передавання інформації по каналу зв'язку. Пропускна здатність *каналу зв'язку* збігається з максимально можливою *передавання інформації швидкістю* по такому каналу, при якій ще можна домогтися як завгодно високої надійності передавання. Заг. вираз для К. з. п. з. визначають за співвідношенням

$$C = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} C_t, \tag{1}$$

де C_t — пропускна здатність часового відрізка $[0, t)$ каналу, яку задано виразом

$$C_t = \sup I(\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t), \tag{2}$$

де η_0^t, $\tilde{\eta}_0^t$ — відрізки $[0, t)$ сигналів на вході й виході відповідно, $I(\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t)$ — *інформації кількість* відносно η_0^t, що міститься в $\tilde{\eta}_0^t$, а

верхню грань беруть за всіма можливими допустимими розподілами відрізка сигналу η_0^t на вході каналу за умови, що умовний розподіл сигналу на виході $\tilde{\eta}_0^t$ (при фіксованому сигналі на вході η_0^t каналу) збігається з умовним розподілом, який задають перехідною ф-цією каналу. Отже, пропускна здатність C_t відрізка $[0, t)$ каналу характеризує максимальну кількість інформації, яку можна одержати при передаванні по відрізку $[0, t)$ каналу, обравши оптимально розподіл сигналу на вході каналу. *Розподіл імовірностей*, на якому досягається верхня грань у виразі (2), наз. оптимальним розподілом на вході відрізка $[0, t)$ каналу. Оптим. або близький до оптим. розподіл дає змогу найповніше використати можливості каналу зв'язку (відрізка каналу).

Іноді вводять інше визначення К. з. п. з. $\overline{C}$. Якщо η та $\tilde{\eta}$ — сигнали на вході й виході каналу відповідно, і $\overline{I}(\eta, \tilde{\eta})$ — швидкість передавання інформації, то $\overline{C} = \sup \overline{I}(\eta, \tilde{\eta})$, де верхню грань беруть за всіма можливими допустимими розподілами сигналу η на вході каналу, при умові, що умовний розподіл сигналу на виході при фіксованому сигналі на вході каналу збігається з умовним розподілом, заданим перехідною ф-цією каналу. Якщо обидві величини C та $\overline{C}$ існують, то завжди $\overline{C} \leqslant C$ і, більше того, в багатьох випадках $C = \overline{C}$ (напр., для випадку стаціонарних каналів зі скінченною пам'яттю).

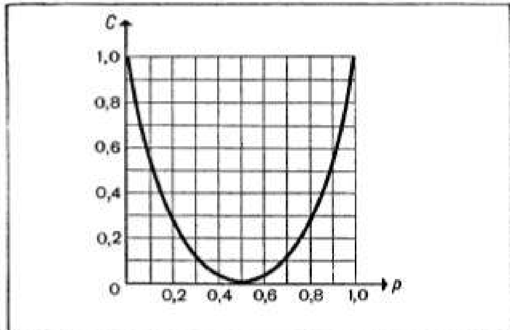
Явне обчислювання К. з. п. з. C (або $\overline{C}$) виявляється можливим лише в деяких окремих випадках для найпростіших (з матем. точки зору) каналів зв'язку. Напр., для дискретного стаціонарного каналу без пам'яті зі скінченною кількістю сигналів на вході й виході, який задають матрицею перехідних імовірностей каналу $Q = \|p_{ij}\|$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$, пропускна здатність $C = 0$ тоді й лише тоді, коли всі рядки матриці Q збігаються, тобто для каналу з незалежним виходом, у якому умовний розподіл імовірностей сигналів на виході не залежить від сигналу на вході каналу. При $l = k$ C набуває макс. значення $\log k$ у випадку каналу без шумів, тобто у випадку, коли кожний рядок і кожна колонка матриці Q містить рівно одну одиницю, а решта нулі. Для симетричного каналу, який задають матрицею

$$Q = \|p_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \quad p_{ii} = p,$$

$$p_{ij} = \frac{1-p}{k-1}, \quad i \neq j, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \qquad (3)$$

$$C = \log k + p \log p + (1-p) \log \frac{(1-p)}{k-1},$$

при цьому оптим. розподілом сигналу на вході є рівномірний розподіл. На мал. наведено графік пропускної здатності каналу, який задають виразом (3) як функцію p при фіксованому k. C перетворюється на нуль при $p = \frac{1}{k}$ (бо при цьому значенні p канал виявляється з незалежним виходом). При $p = 1$ канал є каналом без шумів і C набуває макс. значення $\log k$. Цікавою і на перший погляд парадоксальною особливістю графіка є те, що при малих імовірностях правильного передавання p (менших за критичне значення $p = 1/k$) пропускна здатність зростає. Можливість передавання при таких p пов'язана з тим, що, одержавши сигнал на виході, з більшою певністю можна вважати, що його одержано з сигналу на вході, який відрізняється від нього.



Графік пропускної здатності C двійкового симетричного каналу залежно від імовірності помилки p в каналі.

Для двійкового каналу зі стиранням, який задають матрицею

$$Q = \begin{Vmatrix} p & q & h \\ q & p & h \end{Vmatrix}, \quad p + q + h = 1,$$

К. з. п. з. $C = (1-h) + p \log \frac{p}{1-h} + q \log \frac{q}{1-h}$. Якщо похибок ($q = 0$) немає, а є тільки стирання, $C = 1 - h$. Для каналів з неперервним простором сигналів на вході й виході явне обчислення пропускної здатності виявляється можливим для гауссівських каналів. Напр., для гауссівського каналу з дискретним часом і незалежним адитивним шумом, його задають рівністю $\tilde{\eta}_k = \eta_k + \zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, де ζ_k — послідовність незалежних гауссівських випадкових величин, така, що $M\zeta_k = 0$, $M\zeta_k^2 = N$, а на розподіл стаціонарного вхідного сигналу $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ накладено умову, яка полягає в тому, що середня потужність не перевищує P, пропускна здатність $C = \frac{1}{2} \log (1 + P/N)$. Цю формулу узагальнено й на випадок гауссівського каналу без пам'яті з неперервним часом. Вперше формули для гауссівських каналів дав амер. математик К.-Е. Шеннон (н. 1916).

Оскільки одержати явні формули для пропускної здатності каналів досить важко, значний інтерес становить одержання різного роду асимптотичних ф-л. Напр., для каналу без пам'яті, сигнали на вході й виході якого набувають значень у n-вимірному евклідовому просторі R^n, який задають щільністю умовного розподілу $p(y, \tilde{y})$ сигналу $\tilde{\eta} = \tilde{y}$ на виході при фіксованому сигналі на вході $\eta = y$ і обмеженні на середню потужність сигналу на вході $M|\eta|^2 \leqslant \varepsilon$ (де $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $|\eta| = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2$), пропускна здатність при $\varepsilon \to 0$ (випадок малого сигналу на вході) має вигляд:

$$C = \left(\sup_x \frac{\varphi(x)}{|x|^2}\right) \varepsilon + o(\varepsilon),$$

де $\varphi(x) = \int_{R^n} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(0, y)} dy$, а $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Літ. див. до ст. *Інформації передавання.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАРДИНА́ЛЬНІ ЧИ́СЛА — характеристики, що їх приписують класам еквівалентних множин. Важливою задачею *множин теорії* є заг. визначення «числа елементів» множини. Для скінченних множин задачу розв'язують порівнюванням з відрізками $\{1, 2, \ldots, n\}$ натурального ряду: якщо множина A є рівнопотужною такому відрізкові, тобто її можна бієктивно відобразити на нього, то за число її елементів приймають n (запис: Card $A = n$). Для лічбових множин, які всі є рівнопотужними множині натуральних чисел Z_+ (і одна одній), «число елементів» виражається символом $\aleph_0$ («алеф-нуль»); лічбовість множини A передається записом Card $A = \aleph_0$. Існування нелічбових множин довів нім. математик Г. Кантор (1845—1918) за допомогою діагонального процесу, що набув згодом фундаментального значення в аналізі та логіці. Розглянемо дійсні числа x, $0 \leqslant x < 1$ і доведемо, що множина $[0, 1)$ таких чисел нелічбова. Для цього зобразимо числа x нескінченними десятковими дробами виду $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, при цьому додатні числа з скінченними розкладами запишемо з нескінченним рядом дев'яток (напр., 0,25 = 0,24999...). Припустимо (всупереч тому, що доводиться), що множина $[0, 1)$ є лічбовою; тоді всі числа x можна пронумерувати числами 1, 2, ... Запишемо відповідні десяткові розклади за порядком цих номерів:

$$\begin{array}{l} 0,\ a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\ 0,\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots \end{array} \qquad (*)$$

(тут перший індекс — номер числа, другий — номер десяткового знака). «Зіпсуємо» діагональні знаки, взявши $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, ..., $b_n \neq a_{nn}$, ..., при цьому так, щоб ніяке b_i не дорівнювало 0 чи 9. Тоді число $x_0 = 0, b_1 \ldots b_n \ldots$ не може міститися в наведеній таблиці (*); справді, коли б воно займало в (*) n-й рядок, то було б $b_n = a_{nn}$. Але тоді x_0 не ввійшло б до нумерації чисел x, всупереч припущенню; одержана суперечність доводить нелічбовість множини $[0, 1)$. (Аналогічні міркування лежать в основі доведень алгоритм. нерозв'язності). Всі непусті відрізки дійсної осі R і сама ця вісь є рівнопотужними відрізкові $[0, 1)$. Йому ж рівнопотужні евклідові простори R^m будь-якої розмірності. Про всі ці множини кажуть, що вони мають потужність континууму (continuum — «неперервне» — вживають його як синонім R).

Другий спосіб одержання множин, рівнопотужних $[0, 1)$, також дуже важливий для математики. Розкладаючи числа $x \in [0, 1)$ на нескінченні двійкові дроби $0, \delta_1 \ldots \delta_n \ldots$ ($\delta_k = 0$ або 1, $k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$), тобто в ряди виду $\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{4} + \cdots + \frac{\delta_n}{2^n} + \ldots$, встановлюють бієктивну відповідність між відрізком $[0, 1)$ та множиною двійкових дробів, тобто множиною послідовностей $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots\}$. Кожній такій послідовності відповідає підмножина Z_+, яка складається з тих чисел k, що для них $\delta_k = 1$. Отже, $[0, 1)$ є рівнопотужною множині всіх підмножин натурального ряду Z_+; звідси для множин потужності континууму буде запис:

$$\text{Card}\, A = 2^{\aleph_0}.$$

У заг. випадку, нехай $A \sim B$ означає рівнопотужність A, B. Тоді $A \sim A$, з $A \sim B$ випливає $B \sim A$ і з $A \sim B$, $B \sim C$ випливає $A \sim C$. Отже, рівнопотужність є *еквівалентності відношення* між множинами. Клас еквівалентності множин наз. потужністю, або К. ч. кожної з множин класу; так, $\aleph_0$ є потужність будь-якої лічбової множини, $2^{\aleph_0}$ — потужність будь-якої множини, рівнопотужної $[0, 1)$. Заг. запис Card $A = \mathfrak{A}$ означає, що потужність множини A є клас еквівалентності множин, позначений символом $\mathfrak{A}$. Природно ввести між потужностями відношення порядку; якщо Card $A = \mathfrak{A}$, Card $B = \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ означає, що A рівнопотужне якійсь частині B, але B не рівнопотужне ніякій частині A (зокрема, самому A). Має місце теорема, за якою для будь-яких множин A, B або A рівнопотужне частині B, або B — частині A; коли справджується і те, й друге, то A і B рівнопотужні. Тим самим для будь-яких двох потужностей $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ є три можливості $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ (= означає збіг), які взаємно виключають одна одну. У цьому розумінні К. ч. схожі на звичайні числа. Для К. ч. можна ввести операції додавання та множення, але арифметика, яка при цьому виникає, зовсім не схожа на звичайну. До-

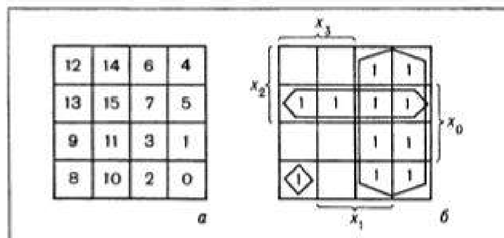
ведено, що потужність множини всіх підмножин будь-якої множини A більша, ніж A, звідси випливає, що множина К. ч. не обмежена.

Найважливішою нерозв'язаною задачею теорії множин від самого початку була проблема континууму: чи існує потужність, проміжна між лічбовою і потужністю континууму? «Гіпотеза континууму» полягала в тому, що такої потужності немає, що множина, яка є рівнопотужною частині відрізка [0, 1], або рівнопотужна всьому відрізку, або скінченна чи лічбова. Щоб усунути парадокси, які виникають у «наївній» теорії множин, побудовано аксіоматику теорії множин. Австр. математик К. Гедель показав 1938, що гіпотеза континууму сумісна з аксіомами теорії множин, тобто що її не можна спростувати жодним міркуванням, яке виходить з цих аксіом. Нарешті, 1963 амер. математик П. Коен повністю розв'язав проблему континууму, показавши, що гіпотезу континууму не можна довести жодним міркуванням, яке виходить з аксіом теорії множин. Отже прийняття чи відхилення гіпотези континууму є однаково законним; це веде до двох рівноправних «математик». Цей результат є одним з найглибших в основах математики.

Літ.: Натансон І. П. Основи теорії функцій дійсної змінної. К., 1950; Александров П. С. Введение в теорию множеств и теорию функций, ч. 1. М.— Л., 1948; Хаусдорф Ф. Теория множеств. Пер. с нем. М.— Л., 1937 [бібліогр. с. 291—295]; Бурбаки Н. Начала математики, ч. 1. Основные структуры анализа, кн. 2. Теория множеств. Пер. с франц. М., 1965; Fraenkel A. A., Bar-Hillel I. Founclations of set theory. Amsterdam, 1958; Келли Дж. Л. Общая топология. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 361—376]; Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. New York-Amsterdam, 1966.

О. В. Гладкий.

КАРНА́У КА́РТА, Вейча діаграма — прямокутна таблиця певного спеціального вигляду, яку використовують для задавання *булевих функцій*. Застосовують для спрощення пошуку тупикових і мінімальних *диз'юнктивних нормальних форм* (ДНФ) представлення їх. Будуючи К. к. для задавання ф-ції, яка залежить від n змінних, використовують таблицю з 2^n клітин. Кожній клітинці надається номер, що визначається числом, запис якого в двійковій системі числення збігається з певним набором значень змінних. При задаванні ф-ції за допомогою такої таблиці в кожній клітинці записують значення цієї ф-ції (0 або 1) на відповідному наборі значень змінних. При задаванні частково визначених ф-цій у клітинці, відповідній наборові значень змінних, на якому ф-цію не визначено, ставлять мітку. Застосування К. к. для спрощення пошуку тупикових і мінімальних ДНФ засновано на встановленні при нумерації клітин такої відповідності між набором змінних і клітинками таблиці, за якої елементарним добуткам різної довжини відповідають цілком визначені, зручні для запам'ятовування й розпізнавання конфігурації з одиниць таблиці, напр., конфігурації у формі прямокутника чи квадрата з розміщених поряд одиниць. Знаходження тупикових і мінімальних ДНФ заданої булевої ф-ції за такої нумерації зводиться до відшукання найекономніших покрить конфігурації одиниць, яка відповідає цій ф-ції, вказаними конфігураціями одиниць елементарних добутків. За певних обмежень на число змінних цей пошук характеризується наочністю, відносною простотою знаходження склеюваних членів і виконання власне операцій склеювання, а також наочністю й простотою довизначення частково визначених ф-цій для найекономнішого покриття їх. Одержання зручних для запам'ятовування й розпізнавання конфігурацій одиниць (прямокутників чи квадратів), що відповідають елементарним добуткам, і виконання всіх можливих склеювань і поглинань, а також одержання зведеної системи імплікант у випадку $n \leqslant 4$ забезпечується, якщо при нумерації клітинок номерами наборів (конституент одиниці) номери всіх конституент, сусідніх даній (тобто таких, що відрізняються значенням лише однієї змінної), виявляються геометрично сусідніми. При $n \geqslant 5$ виконати цю вимогу недосить, і номери сусідніх конституент можуть розміщуватися й у клітинках, місце яких у таблиці визначається додатковими ознаками. Ці ознаки можна одержати, наприклад, виходячи з К. к. при $n = 4$. Один з можливих способів нумерації клітинок К. к. при $n = 4$ показано на мал. *а*. В деяких випадках поряд з розглянутим способом використовують буквений (мал. *б*), який дає змогу виділяти області К. к., в яких значення будь-якої змінної лишається постійним. Буквена нумерація виявляється зручною, наприклад, коли булеву ф-цію задають за допомогою К. к., якщо цю ф-цію зображено досконалою ДНФ і конституенти записано у вигляді добутку змінних, а також при переході від покриття конфігураціями одиниць, що відповідають елементарним добуткам, до аналітичного представлення при записі цих добутків у вигляді добутку змінних. Як приклад на мал. *б* показано задавання за допомогою К. к. ф-ції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, що набуває одиничних значень на наборах з номерами 0—7, 8, 13, 15. На цьому ж малюнку показано найекономніше покриття конфігурації одиниць, яка відповідає цій функції, правильними прямокутниками, що складаються з клітинок (0—7), (5, 7, 13, 15) і (8).



Способи нумерації клітинок: *а* — нумерація клітинок при $n=4$; *б* — буквена нумерація клітинок.

Перехід від покрить певної булевої ф-ції, заданої за допомогою К. к., до її аналітичного представлення у вигляді ДНФ пов'язаний з відшукуванням аналітичних представлень елементарних добутків, що відповідають усім конфігураціям одиниць покриття і є диз'юнктивними членами цієї ДНФ. Такий елементарний добуток складається з тих і лише тих співмножників (x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$, ..., x_n, $\bar{x}_n$), які перетворюються в одиницю на всіх наборах, охоплюваних відповідним покриттям. Наприклад, показаному на мал. 6 покриттю відповідає ДНФ $\bar{x}_3 \vee x_0x_2 \vee \bar{x}_0 \times \times \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$, яка в даному разі є мінімальною.

Найефективніше застосування К. к.— при $n \leqslant 4$. При $n = 5$, 6 необхідний певний навик у роботі з картами. При $n > 6$ складність К. к. збільшується настільки, що практично повністю втрачається наочність геом. зображень, а разом з нею й осн. переваги застосування К. к.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Еремеев И. С., Подлипенский В. С. Магнитная техника автоматики и кибернетики. К., 1970 [бібліогр. с. 399—404]; Veitch E. W. A cart method for simplifying truth functions. «Proceedings of the Association for Computing Machinery», 1952, May, № 2—3; Karnaugh M. The map method for synthesis of combinational logic circuits. «Transactions of the American institute of electrical engineers», 1953, v. 72, № 1. *Ю. Л. Іваськів.*

КА́РТА МАГНІ́ТНА — прямокутний відрізок (лист) гнучкої плівки, покритий феромагнітним шаром і призначений для магнітного записування інформації. К. м. як *носій запису інформації* має ряд істотних переваг: зручна для формування масивів інформації та для передавання й зберігання даних поза цифровою обчислювальною машиною (ЦОМ). К. м. можна попередньо відбраковувати, а в процесі експлуатації окремі карти можна замінювати.

На базі К. м. будують *нагромаджувачі* з послідовним і довільним вибиранням карти з оперативного комплекту карт. У першому випадку, щоб знайти потрібну карту, послідовно перебирають оперативний комплект карт аж до моменту надходження до блока магнітних головок (МГ) заданої карти. У другому випадку будь-яка задана карта за невеликий проміжок часу вибирається і подається до блока МГ. Прикладом нагромаджувача з послідовним вибиранням може бути система «Magnacart». Вона складається з чотирьох поруч розміщених вакуумних барабанів, за допомогою яких карти можна передавати з одного пенала до іншого або переміщувати відносно МГ для записування і зчитування. Оперативний комплект карт (3000 шт.) зберігається в пеналі, 50 таких пеналів міститься в магазині нагромаджувача. Вибраний пенал автоматично підводиться до вакуумних барабанів. Крім обміну інформацією з ЦОМ, система «Magnacart» може сортувати й підбирати карти. Ємність системи — до $2{,}5 \cdot 10^9$ двійкових знаків. Застосовують К. м. на майларовій основі з майларовим захисним покриттям феромагнітного шару. Ємність карти — $4{,}5 \cdot 10^3$ двійкових знаків.

Нагромаджувач з довільним вибиранням типу «CRAM» має магазин з 8 кодовими і 2 фіксуючими поворотними стрижнями, на яких висять 256 майларових К. м. (оперативний комплект). Кожна К. м. має свою індивідуальну комбінацію з 8 кодових вирізів. Будь-яку з 256 К. м. можна вибрати, відповідно комбінуючи поворот стрижнів, і подати на вакуумний барабан, що переміщує її поблизу МГ. Після записування — зчитування карта автоматично вертається на стрижні. Ємність К. м.— $1{,}3 \cdot 10^5$ двійкових знаків, час вибирання — 0,25 *сек.* В нагромаджувачах великої й надвеликої ємності, побудованих за багатоадресним принципом, є по кілька (по 8 і більше) оперативних комплектів карт, причому спочатку вибирається комплект, а потім — потрібна карта. Найбільше поширені багатомагазинні нагромаджувачі, де кожен комплект карт зберігається в окремому магазині, в якому є система вибирання. К. м. найпридатніша для побудови різних перспективних пристроїв, напр., з довільним вибиранням карти, з циклічним переміщуванням або кроковим рухом карти. *Р. Я. Черняк.*

КАСКА́ДІВ МЕ́ТОД — один із методів синтезу *комбінаційних схем.* К. м. було розроблено для синтезу релейно-контактних схем, пізніше цей метод широко застосовують при синтезі комбінаційних схем, побудованих з логічних елементів. К. м. найчастіше використовують для синтезу схеми, яка реалізує одночасно *m булевих функцій* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, кожна з яких є ф-цією n аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Цей метод грунтується на використанні співвідношення *булевої алгебри,* вірного для довільної булевої ф-ції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee$$

$$\vee \bar{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Наведене співвідношення містить у правій частині ф-ції, які залежать від $n - 1$ аргумента, і його легко синтезувати, використовуючи двовходові елементи «І» і «АБО», що реалізують ф-ції виду $x_n\varphi_1 \vee \bar{x}_n\varphi_2$, якщо за вхідні значення дозволяється брати значення аргумента x_n і значення ф-ції $\varphi_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ і $\varphi_2 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Побудована у такий спосіб схема для кожної з ф-цій f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) утворює останній каскад шуканої комбінаційної схеми. Передостанній каскад одержують аналогічно, але вже стосовно до ф-ції вигляду

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \text{ і } f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Застосувавши вказаний прийом послідовно $n - 2$ рази, первісну задачу синтезу зводять до задачі синтезу схеми, що реалізує деякі булеві ф-ції від двох змінних, а цю задачу розв'язують тривіально. Т. ч., застосовуючи К. м., одержують шукану схему (на її вихо-

дах реалізуються ф-ції $f_1, ..., f_m$, залежні від n змінних) у вигляді сполучення послідовно ввімкнених $n - 1$ каскадів.

Літ.: Поваров Г. Н. Математическая теория синтеза контактных (1, k)-полюсников. «Доклады АН СССР», 1955, т. 100, № 5; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]. *В. М. Коваль.*

КАТА́ЛОГ (від грец. κατάλογος — список) — згрупований певним чином масив вторинних документів. Найпоширеніші в процесі науково-інформаційної діяльності — бібліотечні К., що являють складову частину *довідково-інформаційного фонду*.

КВАДРАТУ́РНІ ФО́РМУЛИ — формули чисельного інтегрування. Див. *Інтегралів способи обчислювання*.

КВАЗІАНА́ЛОГОВА МОДЕ́ЛЬ — обчислювальний пристрій, який грунтується на принципі еквівалентності рівнянь об'єкта та моделі щодо одержуваних результатів. К. м. якихось рівнянь A — це *аналогова модель* інших рівнянь B, які хоча б частково не подібні до рівнянь A і такі, щоб при виконанні певних умов (умов еквівалентності) — всі або деякі з розв'язків рівнянь B збіглися з точністю до постійних множників з розв'язками початкових рівнянь A.

Реалізація умов еквівалентності К. м., як правило, пов'язана з формуванням т. з. вектора зрівноважувальних величин, одержуваних у моделі (див. *Зрівноважування методи*). Є К. м., умови еквівалентності яких можуть бути такі, що для реалізації їх не треба використовувати величини, одержувані у моделі. Такі К. м. наз. незрівноважуваними, або К. м. 1-го роду. За своїми властивостями вони практично не відрізняються від суто аналогових моделей. К. м. 1-го роду належать до категорії пристроїв без *зворотних зв'язків*. Вимірність вектора зрівноважувальних величин заздалегідь не обмежують, і вона залежить від виду модельованого об'єкта. Цей вектор наперед невідомий, тому для його визначення організується процес зрівноважування моделі. К. м., побудовані в такий спосіб, наз. зрівноважуваними, або К. м. 2-го роду. Зрівноважувані К. м. складаються з двох осн. частин: власне моделі, або квазіаналога, та з пристрою, призначеного для зрівноважування або керування. Моделі 2-го роду відносять до категорії систем зі зворотними зв'язками, бо в них є пристрої керування.

К. м. грунтується на принципі *квазіаналогового моделювання*, що є розвитком аналогового методу. Порівняно з аналоговими пристроями К. м. мають більші обчисл. можливості і за допомогою їх можна розв'язувати ширші класи рівнянь. *М. М. Кулик.*

Літ.: Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [бібліогр. с. 560—564].

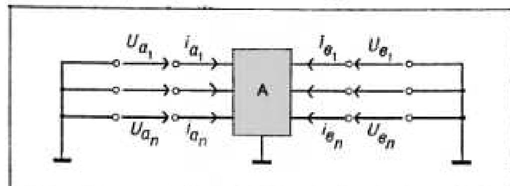
КВАЗІАНА́ЛОГОВЕ МОДЕЛЮВА́ННЯ — дослідження фізичного процесу шляхом вивчення явища іншої фізичної природи, яке описується математичними співвідношеннями, еквівалентними щодо одержуваних результатів, і допускає вимірювання значень невідомих величин. Стан об'єкта моделювання звичайно характеризується групою невідомих величин $X_1(t), ..., X_n(t)$, а стан моделі, що перебуває у квазіаналоговій відповідності з об'єктом,— групою величин $b_1X_1(t), ...$ $..., b_nX_n(t), Z_{n+1}(t), ..., Z_{n+m}(t)$, де $b_1, ...$ $..., b_n$ — якісь сталі.

Рівняння об'єкта моделювання можна записати у вигляді

$$A(X, F) = 0,$$

де A — оператор, який визначає зв'язки між невідомими X і заданими величинами F. Будь-яка *квазіаналогова модель* є *аналогом* не початкової системи рівнянь, а якихось інших рівнянь. Щоб рівняння об'єкта і квазіаналогової моделі стали еквівалентними, треба виконати кілька умов, які наз. умовами еквівалентності. Ці умови можуть бути такі, що для реалізації їх у моделі не потрібно використовувати одержані в ній величини. Такі моделі за своїми властивостями практично не відрізняються від моделей прямої аналогії, і їх наз. квазіаналоговими моделями 1-го роду, або некерованими (незрівноважуваними). А в заг. випадку умови еквівалентності такі, що для реалізації їх треба використовувати одержані в моделі величини. Оскільки вони наперед невідомі, для реалізації умов еквівалентності треба організувати певний процес керування (зрівноважування). Моделі в цьому випадку наз. квазіаналоговими моделями 2-го роду, або зрівноважуваними. Незрівноважувані моделі належать до категорії пристроїв без зворотних зв'язків (див. *Зрівноважування методи*).

Заг. підхід до одержання рівнянь незрівноважуваних квазіаналогових моделей полягає в заміні початкових рівнянь еквівалентними їм розширеними рівняннями, які містять, крім X та F, і допоміжні невідомі y, і додаткові величини G, що не залежать від X. При цьому матем. зв'язки між X, y, F, G вибирають так, щоб виконувались і умови фіз. реалізовності за допомогою вибраних елементів і умови простоти обчислювання вектора G за даними, що є у початкових рівняннях.

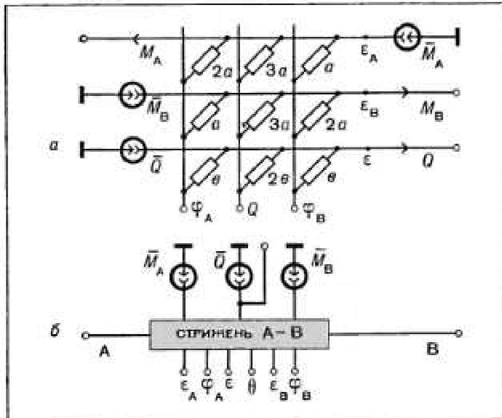


1. Схема квазіаналога, побудованого на основі електричних кіл постійного струму.

Властивості зрівноважуваних моделей визначаються структурою еквівалентних рівнянь. Заг. підхід до одержання цих рівнянь (як і для незрівноважуваних квазіаналогових моделей) полягає в тому, що початкові рівняння треба замінити розширеними так, щоб виконувались умови еквівалентності.

Це здійснюється за допомогою вектора зрівноважувальних величин і вектора додаткових, незалежно визначуваних величин.

Основою тех. засобів К. м. є електр. кола, в яких розподіл струмів і напруг перебуває в певній відповідності з матем. залежностями, які описують стаціонарний або нестаціонарний процес, що відбувається в досліджуваному об'єкті (див. *Електричних кіл теорія*). Різні методи синтезу квазіаналогових моделюючих електр. кіл грунтуються на використанні принципу утворення *потенціально-нульових*



2. Схема квазіаналога стрижня, який згинають: *а* — для коефіцієнта *a*, *б* — для коефіцієнта *b*.

точок, принципу утворення вузлів з нульовими власними провідностями і на комбінованому використанні цих процесів (див. *Нульових власних провідностей вузлів метод* і *Потенціально-нульових точок метод*). Так, напр., рівняння квазіаналога, побудованого на основі електр. кіл постійного струму (мал. 1), мають вигляд

$$i_a = g_{aa}u_a - g_{ab}u_b + \bar{i}_a,$$

$$i_b = -g_{ba}u_a + g_{bb} + \bar{i}_b.$$

Тут g_{aa} і g_{bb} — матриці власних провідностей вузлів $a_1, \ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_n$; g_{ab} і g_{ba} — матриці взаємних провідностей між вузлами $a_1, \ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_n$; i_a і i_b — вектори струмів полюсів; $\bar{i}_a$ і $\bar{i}_b$ — значення i_a і i_b при короткому замиканні полюсів $a_1, \ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_n$ на один спільний полюс (землю). Квадратні матриці g_{aa} і g_{bb} — діагональні, з додатними коефіцієнтами, не меншими за суму модулів коеф. відповідних рядків матриць g_{ab} і g_{ba}. Квадратні матриці g_{ab} і g_{ba} мають невід'ємні компоненти, а в усьому іншому вони можуть мати довільний вигляд. Із структури й характеру рівнянь розглядуваного багатополюсника випливає, що його можна застосовувати для моделювання алгебр. об'єктів. Але, щоб одержати моделі таких об'єктів у заг. випадку, треба мати способи, які дали б змогу усувати з рівнянь багатополюсника члени вигляду $g_{aa}u_a$ і $g_{bb}u_b$, бо матриці g_{aa} і g_{bb} не можуть бути довільними. Таких способів тільки два. Перший з них полягає в тому, що для однієї з груп полюсів $a_1, \ldots, a_n$ чи $b_1, \ldots, b_n$ домагаються виконання умов $u_a = 0$, $i_a = 0$ чи $u_b = 0$, $i_b = 0$. Залишивши, напр., полюси $b_1, \ldots, b_n$ на холостому ходу і виконавши умови $i_b = 0$, одержимо рівняння

$$i_a = g_{aa}u_a - g_{ab}u_b + \bar{i}_a,$$

$$0 = -g_{ba}u_a + g_{bb}u_b + \bar{i}_b.$$

Якщо струм i_a чи напругу u_a регулювати так, щоб напруга $u_b = 0$, то одержимо рівняння $g_{ba}u_a = \bar{i}_b$, за допомогою якого можна моделювати алгебр. об'єкти довільного вигляду, оскільки матриця g_{ba} може бути довільною. Принцип утворення потенціально-нульових вузлів у моделюючих колах застосовують для моделювання не тільки алгебричних, а й диференціальних та ін. об'єктів.

За другого способу члени вигляду $g_{aa}u_a$ і $g_{bb}u_b$ можна усувати з рівнянь кола, регулюючи струми i_a і i_b так, щоб виконувалися співвідношення

$$i_a = g_{aa}u_a,$$

$$i_b = g_{bb}u_b.$$

У цьому випадку також одержимо рівняння

$$g_{ab}u_b = \bar{i}_a,$$

$$g_{ba}u_b = \bar{i}_b,$$

які дають змогу моделювати алгебр. об'єкти довільного вигляду. Аналогічний результат можна одержати при нульових значеннях усіх компонент матриць g_{aa} і g_{bb}. У ланцюгах синусоїдального змінного струму, що складаються тільки з ємностей та індуктивностей, цього можна домогтися й не регулюючи струмів i_a і i_b, бо в таких колах опори ємностей та індуктивностей мають протилежні знаки і, отже, можуть бути скомпенсовані в кожному вузлі.

Розглянемо один із способів побудови квазіаналогів об'єктів на прикладі моделювання рамних систем буд. механіки. Для кожного стрижня рами можна записати рівняння:

$$M_A = \frac{2EI}{l}(2\varphi_A + \varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_A,$$

$$M_B = \frac{2EI}{l}(\varphi_A + 2\varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_B,$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{l^2}(\varphi_A + \varphi_B + 2\theta) + \bar{Q}_{AB},$$

де l — довжина стрижня, EI — жорсткість

на згинання; M_i — згинаючі моменти на кінцях; Q_{ij} — поперечні сили з протилежним знаком у будь-якому поперечному перерізі стрижня; φ — кут повороту кінця стрижня; θ — кут переносу з протилежним знаком; $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_{ij}$ — силові фактори для стрижня з затиснутими кінцями.

Для визначення невідомих кутів φ_A, φ_B, θ додатково складають рівняння рівноваги. Ці рівняння є простими сумами згинаючих моментів у вузлах і сумами поперечних сил у різних перерізах рами, через це вони мають вигляд

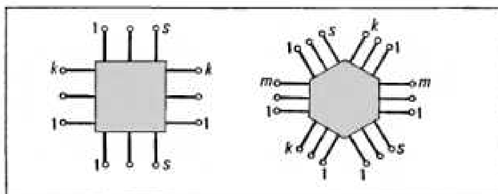
$$By = z,$$

де y — вектор, компоненти якого моделюють кути φ_A, φ_B і θ; B — прямокутна матриця, компоненти якої складаються тільки з одиниць і нулів, z — вектор вільних членів. Схему квазіаналога стрижня, який згинають, наведено на мал. 2. Провідності резисторів моделюють коефіцієнтами $a = \frac{2EI}{l}$, $b = \frac{6EI}{l^2}$. Якщо напруги ε_A, ε_B, ε дорівнюють «0», то схема моделює рівняння стрижня. Рівняння рівноваги у вузлах рам і поперечних перерізів виконуються автоматично, коли квазіаналоги стрижнів з'єднуються між собою.

Принцип еквівалентності, на якому грунтується К. м., є загальнішим, ніж принцип подібності, на якому грунтується аналогове моделювання. Тому, щоб збільшити можливості більшості сучасних моделюючих пристроїв і розширити клас розв'язуваних задач, їх будують саме за цим принципом. Ці пристрої використовують для моделювання об'єктів, які можна описувати системами алгебр. і дифер. рівнянь з початковими й крайовими умовами, для розв'язування задач оптим. планування, буд. механіки тощо.

Г. П. Галузинський.

КВАЗІАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮЮЧЕ СЕРЕДОВИЩЕ — *квазіаналогова модель*, яка конструктивно є структурою, що складається з однотипних і однотипно з'єднаних між собою осередків, які утворюють геометрично правильну й ізотропну плоску чи просторову гратку, при цьому кожний осередок допускає керування її станом або параметрами. Станом осередків середовища можна керувати за допомогою сигналів з сусідніх осередків, ззовні або комбінованим способом. К. м. с. поділяють на незрівноважувані та зрівноважувані. Незрівноважуване К. м. с. — це обчисл. середовище, де немає *зворотних зв'язків*. Введення до нього відомої інформації дає змогу безпосередньо одержати шукані величини, що складаються з осн. невідомих, які відповідають початковим рівнянням модельованого об'єкта, і допоміжних, які одержують, розв'язуючи за принципом *квазіаналогового моделювання* не задані, а розширені еквівалентні рівняння. У зрівноважуваних К. м. с. допоміжні невідомі використовують для формування т. з. зрівноважувальних величин. Ці величини впливають на режим моделі так, що виконується умова еквівалентності рівнянь об'єкта і рівнянь, які описують стан К. м. с. Процес добирання керуючих величин наз. зрівноважуванням обчисл. середовища. Як правило, зрівноважування провадиться за допомогою зворотних зв'язків. Обчисл. пристрій, побудований на базі зрівноважуваного К. м. с., структурно поділяють на дві осн. частини:



Типи осередків для плоского квазіаналогового моделюючого середовища.

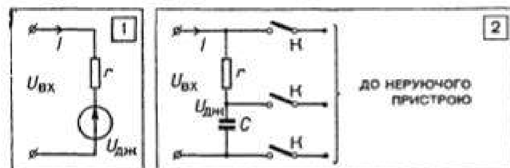
квазіаналог, який є власне моделлю (як квазіаналог використовують зрівноважуване К. м. с.), і пристрій керування для зрівноважування квазіаналога. Пристрій керування квазіаналогом можна виконати у вигляді перетворювача, що є якимось середовищем спрямованої дії, яке пропускає сигнали лише в певних напрямках (див. *Зрівноважування методи*).

К. м. с. бувають дискретні і неперервні. У дискретних К. м. с. можна виділити окремий осередок середовища. В моделях з неперервними середовищами як розв'язувальну частину використовують неперервні структури, що складаються з монолітного матеріалу (напр., електропровідний папір, провідні тканини, провідна пластмаса тощо). Такі структури наз. неперервними моделюючими середовищами (див. *Моделювання на суцільних середовищах*). Неперервні К. м. с., в яких властивості матеріалу в усіх напрямках однакові, наз. однорідними, а неперервні К. м. с., в яких властивості матеріалу в усіх напрямках неоднакові, — неоднорідними.

Вимога однорідності (ізотропності) структури К. м. с. обмежує вибір форми осередків. Форма осередків така, що сукупність щільно укладених осередків утворює плоске чи об'ємне тіло без зазорів між осередками. На кожній стороні (грані) осередка є виводи для з'єднування з іншими комірками. Тому як осередки використовують фігури (тіла) з центр. симетрією і парною кількістю сторін (граней). На симетричних сторонах осередка кількість виводів однакова. Для плоского квазіаналогового середовища можуть бути два типи осередків (мал.), де $1 - k$, $1 - m$, $1 - s$ — полюси, для тривимірного простору — п'ять. К. м. с. бувають одновимірні, двовимірні і тривимірні (залежно від модельованого об'єкта). Аналогове моделююче середовище — різновид К. м. с. Конструктивно воно будується так само, як і К. м. с.,

проте базується на принципі подібності (див. *Подібності теорія*). Моделюючи рівняння Лапласа, як аналогове обчисл. середовище застосовують електропровідний папір, пластини з провідної гуми, провідні тканини, провідні пластмаси, а моделюючи рівняння Фур'є, — електропровідний папір з розподіленою ємністю. *М. М. Кулик.*

КВАЗІРЕЗИСТОР — електричний двополюсник, який містить у собі залежні джерела напруги й струму й має задане значення вхідного опору.



1. Схема квазірезистора.
2. Схема динамічного квазірезистора.

Один з можливих варіантів виконання схеми К. показано на мал. 1. У цій схемі величина напруги джерела $U_{дж}$ пропорційна вхідній напрузі $U_{дж} = \alpha U_{вх}$ і вхідний опір визначається як $R_{вх} = \frac{r}{1-\alpha}$. Т. ч., при незмінному значенні опору r величину опору К. можна регулювати, змінюючи значення коеф. α. Щоб спростити схеми пристроїв, у яких є значна кількість К., останні виконують у вигляді динамічних К. (мал. 2). У динамічному К. залежне джерело $U_{дж}$ замінено конденсатором C (або іншим запам'ятовувальним елементом), що періодично підзаряджається від керуючого пристрою до потрібної напруги. Керуючий пристрій обслуговує систему динамічних К., підмикаючись до них через ключі K на досить малий час. Якщо стала часу розряджання конденсатора C велика порівняно з часом заряджання й часом циклу роботи керуючого пристрою, вхідний опір динамічного К. практично мало відрізнятиметься від потрібного значення.

К. застосовують у схемах аналогових та гібридних обчисл. машин, особливо в сітчастих інтеграторах, для розв'язування задач матем. фізики. Динамічні К. полегшують автомат. введення первісної інформації про параметри моделі. Відсутність у схемі динамічного К. змінних параметрів дає змогу ефективно використовувати їх при побудові дискретних моделюючих середовищ.

В. В. Васильєв.

КВА́ЙНА МЕ́ТОД МІНІМІЗА́ЦІЇ — метод одержання мінімальної *диз'юнктивної нормальної форми* (ДНФ) представлення *булевих функцій* з досконалої ДНФ. Застосування К. м. м. передбачає виконання двох етапів: одержання скороченої ДНФ з досконалої та побудову на основі скороченої *диз'юнктивних нормальних форм тупикових*, з яких вибирають *диз'юнктивні нормальні форми мінімальні*. На першому етапі до досконалої ДНФ застосовують операції неповного склеювання ($xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}$) й елементарного поглинання ($x \vee xy = x$). Можливість одержання скороченої ДНФ у результаті застосування цих операцій визначається теоремою Квайна: якщо в досконалій ДНФ виконати всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то в результаті буде одержано скорочену ДНФ.

За допомогою операції елементарного поглинання на першому етапі вилучають тільки ті члени ДНФ, до яких застосовано всі можливі для них склеювання. Мінімізацію на цьому етапі зручно проводити в такій послідовності. Виходячи з досконалої ДНФ f_0 булевої ф-ції f, залежної від n змінних, будують послідовність ДНФ $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ доти, поки не збіжаться деякі ДНФ f_k і f_{k+1}. При цьому перехід від f_i до f_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, k$) здійснюють за таким правилом. У ДНФ f_i виконують усі операції неповного склеювання, застосовувані до елементарних добутків довжини $(n - i)$. В результаті в представленні ф-ції утворюються добутки довжини $(n - i - 1)$. Оскільки склеювати можна лише добутки з однаковою кількістю букв, з жодним з одержаних добутків добутки довжини $(n - i)$ склеюватися не будуть. Тому після виконання операції склеювання вилучають усі ті елементарні добутки довжини $(n - i)$, які можна вилучити, застосувавши операцію елементарного поглинання. На другому етапі використовують т. з. таблицю простих імплікант, що являє собою прямокутну таблицю з двома входами. Стовпці такої таблиці позначають конституентами одиниці мінімізованої ф-ції, рядки — її різними простими імплікантами. Якщо до певної конституенти входить будь-яка з простих імплікант, то на перетині відповідних стовпця і рядка ставиться позначка.

Побудова тупикових ДНФ за допомогою таблиці простих імплікант пов'язана з побудовою на її основі т. з. скороченої таблиці простих імплікант. Таку таблицю одержують при викреслюванні з таблиці простих імплікант: 1) тих стовпців, імпліканти яких мають лише по одній позначці, 2) тих рядків, імпліканти яких мають позначки у викреслених стовпцях, 3) одного з тих двох стовпців, у яких є позначки в однакових стовпцях і 4) тих рядків, які внаслідок викреслювання у відповідності з 1)—3) не мають жодної позначки. Побудуванню тупикової ДНФ при цьому відповідає вибір такої сукупності простих імплікант, яка включає всі ті імпліканти, що належать рядкам, викресленим відповідно до 2) (т. з. ядро булевої ф-ції), і, крім того, певну систему імплікант із скороченої таблиці, позначки яких принаймні один раз накривають усі її стовпці. На відміну від ядра така система в заг. випадку може вміщувати різні набори простих імплікант. Вибір набору імплікант з мінім. сумарним числом букв за

кількох можливих варіантів відповідає побудові мінімальної ДНФ заданої ф-ції.

К. м. м. звичайно застосовують для мінімізації ф-цій, що залежать від порівняно невеликого числа змінних. При збільшенні числа змінних зручнішими виявляються інші методи мінімізації.

Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469].

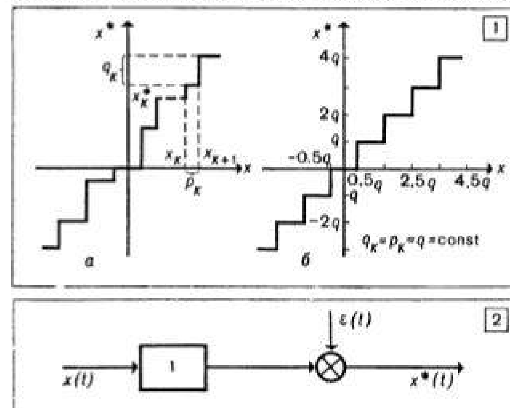
Ю. Л. Іваськів.

КВА́НТОРИ — логічні оператори, які переводять одну висловлювальну форму в іншу. Розрізняють К. загальності та К. існування (див. *Логічні операції*).

КВАНТУВА́ННЯ — операція перетворення сигналу, при якій здійснюється дискретизація його за рівнем чи за часом або водночас і за рівнем і за часом.

К. за часом — перетворення сигналу $x(t)$ на послідовність імпульсів, які йдуть один за одним і амплітуда, тривалість або частота яких залежить від амплітуди вхідного сигналу (див. *Модуляція*). Пристрій, що виконує операцію К. за часом, наз. переривачем, або імпульсним елементом. Вважають, що імпульсний елемент пропускає вхідний сигнал $x(t)$ лише протягом якогось часу τ_i (тривалість замикання) і не пропускає його протягом часу $T_i - \tau_i$ (тривалість переривання). Величину T_i наз. періодом К. (переривання). T_i може бути *випадковою величиною* (К. з випадковим періодом), величиною, функціонально залежною від квантовуваного сигналу $x(t)$ (або сигналу на виході імпульсного елемента $x(iT_i)$), чи сталою $T_i = T = \text{const}$. Звичайно $\tau_i \ll T_i$, тому сигнал $x(iT_i)$ в часі є послідовністю імпульсів, обвідна яких відповідає вхідному сигналові $x(t)$. Операція К. за часом змінює як інтенсивність сигналу (при $T_i = T = \text{const}$, $\tau_i = \tau = \text{const}$ послаблює його в $\frac{\tau}{T}$ раз), так і його частотний спектр. Якщо ω_0 — частота складової неперервного сигналу $x(t)$, то частотний склад квантованого сигналу збагачується на нескінченне число бічних частот $\omega_0 \pm n\frac{2\pi}{T}$, $n = 1, 2 \ldots$. К. за часом змінює інформативність первісного сигналу. Доведено, що втрат інформації немає, коли інтервал К. сигналу $x(t)$, спектр якого обмежений (ω_c — гранична частота спектра), дорівнює $T = \frac{\pi}{\omega_c}$ (теорема Котельникова). В цьому випадку сигналом $x(iT_i)$ можна відтворити первісний $x(t)$, для цього застосовують *фільтри* нижніх частот, які відтинають усі бічні частоти, й підсилювачі.

К. за рівнем — перетворення сигналу $x(t)$, яке полягає в заокруглюванні його миттьового значення до якоїсь найближчої, наперед заданої, фіксованої величини $\overset{*}{x}_k$, яку наз. рівнем К. Це К. є нелінійним перетворенням вхідного сигналу $x(t)$. Пристрій, що здійснює операцію К. за рівнем, наз. квантувачем (квантуючим пристроєм). Віддаль між двома сусідніми рівнями К. наз. кроком К. $q_k = \overset{*}{x}_{k+1} - \overset{*}{x}_k$. Важливою характеристикою квантуючого пристрою є інтервал (поріг) К. — p_k, який дорівнює інтервалові значень $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ вхідних величин $x(t)$, які належать до певного рівня К. Можливі характеристики квантувачів дано на мал. 1. Найпоширенішим є К. з $q_k = q = \text{const}$ і $p_k = p = \text{const}$ (рівномірне К., мал. 1, *б*), бо воно дуже просте.



1. Характеристики квантувачів: *а* — нерівномірного; *б* — рівномірного.
2. Блок-схема перетворювання сигналу у квантувачі.

Перетворювання вхідного сигналу в квантувачі пов'язане з операцією заокруглювання, а, отже, з певним спотворенням вхідного сигналу. Похибкою К. наз. величина $\varepsilon_k = x(t) - \overset{*}{x}_k$ при $\overset{*}{x}_k \leqslant x(t) \leqslant \overset{*}{x}_{k+1}$. Вона залежить від характеристик квантуючого пристрою (q_k, p_k) і від самого вхідного сигналу. Величину ε_k можна одержати для кожного значення $x(t)$. Квантуючий пристрій, що перетворює вхідний сигнал з мінімальними похибками, наз. оптимальним. Квантувач, оптимальний для одного виду сигналу $x(t)$, не буде оптимальним для іншого. Для рівномірного К. при $q = p$ і $x_1 = x_{-1} = 0{,}5\ q$ величина похибки лежить у межах $-0{,}5q \leqslant \varepsilon \leqslant + 0{,}5q$. Оскільки квантувач є здебільшого частиною динамічної системи, похибки К. в таких системах можуть нагромаджуватись. Оцінити величину похибки, спричинену К. у динамічній системі, можна, використовуючи метод Ципкіна, за яким оцінюють максимальне значення похибки, спричиненої К., через імпульсну вагову ф-цію системи $w[n]$, як $|\varepsilon|_{max} = 0{,}5\,q \sum_{n=0}^{m} |w[n]|$.

Якщо $x(t)$ — випадкова ф-ція часу, то й $\varepsilon(t)$ буде випадковою ф-цією, що її наз.

шумом К. Вплив шуму К. на роботу пристроїв, у яких є квантувачі, можна дослідити за допомогою статистичної теорії К. сигналів. Доведено, що коли крок К. q досить малий, а кількість рівнів К. велика, то шум К. є некорельованим з квантованим сигналом — випадковим процесом типу *білого шуму*. Амплітуди шуму К. розподілено рівномірно між значеннями $-0{,}5q$ і $+0{,}5q$, а спектральна щільність дорівнює $\frac{q^2}{12}$. Внаслідок такої апроксимації шуму К., роботу рівномірного квантувача можна досліджувати за допомогою еквівалентної блок-схеми (мал. 2). Якщо кількість рівнів К. обмежена, оцінка впливу К. за рівнем ускладнюється.

Однозначно відтворити первісний $x(t)$ за його квантованим значенням x^* неможливо. Якщо відомим є закон розподілу вхідного сигналу $P[x]$, то можна знайти ймовірність того, що вхідна величина лежить у межах $kq - 0{,}5q \leqslant x \leqslant kq + 0{,}5q$, і знайти умовну щільність імовірності розподілу x у цьому інтервалі

$$P\left[\frac{x}{x^* = kq}\right] = \frac{P[x]}{P[k]},$$

де $P[k]$ — імовірність появи сигналу x^*, $P[k] = \int\limits_{x^*-0,5q}^{x^*+0,5q} P[x]\,dx.$

Математичне сподівання, *дисперсію* та ін. квантованого сигналу x^* можна виразити через матем. сподівання, дисперсію та ін. вхідного сигналу $x(t)$ за допомогою формул, що їх наз. поправками Шепперда для згрупованих даних:

$$M[x^*] = M[x] + \frac{1}{12}q^2.$$

$$D[x^*] = D[x] + \frac{1}{3}q^2E(x^2) + 0[(q)^4],$$

де $M[\cdot]$ і $D[\cdot]$ — матем. сподівання та дисперсія величин, які стоять у квадратних дужках, $E(\cdot)$ — характеристична ф-ція x, $0[(q)^4]$ — величини 2-го порядку мализни. Кореляційна ф-ція матиме при цьому вигляд:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} E[(x^*)^2(t_1)] - \frac{1}{12}q^2 & \text{при } t_1 = t_2 \\ R_{x^*x^*}(t_1, t_2) & \text{при } t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

У ряді пристроїв, цифрових обчисл. машин, вимірювальних приладів, пристроїв керування, зв'язку тощо сигнали піддають одночасному перетворенню: К. за часом і К. за рівнем. При цьому вихідний сигнал подають здебільшого в цифровій формі — десятковій, двійковій, двійково-десятковій тощо (див. *Дискретизація*). Одночасне К. за рівнем і часом здійснюється в *аналого-цифрових перетворювачах*.

Літ.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М., 1969 [бібліогр. с. 86—87]; Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964; Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1968.

Б. Ю. Мандровський-Соколов.

КВАНТУВА́ННЯ ЗОБРА́ЖЕНЬ — описування неперервних сигналів, що діють на елементи рецепторного поля, ступінчастими (кусково-постійними) функціями від цих сигналів. К. з. може здійснюватися в самих рецепторах і поза ними. Для К. з. використовують порогові елементи, що дають змогу подати неперервний вхідний сигнал як ступінчасту ф-цію. Як правило, порогові елементи всіх рецепторів мають однакові властивості. Чим більше порогів мають порогові елементи, тим повніше одержані ступінчасті ф-ції описують вхідне зображення. Дуже часто порогові елементи мають лише один поріг і тоді вхідний сигнал рецептора можна подати як кусково-постійну ф-цію з двома можливими значеннями. *В. І. Васильєв.*

КЕРУВА́ННЯ В УМО́ВАХ НЕВИ́ЗНАЧЕНОСТІ — див. *Прийняття рішень в умовах невизначеності*.

КЕРУВА́ННЯ ВИПАДКО́ВИМИ ПРОЦЕ́САМИ ТЕО́РІЯ — розділ математики, що вивчає проблеми оптимізації систем, поведінка яких описується випадковими процесами. К. в. п. т. виникла як синтез трьох матем. дисциплін: детерміністичної теорії керування (яка включає класичне *варіаційне числення*, *програмування динамічне*, *Понтрягіна принцип максимуму*), *випадкових процесів теорії* та *математичної статистики*. К. в. п. т. в широкому розумінні охоплює проблеми оптим. *статистичних оцінок* для *випадкових процесів* (фільтрацію, інтерполяцію, прогнозування), послідовний аналіз Вальда, стохастичні варіанти динамічного програмування та принципу максимуму. Методи К. в. п. т. дають змогу знаходити розв'язки багатьох прикладних задач (напр., задачі оптимізації *масового обслуговування систем*, визначення найдоцільнішого економ. поводження та керування технологічними процесами при наявності випадкових факторів, здійснення оптим. надійнісного синтезу складних тех. систем тощо). У К. в. п. т. найпоширенішою є концепція керування за неповними даними з застосуванням байєсівського підходу та методів динамічного програмування. Важливу роль у К. в. п. т. відіграє поняття *марковського процесу*, бо марковські процеси є досить доброю матем. моделлю реальних явищ, і апарат теорії марковських процесів — рекурентні та дифер. рівняння — пристосований до розв'язування задач з оптим. керування. Суть заг. задачі керування випадковим процесом за неповними даними можна з'ясувати на прикладі керованого процесу з дискретним часом і дискретним простором станів. Нехай поведінка системи в моменти часу $n = 0, 1, 2, \ldots$ описується послідовністю *випадкових величин* $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ При цьому значення ξ_n не відомі

експериментаторові. В його розпорядженні є випадкові величини $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots,$ статистично пов'язані з $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ Імовірнісну еволюцію послідовностей $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ та $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ визначають за апріорним розподілом π_0 випадкової величини ξ_0 і перехідними ф-ціями

$$P(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\Xi_n, H_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $P(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\Xi_n, H_n)$ — умовний сумісний *розподіл імовірностей* неспостережуваного стану системи ξ_{n+1} і спостережуваних даних η_{n+1} у момент $n+1$ при заданих $\Xi_n = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ і $H_n = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$. Нехай задано сімейство перехідних ф-цій $\{P^\alpha(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\Xi_n, H_n), \ n \geqslant 0\}$, які залежать від якогось параметра (керуючого діяння) $d \in D$. Експериментатор може в кожен момент часу на основі наявної інформації вибрати якесь d, впливаючи тим самим на перебіг процесу $\{\xi_n, \eta_n\}$. Значення керуючих діянь, вибраних у моменти часу $1, 2, \ldots, n$, позначимо через $\Delta_n = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. У момент часу n експериментаторові відомі H_n і Δ_n. Уся інформація про Ξ_n міститься в умовному розподілі імовірностей Ξ_n при заданих H_n і Δ_n — $\pi_n(\Xi_n/H_n, \Delta_n)$. Значення $\pi_n(\Xi_n/H_n, \Delta_n)$ можна обчислити, знаючи π_0 та перехідні ф-ції. Отже, стан розглядуваної керованої системи в момент n описується вектором $\lambda_n = (\pi_n, H_n, \Delta_n)$, $\lambda_0 = \pi_0$. Спостерігаючи в наступний момент часу випадкову величину η_{n+1}, експериментатор обчислює π_{n+1} *за Байєса формулою*.

Стратегією допустимою наз. набір ф-цій $\delta = \{\delta_1(\lambda_0), \delta_2(\lambda_1), \ldots, \delta_n(\lambda_{n-1}), \ldots\}$, які в будь-який момент n визначають правило вибирання керуючого діяння $\delta_n(\lambda_{n-1})$ з *допустимої множини* керуючих діянь $D(\lambda_{n-1}) \subseteq D$ на основі наявної інформації $\lambda_{n-1} = (\pi_{n-1}, H_{n-1}, \Delta_{n-1})$. Сукупність усіх допустимих стратегій позначимо через Δ. Апріорний розподіл π_0, сімейство перехідних ф-цій $\{P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\Xi_n, H_n), n \geqslant 0, \ d \in D\}$ та стратегія $\delta \in \Delta$ визначають керований стратегією δ процес, що спостерігається частково.

Нехай задано числову ф-цію $g_N(\lambda_N)$, $0 \leqslant N < \infty$, що характеризує виграш, який одержує експериментатор, якщо еволюція керованого процесу обривається на N-му кроці, а стан процесу — λ_N. Критерієм якості керування є

$$U(\pi_0, N, \delta) = M^\delta_{\pi_0} g_N(\lambda_N), \qquad (1)$$

де $M^\delta_{\pi_0}$ — символ *математичного сподівання*, що відповідає процесові, керованому стратегією δ, при умові, що випадкова величина ξ_0 розподілена за законом π_0. У випадку $N = \infty$ критерій якості визначають як $\lim\limits_{N\to\infty} U(\pi_0, N, \delta)$. Часто *виграшу функцію* можна представити у вигляді

$$g_N(\lambda_N) = W^{d_1}(\lambda_0) + W^{d_2}(\lambda_1) + \cdots + W^d_N(\lambda_{N-1}) + f(\lambda_N),$$

де $W^{d_i}(\lambda_{i-1})$ інтерпретують як виграш на i-му кроці, а $f(\lambda_N)$ — останній виграш. Мета керування полягає в максимізації критерію (1), ф-цію $U(\pi_0, N) = \sup\limits_{\delta\in\Delta} U(\pi_0, N, \delta)$ наз. його ц і н о ю. Стратегія δ^* (δ^ε) наз. о п т и м а л ь н о ю (ε-оптимальною), якщо

$$U(\pi_0, N, \delta^*) = U(\pi_0, N), \quad U(\pi_0, N, \delta^\varepsilon) \geqslant U(\pi_0, N) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Основні проблеми К. в. п. т.: а) за яких умов існують оптимальні та ε-оптимальні стратегії; б) як знаходити ці стратегії й ціну $U(\pi_0, N)$. Користуючись методом динамічного програмування, можна одержати нелінійні рекурентні (за N) *Беллмана рівняння* для $U(\pi_0, N)$, розв'язавши які знаходимо $U(\pi_0, N)$, δ^*, δ^ε. Рекурентний вигляд співвідношень для ціни дає змогу в багатьох випадках будувати ефективні *обчислювальні алгоритми* для відшукання $U(\pi_0, N)$, δ^*, δ^ε. Принципова трудність, що виникає при розв'язуванні задачі К. в. п. т., полягає в тому, що з плином часу зростає обсяг інформації про стани керованого процесу. Цю трудність часто переборюють, вводячи достатні статистики. Достатніми статистиками наз. ф-ції від станів λ_n, $n \geqslant 0$ керованого процесу, що містять усю істотну інформацію, необхідну для відшукання δ^* та δ^ε. Бажано, щоб достатні статистики були такими, щоб їх було легко обчислювати при надходженні нової інформації, а саме: щоб значення достатньої статистики в момент часу $n+1$ відновлювалося за її значенням у попередній момент та результатом спостереження η_{n+1}. Такі достатні статистики наз. марковськими. Знаходження марковських достатніх статистик мінім. розмірності є складною задачею. Існує важливий клас задач, у яких марковські достатні статистики знайти порівняно просто. Це клас адитивних марковських задач, у яких

а) $P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\Xi_n, H_n) = P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}/\xi_n, \eta_n)$, $d \in D$, $n \geqslant 0$,

тобто послідовність $\{\xi_n, \eta_n\}$ утворює керований *Маркова ланцюг*;

б) $W^d(\lambda_n) = W^d(\eta_n, \pi^N_n)$, $f(\lambda_n) \equiv 0$, $n \geqslant 0$, $d \in D$, де $\widehat{\pi}_n = \widehat{\pi}(\xi_n/H_n, \Delta_n)$ — розподіл імовірностей ξ_n при заданих H_n та Δ_n;

в) $D(\lambda_n) = \widehat{D}(\pi_n, \eta_n, d_n)$.

У припущеннях а), б), в) $\gamma_n = (\widehat{\pi}_n, \eta_n, d_n)$ є марковською достатньою статистикою, а, отже, керування d_{n+1} в момент часу $n+1$ можливе в класі ф-цій, залежних від H_n і Δ_n лише через γ_n, тобто $d_{n+1} = \delta_{n+1}(\widehat{\pi}_n, \eta_n, d_n)$. У випадку адитивної марковської задачі бачимо, що алгоритм керування процесом за неповними даними складається з двох етапів: обчислювання значень $\widehat{\pi}_n$ за значеннями $\widehat{\pi}_{n-1}$, η_{n-1}, які зберігаються в пам'яті, та значеннями d_n, η_n, які надійшли; формування на основі $\widehat{\pi}_n$, η_n, d_n керування в момент $n+1$. Якщо $\eta_n \equiv \xi_n$, тобто стан процесу спостерігається повністю, перший етап стає непотрібним.

Розглянемо конкретний приклад адитивної марковської задачі. Агрегат у процесі експлуатації може перебувати в одному з двох станів: «0» — робочий стан, «1» — стан відмови. Стан агрегату безпосередньо не спостерігається. Є сигналізуючий пристрій, у якому сигнал «0» відповідає робочому станові агрегату, сигнал «1» — станові відмови, причому можуть надходити й помилкові сигнали. В кожний момент $n = 0, 1, \ldots$ на основі сигналів, що надійшли раніше, треба прийняти одно з двох рішень: d^0 — залишити агрегат працювати, d^1 — відремонтувати агрегат. Відомі ймовірнісні характеристики агрегату й сигнального пристрою, а також ф-ція вартостей, пов'язаних з функціонуванням агрегату: а) $P_0(i)$ — імовірність того, що в початковий момент часу $n = 0$ агрегат перебуває в стані i, $i = 0, 1$; б) $P(j/i, d^{(k)})$ — імовірність того, що агрегат у довільний момент часу виявиться в стані j, якщо в попередній момент він перебував у стані i та приймали рішення $d^{(k)}$, $i, j, k = 0, 1$ (еволюція агрегату має марковський характер); в) $P(j/i)$ — імовірність надходження сигналу j за умови, що агрегат перебуває у стані i (ця імовірність характеризує надійність сигнального пристрою); г) $r(i, d^{(k)})$ — виграш за один період роботи агрегату за умови, що на початку періоду агрегат перебував у стані i та було прийнято рішення $d^{(k)}$. За цими характеристиками легко обчислити перехідні ф-ції, $\widehat{\pi}_n$, $W^d(\eta_n, \widehat{\pi}_n)$ та довести існування стратегії (правила експлуатації агрегату), яка максимізує критерій (1). Див. також *Ігор теорія*.

Літ.: Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., 1966 [бібліогр. с. 313—316]; Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. В кн.: Transactions of the fourth Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes. Prague, 1967; Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М., 1969 [бібліогр. с. 227—231]; Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 187]; Кушнер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 193—198].

Е. С. Штатланд.

КЕРУВА́ННЯ ВІДНО́ШЕННЯ, залежності відношення — відношення, що зв'язує елементарні одиниці речення в природній та штучній мовах.

КЕРУВА́ННЯ ДА́НИМИ — одна з основних функцій *операційної системи.* К. д. забезпечує доцільні для певної програми та певних тех. засобів ЦОМ способи оперування *даними,* які містяться на зовн. носіях (магнітні диски, стрічки та барабани, перфокарти, перфострічки). Без належно організованого К. д. не можна ефективно розв'язувати задачі *автоматичної обробки даних* та ін. важливі задачі. К. д. грунтується на організації всієї інформації, яка зберігається в *пам'яті ЦОМ,* у єдину ієрархічну структуру.

Мінім. кількістю інформації в цій структурі є логіч. запис, який містить інформацію про один з багатьох аналогічних об'єктів. Інформація на зовн. носіях запису поділяється на блоки (або фіз. записи). Блок складається з одного чи кількох логіч. записів, і його можна зчитати (або записати) в результаті одного звернення до зовн. пам'яті. Величина блока визначається характеристиками пристроїв зовн. ЗП (у ЗП на магн. стрічках блоком є зона пам'яті). Відповідно до змісту інформація поділяється на *масиви* — сукупності логіч. записів, які містять повну (в необхідних межах) інформацію про логічно зв'язану множину об'єктів. Масивом може бути *програма* вхідною мовою, *бібліотека стандартних підпрограм* якогось певного класу, власне масив початкових чи вихідних даних.

Обмін між зовнішнім та головним ЗП здійснюється через буфери, які являють собою спеціально виділені ділянки осн. пам'яті. Розмір буфера встановлює або сам програміст, або *керуюча програма* відповідно до розміру макс. блока в масиві. На зовн. носіях масиви зберігаються в томах, кожен з яких являє собою стандартну фіз. одиницю зовн. ЗП, наприклад, бобіну магн. стрічки, пакет дисків чи ділянку на дисках, обслуговувану одним механізмом вибирання, магн. барабан. Співвідношення між величиною тому й величиною масиву може бути різне: або в одному томі може бути кілька масивів, або один масив може займати кілька томів.

К. д. грунтується на використанні операційною системою допоміжної інформації, що є в пам'яті ЦОМ і дає змогу знайти потрібний масив за його назвою та організувати послідовний перегляд його за *записами* тощо. Кожен том інформації містить назви та описи всіх масивів і інформацію про розміщення їх. Кожен том ідентифікують за допомогою *мітки* тому (групи інформаційних слів), у якій зазначено його порядковий номер та посилання на зміст тому. Масиви також ідентифікують за допомогою міток, які мають усю потрібну керуючу інформацію. Часто один масив супроводять групи ведучих міток, які стоять перед ним, та замикальних міток, які стоять після нього. В опе-

раційній системі є спец. підпрограми обробки міток, що визначають характеристики записів у масиві, час його формування, можливість для споживача, який звернувся до масиву, читати чи записувати дані тощо. В групах міток користувач сам може заповнювати інформацією деякі з міток, у яких він зберігає свою спец. інформацію про масив, та обробляти їх. Для пошуку потрібного масиву операційна система веде каталог, який перебуває, як правило, в резидентному томі з прямим доступом. Каталог має здебільшого деревоподібну структуру, найнижчим рівнем якої є змісти томів. Щоб можна було обробляти різні масиви без повторної трансляції програми, назви масивів зазначають у керуючому завданні. Завдання, які реалізують поновлення того самого масиву, використовують при тій самій його назві поняття покоління, інформація про яке міститься в мітці масиву. Найпоширенішими є послідовна організація масивів на носіях, коли записи в них розміщуються послідовно й зовсім не впорядковано (застосовують її лише для томів з послідовним доступом), та індексована послідовна організація, коли записи розміщуються у вигляді впорядкованої послідовності за якоюсь частиною запису — ключем (застосовують її, як правило, для томів з прямим доступом).

К. д. грунтується, як правило, на двох способах обміну даними, які містяться у зовн. пам'яті (т. з. способах доступу). Перший з них, базисний, полягає в тому, що програмістові надається велика свобода, тим самим зменшується ступінь автоматизації обміну. За базисного способу доступу, напр., у макрокоманді, задають читання (або записування) блока, а не читання логіч. запису. Після закінчення обміну програма самостійно перевіряє його правильність і т. ін. Другий спосіб обміну даними, т. з. спосіб доступу з чергами, більш автоматизований. За цього способу в макрокоманді потрібне читання (або записування) логіч. запису. Керуюча програма, використовуючи систему буферизації, автоматично виділяє відповідні записи, слідкує за закінченням обміну, перевіряє його правильність тощо. *А. І. Нікітін.*

КЕРУВА́ННЯ З АДАПТА́ЦІЄЮ — керування в системі з неповною апріорною інформацією про *процес керований,* змінюване в міру нагромадження інформації про процес і використовуване для поліпшення якості роботи системи. Таке значення терміну *адаптація* склалось у теорії керування під впливом тех. застосувань і трохи відрізняється від змісту цього терміну, як його розуміють в біології.

В дискретному часі $i = \frac{t}{\Delta t}$, де t — час, Δt — інтервал його *квантування,* можливе таке представлення процесу К. з а. Припустімо, що керований процес x є *марковським процесом* і описують його якоюсь характеристикою інформації P. Нехай у момент i задано стан процесу x_i і стан інформації про процес P_i, які утворюють точку (x_i, P_i) у певному фазовому просторі. Перехід у новий стан відбувається під впливом керування u_i і збурення z_i — *випадкової величини* з імовірнісним розподілом $dG(x_i, P_i; u_i, z_i)$, який може бути якоюсь частиною характеристики інформації. Перехід у новий стан визначається випадковими перетворюваннями T_1 і T_2 так, що

$$x_{i+1} = T_1(x_i, P_i; u_i, z_i); \quad (1)$$

$$P_{i+1} = T_2(x_i, P_i; u_i, z_i). \quad (2)$$

Керування u, змінюючи стан процесу x, впливає й на характеристику інформації P. В окремому випадку, який трапляється в застосуваннях, у правих частинах виразів (1) і (2) може не бути P_i та x_i відповідно.

Якщо перетворення T_1 і T_2 задано, то керування в момент переходу треба вибирати у вигляді

$$u_i = u_i(x_i, P_i). \quad (3)$$

Керування (3) має властивість адаптації в тому розумінні, що воно залежить від усієї доступної в момент i інформації P_i про процес. Але звичайно перетворення T_1 і, особливо T_2, не задані, й визначення цих перетворень, як і самої характеристики інформації, є частиною задачі про К. з а. Дійсно, для того, щоб інформація про процес з часом нагромаджувалась, необхідно спеціально вибирати T_2 так, щоб опис процесу P_{i+1} був повнішим, ніж P_i. Зміни в напрямі поліпшення характеристики інформації становлять суть адаптації. Якщо із станом x_{i+1} зв'язати, напр., якийсь показник якості керування $W(x_{i+1})$, то за рахунок більшої «поінформованості» керування внаслідок адаптації цей показник може поліпшуватися. При цьому послідовність перетворень $\{T_1, T_2\}_i$, $i = 0, 1, 2...$ дає процес К. з а.

У цьому загальному представленні процесу К. з а. і характеристика інформації P, й механізм адаптації, який визначається перетворенням T_2, не мають конкретного змісту. Розвиваються теорії адаптації, побудовані на основі статистик випадкових величин і *випадкових процесів,* де функцію *розподілу імовірностей* використовують як характеристику інформації, а як перетворення T_2 іноді використовують формулу Байєса для апостеріорних імовірностей. Однією з таких теорій є теорія *дуального керування,* яка розглядає задачу про оптимальне К. з а. на кінцевому інтервалі роботи системи.

К. з а. реалізує, зокрема, всякий оператор, який навчається керувати тим або іншим процесом чи апаратом. Під час навчання поведінка оператора змінюється, вдосконалюючись переважно завдяки нагромадженню досвіду (або інформації).

Літ.: Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [бібліогр. с. 347—381]; Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Пер. с англ. М., 1964. *В. І. Іваненко.*

КЕРУВА́ННЯ ЗАПА́САМИ — див. *Запасів теорія.*

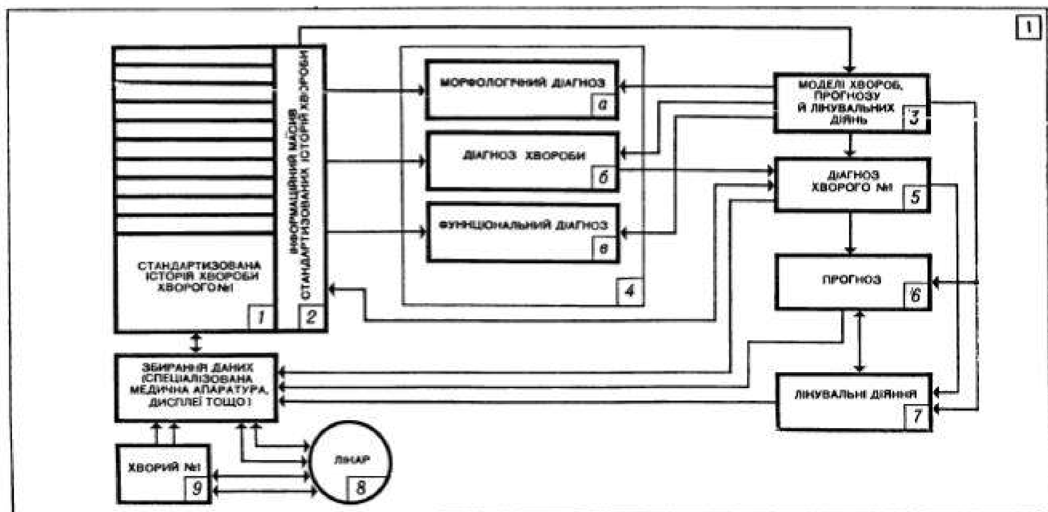
КЕРУВА́ННЯ КОМА́НДАМИ — див. *Керування структурне в ЦОМ.*

КЕРУВА́ННЯ ЛІКУВА́ЛЬНИМ ПРОЦЕ́СОМ. Лікувальний процес є складним циклічним процесом, який охоплює збирання й обробку медико-біологічних даних, постановку діагнозу, вибір стратегії лікування і проведення самого лікування. К. л. п. може проходити з участю й без участі медичного персоналу (див. *Автоматизація медичної діагностики*).

На мал. 1 представлено блок-схему автоматизації одного циклу лікувального процесу в *медичній інформаційній системі.* Інформацію про стан здоров'я хворого зібрано в *стандартизованій історії хвороби* (СІХ) — блок 1. У блоці 2 відбувається нагромадження СІХ, тобто створюються *масиви інформаційні* системи. Кожній СІХ присвоюється *ідентифікатор*, що дає змогу проводити над інформаційними масивами різні перетворення, напр., здійснювати статистичну обробку, поділяти ознаки й симптоми на анамнестичні й фізикальні. Моделі хвороб і лікувальних діянь містяться в *довгочасному запам'ятовувальному пристрої* системи (блок 3). Діагноз хвороби визначається в блоці 4, а специфічні прояви й особливості перебігу даного захворювання в даного хворого — у блоці 5. Прогнозування перебігу й кінця хвороби виконується в блоці 6. Прогноз захворювань, зроблений на основі діагнозу з урахуванням різних лікувальних діянь, повинен мати конкретний об'єктивний характер і разом з тим бути відносним щодо строгої індивідуалізації та в розумінні динамічності в часі. Вироблення конкретної стратегії лікування й вибір лікувального діяння відбуваються в блоці 7. Дані про стан хворого, а також інші дані (напр., вироблена системою рекомендація щодо лікувального діяння) спочатку надходять до лікаря (блок 8), а вже потім лікар призначає хворому (блок 9) відповідні лікувальні діяння, погоджуючись або не погоджуючись із рекомендацією системи. Якщо лікар на підставі додаткової інформації не погоджується з рекомендаціями системи, він може використати цю інформацію для корегування пам'яті (блок 3) системи. Цим і закінчується один цикл лікувального процесу.

Лікувальний процес може складатися з різної кількості циклів — від двох до багатьох десятків. Тому на кожному циклі роблять оцінку й корегування керуючого діяння. Діагноз видужання і прогноз для життя визначають після видужання хворого.

Суть матем. методів прийняття рішень у К. л. п. полягає ось у чому. Після того як з'ясовано специфічні особливості захворювання хворого, можна переходити до побудови прогнозу перебігу й кінця захворювання, а також до призначення лікувальних діянь. Нехай будуть відомі *модель математична* діагнозованого об'єкта $\overline{f}_h$ та навчальна й екзаменаційна вибірки $\overline{f}_{h_j} \in d_j$. Нехай l_s ($s = 1, ..., S$) — лікувальні діяння (методи), які можуть перевести хворого $\overline{f} \in d_j$ зі станом здоров'я z_{gj} в новий стан $z_{g'}$, ($g, g', g'' = 0, ..., G$; $g \neq g' \neq g''$), і нехай $\rho(z_{gj} \to z_{g'})l_s$ — ймовірність такого переходу. Позначимо через e_{sj} міру ефективності l_s-го методу лікування при d_j-му класі. Тоді задачу знаходження оптим. сукупності лікувальних діянь можна сформулювати так: знайти таку оптим. сукупність лікувальних діянь l_s^*, щоб



1. Блок-схема автоматизації циклу лікувального процесу.

міра їхньої ефективності була максимальною. У цьому разі міра ефективності

$$e_{sj}\ (z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s} = p\quad (d_j)z_g \cdot p\ \ (z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s},$$

а макс. значення міри ефективності, або оптим. лікувальне діяння на $(z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s}$ досягається при $e^{*}_{sj} = \max\limits_{l_s} e_{sj}\ (z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s}$. Це визначення дійсне для тих пар $(z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s}$, для яких справджується твердження про те, що $z_{g'}$ краще за z_{gj}.

Припустимо, що заг. ефективність лікувальних діянь l_j є адитивною ф-цією, яка складається з e_{sj}. Тоді для визначення оптим. сукупності лікувальних діянь можна сформулювати *Беллмана принцип оптимальності* багатокрокового процесу прийняття рішення: оптимальна сукупність лікувальних діянь має ту властивість, що яке б не було початково призначене лікувальне діяння l_s за станом здоров'я хворого z_{gj}, наступне лікувальне діяння повинно бути оптим. щодо початково призначеного лікування. Виходячи з цього принципу, макс. ефективність лікувальних діянь можна одержати у вигляді: $l_j = \max\limits_{l_s} \sum\limits_{\{e\}} [e_{sj}(z_{gj} \rightarrow z_{g'})_{l_s} + e_{sj}\ (z_{g'} \rightarrow z_{g''})_{l_s}]$. Т. ч., вибір оптим. сукупності лікувальних діянь сходить до пошуку на графі (мал. 1) макс. шляху. *Системний підхід* до розв'язування задач автоматизації лікувального процесу пов'язаний з великим обсягом обчисл. роботи над інформаційними масивами. Істотним є оптим. вибір способів представлення початкових даних, пошуку й виділення потрібної інформації з масивів, обчислювань та зберігання проміжних і кінцевих результатів обчислювань. Для побудови й дослідження вирішувальних правил масив осн. СІХ перетворюється на масиви з адресно-груповим способом зберігання даних. До інформаційних масивів системи належать також: масиви історій хвороб різних клінік, які входять до даної медичної інформаційної системи; виписки з історій хвороб; стандартизовані карти обстежень; таблиці експериментальних даних; діагностичні оцінки симптомів і станів; оцінки ефективності лікувальних діянь; масиви критеріїв якості рішень, які приймаються; результати прийняття рішень вирішувальними правилами системи за навчальною й екзаменаційною вибірками; алфавіт медичних та ін. термінів; каталог програмного забезпечення, за допомогою якого визначається вільне місце в пам'яті системи, адреса запису масиву й відомостей про масив; опис режимів роботи різних *програм*, а також опис масивів і документів. Розв'язування задач діагностики, прогнозування перебігу хвороби та ін. за умови використання різних типів вирішувальних правил і апріорних даних показано на мал. 2. Специфіка кожного з вирішувальних правил визначається послідовністю використовування початкових масивів і результатів обчислювань, послідовністю вибирання чисел з масивів, характером і послідовністю дій над числами, способом зберігання й використання проміжних результатів обчислювань. При цьому кожне з вирішувальних правил можна задати списком операторів і списком режимів роботи системи. Своєю чергою список режимів роботи й список операторів можна визначити як опис задачі для керуючого блоку програми. Описи відповідних задач записуються в пам'яті системи, їх використовують у міру потреби.

2. Схема розв'язування задачі лікувального процесу.

Літ.: Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М.— Прага, 1966; Медицинская информационная система. К., 1971 [бібліогр. с. 283—288]; Попов А. А., Яненко В. М., Шульга В. А. Информационная модель

лечебного процесса. «Кибернетика», 1971, № 6; Ледли Р., Ластед Л. Медицинская диагностика и современные методы выбора решения. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966.

А. О. Попов, В. М. Яненко, В. А. Шульга.

КЕРУВА́ННЯ ОПЕРА́ЦІЯМИ — див. *Керування структурне в ЦОМ.*

КЕРУВА́ННЯ ОПТИМА́ЛЬНЕ — див. *Оптимального керування теорія.*

КЕРУВА́ННЯ ПРОГРА́МНЕ — див. *Система програмного керування.*

КЕРУВА́ННЯ СТРУКТУ́РНЕ В ЦОМ — частина системи керування цифрової обчислювальної машини, алгоритми якої зафіксовано структурним способом. Принцип програмного керування в сучасній ЦОМ реалізують за допомогою *алгоритмів* двох видів: оперативних, тобто таких, що їх вводять у вигляді програм в *оперативний запам'ятовувальний пристрій*, і постійних, закладених у структуру ЦОМ (див. *Математичне забезпечення ЦОМ внутрішнє*). Оперативні алгоритми — це *програми* розв'язуваних задач і більшість алгоритмів *операційної системи*; вони становлять верхній рівень системи керування. Проміжні рівні керування й найнижчий рівень, який безпосередньо впливає на апаратуру, становлять К. с. в ЦОМ.

Розрізняють два осн. способи структурної фіксації алгоритмів. Перший —фіксація алгоритмів за допомогою схем, виконаних з *елементних структур ЦОМ*. Таке К. с. в ЦОМ наз. реалізованим апаратними засобами. За другого способу алгоритми фіксуються у вигляді послідовностей керуючих *кодів*, записаних у якомусь довгочасному запам'ятовувальному пристрої (ДЗП). Такий спосіб фіксації використовували раніше лише для алгоритмів програмного рівня (записування підпрограм).

У сучасних ЦОМ ДЗП використовують найчастіше для фіксування алгоритмів, записаних на нижньому рівні *мови ЦОМ внутрішньої*. Алгоритми, зафіксовані в такий спосіб, наз. мікропрограмами, а структурне керування, реалізоване такими засобами,— мікропрограмним К. с. в ЦОМ. Ці структурні способи фіксації алгоритмів являють собою різні види *автоматів керуючих*, які й реалізують К. с. в ЦОМ. У структурному керуванні сучасних ЦОМ ці два способи поєднують, а функції між ними розподіляють так, щоб домогтися високої *швидкодії ЦОМ* та оптим. організації обчисл. процесу.

Незалежно від способу реалізації традиційні функції К. с. в ЦОМ зводяться до автомат. визначення й забезпечення необхідного порядку слідування команд програми, підготовки адрес операндів та до керування діями щодо *переробки інформації в ЦОМ*. У ЦОМ з мультипрограмуванням структурне керування ще реалізує деякі функції операційної системи, зокрема керування перериваннями. Відповідно до двох традиційних функцій К. с. в ЦОМ можна поділити на дві частини: керування командами й керування операціями.

Керування командами (КК) — це частина К. с. в ЦОМ, яка забезпечує необхідний порядок слідування команд, який задає програма, і перетворення адресних частин команд. Розрізняють два способи організації вибирання команд програми: природний (за чергою) та примусовий (із зазначенням у кожній команді адреси наступної команди). В сучасних ЦОМ використовують переважно природний порядок слідування команд, який апаратно реалізують у вигляді двійкового лічильника команд програми. На початку роботи за даною програмою в лічильник надсилається адреса 1-ї команди програми, а при виконанні кожної чергової команди вміст лічильника зростає на 1. Після виконання команд умовного чи безумовного переходу замінюється й вміст лічильника — в нього надсилається початкова адреса нової програмної послідовності. Примусовий порядок слідування команд застосовують, якщо алгоритми К. с. реалізують, напр., як набір мікропрограм. Задавання переходів між окремими мікропрограмами є специфічною ф-цією, яку наз. схемою галуження, і чим більше можливостей при переходах, тим зручніше будувати систему мікропрограм. Напр., у ЦОМ «МИР-1» (див. «*МИР*») є можливість переходу в чотирьох напрямках, тобто можна вказати одну з чотирьох можливих адрес переходу. Другою важливою функцією КК є перетворення адресних частин команд, необхідність у якому виникає тому, що види адресації операндів у команді різні. Розглянемо, які перетворення необхідні при безпосередньому, прямому, непрямому, відносному й індексованому адресуванні. Перші два види адресування не потребують додаткових перетворень, бо при першому виді адресування в команді задається сам операнд, а при другому — його пряма фіз. адреса. При непрямому адресуванні в команді міститься адреса 2-го (або вищого) рангу. Функція КК визначає пряму адресу операнда, тобто вона збуджує одне (чи кілька) додаткових звертань до ЗП. Відносне (базове) й індексоване адресування вимагають, щоб було виконано операцію додавання для визначення виконавчої адреси операнда. До складу КК вводять додаткове обладнання: регістр бази, індекс-регістри й суматор адрес. Це обладнання інколи виділяють у пристрій індексної арифметики. Дії з індексації можна виконувати й в *арифметичному пристрої* (АП), але тоді стає неможливо суміщувати ці дії з операцією в АП.

Керування операціями (КО) — друга частина К. с. в ЦОМ, яка реалізує операції самого структурного керування і задає операції в інших пристроях ЦОМ при виконанні команд програми. КО можна будувати відповідно до принципів синхронного чи асинхронного керування. Принцип синхронного керування передбачає однакову тривалість усіх операцій, яка повинна відповідати найдовшій операції. Всі операції поділяють на однакову кількість тактів, і таку

саму кількість тактових сигналів виробляє лічильник тактів. Схема КО економна щодо витрат апаратури, але зменшується швидкодія за рахунок пустих тактів в операціях з коротким циклом виконання. Особливість асинхронного принципу керування полягає в тому, що для виконання кожної операції витрачається необхідна кількість тактів, причому виконання кожної чергової операції починається за сигналом про закінчення попередньої операції. Вадою асинхронного принципу керування є значні витрати апаратури, бо для виконання кожної операції будують окрему схему. Ще у ЦОМ 1-го покоління ці два принципи поєднували й будували КО за мішаним принципом. Операції поділяли на дві групи: короткі, але часто виконувані (напр., додавання) і багатотактні, хоча вони в програмі трапляються рідко (ділення). 1-у групу операцій виконує центр. керування, побудоване за синхронним принципом; другу — місцеве керування, яке представляє асинхронну схему. Отже, з осн. циклу ЦОМ вилучено довгі операції, і частково виконання їх суміщується з роботою решти К. с. в ЦОМ. Прикладами таких КО є схеми керування «БЭСМ-1» і «М-220». КО сучасних ЦОМ будують здебільшого за асинхронним принципом, бо швидкодія є визначальним фактором ефективності ЦОМ. Розвиток структур ЦОМ у зв'язку з вимогами значно підвищити ефективність цих машин і автоматизацію процесу підготовки та розв'язування задач на них розширив роль і функції їхнього структурного керування. Значне зростання потоку керуючої інформації, обробляти яку і є функцією К. с., зумовлене такими причинами: по-перше, застосуванням алгоритм. мов високого рівня як вхідних мов ЦОМ і пов'язаним з цим розширенням видів та форматів оброблюваних даних (символьні, цілі тощо); по-друге, введенням різних форм паралелізму в режими обробки інформації як усередині однієї програми, так і для кількох програм (напр. суміщувати операції в різних пристроях можна шляхом введення буферів, що узгоджують швидкості цих пристроїв); по-третє, розвитком засобів операційної системи, зокрема функцій, пов'язаних з розподілом ресурсів у мультипрограмному режимі розв'язування задач. Ці причини зумовили появу в складі К. с. в ЦОМ нових блоків: мікропрограмної реалізації складних багатотактних операцій, що їх у ЦОМ попередніх поколінь здійснювали у вигляді підпрограм, попереднього перегляду програми (т. з. випереджальний пристрій), динамічного адресування віртуальної пам'яті.

Ще більше розширено функції К. с. в ЦОМ з розвиненими системами інтерпретації. Виконання інтерпретації вхідної мови високого рівня структурними засобами вимагає, щоб до складу керування включали нові структурні одиниці: блок аналізу програми, блок автомат. адресування величин, блок магазинної пам'яті з власним керуванням тощо. Крім того, К. с. в ЦОМ виконує й традиційні операції керування: команди умовного й безумовного переходів, організацію циклічних процесів та індексацію. Зміни в структурі керування ЦОМ приводять до того, що структурне керування перетворюється на окремий процесор переробки керуючої інформації, який має свої внутр. команди, буферну пам'ять та арифм. пристрій для виконання індексації. У ЦОМ з розвинутою інтерпретацією високий рівень вхідної мови поступово знижується структурою керування ЦОМ до рівня елементарних операцій, тобто структурне керування будують за ступінчастим принципом. Для реалізації таких схем використовують принцип мікропрограмного керування, який полягає в побудові К. с. як набору послідовностей елементарних операцій (мікрооперацій), що в сукупності реалізують алгоритми керування ЦОМ; під мікрооперацією розуміють елементарну машинну дію, яка позначена у внутр. мові і не містить інших машинних дій, позначених цією мовою. Запропонований ще 1951 (в Англії) принцип мікропрограмного керування спочатку використали для побудови К. с. лише малих ЦОМ з невеликим набором операцій. Удосконалення технології виготовлення ДЗП і зменшення часу зчитування з ДЗП до 100 *нсек* привели до широкого використання цього принципу в ЦОМ — 2-го й 3-го поколінь. Схема цього принципу, яка тепер стала класичною (т. з. схема Уілкса), складається з двох діодних матриць (в одній з них закодовано мікрооперації, у другій — переходи від однієї мікрокоманди до іншої) і регістра мікрокоманди. Видозміни сучасних схем мікропрограмного К. с. в ЦОМ не принципові, а лише відображають рівень розвитку техніки: діодні матриці замінено на феритові (чи інші матриці ДЗП), іноді до схеми вводять регістр для фіксації коду, зчитуваного з ДЗП. Дальшим розвитком принципу мікропрограмного керування є схеми ступінчастого мікропрограмного керування. У їхньому принципі збіглися два напрями розвитку схем керування — ступінчасте записування алгоритмів при програмуванні і мікропрограмний принцип керування операціями в ЦОМ. За ступінчастої організації К. с. в ЦОМ операції n-го ступеня реалізуються через операції $(n - 1)$-го і нижчих ступенів. Операціями найнижчого ступеня є мікрооперації. Такий метод побудови К. с. в ЦОМ дає змогу при реалізації в наборі команд складних операцій скоротити час виконання їх порівняно з методом реалізації їх у вигляді *підпрограм*, а також дає істотну економію апаратури К. с. в ЦОМ. При сумісній реалізації кількох операцій n-го ступеня вдається об'єднати однакові ділянки мікропрограм. При цьому зручно використовувати методи синтезу й мінімізації, розроблені в теорії цифрових автоматів (див. *Автоматів теорія*).

Багатоступінчаста організація мікропрограмного керування дає змогу відносно просто реалізувати в ЦОМ і принцип асинхронності керування операціями та можливості одночас-

ної паралельної роботи ряду автоматів, а це має важливе значення для забезпечення високої швидкодії. У такому багатоступінчастому К. с. можна поєднувати мікропрограмно реалізовані рівні з апаратно реалізованими. Нижній рівень К. с. в ЦОМ будують здебільшого в елементному базисі машини (частота видавання мікрооперацій збігається з осн. робочою частотою машини). У верх. рівнях структурного керування використовують швидкодіючі ДЗП, тобто у вигляді мікропрограм фіксують найвищий та проміжний рівні внутр. мови. Створення ефективних систем мікропрограмних К. с. дало змогу вже в ЦОМ 3-го покоління осн. системи програмування й частину операційної системи реалізувати у вигляді бібліотек мікропрограм. Ще на кращі результати можна сподіватися при реалізації мікропрограмного керування на схемах з високим ступенем інтеграції — у ЦОМ 4-го покоління.

Літ.: Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. М., 1968 [бібліогр. с. 583—585]; Глушков В. М. [та ін.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [бібліогр. с. 254—257].

А. М. Самофалова.

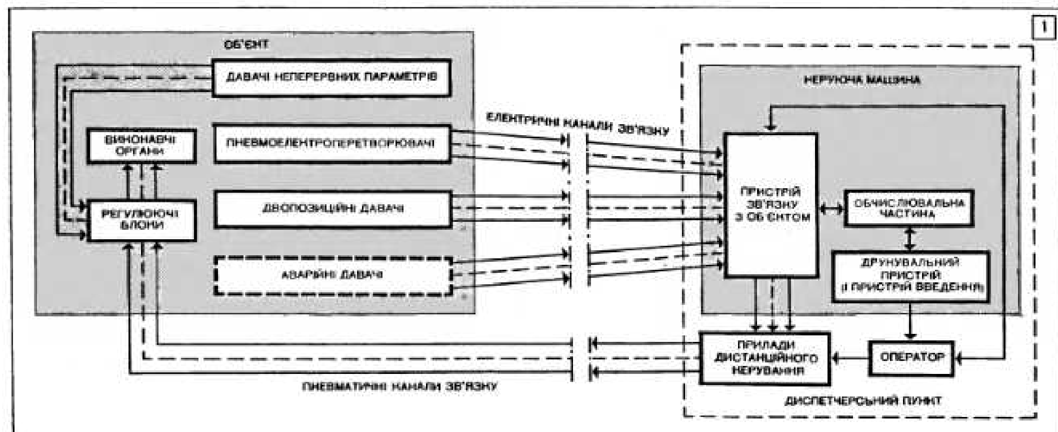
КЕРУ́ЮЧА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНА МАШИ́НА — обчислювальна машина, використовувана як центральна ланка керуючої системи й розрахована на автоматичне приймання та обробку інформації, що надходить у процесі керування, та видавання керуючої інформації безпосередньо на виконавчі органи або людині-операторові. Мета застосування К. о. м.— забезпечити оптимальну роботу системи керування.

К. о. м. класифікують: за призначенням — на машини промислового застосування, аерокосмічні (бортові), корабельні тощо; за принципами технічної реалізації — на цифрові, аналогові та гібридні; за можливостями застосування — на машини широкого призначення (для даного класу об'єктів) та спеціалізовані (для одного типу об'єктів); за виконуваними функціями — на машини централізованого контролю, машини-порадники, оптимізуючі машини та на машини прямого керування.

В промисловості К. о. м. широко застосовують для оптимізації процесів керування об'єктами з неперервним і неперервно-дискретним характером виробництва (насамперед на хім., нафтопереробних, цементних, металург. та паперобних підприємствах). К. о. м. ефективно використовують для автоматизації різних енергетичних об'єктів (включаючи атомні електростанції), автоматизації досліджень, що проводиться за допомогою складних експериментальних установок, та для іншої мети (див. іл. між с. 472—473).

Застосовувати К. о. м. у промисловості почали в 50-х роках 20 ст. Відтоді цей широкий захід пройшов через кілька етапів розвитку.

1-й етап — створення й застосування машин централізованого контролю і машин первинної обробки інформації (напр., «Марс», «Зенит», «МППИ» та ін.). Появу машин, які автоматично реалізують функції контролю та реєстрації параметрів технологічного процесу, які раніше виконували вручну, викликало прагнення полегшити контакт людини-оператора, яка керує процесом, з численною контрольно-вимірювальною апаратурою, та прагнення зменшити вартість цієї апаратури, застосовуючи досконаліші тех. вирішення і замінюючи багато реєструючих пристроїв одним. Машини цього типу характерні слабким розвитком їхньої обчислювальної частини та її спеціалізованим призначенням. У ряді виробництв, які потребують лише найпростіших функцій контролю та керування, без елементів оптимізації, в ряді об'єктів харчової, гумо-тех. та інших галузей промисловості, холодильних установках, пресах і т. п., застосування машин централізованого контролю дає значний економ. ефект.



1. Структурна схема автоматичної системи керування неперервним процесом.

2-й етап — створення й застосування керуючих машин-порадників та оптимізуючих машин — став якісно новим етапом у розвит-

ку засобів керування пром. об'єктами. Крім виконання звичайних функцій контролю та реєстрації параметрів, їх розраховано на розв'язування задач оптимізації технологічних процесів, які досі розв'язувала людина-оператор інтуїтивно й не досить точно.

Клас машин, які названо «порадниками майстра» (напр., «СМ-1» для доменного цеху), розраховано на роботу в системах керування, замкнених через оператора. В таких машинах є обчислювальна частина невисокої продуктивності з оперативним ЗП невеликого обсягу, пристрій введення інформації з давачів та пристрої індикації і друкування «порад» операторові. Пристрою автомат. зв'язку з органами керування процесом у машині немає (процесом керує людина, використовуючи «поради» машини). Використання «машин-порадників» дає великий економ. ефект. Так, стосовно до доменного цеху, згідно з даними по трьох вітчизняних заводах, він становив близько 500 тис. крб. на рік (за рахунок поліпшення режиму роботи печей).

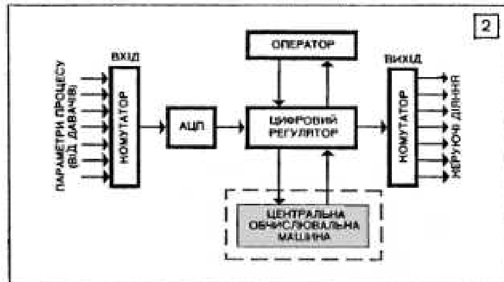
Оптимізуюча машина відрізняється від машини типу «порадник майстра» наявністю в її складі засобів автомат. виконання «порад» і рішень, які діють на об'єкт керування автоматично, без участі оператора (мал. 1). Перші керуючі машини цього класу були спеціалізовані (напр., «Сталь-1» — для оптим. різання прокату). Ці машини промислового призначення набули обмеженого застосування через кілька причин: спеціалізоване призначення зумовлювало дуже вузьке коло застосувань машини; виникли труднощі виробничого характеру, пов'язані з нерентабельністю серійного випуску їх.

Плідншою виявилася ідея створення К. о. м. широкого призначення, яку висловив 1958 в СРСР В. М. Глушков. Відмітними властивостями такої машини є: універсальна, дуже розвинена (порівняно з попередніми класами машини) обчисл. частина; обмежена (порівняно з універсальною матем. машиною) розрядність; швидкодія машини достатня для реалізації алгоритмів керування широким колом пром. об'єктів; змінний обсяг пам'яті машини; наявність пристроїв зв'язку з об'єктом, розрахованих на автомат. приймання та видавання інформації тощо. Практикою встановлено, що оптимізація технологічних процесів на базі К. о. м. дає змогу підвищити продуктивність складних установок на 0,5—2%. До перших вітчизняних керуючих машин широкого призначення належать *«Днепр»*, «УМ1», «ВНИИЭМ-3» та ін.

Мала надійність перших оптимізуючих К. о. м. не дала змоги широко застосувати їх для прямого керування процесами. Їх використовували здебільшого як верхню оптимізуючу ланку системи керування, а роль нижніх стабілізуючих ланок її виконували звичайні прилади контролю та регулювання.

На 3-му етапі з'являються засоби, які достатньо надійні для прямого (безпосереднього) керування процесами. Ними є цифрові регулятори — невеликі обчисл. пристрої, розраховані на реалізацію звичайних законів регулювання, і цифрові керуючі машини на гібридних та інтегральних елементах, здатні розв'язувати задачі оптимізації процесів і задачі контролю та регулювання.

Першу в світі спробу використати засоби цифрової *обчислювальної техніки* для прямого керування технологічними процесами здійснено в СРСР 1961. Для цього було сконструйовано цифровий регулятор «Автооператор», випробуваний на одному з хім. процесів.



2. Блок-схема системи цифрового регулювання.

Випробування показали високу якість регулювання. Проведені в СРСР і за кордоном дослідження систем керування з цифровими регуляторами показали високу якість цифрового регулювання та їхню економічну доцільність у випадку наявності 50 ÷ 100 контурів регулювання.

У системі цифрового регулювання (мал. 2) сигнали давачів через комутатор та аналого-цифровий перетворювач АЦП надходять до цифрового регулятора (малої спеціалізованої ЦОМ). Тут вони зіставляються з завданнями, які надходять від оператора або центр. обчисл. машини. Якщо розузгоджуються сигнали і завдання, то виконуються обчислення, які забезпечують підрахунок керуючого діяння. А це діяння через комутатор видається безпосередньо на сервопривод. Цифрові регулятори використовують переважно на новостворюваних підприємствах (замінювати систему звичайних регуляторів немає сенсу).

Період розвитку обчисл. системотехнічних засобів пром. призначення, який настав з початку 70-років 20 ст., характеризується прагненням створити функціонально повний і технічно досконалий комплекс засобів керування, який відзначався б економ. ефективністю їхнього використання. Першим кроком у цьому напрямі є розробка агрегатно-блокової системи засобів обчисл. техніки (див. *АСОТ*), агрегатної системи засобів первинної переробки інформації (АСПІ) та комплексу тех. засобів для локальних інформаційно-керуючих систем (КТЗ ЛІКС). Спільне застосування засобів АСОТ і КТЗ ЛІКС дасть змогу створювати для підприємств із безперервним технологічним процесом керуючі системи будь-якого ступеня складності. Застосування АСОТ спільно з АСПІ дасть змогу створювати керуючі системи для підприємств

із дискретним характером виробництва. Відмітними особливостями АСОТ, КТЗ ЛІКС та АСПІ є *агрегатно-блокова побудова засобів обчислювальної техніки* і наявність типових стандартних схем зв'язку між блоками.

Системи керування, як правило, будують за ієрархічним принципом. На нижньому рівні прямого керування технологічними процесами використовують прості й надійні К. о. м., які виконують функції стабілізації, елементарної оптимізації та прямого керування процесом. На другому рівні, який потребує розв'язання задач керування стосовно до окремих складніших груп технологічних процесів, застосовують К. о. м., здатні виконувати складніші функції, пов'язані з оптимізацією роботи групи процесів. Вони, в свою чергу, зв'язуються з центр. ланкою системи керування підприємством, яка здійснює завдання планування, обліку та керування роботою всього підприємства.

Побудова ієрархічних систем керування і відповідних агрегатно-блокових засобів обчисл. техніки грунтується на ряді системотехнічних принципів. Головні з них такі:

1. Структури систем керування в промисловості мають ієрархічний вигляд внаслідок технологічних особливостей і територіального розміщення об'єктів керування. Задачі контролю та керування на кожному рівні ієрархії ставлять різні вимоги до обчисл. обладнання. Для прямого керування процесами (нижчий рівень ієрархії) треба здійснювати невелику кількість операцій з високим ступенем вірогідності розв'язку. В міру підвищення ступеня ієрархії кількість обчислень збільшується, а вимоги до надійності апаратури, яка їх реалізує, зменшуються. З огляду на викладене необхідно мати комплекс обчисл. засобів, орієнтованих на розв'язування задач контролю та керування на окремих рівнях ієрархії системи.

2. Процеси керування окремими ланками (рівнями) взаємно зв'язані. Отже, обчисл. засоби треба розраховувати на роботу в багатомашинних системах.

3. Щоб зменшити затрати при серійному випуску і застосуванні засобів, їх доцільно будувати за агрегатно-блоковим принципом, обмежуючись мінімально можливою номенклатурою засобів.

4. Обсяги пам'яті, розрядність інформації та необхідна швидкодія К. о. м.— для окремих ступенів керування різні й мають певні межі, які слід враховувати при створенні засобів *системотехніки*, щоб уникнути невиправданих затрат на них.

5. На відміну від універсальних обчисл. засобів, вимоги до надійності роботи засобів системотехніки пром. призначення, особливо засобів прямого керування процесами, істотно більші.

6. Організація системи переривання й мультипрограмний режим роботи обчисл. засобів, призначуваних для нижніх рівнів керування, мають на меті не стільки ефективне використання апаратури (як в *обчислювальних системах*), скільки забезпечення потрібного часу реакції засобів на вхідну інформацію.

7. Матем. забезпечення засобів для нижніх рівнів керування елементарне й ускладнюється при переході до вищих рівнів керування. Головне його призначення — розв'язувати задачі керування та обслуговувати оператора в реальному масштабі часу.

8. Можливий запас щодо швидкодії при використанні досконаліших елементів доцільно використовувати, де це можливо, для зменшення апаратури обчисл. засобів за допомогою використання операцій зі збільшеною довжиною слова і програмного виконання складних операцій.

9. При створенні агрегатно-блокових засобів доцільно використовувати єдину методику автоматизації процесу конструювання й типову автомат. систему виготовляння їх.

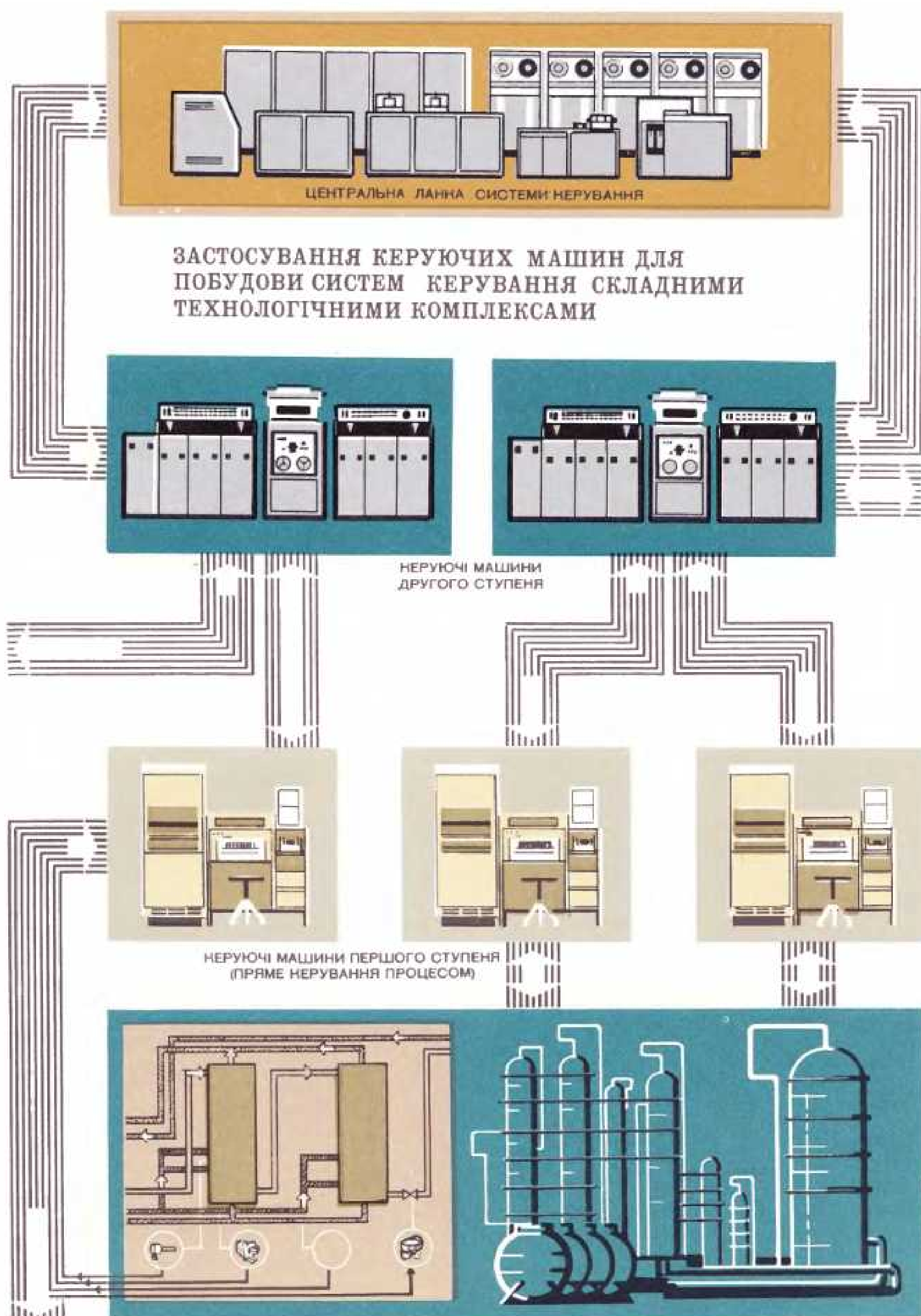
Літ.: Малиновский Б. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М., 1963 [бібліогр. с. 285—286]; Ющенко Е. Л. [та ін.]. Управляющая машина широкого назначения «Дніпро» и программирующая программа к ней. Справочник программиста. К., 1964 [бібліогр. с. 277—278].

Б. М. Малиновський.

КЕРУ́ЮЧА ПРОГРА́МА — частина *операційної системи*, призначена для керування обчислювальним процесом на ЦОМ. К. п. організовує обмін *процесора* з *зовнішніми пристроями*, здійснює *пам'яті розподіл*, керує послідовністю виконання завдань та їхніх частин, керує масивами (файлами), реагує на несправності машини та інші нерегулярні ситуації, викликає *транслятори* та інші оброблюючі програми, встановлює зв'язок з оператором машини, веде протокол обчисл. процесу тощо. *А. І. Нікітін.*

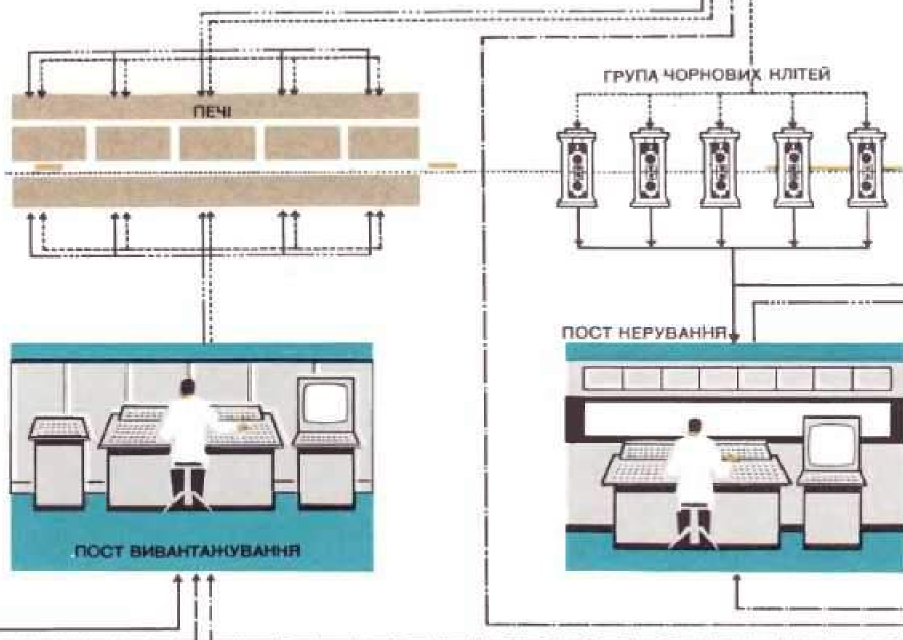
КЕРУ́ЮЧЕ ДІ́ЯННЯ, регулююче діяння — сигнал, що надходить на вхід об'єкта керування від регулятора чи іншого пристрою і впливає на вихідну (регульовану) величину об'єкта керування. К. д. у системі автомат. керування змінюється так, щоб регульована величина відповідала заданій (у системах стабілізації, слідкуючих і програмних) або досягала якогось оптим. значення, зокрема екстремуму (в системах автомат. оптимізації, самоналаджуваних, екстремальних та ін.). Характер змінювання в часі К. д. залежить від виду *регулювання закону* й визначається властивостями об'єкта керування, характером збурень, що діють на систему, завад і задавальних діянь, а в деяких випадках — і певними вимогами до виду й якості змінювання в часі регульованої величини.

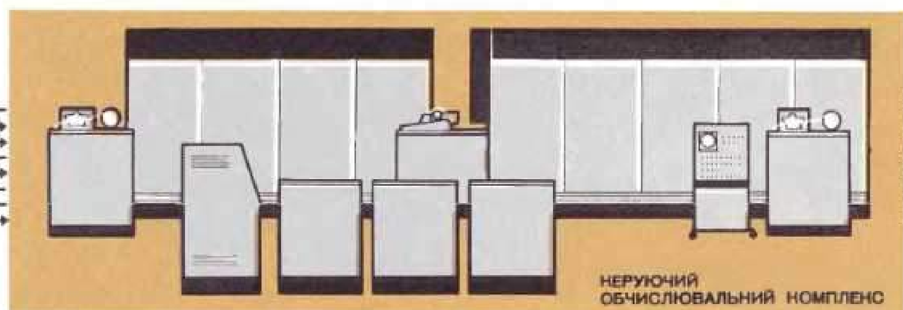
За числом К. д. об'єкти керування бувають одно- й багатовимірні. Кожне К. д. у багатовимірних об'єктах може впливати на одну або кілька вихідних регульованих величин. Характер і ступінь впливу на кожну регульовану величину різні (див. *Спостережуваності й керованості умови*). Одним із важливих завдань при синтезі *багатовимірних систем автоматичного керування* є усунення або послаблення впливу К. д. на всі регульовані

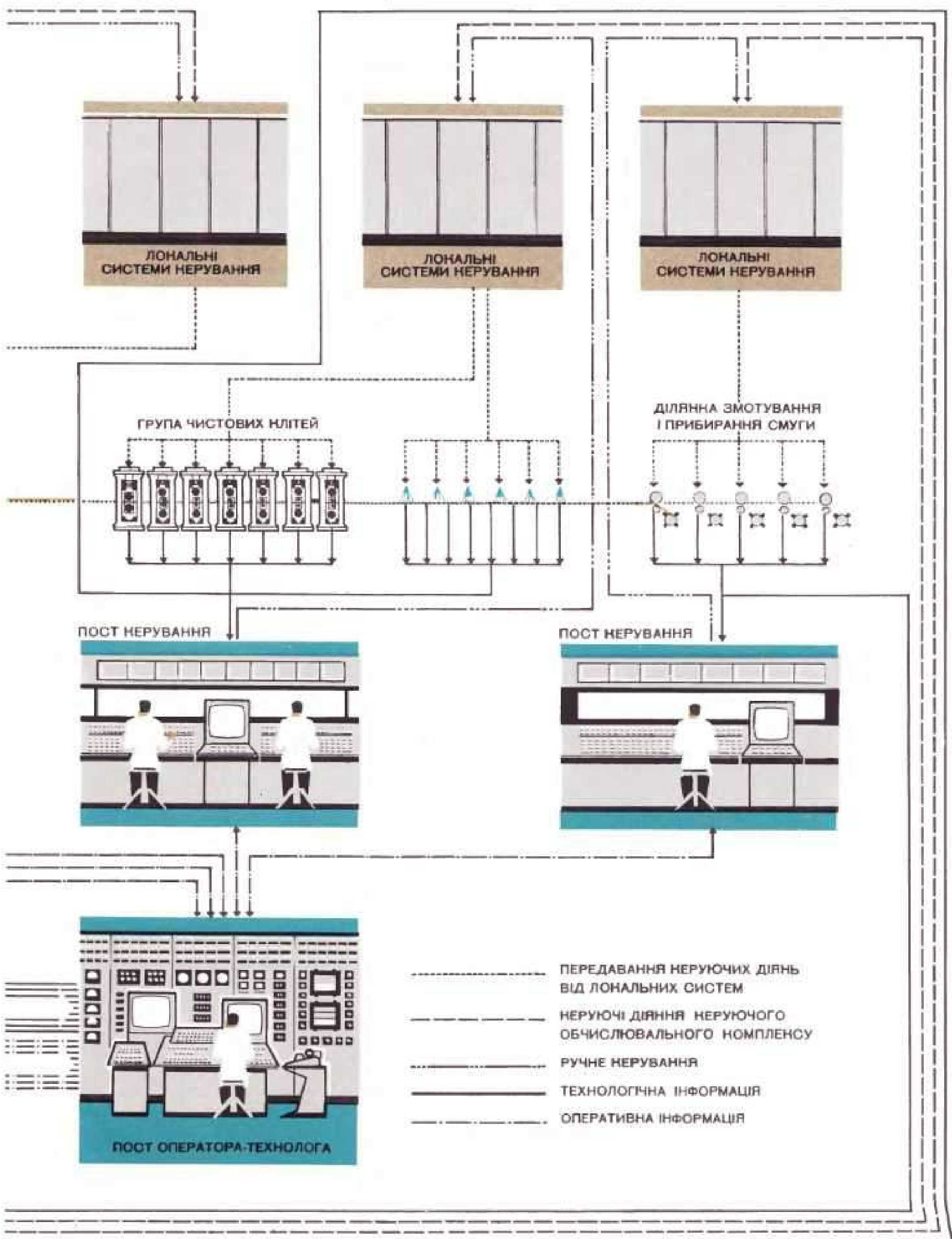


До ст. Керуюча обчислювальна машина.

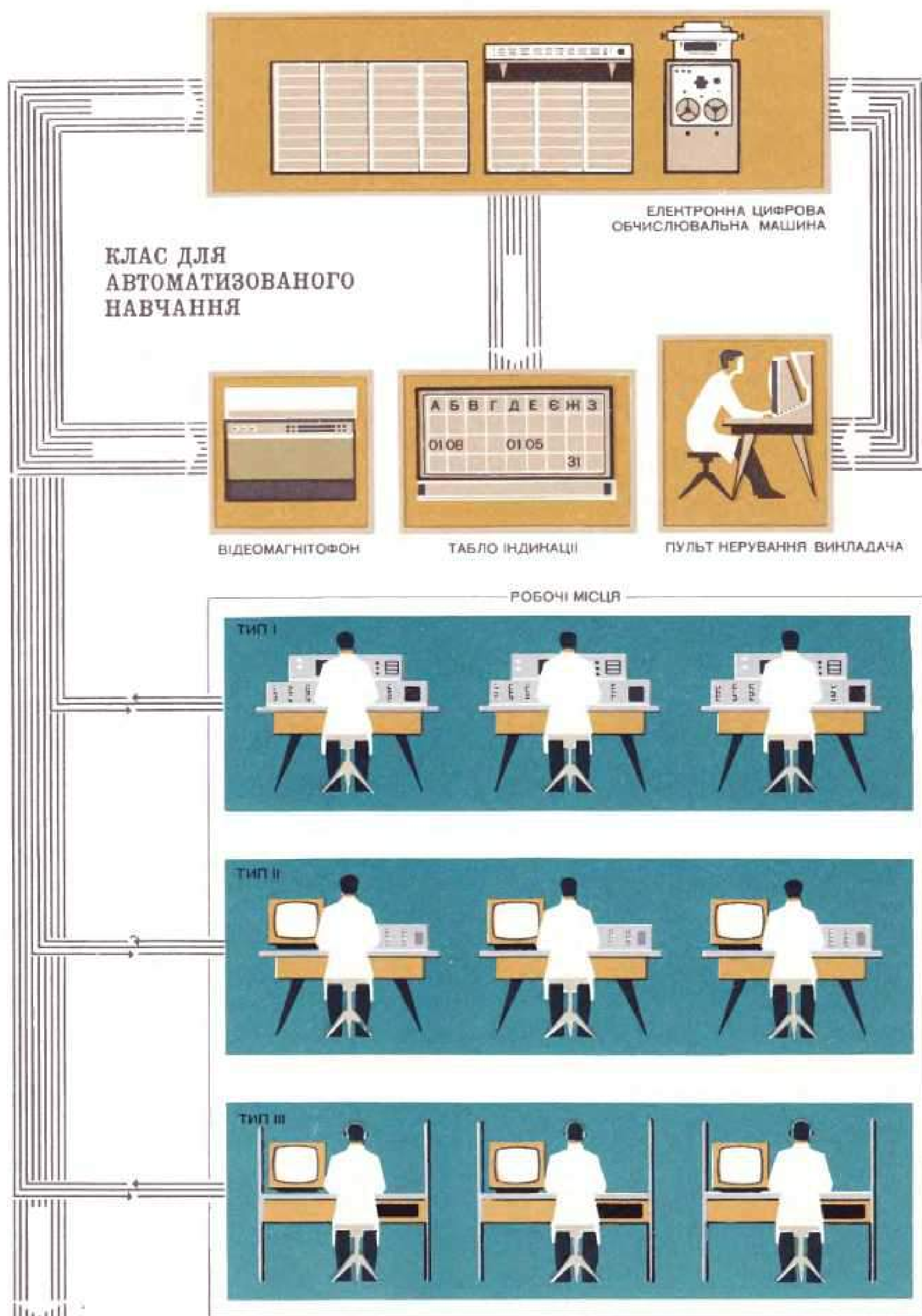
КЕРУЮЧА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА В АВТОМАТИЗОВАНІЙ СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ ШИРОКОСМУГОВИМ СТАНОМ ГАРЯЧОГО ПРОКАТУВАННЯ







До ст. *Керуюча обчислювальна машина*

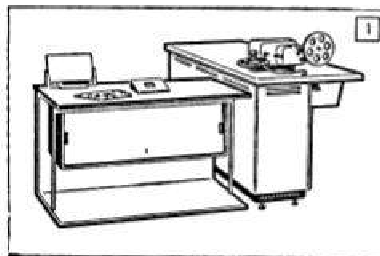


До ст. Автоматизованого навчання клас

величини, за винятком однієї. Див. також *Автономність, Дуальне керування, Процес керований.* *Б. Ю. Мандровський-Соколов.*

«КИЇВ-67» — спеціалізована цифрова керуюча машина, призначена для керування процесами електроннопроменевої (іоннопроменевої) мікрообробки матеріалів. Перша вітчизняна машина такого типу. Розроблено її в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1967.

У машині (мал. 1) реалізовано зручну для технологів вхідну мову, яка дає змогу записувати початкову інформацію в цифро-буквеній формі. Процес обробки поділяється на етапи, в межах кожного з яких енергетичні характеристики променя й часові параметри не змінюються. За однією командою машина здатна опрацювати будь-яку з п'ятьох довільно розміщених у межах растра елементарних геом. фігур потрібних розмірів: точковий растр, кілька прямокутників, похилу лінію, коло або дугу та площу, обмежену з двох боків похилими з будь-яким кутом нахилу або дугами потрібного радіуса. Комбінуючи ці фігури та зв'язки між ними й задаючи опрацьовування їх у потрібній часовій послідовності при різних енергетичних характеристиках пучка й часових параметрах опромінювання, можна керувати відтворюванням складних малюнків, створенням компонентів інтегр. схем, виготовленням різноманітних фільєр, проведенням мікрозварювання тощо. Кожна команда складається з десятьох слів, у ній є дані про закон переміщування променя по поверхні оброблюваного підкладу, про координати першої й останньої опромінюваних точок, значення струму електронного променя та прискорюючої напруги, тривалість робочих імпульсів і пауз між ними та про кількість імпульсів. Координати точок задаються кількістю кроків із зазначенням номера квадранта (ділянка обробки становить 2000 × 2000 кроків). Режим обробки може бути імпульсним або квазінеперервним (в останньому випадку промінь не вимикається при переміщенні від точки до точки). Блок формування часових параметрів (мал. 2) регулює за програмою тривалості імпульсів і пауз між ними при будь-якому співвідношенні їх у діапазоні від 2 *мксек* до 10,2 *сек.* Кількість імпульсів опромінювання в кожній точці може досягати 2047. Програми обробки можна вводити з перфострічки, від іншої цифрової обчисл. машини або з пульта керування. Зберігаються вони в магн. запам'ятовувальному пристрої ємністю 4096 20-розрядних слів. У блоці відхилення променя є перетворювач кодів у відхильний струм, побудований за принципом підсумовування на навантаженні формованих стабілізаторами струмів, які відповідають значенням розрядів двійкових чисел. Амплітуду струму променя задають у процентах від максимального значення, й це дає змогу стикувати машину з різнотипними електроннопроменевими установками. Основою обчисл. блока є складений на двох цифрових інтеграторах лінійно-круговий *інтерполятор,* який можна перебудовувати на опрацьовування різних елементарних геом. фігур.





1. Спеціалізована керуюча машина «Київ-67».
2. Блок-схема машини «Київ-67».

Налагоджування програм і контроль за правильністю введення їх та перевіряння станів блоків машини в процесі керування здійснюються за допомогою блока візуального контролю, побудованого на трубці з темновим записом і плоскому електролюмінесцентному екрані, та акустичного індикатора.

Літ.: Глушков В. М., Деркач В. П. Об автоматизации изготовления микросхем. «Механизация и автоматизация управления», 1967, № 5.

В. П. Деркач.

КІБЕРНЕ́ТИКА (грец. κυβερνητική — мистецтво керувати) — наука про загальні закони одержування, зберігання, передавання і перетворювання інформації в складних керуючих системах. При цьому під керуючими системами тут розуміють не лише технічні, а й будь-які інші — біол., адміністративні та соціальні системи. Прикладами дуже складних керуючих систем є нервові системи живих організмів, особливо організм людини, а також апарат керування в людському суспільстві.

Термін «К.» вперше (після стародавніх греків) ужив 1834 франц. вчений А.-М. Ампер (1775—1836) у запропонованій ним класифікації наук на позначення науки, якої тоді ще не було, про керування людським суспільством. Незабаром після Ампера цей термін було забуто. Знову відродив його амер. учений Н. Вінер (1894—1964) у назві своєї книги, опублікованої в 1948. Цю дату прийнято вважати за дату народження К. як самостійної науки.

Н. Вінер визначив К. як «науку про керування та зв'язок у тварині й машині». Люд-

ське суспільство не згадано в цьому визначенні. Відчуваючи цей недолік, Н. Вінер опублікував у 1954 нову книгу «Кібернетика та суспільство». Проте для обох книг Вінера характерним є оповідний підхід, автор описує свої думки та враження в зв'язку з деякими дослідженнями, які він та його колеги виконали в галузі теорії випадкових процесів і фізіології нервової системи. По суті, в книзі немає послідовного викладу методів нової науки та її результатів. Набагато систематичніше виклав 1956 суть К., як її розумів Вінер, амер. учений У.-Р. Ешбі. Загалом для розвитку К. в США і Зх. Європі, особливо на початку, характерне захоплення її філософськими аспектами (хоч їх не завжди правильно трактували). В 2-й пол. 50-х рр. почали широко використовувати електронні *цифрові обчислювальні машини* (ЦОМ) та автоматизовані системи управління (АСУ). Потрібно було розробити наук. засади проектування таких машин і систем. Оскільки статті та книги з К., які з'являлися тоді, не давали відповіді на насущні питання, поставлені практикою, більшість фахівців з ЦОМ та АСУ за кордоном стали скептично ставитися до самої науки К. Що ж до нових наук. методів і результатів, які виникали у зв'язку з завданнями проектування ЦОМ та АСУ, то їх об'єднали в нову науку, що в США й Англії дістала назву «Computer science» (наука про ЕОМ), у Франції — «informatic». А термін «К.» стали вживати найчастіше у вужчому значенні, розуміючи під К. переважно *аналогії*, які існують між машинами та живими організмами, і філософські питання, що постають у зв'язку з соціальними наслідками автоматизації. Лише наприкінці 60-х рр. намітилися шляхи зближення між «кібернетиками» й «обчислювачами».

В СРСР розвиток К. відбувався інакше. Після початкової негативної реакції, викликаної частково рядом помилкових філософських настанов Н. Вінера та його послідовників, на початок 60-х рр. викристалізувалося ширше тлумачення К., що повністю охоплює не лише теорію ЦОМ, а й численні застосування в різних галузях, починаючи від автоматизації обробки наукових даних до керування великими економ. системами. Схему функціонування довільної системи керування у найзагальнішому вигляді зображено на малюнку. Смисл цього функціонування полягає у здійсненні такого обігу інформації і з таким ритмом, які необхідні для нормального діяння об'єкта: керуючі діяння видаються на об'єкт керування по каналу прямого зв'язку, результати цього діяння сприймаються спец. системою давачів і передаються до керуючої системи по каналу зворотного зв'язку. Передані дані разом з раніше нагромадженою інформацією керуюча система перетворює на нові керуючі діяння, після чого процес обміну інформацією триває.

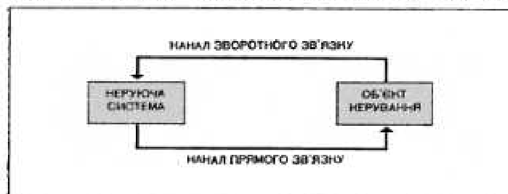


Схема функціонування довільної системи керування.

Інформація про процеси в системах керування може бути у двох видах — неперервному й дискретному. Неперервна інформація про необхідні параметри процесу при передаванні звичайно представлена у вигляді тієї чи іншої фіз. величини (сила струму, кут повороту вала тощо), яка є неперервною ф-цією часу. При зберіганні неперервна інформація представлена у вигляді графіків чи у вигляді якоїсь фіз. величини (напр., величини намагніченості або ступеня прозорості), яка змінюється неперервно на якійсь ділянці простору (лінії, площі). Дискретна інформація представляється у вигляді послідовності окремих сигналів, відокремлених один від одного скінченними часовими чи просторовими проміжками. При цьому кількість різних станів сигналів скінченна. Що ж до фіз. виду сигналів, то для цієї мети можна використати будь-які фіз. величини. Оскільки множина видів дискретних сигналів скінченна, їх прийнято звичайно ототожнювати з буквами того чи іншого (абстрактного) алфавіту або з цифрами тієї чи іншої системи числення. Тому дискретна інформація часто ототожнюється з алфавітно-цифровою інформацією.

У реальних системах керування завжди є можливість наближено звести неперервну інформацію до дискретної, бо всі реальні пристрої для приймання, передавання та відтворення неперервної інформації завжди мають ряд обмежень. Це, по-перше, обмежена чутливість, яка не дає змоги розрізняти мало відмінні одне від одного значення величини, використовуваної для представлення інформації. Внаслідок цього кожний конкретний прилад фактично має справу лише зі скінченною множиною рівнів сигналу. По-друге, мають місце обмеження пропускної та роздільної здатності пристроїв. Ці обмеження не дають змоги розрізняти досить близькі один до одного моменти часу або точки простору, і це, зрештою, приводить до того, що неперервна інформація, яка проходить через пристрій або запам'ятовується в ньому, фактично поділяється на скінченну послідовність сигналів. Тому величезний вплив на розвиток К. справило й продовжує справляти створення універсальних перетворювачів дискретної інформації — електронних цифрових обчислювальних машин.

Автоматичного керування теорія — найближча попередниця К. мала справу з відносно простими об'єктами та керуючими системами, що їх описують системами дифер. і різницевих рівнянь. Обмежені алгоритмічні можливості, що мали місце в механіці регулювання до появи ЦОМ, давали змогу здійснювати

лише найпростіші види перетворення інформації. Нагромадження інформації в керуючих системах і, отже, використання попереднього досвіду в цей період не провадили. Можливість нагромадження інформації (ф-ція пам'яті) і здійснення складних її перетворень найрізноманітнішої природи було у більш-менш повному вигляді вперше реалізовано в ЦОМ. Це дало змогу поставити й успішно розв'язувати завдання автоматизації не лише фізичної, а й розумової діяльності людини, що є осн. практичним завданням К. Центр ваги досліджень змістився від простих систем керування до складних, основаних, як правило, на використанні в них як осн. керуючої ланки ЦОМ. Зрештою, широке використання ЦОМ у системах керування значно підвищило роль дискретної форми представлення інформації й викликало відповідне вдосконалення теор. бази кібернетики.

Для повнішої характеристики предмета К. охарактеризуємо її теор. основу — теоретичну К. Її завдання — створити наук. апарат і метод досліджень, придатний для вивчення широких класів систем керування, незалежно від їхньої конкретної природи. До теор. К. входить кілька наук. напрямів, що розвивалися раніше в таких розділах математики, як *логіка математична*, *імовірностей теорія*, *обчислювальна математика* тощо. До них належить *інформації теорія*, яка має справу з кількісною мірою інформації, *кодування теорія*, яка вивчає способи представлення дискретної інформації у вигляді послідовностей букв абстрактних алфавітів, та *алгоритмів теорія*, що займається перетвореннями таких послідовностей. Деякі матем. розділи К. виникли й розвинулися в рамках самої К. Це, зокрема, стосується заг. теорії автоматів, предметом якої є вивчення довільних перетворювачів дискретної інформації, і, значною мірою, її частини, що розвинулася раніше,— теорії логічних сіток. До *автоматів теорії* приєднуються теорії формальних мов та граматик, які становлять основи заг. теорії знакових систем. Усі перелічені напрями К. мають справу з дискретною інформацією та її перетвореннями, що становлять основу при побудові теорії будь-яких систем керування (див. *Дискретних перетворювачів теорія*). Практично можливо звести довільну інформацію до дискретної, але принципове значення для К. має факт існування універсальних перетворювачів дискретної інформації, встановлений ще до виникнення К. в рамках матем. логіки. Універсальний перетворювач дискретної інформації характеризується тим, що, одержавши та запам'ятавши опис будь-якого конструктивного перетворювача (тобто перетворювача дискретної інформації, описуваного будь-якою скінченною множиною правил), він може виконувати (з точністю до зміни кодування) роботу цього перетворювача. Універсальні перетворювачі інформації реалізують т. з. повні системи елементарних перетворень і способів їх композиції, з яких, як з атомів, можна скласти довільні конструктивні перетворення інформації — *алгоритми*. До таких універсальних перетворювачів дискретної інформації належать, зокрема, й сучасні ЦОМ.

Матем. основою теорії систем керування, які мають справу з неперервною інформацією, є насамперед теорія звичайних дифер. рівнянь, що переростає в заг. теорію динамічних систем (не обов'язково неперервних). Загалом намітилася тенденція до створення загальнішого матем. апарату кібернетики, що охоплює гібридні (дискретно-аналогові) керуючі системи. Неперервні й дискретні форми представлення інформації вивчають (з різних точок зору) в таких розділах матем. апарату К., як *випадкових процесів теорія*, *ігор теорія*, теорія статистичних розв'язків, і в методах розв'язування складних екстремальних задач (лінійне, опукле, стохастичне та динамічне програмування, методи оптимізації на графах тощо). Використовуючи цей апарат, розвинулися такі вже специфічні для теор. К. наук. напрями, як *розпізнавання образів* і теорія навч. і самоорганізовних систем керування. Вони, поряд з теоріями алгоритмів, автоматів і формальних мов, відкривають нові можливості для розв'язання однієї з найзахоплюючих задач К.— розкриття закономірностей нагромадження та перетворення інформації в мозку людини. Як бачимо, теор. К. широко використовує математику і будується на матем. основі. Проте теор. К. не зводиться тільки до математики. Вона, як і всі інші природничі й тех. науки, широко використовує експеримент як метод вивчення об'єкта. Дуже важливою характерною особливістю К. є те, що вона запровадила принципово новий метод вивчення об'єктів та явищ — т. з. матем. експеримент, або машинне моделювання.

Смисл цього методу полягає ось у чому: дуже багато об'єктів та явищ описуються настільки складними системами співвідношень, що прямо застосовувати традиційні матем. методи практично неможливо. Якщо, напр., об'єкт описується системою з багатьох сотень нелінійних дифер. рівнянь, з багатьма десятками параметрів, то, як правило, аналітично розв'язати такі системи неможливо, а коли б і було можливо, то дослідження одержаних складних аналітичних залежностей звичайними матем. методами практично не привело б до успіху. В цьому випадку природно вдатися до матем. експерименту. Описи відповідної системи рівнянь і певного методу її числового розв'язання вміщують у пам'ять ЦОМ. Завдяки величезній швидкості роботи сучасних ЦОМ за короткий час можна одержати велику кількість варіантів розв'язків системи при різних значеннях параметрів. Це дає можливість автоматично будувати таблиці (або графіки) залежностей від параметрів тих чи інших властивостей розв'язків, що нас цікавлять. Інакше кажучи, за допомогою матем. експерименту можна досліджувати об'єкт за його описом (див. *Модель математична*), не вдаючись до побу-

дови та дослідження реальної *моделі фізичної* цього об'єкта. Ефективність такого підходу визначається, зокрема, точністю машинного моделювання, яку можна оцінити на основі *похибок обчислювань теорії*. Дуже важливо підкреслити, що матем. експеримент можна застосовувати й до таких об'єктів, які не мають точного матем. опису в традиційній формі (тобто у вигляді ф-л чи рівнянь). Його успішно застосовують і до об'єктів, що мають лише якісні (але досить точні й повні) описи. Напр., записавши в пам'яті ЦОМ правила граматики з повними списками винятків, можна провадити матем. експерименти з мовними конструкціями. Аналогічно можна будувати й вивчати моделі біол. еволюції, розвиток складних економ. та соціальних систем тощо. Наявність методу машинного моделювання ставить теор. К. поряд з математикою в особливе становище щодо ін. наук. А саме: маючи свій специфічний предмет дослідження (керуючі системи), К. має водночас і новий метод дослідження (матем. експеримент), що його, як і матем. формули, застосовують в ін. науках, незалежно від специфіки об'єктів чи явищ, які вони досліджують. Більше того, матем. експеримент охоплює значно більшу, ніж класичні дедуктивні матем. методи, галузь можливих застосувань, включаючи до складу їх практично всі науки,— як технічні та природничі, так і соціальні. Зрозуміло, що, даючи новий універсальний метод наук. дослідження для ін. наук, теор. К., як і математика, аж ніяк не претендує на те, щоб підмінити чи замінити собою ці науки. Поява ЦОМ і методу машинного моделювання привела до того, що теорія *складних систем керування* стала одним з осн. розділів К.

Однією з найважливіших принципових відмінностей складних систем від простих є те, що закони функціонування складних систем не може описати й вивчити одна людина, для цього потрібні колективи дослідників. Так, закони функціонування різних регуляторних та керуючих систем людського організму вивчають учені різних спеціальностей (нейрофізіологи, ендокринологи та ін.). Скласти з цих розрізнених знань комплексну картину функціонування людського організму можна за допомогою машинного моделювання. При цьому в одному місці (в ЦОМ) не просто нагромаджуються окремі факти. Виникає нова якість: ЦОМ здатна відповідати на деякі запитання про поведінку всієї складної системи (в даному разі людського організму) загалом. Методи комплексного дослідження складних систем керування становлять основу т. з. аналізу систем (див. *Систем загальна теорія*) та *операцій дослідження*. Крім теор. ядра, що становить апарат для вивчення довільних систем керування, у К. оформилися напрями більш прикладного характеру, які мають справу з тими чи іншими конкретними видами систем керування та галузей застосувань. На одному з перших місць тут стоїть електронна обчислювальна техніка — основа тех. бази К. А в основі теорії ЦОМ і *математичного забезпечення ЦОМ* лежить апарат теор. К. Цей апарат широко використовують, будуючи системи *автоматизації проектування ЦОМ*. Програмування для ЦОМ є по суті прикладною теорією алгоритмів, а теорія різного роду пристроїв, які входять до складу ЦОМ,— прикладною теорією автоматів. Опис різного роду *алгоритмічних мов* і теорія трансляції та інтерпретації таких мов у ЦОМ спираються на теорію *мов формальних* і *граматик формальних*.

За свою порівняно коротку ще історію ЦОМ пройшли великий шлях розвитку — від простих лампових машин, призначених переважно для автоматизації обчисл. робіт, до складних систем обробки даних, які будуються на базі мікроелектронної *обчислювальної техніки* і мають якнайширшу сферу застосування. Великі зрушення відбулися в організації використання ЦОМ. Якщо спершу їх використовували для розв'язування окремих задач, то з початку 60-х років осн. увагу спрямовують на комплексну автоматизацію, на т. з. системний підхід до застосування ЦОМ. Суть цього підходу полягає в тому, що, по-перше, автоматизується не лише обробка інформації, а й її збирання, введення та виведення в остаточній формі, яка не потребує ніякої додаткової обробки. По-друге, в пам'яті машини завжди є комплекс програм і необхідна для їхньої роботи інформація (в складних системах керування — інформаційна модель об'єкта керування). Для організації послідовної роботи окремих програм, постачання їх необхідною інформацією та для взаємодії з людьми, які працюють на спец. пультах, призначене спец. матем. забезпечення — т. з. *операційна система*.

Серед галузей застосування К. та ЦОМ одне з перших місць, як і раніше, посідає наука. При *системному підході* великого значення набули системи автоматизації експериментальних досліджень. Розрізняють три види таких систем. У найпростішому випадку автоматизація збирання даних здійснюється завдяки тому, що вимірювальна апаратура фіксує дані на таких носіях і в такій формі, щоб їх можна було ввести в ЦОМ за допомогою спец. ввідних пристроїв без будь-якої додаткової обробки. Високого рівня автоматизації досягають, застосовуючи спец. перетворювачі, за допомогою яких знімають інформацію, перетворюють її на цифрову форму та передають (по спец. *каналах зв'язку* або лініях зв'язку заг. призначення) у ЦОМ у реальному масштабі часу. Якщо експериментальні установки відносно прості, одна ЦОМ може обслуговувати багато окремих лабораторій. Ще вищого рівня автоматизації досягають у складних експериментальних установках (прискорювачі, радіотелескопи тощо), де ЦОМ вбудовують в установки як їхні органічні складові частини. Для подальшого використання експериментальної інформації, особливо тієї, що її одержано внаслідок експериментів,

які дорого коштують, або таких, що їх важко повторити, організовують тривале зберігання цієї інформації в цифровій формі на машинних носіях запису інформації (*стрічки магнітні, диски магнітні* тощо).

Іншим напрямом наук. застосувань ЦОМ, що робить тепер тільки перші кроки, є створення системи автоматизації дедуктивних побудов, напр., системи автоматизації доведення теорем у математиці (див. *Доведення теорем на ЕОМ*). Найперспективнішими є людино-машинні системи, в яких людина дає ідею доведення, ставить проміжні цілі, а машина здійснює пошук у заданому напрямі і, в разі успіху, оформляє одержані результати. В таких системах складовою частиною мають бути *інформаційно-довідкові системи*, які нагромаджують сукупність раніше встановлених фактів обгрунтувань їх. Автоматизація довідково-інформаційної роботи в науці має, звичайно, й самостійне значення. Нарешті, велике місце в наукових застосуваннях ЦОМ та К. займає описане вище машинне моделювання.

Велику роль К. та ЦОМ відіграють у розвитку техніки. Дедалі важливішого значення набувають системи автоматизації проектування в різних галузях техніки. Якщо донедавна ЦОМ використовували для розв'язування окремих конструкторських задач розрахункового характеру, то тепер дедалі зміцнюється системний підхід. При цьому за допомогою спец. операційних систем здійснюється робота з кресленнями та іншою конструкторською документацією. Конструктори, працюючи за спец. *екранними пультами*, можуть викликати на них зображення окремих креслеників або фрагментів їх, стежити за ходом проектування, передавати в систему різні вказівки та вносити зміни тощо (див. *Автоматизована система проектування*). Автоматизовані системи випробувань складних тех. об'єктів будують приблизно за тими самими принципами, що й *автоматизовані системи обробки експериментальних даних*.

Системи автоматизації керування технологічними процесами почали розвиватися задовго до виникнення К. Проте тоді завдання цих систем зводилося здебільшого до авторегулювання, тобто утримання тих чи інших параметрів, що характеризують процес, у заданих межах. Поява ЦОМ і розвиток К. дали змогу перейти до розв'язування задач оптим. керування. Різко зросла складність систем. При конструюванні їх почали застосовувати ідеї самонавчання та самоорганізації.

Інший напрям в автоматизації технології — програмне керування, яке має особливо велике значення в машинобудуванні та приладобудуванні.

Верстат з програмним керуванням може швидко перебудовувати свою роботу за рахунок простої зміни програми, записуваної на магнітну стрічку або перфострічку. Переміщувати й установлювати на верстатах деталі також можуть універсальні програмні автомати. А коли ще й програми, які керують таким автоматизованим устаткуванням, є виходами автоматизованої системи керування, то з'являється можливість створювати цехи-та заводи-автомати, здатні швидко перебудовуватися для випуску нових видів продукції. Останнім часом збільшився інтерес до створення людиноподібних автоматів, як *роботів*, керованих ЦОМ, так і простіших пристроїв — кіборгів, які імітують і підсилюють рухи людей, котрі ними керують.

Завдання автоматизації технологічних процесів таке важливе й специфічне, що сукупність наук. напрямків, які забезпечують його розв'язання, об'єднують здебільшого в спец. розділ К., що його названо *кібернетикою технічною*. Завдання керувати технологією безпосередньо стикаються з завданнями керувати підприємствами в організаційно-економічному плані (планування, керування запасами, організація збуту та постачання, фінансові операції тощо). Ці завдання має розв'язувати інший розділ К., що його найчастіше наз. *кібернетикою економічною*. Автоматизовані системи для розв'язування таких завдань наз. системами адміністративного, або організаційного, управління. Системний підхід щодо таких систем означає не лише автоматизоване збирання інформації, а й комплексне розв'язування задач. Їхньою особливістю є наявність для всіх задач спільного поля інформації (інформаційної моделі об'єкта), яке зберігається в пам'яті системи й постійно автоматично поповнюється в міру надходження нових даних.

Автоматизовані системи адмін. управління мають цілком автоматизувати документообіг. Інакше кажучи, в ЦОМ треба вводити тільки дійсно первинні дані. Всі ті дані, які можна вивести з них, одержують у системі автоматично у вигляді тих чи інших вторинних документів. Що ж до первинної інформації, то її підготовка або поєднується з приготуванням документів первинного обліку (фінансового чи матеріального), або здійснюється автоматично за допомогою відповідних давачів та систем керування технологією. Останнім часом намітилася тенденція до органічного злиття автоматизованих систем технологічного й адміністративного управління. Такі системи названо інтегрованими. Автоматизовані системи адміністративного управління (див. *Автоматизовані системи управління підприємством*) набувають поширення не тільки в промисловості, а й на транспорті, в будівництві, проектно-конструкторських та науково-дослідних установах, у банках тощо. Автоматизовані системи управління окремими підприємствами й установами зливаються в складні системи управління галузями нар. г-ва (див. *Автоматизовані системи управління* в народному господарстві), а надалі (для країн соціалістичного ладу) — й усім нар. г-вом у цілому. «Треба ... швидше створювати галузеві автоматизовані системи управління,— підкреслював у звітній доповіді ЦК КПРС на

XXIV з'їзді партії Л. І. Брежнєв,— маючи на увазі, що в перспективі ми повинні створити загальнодержавну автоматизовану систему збирання й обробки інформації».(Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971, с. 77). Обмін інформацією в таких системах спочатку відбувається на машинних носіях (найчастіше — на магнітних стрічках), а потім заміняється безпосереднім обміном даними між ЦОМ по каналах зв'язку. Відбувається процес дедалі більшого й більшого злиття сітки ЦОМ з системою зв'язку, що приведе в майбутньому до докорінної зміни всіх наших уявлень про завдання такої системи. Система зв'язку в майбутньому має надавати споживачам послуги не лише щодо простого передавання інформації, а й щодо зберігання її та переробки. У зв'язку з цим великий інтерес становить одне з практичних завдань, що його починає вже розв'язувати К.,— створення т. з. національних «банків» даних. Під цим розуміють нагромадження в пам'яті ЦОМ тієї чи іншої інформації, напр., усіх законів країни або даних про новини науки й техніки, і можливість швидко автоматично одержувати довідки з пультів, розміщених у будь-яких частинах країни, через єдину систему зв'язку. Близькі завдання розв'язують у т. з. *програмованому навчанні*. Але, на відміну від простих банків даних, тут ЦОМ може не тільки видавати інформацію, а й ставити запитання, оцінювати відповіді на них, відсилаючи, в разі потреби, до раніше пройденого матеріалу або задаючи простіші запитання.

Внаслідок особливої важливості та специфіки вивчення організму людини і насамперед її мозку, питання застосування ЦОМ і К. з цією метою виділяють здебільшого в окремий розділ К.— *кібернетику біологічну*. Зрозуміло, при цьому не виключається дослідження кіберн. методами не лише людського, а й будь-яких інших живих організмів. Крім питань комплексного моделювання організму та вивчення в інформаційному плані розумових процесів, біол. К. включає в себе й чимало питань, що стосуються медицини. Йдеться про створення штучних органів та керування ними (див. *Біоелектричне керування*), про автоматизацію діагностики, про системи для автоматизації анамнезу й мед. статистики, про національні «банки» мед. даних (історій хвороб, що містять дані про стан та зміни стану здоров'я всіх членів суспільства), тощо (див. *Медична інформаційна система*).

У зв'язку з завданням моделювати функції мозку й автоматизувати розумові процеси (див. *Штучний розум*) постає ряд принципових питань філософського характеру. Це передусім питання про межі автоматизації розумових процесів. Одним з найважливіших досягнень К. є встановлення того факту, що таких меж принципово (в суто теоретико-пізнавальному плані) не існує. Водночас у плані історичному, оскільки є різниця між людським суспільством та знаряддями, які це суспільство використовує (якими б досконалими вони не були), завжди будуть складові частини розумового процесу, що залишаться прерогативою людини. На найвищих рівнях автоматизації їх можна буде звести до постановки заг. цілей розвитку та остаточної оцінки результатів та розв'язків, що їх одержують автоматизовані системи. Друге питання — можлива небезпека, пов'язана з помилками автоматизованих систем керування. Справа в тому, що економ. ефект, який дають автоматизовані системи, дуже зростає при збільшенні розмірів систем. Тому масштаби таких систем безперервно зростають і, відповідно, все більша й більша частина роботи щодо підготовки відповідальних рішень перекладається на машини. При цьому виникає небезпека, що через ненадійність автоматизованих систем або через помилки їхніх конструкторів та програмістів може збільшуватися можливість прийняття помилкових або навіть згубних для суспільства рішень. Такі побоювання поділяв, напр., Н. Вінер. Проте розвиток К. свідчить про необгрунтованість таких побоювань. Надійність кібернетичних систем спирається, насамперед, не тільки на надійність їхніх елементів, яка безперервно зростає, а й на виявлену К. можливість побудувати як завгодно надійні системи з ненадійних елементів. Що ж до помилок конструкторів і програмістів, то за звичайних методів їхньої роботи ймовірність їхніх помилок справді зростає зі збільшенням розмірів систем. Проте й тут випереджаючий розвиток автоматизованих систем проектування разом з розвитком почуття соціальної відповідальності конструкторів автоматизованих систем є гарантією безперервного зменшення ймовірності помилкових рішень. Імовірність помилки в рішеннях, що їх підготовляють автоматизовані системи, набагато менша, порівняно з рішеннями, одержуваними традиційними безмашинними методами.

Зрозуміло, К., як і будь-яка інша наука, не гарантована від того, що її результатами зловживатимуть окремі групи чи класи. Але розв'язання цього питання належить до сфери соціальних наук, до проблеми побудови справедливого безантагоністичного суспільства (див. *Соціологічні питання кібернетики, Філософські питання кібернетики*).

К.— наука комплексна й інтернаціональна, бо в її розвиток роблять свій внесок учені й колективи різних країн світу. Для розв'язання проблем різних її аспектів та розділів багато зробили вітчизняні й зарубіжні вчені, імена яких названо у відповідних статтях цієї енциклопедії. Обмінові інформацією, виробленню стратегічних напрямів розвитку, розв'язанню великих проблем К. та обчисл. техніки й застосуванню їх сприяють такі міжнародні організації, як *Міжнародна федерація по обробці інформації* (ІФІП), *Міжнародна федерація з автоматичного керування* (ІФАК), Міжнародна федерація по дослідженню операцій (ІФОРС) та *Міжнародна федерація з аналогових обчислювань* (АІКА).

На Україні К. почала розвиватися наприкінці 40-х рр., хоча ще на початку 20 ст.,

задовго до Н. Вінера, український учений Я. І. Грдина висловлював думки про взаємозв'язки між автоматикою та біологією, аналогічні тим, які спонукали Н. Вінера написати книгу «Кібернетика». У 1947 в АН УРСР було створено лабораторію моделювання й обчисл. техніки; 1951 у Києві розроблено першу в СРСР і континентальній Європі електронну цифрову обчисл. машину *«МЭСМ»*; на базі лабораторії 1957 створено Обчислювальний центр АН УРСР на правах н.-д. інституту, який згодом реорганізовано в Ін-т кібернетики (див. *Ордена Леніна інститут кібернетики Академії наук Української РСР*). На Україні створено школи з теорії автоматів та її застосувань, тех., біол. та економічної К., системотехніки, теорії ЦОМ та АОМ. Тут розроблено багато цифрових і аналогових обчисл. машин, створено першу типову автоматизовану систему управління підприємством.

К. перебуває на самому вістрі науково-технічного прогресу. Роль її в народному господарстві нашої країни зростатиме й далі. Директивами XXIV з'їзду КПРС по п'ятирічному плану розвитку народного господарства СРСР на 1971—1975 роки передбачено «дальше розроблення проблем теоретичної і прикладної математики та кібернетики для ширшого застосування в народному господарстві математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, автоматизації процесів виробництва і вдосконалення управління». (Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971, с. 273).

Літ.: Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971; Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. Пер. с англ. М., 1968; Винер Н. Кибернетика и общество. Пер. с англ. М., 1958; Эшби У. Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959 [бібліогр. с. 396—399]; Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]. *В. М. Глушков.*

КІБЕРНЕ́ТИКА БІОЛОГІ́ЧНА — напрям *кібернетики*, який вивчає закони зберігання, переробки й передавання інформації в *біологічних системах*. К. б. використовує моделювання й вивчає методи аналізу й керування біол. системами. Вона не підмінює інших біол. наук, бо займається переважно матем. обробкою, побудовою моделей, переробкою інформації, а не безпосереднім одержуванням даних. Традиційними методами дослідження біол. систем, описуванням їх і керуванням ними займається біологія. Але в міру свого розвитку біол. науки дедалі дужче потребують методів кібернетики, бо принцип символьного вираження відомостей у вигляді моделей дає змогу не тільки уточнити якісні й кількісні уявлення про систему, а й одержати нові дані. К. б. використовує методи *автоматів теорії*, *алгоритмів теорії*, *систем загальної теорії*, теорії *складних систем керування* і теорії автоматичного регулювання й керування (теорії стійкості, інваріантності, оптимального керування, *інформації теорії*, *операцій дослідження* та ін.). Жива природа складна й різноманітна, тому в К. б. виділяють кілька напрямів, які вивчають різні біол. системи та їхні окремі ф-ції: мед.,фізіол. і психол. кібернетику, нейрокібернетику й біоніку.

Кібернетика медична займається, головним чином, створюванням статистичних моделей захворювань і використовує їх для діагностики, прогнозування й лікування, а також вивчає процеси управління в медицині й охороні здоров'я. Фізіологічна кібернетика вивчає й моделює функції клітин, органів і систем в умовах норми й патології з перспективою використання моделей для медицини. *Нейрокібернетика* моделює процеси переробки інформації в нервовій системі — від *нейрона* до організму в цілому. Психологічна кібернетика моделює психічні ф-ції на базі вивчення цілісної поведінки людини. *Біоніка* є зв'язуючою ланкою між К. б. і *кібернетикою технічною* й вивчає можливості використання моделей біол. процесів у техніці. В міру нагромадження в біол. науках кількісної інформації виділяються нові напрями К. б.

Створюючи кількісні моделі, в першу чергу формулюють мету моделювання; після цього переходять до створення гіпотези, яка становить якісний опис системи, й до вибору типу моделі, матем. методів і тех. засобів для вираження її залежно від мети моделювання, кількості та якості інформації. Останній етап — це створення моделі й дослідження її для ідентифікації з системою-об'єктом. Матем. модель біол. системи, яка дає досить добрий збіг з результатами її експериментальних випробувань при розширенні зовн. умов, можна назвати теорією роботи цієї системи (див. *Біологічних систем математичне моделювання*).

Залежно від мети моделювання моделі повинні з різним ступенем точності відображати структуру й функції системи (всієї або її частин). Для пізнання й керування ступінь точності повинен бути детальнішим, ніж для створення пристроїв, які замінюють систему, коли можна обмежитися моделюванням відношень «входи—виходи» (див. *«Чорний ящик»*), не претендуючи на відтворення внутр. структури й окремих функцій. Ряд особливостей біол. систем визначає вимоги до моделі й обмежує можливості моделювання. Всі біол. системи дуже складні, тому в більшості випадків можливі тільки ймовірнісні, а не точні моделі; методи класичної математики застосовні в К. б. тільки для моделювання окремих функцій і то з обмеженим ступенем точності. Біол. системи становлять складну ієрархію. Модель кожної системи може охоплювати різну кількість суміжних рівнів «згори» і «знизу». Напр., організм можна моделювати «знизу» — з рівня молекул, клітин або органів і враховувати вплив «згори» таких систем, як популяція, біогеоценоз або навіть усієї біосфери. Чим більше суміжних рівнів включено в модель, тим вона точніша й тим більше якостей системи-об'єкта вона відображає.

На кожному структурному рівні біол. системи (клітина, організм, популяція) можна

умовно виділити робочі й керуючі *підсистеми*. Між ними циркулюють потоки не тільки матеріальних часток, а й інформації, яку виражає її енергетичний *код*. При моделюванні є обов'язковим відображати як матеріально-енерг., так і інформаційно-моделюючі властивості систем. Функції біол. систем, їхніх підсистем та елементів становлять поєднання дискретних і неперервних процесів, тому й для моделювання їх треба використовувати поєднання дискретних і неперервних методів.

Вищою атрибутивною властивістю біол. систем є здатність до самоорганізації, яка виражається в зміні функцій і структури за рахунок появи нових зв'язків при однаковій кількості елементів або в зміні структури за рахунок зміни числа елементів і зв'язків між ними й утворенні нових рівнів. Якість самоорганізації звичайно локалізується на різних рівнях структур (зміни в ДНК при мутаціях і рекомбінаціях, умовні зв'язки в нейронах кори головного мозку, творчість окремих людей у суспільстві). Для моделювання цієї якості необхідно «почати» побудову моделі з відповідного рівня, а це пов'язане з великими тех. труднощами й поки що практично неможливе.

У розпорядженні біології ще про жодну з її складних систем немає необхідної кількості та якості інформації, яка б дала змогу вже тепер створити моделі з високим ступенем ідентичності їхньої поведінки. Щоб одержати таку інформацію, необхідні експериментальні дослідження на новому тех. рівні, а для обробки результатів цих досліджень — широке використання *обчислювальної техніки*.

Зважаючи на нестачу інформації й важкість одержування її, в К. б. створюють евристичні моделі й відтворюють у них гіпотези про структуру й функції системи з використанням наявної інформації й доповненням нестачі її за рахунок припущень. Евристичні моделі використовують для перевірки гіпотез, для планування експериментів і для керування системою.

За характером блок-схеми моделі можна умовно поділити на феноменологічні й структурні. У феноменологічних, або функціональних, моделях відображають часові й причинно-наслідкові відношення між дискретними явищами, які характеризують функцію біол. системи без врахування її структури. Можливі моделі різної складності: моделі, які відображають залежності дискретних входів і виходів цілої системи, розгляданої як «чорний ящик», та ієрархічні моделі, в яких представлено не тільки загальні для системи виходи і входи, а й дискретні функції внутр. підсистем, які при інтеграції визначають цілісну поведінку. Деталізація функцій виділення кількох рівнів, розчленування енерг. та інформаційних потоків, прив'язка до внутр. структурних елементів, уведення ймовірнісних оцінок і *зворотних зв'язків* хоч і дуже ускладнює моделі цього типу, зате наближає до розкриття сутності системи. С т р у к т у р н і   м о д е л і будують на базі внутр. структури системи, вони відображають один або кілька ієрархічних рівнів (елементи, підсистеми й зв'язки). До структури «прив'язують» неперервні й дискретні зміни окремих функцій, з яких розраховують сумарні функції системи як цілого. Модель становить плоску або просторову сітку, яка відображає робочі й керуючі елементи системи. Структурні моделі краще пристосовані, щоб виражати сутність системи, проте складність розрахунків не дає змоги починати моделювання з низьких структурних рівнів і змушує обмежуватись відображенням окремих підсистем і окремих функцій. Крім типових феноменологічних і структурних моделей, можливі й мішані моделі, в яких окремі підсистеми або їхній певний рівень виражаються за першим, а всі інші — за другим типом. Вибір залежить від специфіки системи. Як тех. засоби для створювання моделей використовують ЕЦОМ, бо вони дають змогу переробляти великий обсяг інформації, хоч програмування на них трудомістке, окремі функції й окремі підсистеми можна моделювати на *аналогових обчислювальних машинах*.

Окремою областю К. б. є організація й проведення експериментів по зняттю статистичних і динамічних характеристик біол. об'єктів. До початку проведення таких експериментів здійснюється постановка задачі (визначають орган або функціональний акт, який треба вивчити; встановлюють протяжність досліду й граничні умови). Це припускає формулювання якоїсь гіпотези, яка виражається в якісних поняттях. Після постановки задачі переходять до побудови функціональної схеми об'єкта (перелічують усі входи й виходи, на основі гіпотези з них виділяють істотні). Наступний етап — планування експерименту (визначають контрольовані входи, виділяють стабілізовувані й змінні параметри, режим навантажень, місця й частоту замірювань). Для успішного проведення експериментів дуже важливо правильно підібрати комплекс вимірювальної апаратури. Після цього проводять серію пробних дослідів, під час яких виробляють методику й визначають застосовність зроблених припущень. Закінчивши попередню підготовку, беруться за проведення осн. серії дослідів для одержання характеристик. Матем. обробку результатів здійснюють на ЕЦОМ, уводячи в неї дані за допомогою *аналого-цифрового перетворювача*.

Заг. принципи керування біол. системами з застосуванням методів кібернетики полягають ось у чому. В и з н а ч е н н я   м е т и   к е р у в а н н я, вираженої моделями початкового, проміжних і кінцевого станів системи. Мету встановлює людина, а кількісні динамічні моделі одного з типів записуються в пам'яті ЕЦОМ або виражаються аналоговою моделлю. Напр., статистичні моделі «внутрішньої сфери» організму настроєні на певну патологію або модель психіки. Ці моделі дають змогу прогнозувати природні зміни системи при різних початкових станах. П е -

реліччування засобів керування з *програмами* їхнього впливу на елементи системи, напр., ліків з називанням механізму дії у вигляді зміни характеристики органів. Складання алгоритму керування. Розрахунок за моделлю зміни системи в часі при різних керуючих діяннях і вибирання оптим. стратегії й тактики керування для досягнення мети. Прийняття рішення й уточнення програми керування. Напр., вибирання методу лікування за критеріями ефективності залежно від початкового стану хворого й програма послідовності застосування засобів. Контроль виконання програми керування, який враховує систему зворотних зв'язків, оцінку стану системи на проміжних стадіях і корекцію керуючих діянь залежно від ефекту керування. Це дуже важливий момент, бо можливі тільки ймовірнісні моделі біол. систем, які не дають змоги однозначно передбачити її реакцію на керування.

Керування біологічними системами можливе в клінічній медицині — для діагностики й прогнозування розвитку хвороби, вибирання й проведення лікування аж до автомат. керування життєвими функціями при гострих патологічних станах; у фізіології — для планування й проведення експерименту; в психології — для *програмованого навчання* й навіть виховання.

Осн. тех. засобом керування біол. системами є ЕЦОМ, оснащені спец. пристроями введення й виведення інформації. В деяких випадках потрібно створити особливі пристрої, які об'єднують у собі спрощену модель біол. системи й програми керування, напр., монітори, які забезпечують стеження й регулювання серцевої діяльності.

Літ.: Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М.— Прага, 1966; Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. К., 1968; Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. М., 1971 [бібліогр. с. 58—61]; Эшби У. Р. Конструкция мозга. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 404—407]; Рашевски Н. Некоторые медицинские аспекты математической биологии. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 236—241]. *М. М. Амосов.*

КІБЕРНЕ́ТИКА ЕКОНОМІ́ЧНА — напрям *кібернетики*, який використовує її методи і засоби для дослідження процесів в економічних системах. К. е. вивчає процеси збирання, нагромаджування, зберігання й переробки інформації про економ. об'єкти чи явища. Предметом К. е. є процеси управління економікою країни, галузі, району, пром. комплексу, виробн., окремого підприємства, цеху, дільниці, кількох верстатів чи групи людей та ін. Методи аналізу, що їх застосовують у К. е., допомагають знаходити оптим. режими керування й управління і будувати раціональні системи обробки економ. даних, які грунтуються на широкому використанні обчисл. техніки. Дослідження з К. е. зводяться до вибору показників, потрібних для управління економ. об'єктами (підприємством, галуззю, групою галузей), до вибору способів одержування, передавання й обробки цих показників з якнайменшими затратами засобів, а також вибору тех. пристроїв обробки інформації на різних рівнях управління (вибір техніки зв'язку, *обчислювальної техніки* тощо); до вивчення й рекомендації *алгоритмів* і *програм* обробки інформації, які дають змогу на основі одержаних показників знайти необхідне рішення в найраціональнішому (з економ. погляду) вигляді й довести його до виконавців; до вивчення способів контролю та обліку виконуваних рішень та ін.

У соціальному аспекті К. е. сприяє стиранню граней між розумовою та фіз. працею, розробляючи нову технологію розумової праці в сфері управління на основі сучасного тех. оснащення. Роль К. е. в сучас. суспільстві значною мірою зростає у зв'язку з необхідністю вдосконалювати економ. організацію як один з наріжних каменів заг. процесу соціального перетворення.

Спочатку становлення К. е. було пов'язане з розробкою матем. моделей економ. систем і явищ, з використанням електронної обчисл. техніки для досліджування цих моделей і для розв'язування задач управління. Застосовування матем. структур і методів багато в чому йшло по лінії використання матем. символіки й ліквідації термінологічних відмінностей. Цей напрям розвивається й тепер у рамках *математичної економіки* та *економетрії*. Матем. моделі економ. систем і явищ дали змогу краще осмислити динаміку досліджуваних систем, виробити дійові рекомендації щодо раціоналізації їхньої структури й методів економ. прогнозування й управління. Особливе значення мало вивчення регулюючих факторів у таких моделях, питань стійкості, рівноваги, росту, регулюючого характеру цін, виявляння й підкреслювання зворотних зв'язків в економіці, досліджування конфліктних ситуацій (у рамках *ігор теорії*), співвідношень між оптим. функціонуванням і заг. мобільністю економ. систем (див. *Макромоделі економічні*, *Мікромодель економічна*, *Моделі економіки*, *Моделі рівноваги* та *Моделі зростання*).

К. е. займається питаннями прийняття рішень в управлінні економ. системами, застосування *моделей математичних* і одержуваних на основі їх машинно-формальних висновків для прийняття рішень у реальних ситуаціях і постановках, розв'язує питання меж і рецептів можливого використання формальних постановок і висновків. Велику увагу приділяють методам евристичного розв'язування задач, експертного прогнозування (див. *Експертних оцінок методи* в прогнозуванні) і побудові людино-машинних систем для розв'язування економічних задач (див. *Система «людина—машина»*). Застосування таких систем, моделювання ситуацій і прийняття рішень для навчання і вироблення раціональніших форм і методів управління (ділові ігри) сприяє тому, що моделювання стає дедалі універсальнішим за-

собом удосконалювання економ. систем, пробним каменем перевірки економ. положень і доктрин.

Проте визначальним напрямом у К. е. є розробка теорії й побудова *автоматизованих систем управління* (АСУ) в нар. г-ві, яка стала можливою тільки в зв'язку зі створенням сучасних тех. засобів обробки даних, особливо систем з розподілом часу (див. *Режим розподілу часу*). Побудова АСУ в економіці є складовою частиною процесів автоматизації, які характеризують сучасну наук.-тех. революцію. Необхідність створення таких систем зумовлюється не тільки їхньою ефективністю в плані удосконалювання економ. систем, зростання продуктивності управлінської праці, а й у плані ефективного використання тех. засобів обробки даних та організації інформаційних процесів у цілому. Це зумовлюється й багатьма соціальними вимогами. Швидке зростання виробн., поглиблення спеціалізації, розширення кооперування виробн., оновлюваність продукції, ефективне використання ресурсів неможливі без створення АСУ. В рамках К. е. розробляють заг. питання структури, побудови й функціонування АСУ в нар. г-ві. Особливу увагу приділяють питанням ефективного збирання інформації, її представлення, іменування, інтерпретації, використовування й циркуляції в АСУ. Інформація в економ. системах стає предметом глибокого вивчення. Розробка інформаційних та *алгоритмічних мов*, мов моделювання, *інформаційно-пошукових систем* та *інформаційно-довідкових систем* орієнтується, по суті, на об'єкти економ. характеру.

К. е. справила багато в чому визначальний вплив і на розвиток деяких нових матем. напрямів — математичного, стохастичного та динамічного програмування, дискретної оптимізації (див. *Оптимізації методи* чисельні), теорії розкладів та ін., на теор. і практичні розробки в галузі обробки даних та *математичного забезпечення ЦОМ*. Розвиток техніки обробки даних, заг. теорії *операцій дослідження* й дослідження систем також пов'язаний з напрямом розвитку й інтересами К. е.

Літ.: Кобринский Н. Е. Основы экономической кибернетики. М., 1969 [бібліогр. с. 253—254]; Процессы регулирования в моделях экономических систем. М., 1961 [бібліогр. с. 291—292]; Ланге О. Введение в экономическую кибернетику. Пер. с польс. М., 1968.

О. О. Бакаєв, В. С. Михалевич, В. В. Шкурба.

КІБЕРНЕ́ТИКА МЕДИ́ЧНА — напрям кібернетики, який вивчає проблеми, пов'язані з процесами управління в медицині й охороні здоров'я. Предметом дослідження К. м. є медична й інші види інформації, системи нагромаджування й переробки інформації, системи зв'язку та керування й управління, які є в людському організмі і в системі охорони здоров'я. К. м. спирається на знання, нагромаджені медициною та охороною здоров'я, а також на матем. апарат *кібернетики* й можливості *електронних обчислювальних машин*. Тех. базою К. м. є цифрові й аналогові обчислювальні машини широкого призначення та *спеціалізовані обчислювальні машини* із складними комплексами *пристроїв введення та виведення інформації*.

Осн. методом пізнання в К. м. є метод моделювання, оснований на глибокому аналізі процесу, який вивчають, або системи. В К. м. широкого розвитку набуло моделювання за методом *«чорного ящика»* з його макро- та мікропідходами. Моделюючи за цим методом, вивчають зміни на вході й виході системи і за ними намагаються з'ясувати відношення між елементами системи або її можливі структури. Мета будь-якого моделювання — вивчення поведінки системи залежно від дії на неї тих чи інших факторів. Під моделлю розуміють певний штучно створений об'єкт, у відповідність якому можна поставити оригінал. Модель не є точною копією системи. Напр., стандартизована історія хвороби, яку заповнюють у процесі лікування хворого, містить інформацію про хворого, про динаміку параметрів (елементів) під час лікування хворого; у зв'язку з цим її можна розглядати як інформаційну модель цього хворого. Але «оживає» ця модель лише в мозку лікаря або в ЦОМ, коли відбувається порівнювання її за складними *алгоритмами* з моделями тих чи інших хвороб, які є в їхній пам'яті. Це дає змогу дати оцінку функцій багатьох систем хворого; діагностувати захворювання або комплекс захворювань; визначити ступінь риску в призначенні ліків; прогнозувати розвиток хвороби та лікування. Т. ч., моделювання дає змогу лікареві на основі вивчення функції системи висловити певне міркування про зміну її структури.

В СРСР К. м. як науковий напрям почала оформлятися у 2-й половині 50-х років. У 1956 створено першу модель діагностичної електронної машини, а 1957 на всесвітній виставці в Брюсселі демонструвалася модель керованої мозком людини штучної руки, яку розробила група інженерів та лікарів у Москві. За кордоном у цей же період було створено модель штучного електричного ока, яке дає можливість сліпому читати друкований текст за допомогою органу слуху. У цей же час з'явилися перші повідомлення про аналіз енцефалограм та електрокардіограм і про діагностику за допомогою ЕОМ. У 1959 в Неаполі проведено перший міжнародний конгрес з К. м. Період розвитку К. м. можна розділити на два етапи. На першому етапі розробляли переважно методи розв'язування окремих задач (діагностика захворювань, автоматизація обробки енцефалограм тощо) й визначали осн. напрями К. м. Другий етап характеризується *системним підходом* до розв'язування задач моделювання й керування організмом людини, системою охорони здоров'я (див. *Медична інформаційна система*).

У К. м. залежно від застосування її методів та ідей до різних напрямів медицини сформувалося кілька наукових напрямів. Перший — кібернетика фізіологічна, яка займається вивченням та моделюванням органів і систем людини; другий напрям пов'язаний з

клінічною медициною (терапія, хірургія, кардіохірургія, неврологія, психіатрія тощо), а третій — з проблемами профілактичної медицини та управління в охороні здоров'я. Теорія й практика цих напрямів становлять єдине ціле. Окрім моделювання, в К. м. застосовують складні системи збирання та переробки інформації для управління установами охорони здоров'я (автоматизовані системи керування лікарнями, міністерствами) та лікувально-профілактичним процесом.

У клінічній медицині К. м. вивчає: питання теорії й принципів побудови медичних *інформаційно-пошукових систем*, які забезпечують лікувальний процес; побудови діагностичних та прогнозуючих систем і систем автоматизованого керування людським організмом в умовах патології; теорії діагнозу, мед. прогнозування, керування руховими функціями хворого за допомогою керуючої інформації, одержаної від здорової людини; стандартизації представлень, створення класифікацій і номенклатур, які забезпечують можливість застосовувати методи кібернетики в сучас. медицині. Значних успіхів досягнуто в області *біоелектричного керування*. Створені й успішно застосовуються у клініках електрокардіостимулятори, стимулятори скелетної мускулатури, протези кінцівок з біоелектричним керуванням.

У профілактичній медицині й охороні здоров'я об'єктами К. м. є: розробка та створення різних інформаційних та керуючих систем, які забезпечують контроль над чистотою повітря, грунту, води, страви тощо; побудова єдиної системи, спрямованої на охорону здоров'я населення міст і сіл від епідемічних захворювань; розробка принципів та побудова автоматизованих систем управління апаратом та установами охорони здоров'я (міністерство, лікарні, поліклініки, здоровпункти); розробка держ. центру мед. інформації; мед. документалістика, теорія створення систем прищеплювання населенню навиків санітарії та гігієни й навчання правил користування мед. системами; підготовка кадрів для роботи в галузі К. м.

Праці в галузі К. м. привели до створення багатьох приладів та пристроїв, які з успіхом використовують у клінічній та експериментальній медицині. Напр., створено системи автоматизованого та автомат. аналізу електро- та векторкардіограм, електронні діагностичні пристрої для виявлення при масових дослідженнях ЕКГ-патологій.

Застосування матем. методів та *обчислювальної техніки* в системі охорони здоров'я покликане підвищувати ефективність роботи медичних установ. Автоматизація медицини висуває ряд питань, пов'язаних з *проблемою «людина — машина»* в широкому розумінні цього поняття.

Літ.: Амосов Н. М., Шкабара Е. А. Опыт постановки диагноза при помощи диагностических машин. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1961, № 4; Парин В. В. Кибернетика в физиологии и медицине. «Вопросы философии», 1961, № 10; Брайнес С. Н., Свечинский В. Б. Элементы общей теории управления в организме. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1963, № 5; Амосов Н. М. Регуляция жизненных функций и кибернетика. К., 1964; Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М.— Прага, 1966.

А. О. Попов, В. Г. Мельников.

КІБЕРНЕ́ТИКА ТЕХНІ́ЧНА — напрям кібернетики, в якому на основі єдиних для кібернетики в цілому наукових ідей та методів вивчаються технічні системи керування. К. т. є теорією й практикою автоматичного регулювання та керування на сучасному етапі розвитку (див. *Автоматичного керування теорія*, *Автоматика*), а також наук. базою розв'язання завдань комплексної автоматизації виробництва й транспортних та інших *складних систем керування* (іригаційні та газорозподільні системи, атомні електростанції, космічні кораблі тощо). Складні системи керування, що в них як неодмінний елемент бере участь *людина-оператор*, наз. *системами автоматизованими*, на відміну від *систем автоматичних*, які не потребують для функціонування безпосередньої участі в них людини. *Проблема «людина—машина»*, в якій розглядають можливості раціонального розподілу функцій між людиною та автоматично діючими пристроями, є тепер однією з головних у К. т. (як і в *кібернетиці* в цілому). Са́ме питання про участь людини в системах керування відділяє в основному інтереси К. т. від інтересів її попередниці — теорії автоматичного регулювання та керування. Найбільше поєднання функцій людини й автомата досягається в кіборгах (кібернетичних організмах), тобто пристроях, у яких певною мірою здійснено симбіоз фіз. та інтелектуальних дій людини й тех. засобів автоматики. Кіборги набувають дедалі ширшого застосування для розв'язування завдань керування об'єктами, які перебувають у таких умовах, у яких людині важко або й зовсім неможливо керувати ними безпосередньо. Напр., кіборги дедалі ширше застосовують для керування деякими процесами в металург. та хім. виробництвах, небезпечними через радіаційне випромінювання процесами в ядерних реакторах і прискорювачах заряджених частинок, у космічному й підводному просторах тощо (див. *Робот*, *Маніпулятор*). Участь людини в керуванні агрегатами й технологічними процесами, з одного боку, та в адміністративному управлінні, з другого, також приводить до зрощування цих двох сфер управлінської діяльності й до створення єдиної людино-машинної системи керування. Тому, крім фізіологічних особливостей, істотного значення став набувати і психологічний стан людини-оператора, а це зумовило в К. т. цілу галузь досліджень, яку наз. *психологією інженерною*. Головним завданням цієї галузі К. т. є розробляти методи використання знань про поведінку людини під час проектування й експлуатації складних людино-машинних систем керування (або елементів цих систем), щоб досягти їхньої максимальної ефективності.

Розв'язуючи ряд завдань керування тех. об'єктами (навігація суден і літальних апаратів, створення вимірювальних та контрольних пристроїв, розробка читаючих автоматів тощо), спеціалісти в галузі К. т. прагнуть використати всі ті шляхи і прийоми, які виробила природа протягом тривалого періоду її еволюційного розвитку, і це й привело до формування великого й самостійного напряму в К. т.— *біоніки*. Цей напрям, залежно від сфери досліджень, у свою чергу, поділяється на ряд частин та розділів (гідробіоніка, *нейробіоніка* та ін.).

Одним із самостійних напрямів К. т. є *розпізнавання образів*. Розпізнавальні системи мають велике наукове й практичне значення, їх застосовують не тільки при створенні *читаючих автоматів*, а й при розпізнаванні та аналізі ситуацій, які характеризують стан технологічних процесів чи фіз. експериментів, при розробці медичних автоматизованих діагн. пристроїв тощо. До цього самого наукового напряму інколи відносять і завдання *ідентифікації об'єктів керування* (хоч воно є окремим щодо проблеми розпізнавання образів), тобто завдання визначення динамічних характеристик керованих об'єктів на основі спостереження та вимірювання деяких їхніх координат (параметрів) і зовнішніх *збурювальних діянь*. Розробка різних методів ідентифікації (і детермінованих, і статистичних) є важливим і самостійним напрямом у К. т. Так само можна розцінювати й цикл досліджень, які проводяться в рамках К. т. в галузі теорії прогнозування, і розробку на основі цієї теорії автоматично діючих прогнозуючих пристроїв.

Характерною особливістю сучасного розвитку К. т. є широке використання обчислювальних пристроїв та *обчислювальних машин* (аналогових і цифрових) і при розв'язуванні дослідницьких задач, і створенні різних тех. систем керування. Щоб створити автоматизовані системи управління підприємством (АСУП) і автоматизовані системи керування технологічними процесами (АСКТП) (а це завдання дуже складне й багатогранне), необхідно застосовувати ті чи інші обчислювальні засоби. Науковою базою при цьому є К. т., *інформації теорія*, *системотехніка* і *кібернетика економічна*, причому чітку грань між цими науковими напрямами не завжди вдається встановити. Якщо орієнтуватися на практику системотехнічних науково-дослідних робіт останніх років, то умовну межу між К. т. і системотехнікою можна вбачати в тому, що в К. т. більше уваги приділяють нижнім ступеням ієрархічної градації керування виробництвом — агрегатам, технологічним процесам і цеховим системам (див. *Ієрархічні системи керування*), а в системотехніці приділять увагу середнім рівням керування (адміністративне управління підприємством, комбінатом чи галуззю), а також розв'язанню завдань автоматизації процесів проектування й завдань автоматизації складних науково-експериментальних робіт (геофізичних та гідрофізичних досліджень тощо).

Усі рівні керування дуже тісно взаємно пов'язані. Тому в сучасних системних дослідженнях (див. *Системний підхід*) до створення тієї чи іншої системи керування підходять як до цілісної проблеми, яка охоплює всі стадії створення її (проектування, розробку, виготовлення, випробування, налагодження, експлуатацію й навіть консервацію, коли ця стадія також істотна). При цьому беруть до уваги й суто технічні та адміністративно-організаційні, економічні, соціальні, правові й етичні сторони цієї проблеми. Створення АСУП потребує великої попередньої теоретичної та інженерної підготовки. Теоретична підготовка зводиться, насамперед, до *алгоритмізації виробничих процесів*, тобто до створення формальних (математичних) і неформальних (евристичних) описів самих керованих об'єктів. Для цього використовують спец. мови опису виробничих процесів (GSL, GPSS, TSP, АЛКОПОЛ, ТЕХНОЛ, АЛТОС та ін.). Крім того, шукають *алгоритми* (закони) керування *підсистемами* і системою загалом.

Інженерна частина попередньої підготовки до створення АСУП полягає у виборі стандартних або в розробці нових тех. засобів (обчислювальних машин, *пристроїв відображення інформації*, пультів керування тощо), необхідних для функціонування АСУП. Насиченість систем різноманітними тех. пристроями зумовила велике значення проблеми надійності функціонування АСУП (див. *Надійність кібернетичних систем*), при цьому істотного значення набуває автомат. контроль систем керування як один із засобів підвищення надійності. Розв'язуючи завдання підвищення надійності й загального завдання підвищення ефективності функціонування АСУП, дедалі більше уваги приділяють питанням подання людині-операторові необхідної узагальненої візуальної інформації. Для цього створено різні засоби відображення інформації, які враховують психофізіологічні можливості людини й надають їй змогу активно й ефективно брати участь у процесі керування (знакові індикатори та спеціалізовані екрани, дія яких основується на використанні оптоелектроніки, лазеролюмінесцентних приладів, голографії тощо). Уся ця сучасна техніка систем індикації разом з тех. засобами зв'язку при створенні АСУП набуває не меншого значення, ніж і сама *обчислювальна техніка*, використовувана в них. Це пояснюється тим, що в більшості такого роду систем керування немає необхідної для оптим. керування апріорної інформації, і людина-оператор повинна нагромаджувати її в процесі експлуатації системи. Тому різні адаптивні системи, що їх вивчали в теорії автоматичного керування (*системи екстремального регулювання*, самонастроювані та самоорганізовувані), мають не менше значення і для розробки автоматизованих систем управління, які є осн. об'єктом вивчення в К. т. У цьому виявляється повна спадковість і певною мірою навіть збіг завдань теорії автомат. керування і К. т. Це стосується

і багатьох інших віток наукового апарату, використовуваного в обох цих розділах кібернетики. Насамперед мається на увазі проблематика дослідження динамічних властивостей систем керування — стійкості, точності керування, завадостійкості тощо, тобто проблематика, яка є головною з наукового погляду і для теорії автоматичного керування, і для К. т., і визначає їхній науковий зміст.

Наявність людини в системі керування приводить до виникнення багатьох нових завдань, розглядуваних у К. т., які раніше при вивченні повністю автоматично діючих систем не могли виникнути. Зокрема, постає потреба вивчати інтелектуальну діяльність людини в процесі керування (логічний опис її функціонування, *програмування евристичне*, теоретико-множинні й абстрактно-алгебричні методи описування цілеспрямованої поведінки, процесу навчання тощо). У зв'язку з різноманітністю завдань, які виникають під час вивчення людино-машинних систем керування, постає потреба знайти якісь інтегральні узагальнюючі методи дослідження, за допомогою яких можна було б під одним кутом зору охопити багато з цих завдань. Тому для К. т. великого значення набуває *систем загальна теорія* або вужча, абстрактна теорія систем, і можна твердити, що тепер розвиток К. т. йде шляхом побудови абстрактних моделей складних систем керування та вивчення їх. Для цього використовують різні галузі знань: *семіотику* математичну, *множин теорію, логіку математичну, імовірностей теорію*, абстрактну алгебру тощо.

Мова теорії відношень та абстрактної алгебри дає змогу формалізувати такі поняття, як мета, прийняття рішення, цілеспрямована поведінка, *адаптація*, навчання, самонавчання, самоорганізація тощо. Логіко-математична мова, застосовувана, напр., у формі логічних схем алгоритмів, також дає змогу під єдиним кутом зору описувати різноманітні складні системи. Ними можуть бути і релейно-контактні схеми (див. *Релейно-контактних схем теорія*), і схеми телефонної автоматичної станції і т. ін. Цією ж мовою, однак, описують і управлінську діяльність людини-оператора (диспетчера аеропорту, керманича судна, водія тролейбуса тощо). Описи складних систем керування за допомогою логічних схем алгоритмів дають змогу розв'язати лише деякі загальні питання, напр., виявити окремі принципові переваги самоорганізованих систем керування порівняно зі звичайними системами. Проте, щоб виявити інші властивості системи (точність, стійкість тощо), необхідно використати інші рівні абстрактного описування систем. При цьому прагнуть знайти такий матем. апарат, який дав би змогу охопити найбільшу кількість задач, що виникають. Одним з найвдаліших щодо цього є узагальнене трактування різних динамічних задач у К. т., яке використовує *стохастичної апроксимації метод*, або, в загальнішому випадку, ймовірнісний ітеративний метод. За допомогою цього методу розглянуто під єдиним кутом зору такі задачі, які раніше здавалися зовсім різнорідними, напр., проблеми оптимальності, адаптації, навчання, розпізнавання образів, ідентифікації, фільтрації випадкових процесів, надійності тощо.

У К. т. і в кібернетиці загалом великого значення набувають методи розв'язування задач, які дають змогу подолати труднощі, що виникають через наявність дуже великої кількості взаємодіючих елементів (підсистем) у відповідній складній системі (див. *Багатовимірні системи автоматичного керування*). «Прокляття великої розмірності» (за образним висловом амер. математика Р. Беллмана) є каменем спотикання у розв'язуванні задач стійкості, оптимальності, розпізнавання образів і дослідження скінченних автоматів та в розв'язуванні економіко-математичних задач. Осн. два шляхи подолання труднощів, пов'язаних з великою розмірністю задач,— це *декомпозиції методи* і методи агрегатування. Окрім цієї проблеми, велике значення в К. т. має і *багатокритеріальності проблема*, яка полягає у виборі компромісного рішення, тобто у виборі таких значень керуючих діянь, щоб усяке оптим. рішення, знайдене для кожної з підсистем, було оптимальним (або субоптимальним) і для всієї системи загалом. При цьому можливе і теоретико-імовірнісне, й ігрове трактування задачі. Проте, хоч аналітичні методи вивчання складних систем і мають велике значення для дослідження реальних систем керування виробництвом, транспортом та ін., але поки що їх практично не можна застосовувати через надмірну складність задач, і тому тепер найуніверсальнішим шляхом детальнішого вивчення складних тех. систем керування є методи моделювання.

На відміну від традиційних методів моделювання — аналогового, цифрового або гібридного (цифро-аналогового), поширених у дослідженні систем автомат. керування, у *моделюванні системи «людина—машина»* створюють спеціальні моделюючі комплекси або навіть моделюючі центри. В них, крім аналогових та цифрових обчислювальних машин, вводять різні пристрої відображення інформації, спеціалізовані пульти, засоби зв'язку та інші засоби, які дають змогу створити для людини-оператора умови функціонування, по змозі близькі до реальних.

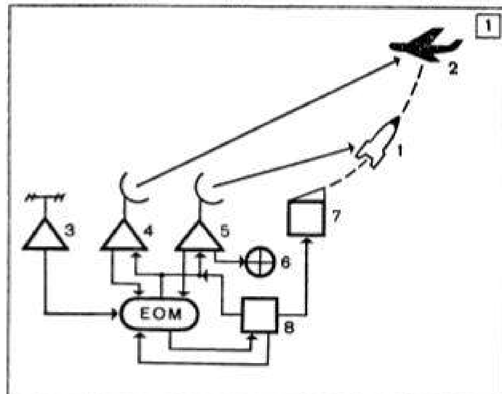
Отже, симбіоз автоматично діючих пристроїв і людей є, з одного боку, осн. об'єктом досліджень, що проводяться в К. т., а з другого — універсальним засобом моделювання дійсно складних тех. та інших систем керування. В зв'язку з цим розроблено спец. мови (*СИМУЛА, СИМСКРИПТ*, RTL та ін.), призначені для моделювання автоматизованих систем управління.

Літ.: Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. К., 1962 [бібліогр. с. 412—416]; Теория автоматического регулирования, кн. 1—3, ч. 1—2. М., 1967—69 [бібліогр. кн. 1, с. 743—763; кн. 2, с. 653—674; кн. 3, ч. 1, с. 588—604, ч. 2, с. 352—365]; Техниче-

ская кибернетика в СССР. М., 1968; «Кибернетика и вычислительная техника», в. 1. Сложные системы управления. К., 1969; Ц я н ь - С ю э - С э н ь. Техническая кибернетика. Пер. с англ. М., 1956 [бібліогр. с. 447—450]; Общая теория систем. Пер. с англ. М., 1966; Техническая кибернетика за рубежом. Пер. с англ. М., 1968; Исследования по общей теории систем. М., 1969. *О. І. Кухтенко.*

КІБЕРНЕ́ТИКА У ВІЙСЬКО́ВІЙ СПРА́ВІ — один з важливих напрямів застосування новітніх науково-технічних досягнень у галузі кібернетики й обчислювальної техніки в інтересах військової справи. Формування кібернетики як нової науки значною мірою пов'язане з розв'язуванням деяких завдань, що виникли в період 2-ї світової війни. Саме дослідження проблеми створення автоматизованих систем для ППО наштовхнуло Н. Вінера на думку, що доцільно виділити загальні закономірності керування й зв'язку в живій природі й техніці в нову наукову галузь, яку він і назвав *кібернетикою*. Широке застосування К. у в. с. зумовили безперервне вдосконалення військової техніки та розвиток стратегії, оперативного мистецтва й тактики. Зростання осн. тактико-тех. показників зразків бойової техніки, підвищення маневреності й швидкості бойових машин, ускладнення умов бойового застосування їх уже до початку 2-ї світової війни привели до широкого використання деяких засобів автоматизації для керування бойовою технікою. Так, в авіації було створено прилади для автоматизованого обчислювання прицільних даних для бомбометання й повітряної стрільби, в ППО — прилади для керування вогнем зенітної артилерії, у військово-морському флоті — системи кораблеводіння й керування вогнем корабельної артилерії. У післявоєнний період у зв'язку з виникненням і розвитком ядерної зброї та вдосконаленням засобів доставляння боєприпасів до цілей у військовій справі відбулася справжня революція, яка поставила вимогу докорінно перебудувати керування не лише бойовою технікою, а й військами.

Сучасний бій і операції характеризуються масованістю застосування сил і засобів, високими темпами переміщення військ, можливістю швидких і різких змін обстановки. За таких умов людина в деяких випадках не може, не вдаючись до застосування тех. засобів, своєчасно реагувати на зміни обстановки і приймати правильні рішення. Все це привело до бурхливого впровадження К. у в. с. Питання використання кібернетичної техніки й методів кібернетики в інтересах військової справи виділилися в обширну галузь, яку наз. **в і й с ь к о в о ю к і б е р н е т и к о ю.** Вона являє собою науку, що вивчає загальні закономірності процесів керування військами, бойовою технікою й засобами ураження для підвищення ефективності бойового застосування їх. Кібернетичні пристрої набувають різноманітного ефективного застосування в більшості складних систем озброєння для керування об'єктами бойової техніки та засобами ураження. Насамперед слід відзначити застосування автомат. пристроїв, обчислювальної техніки й пристроїв передавання інформації в ракетних системах (комплексах). Сучасні ракетні комплекси, незалежно від їхнього призначення, насичені автоматикою, яка дає змогу скоротити до мінімуму час підготовки комплексів до пуску, підвищити надійність і точність руху ракет до цілі. Серед таких пристроїв можна відзначити, зокрема, автомати, що керують режимом подавання компонентів палива до рушійних установок, та системи керування й навігації. Незважаючи на деяку специфіку, автомат. системи керування ракетами мають усі найхарактерніші риси кібернетичних пристроїв. У них є давачі первинної інформації (напр., кутових координат ракети, лінійних прискорень тощо), пристрої для перероблення її, оформлені у вигляді малогабаритних бортових обчисл. машин або у вигляді спеціалізованих лічильно-розв'язувальних пристроїв, та виконавчі механізми. Надзвичайно насичено автоматикою й наземні пристрої підготовки, контролю й пуску ракет.



1. Схема автоматизованої системи керування зенітними керованими ракетами: 1 — зенітна керована ракета; 2 — ціль; 3 — радіолокатор пошуку й виявлення цілі; 4 — радіолокатор супроводження цілі; 5 — радіолокатор наведення ракети на ціль; 6 — індикатор оператора; 7 — пускова установка; 8 — командний прилад.

Бойову техніку сухопутних військ також дедалі ширше обладнують кібернетичними пристроями, які дають змогу підвищити точність стрільби артилерії й танків і забезпечити автомат. визначення місцезнаходження об'єктів та ін. У військах ППО для перехоплювання повітряних цілей застосовують ракетні й авіаційні комплекси, які являють собою приклади кібернетичних систем. Типова схема ракетного комплексу перехоплювання повітряних цілей (мал. 1) включає в себе радіолокаційні станції виявляння й супроводжування цілей, обладнані обчисл. пристроями для визначання координат цілей, командно-обчисл. пристрої, що здійснюють розворот ракетної пускової установки на ціль і пуск ракети, і власне ракету з відповідними системами корекції її траєкторії та самонаведення на ціль.

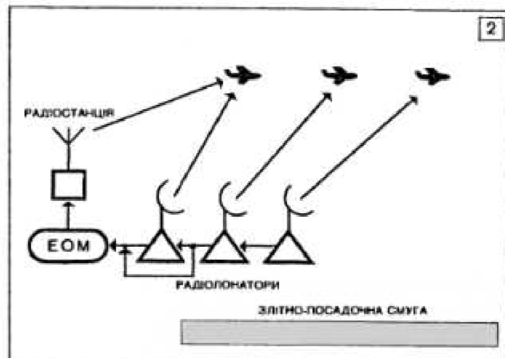
Багатогранним є застосування кібернетики у військовій авіації. Тут можна виділити

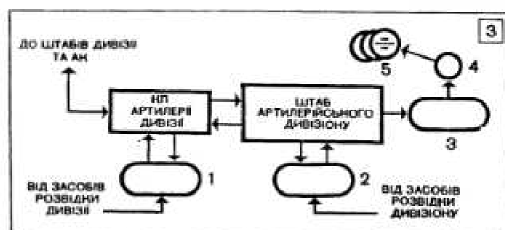
три основні галузі: 1) керування озброєнням літака (прицільні системи, системи керування бомбардувальними й артилерійськими установками, системи пуску ракет тощо); 2) керування польотом літака (*автопілотування*, системи регулювання двигунів, автоштурмани й бортові автомат. системи посадки); 3) регулювання руху літаків у районі аеродромів (мал. 2).

Ще різноманітнішим є застосування кібернетичних пристроїв і систем у військово-морському флоті. Сучасні надводні кораблі й підводні човни, що відзначаються великою швидкістю й високою автономністю дій, озброєні потужною ракетною, артилерійською, торпедною та бомбовою зброєю і оснащені досконалою радіотех. апаратурою, автоматизованими й автомат. засобами пошуку, виявляння й супроводжування цілей та приладами керування вогнем.

Застосування методів кібернетики для керування військами є порівняно новою галуззю практичного використання її. По суті для керування військами завжди використовували принаймні два кібернетичні принципи — програмного керування (розчленовування складних дій на елементарні, заздалегідне опрацьовування команд) і зворотного зв'язку (обов'язкове доповідання про виконання одержаного наказу). Тепер усі основні процеси, пов'язані з керуванням військами (добування даних про противника, збирання інформації про свої війська та обстановку, аналіз та оцінювання обстановки, приймання рішення й доведення його до виконавців), надзвичайно ускладнилися, а час на реалізацію їх невпинно скорочується. За цих умов комплексне застосування кібернетики для забезпечення оперативного, безперервного й гнучкого керування військами стало неминучим, і в зв'язку з цим з'явилися автоматизовані системи керування військами. Проте застосування К. у в. с. аж ніяк не означає зниження ролі людини в процесах керування військами. Навпаки, саме завдяки тому, що кібернетична техніка вивільнює людину від трудомісткої та втомливої роботи по збиранню, зберіганню, обробці й видаванню інформації, командуючі (командири) й штаби одержують сприятливі можливості для зосередження своєї уваги на творчому розв'язуванні найважливіших питань підготовки й проведення операцій (боїв). Напр., щоб розв'язати завдання цілерозподілу, важливо заздалегідь визначити бойові засоби, що досягають тих чи інших цілей противника. Відповідні розрахунки можна виконувати *обчислювальною машиною*, яка результати обчислень у наочній формі передає в штаб. Дальшим етапом автоматизації в цьому напрямі є автоматизоване одержування кількох варіантів цілерозподілу за якими-небудь заздалегідь обраними критеріями. Тоді людині лишається тільки вибирати один із варіантів та врахувати фактори, які поки що не піддаються кількісній оцінці.

Типова схема будь-якої автоматизованої системи для керування військами включає в себе: 1) давачі первинної інформації про противника, свої війська, стан театру воєнних дій і метеообстановку; 2) лінії передавання інформації (телефонні, телеграфні, радіо- й радіорелейні канали тощо); 3) обчисл. машини; 4) засоби для наочного відображення й документування інформації та оперативного розмножування документів. Умовно, залежно від розв'язуваних завдань, автоматизовані системи керування військами можна поділити на дві великі групи: інформаційні системи й





2. Схема системи, яка забезпечує автоматизацію посадки групи літаків.
3. Структурна схема автоматизованої системи TACFIRE керування вогнем артилерії: 1 — ЕОМ обробки розвідувальних даних; 2 — ЕОМ цілерозподілу; 3 — ЕОМ керування вогнем; 4 — командно-індикаторний блок; 5 — артилерійська батарея.

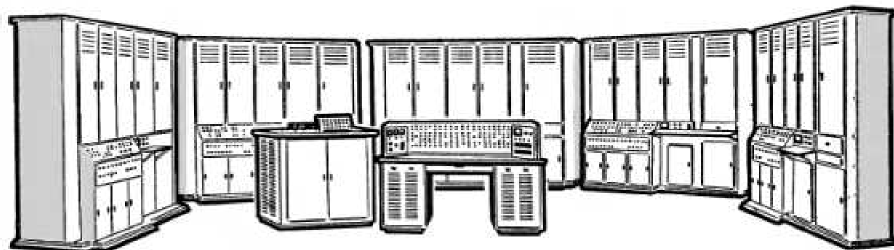
системи бойового керування. Інформаційні системи мають своїм завданням збирати, зберігати й видавати інформацію про противника та свої війська, про стан театру воєнних дій і метеообстановку. В автоматизованих системах бойового керування реалізуються процеси, безпосередньо пов'язані з керуванням військами. Технічно обидві системи можна сумістити в єдину автоматизовану систему. Більшість автоматизованих систем керування військами є *ієрархічними системами керування*, що відображають систему керування збройними силами, прийняту в цій країні. Тому до складу систем, призначених для автоматизованого керування військами великих оперативних об'єднань, звичайно підключають кілька *підсистем*, що розв'язують обмеженіше коло завдань (див. мал. 3).

Однією з важливих сфер застосування К. у в. с. є тил. За допомогою сучасних обчисл. машин в органах тилу виконують найрізно-

магнітніші обліково-звітні роботи, планують використання матеріальних ресурсів тощо. У ряді випадків для керування тилом використовують спеціальні автоматизовані підсистеми. Розв'язування розрахункових та інформаційних завдань в автоматизованих системах керування військами потребує залучення точних матем. методів. Запровадження таких методів характерне для застосування К. у в. с. Всі основні процеси по керуванню військами здійснюють в умовах неповної інформації про противника, бо він завжди намагається приховати своє справжнє становище і свої наміри. Тому однією з важливих особливостей матем. методів, використовуваних у військовій справі, є їхня спрямованість на розв'язування завдань за умов риску й невизначеності, на старанне врахування випадкових факторів. У зв'язку з цим у теор. відношенні автоматизовані системи керування військами й військова кібернетика загалом спираються на такі галузі математики, як *імовірностей теорія, масового обслуговування теорія, математична статистика*, теорія ігор та розв'язків, *алгоритмів теорія* тощо.

Застосування К. у в. с. в свою чергу висунуло кілька важливих наукових і тех. проблем (надійність і живучість автоматизованих систем, оптим. взаємодія людини й автомата та ін.), які можна розв'язати завдяки спільній праці військових і невійськових спеціалістів.

Літ.: Гончаренко М. Н. Кибернетика в военном деле. М., 1963; Синяк В. С. Военное применение электронных вычислительных машин. М., 1963 [бібліогр. с. 166—167]; Петров В. П., Сочивко А. А. Управление ракетами. М., 1963 [бібліогр. с. 261]; Абрамов С. А., Батраков В. А. Электронные цифровые машины и снабжение войск. М., 1964 [бібліогр. с. 240—241]; Ануреев И. И., Татарченко А. Е. Применение математических методов в военном деле. М., 1967; Прокофьев А. В. Средства механизации и автоматизации в штабах. М., 1969. *Б. Г. Доступов.*



Цифрова обчислювальна машина «Киев».

«КИБЕРНЕ́ТИКА» — науковий журнал, орган Кібернетичного центру Академії наук УРСР. Висвітлює загальні питання кібернетики (методології), питання математичних проблем кібернетики, теорії автоматів і алгоритмів, теорії електронних цифрових та аналогових обчислювальних машин і моделюючих пристроїв, створення алгоритмічних мов і теорії програмування, розробки методів досліджень операцій та систем, теорії оптимальних рішень, моделювання процесів мислення, інформаційних мов і систем та математичної лінгвістики. Виходить з 1965 р. 6 раз на рік російською мовою, а також перекладається англійською мовою у США під назвою «Cybernetics».

«КИБЕРНЕ́ТИКА» — реферативний журнал, що складається з двох випусків: «Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика» і «Техническая кибернетика». У першому випуску освітлюються питання теорії ймовірностей та матем. статистики, комбінаторного аналізу, теорії керуючих систем та її застосування, теорії інформації, дослідження операцій і матем. економіки, програмування й теорії матем. машин, матем. моделювання процесів мислення й матем. питання семіотики; у другому — кіберн. систем керування, теорії скінченних автоматів, кіберн. пристроїв, тех. застосування теорії ігор, застосування кібернетики, кібернетичні питання біології та психології. Видає журн. «К.» Всесоюзний ін-т наукової і тех. інформації (ВІНІТІ) Держ. комітету Ради Міністрів СРСР по науці й техніці та Академії наук СРСР з 1964. Виходить 12 номерів на рік (рос. мовою).

«КИ́ЕВ» — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення, орієнтована на розв'язування широкого кола наукових та інженерних задач. Розроблено її 1958 в Ін-ті кібернетики АН УРСР. Використано вперше в СРСР для досліджень з дистанційного керування технологіч. процесами. «К.» (мал.) — асинхронна машина з повністю автономними пристроями. У ній є оперативний ЗП паралельної дії на феритових осердях, ємність його 1024 слова, цикл звертання до ОЗП — 10 *мксек*; у машині реалізовано операції скороченого множення і ділення. Структура команд — трьохадресна. В «К.» вперше застосовано *адресну мову* програмування як вхідну мову транслятора. Система операцій машини — 32 операції, в т. ч. операції за ад-

ресою 2-го рангу (див. *Адреса* у програмуванні), та операції для задавання циклів. Форма представлення чисел — з фіксованою перед старшим розрядом комою, довжина машинного слова — постійна, 41 двійковий розряд. Режим роботи з плаваючою комою здійснювався програмно. Постійний (односторонній) ЗП ферит-трансформаторного типу з циклом звертання 7 *мксек* місткістю 512 слів призначений для зберігання змінно-спаяних програм. Цикл роботи машини замкнутий чотиритактний, тривалість такту — змінна, залежить вона від виду операції й використовуваної пам'яті. Паралельний арифм. пристрій включав двотактний нагромаджувальний суматор і 3 регістри; час додавання — 6,6 *мксек*, ділення — 275 *мксек*, середня швидкодія 15 000 операцій за 1 *сек*. Зовнішній ЗП складався з трьох магн. барабанів заг. ємністю 9000 слів з часом вибирання 120 *мксек*. Елементна база — лампові імпульсно-потенціальні елементи.

Дані вводяться з перфострічок, перфокарт, телеграфних ліній зв'язку, пристроїв читання графіків. Пристрій виведення — цифродрукувальний або перфоратор.

Літ.: Глушков В. М., Ющенко Е. Л. Вычислительная машина «Киев». К., 1962 [бібліогр. с. 181—182]; Дашевский Л. Н., Погребинский С. Б., Шкабара Е. А. Вычислительная машина «Киев». К., 1964 [бібліогр. с. 321—323].

Л. Г. Хоменко.

КЛАС ЗА́МКНЕНИЙ ФУ́НКЦІЙ А́ЛГЕБРИ ЛО́ГІКИ — такий клас функцій $\mathfrak{M}$, що: 1) разом з кожною функцією $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$ до класу $\mathfrak{M}$ належить функція $f(y_1, \ldots, y_n)$, де не всі y мають бути різні (замкненість щодо ототожнювання змінних); 2) разом з будь-якими $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$, $f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{p_i}}) \in \mathfrak{M}$ до класу $\mathfrak{M}$ належить функція $f(x_1, \ldots, f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{p_i}}), \ldots, x_n)$ (замкненість щодо суперпозиції). К. з. ф. а. л. є, напр., клас усіх ф-цій *алгебри логіки*.

КЛАС ІНВАРІА́НТНИЙ ФУ́НКЦІЙ А́ЛГЕБРИ ЛО́ГІКИ — множина Q функцій *алгебри логіки*, така, що: 1) коли функція $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, то до класу Q належать і всі функції, що їх одержують з f шляхом перейменування (без ототожнювання) змінних; 2) якщо функція $f_1(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, то до класу Q належать і всі функції, які одержують з f шляхом будь-якої підстановки констант на місце (не обов'язково всіх) змінних; 3) якщо функція $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, то до класу Q належать і всі функції, які одержують з f, видаливши або ввівши фіктивні змінні (змінну x_i наз. фіктивною, якщо $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, x_{i+1}, \ldots, x_n)$). Множина всіх К. і. ф. а. л. має потужність континууму. Вивчення К. і. ф. а. л. дає змогу глибше зрозуміти алгоритм. труднощі синтезу мінім. схем, які реалізують ф-ції алгебри логіки.

КЛАС ПЕРЕДПО́ВНИЙ ФУ́НКЦІЙ А́ЛГЕБРИ ЛО́ГІКИ — *клас замкнений функцій алгебри логіки*, який не збігається з класом усіх функцій і не міститься цілком у жодному замкненому класі, що відрізняється від класу всіх функцій. В *алгебрі логіки* існує тільки п'ять передповних класів — класи *функцій, що зберігають константу* 0 та 1, клас *самодвоїстих функцій алгебри логіки*, клас *монотонних функцій алгебри логіки* і клас *лінійних функцій алгебри логіки*. Для k-значних логік усі К. п. ф. а. л. вичерпуються шістьома сім'ями, але кількість цих класів $\pi(k)$ зростає дуже швидко $\pi(k) \sim \delta(k) \cdot k \times 2^{C_{k-1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}}$, де $\delta(k) = 1$ — при непарному k і $\delta(k) = 2$ — при парному k. Напр., відомо, що $\pi(2) = 5$, але $\pi(6) = 15\,237$, а $\pi(7) = 7\,854\,724$.

У термінах К. п. ф. а. л. виражаються критерії повноти. Набір ф-цій є повним, якщо він не належить цілком ні до якого К. п. ф. а. л. Але при $k \geqslant 6$ ці критерії стають уже малодоступними для огляду.

Літ.: Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значных логиках. «Доклады АН СССР», 1969, т. 186, № 3.

КЛАСИФІКА́ЦІЇ ІЄРАРХІ́ЧНІ — класифікації, в яких кожний підклас має один і тільки один, що безпосередньо передує йому (включає його) клас — відношення сильної ієрархії. Між усіма підкласами, що входять до одного класу, існує відношення підпорядкування. К. і. *інформації документальної* є найважливішими видами традиційних *мов інформаційно-пошукових*. Застосовують їх для розподілу *документів наукових* за галузями знань відповідно до змісту цих документів. К. і. наз. ще й **бібліотечно-бібліографічними класифікаціями**. Вони відрізняються від класифікацій наук точною відповідністю до формально-логічних правил побудови (для однозначного визначення місця документа або його пошукового образу), а також відповідністю до особливостей класифікованих об'єктів (для розподілу документів не тільки за змістом, а й за типом видання, їхнім призначенням, мовою їхнього тексту тощо). Схеми цих класифікацій звичайно видають у вигляді осн. таблиць і таблиць-визначників (або типових поділів). В осн. таблицях усі галузі знань та їхні розділи розміщено в логічній послідовності, причому розподіл щоразу провадиться лише за однією основою. У таблицях-визначниках відображують спільні ознаки, які повторюються для багатьох документів. Усім розділам і визначникам присвоюють умовні позначення — індекси, які за структурою можуть бути номерні й ступінчасті. Як номерні індекси використовують порядкові номери підрозділів класифікації, східчасті індекси відображують її логічну структуру і провадять необмежену деталізацію схеми.

Історія К. і., зокрема бібліотечно-бібліографічних, сягає в глибоку давнину. Тепер

застосовують десятки різних схем, з яких найбільше значення мають «Десяткова класифікація» М. Дьюї (1876), «Розтяжна класифікація» Ч. Кеттера (1879), «Класифікація Бібліотеки Конгресу США» (1901), «Універсальна десяткова класифікація» — УДК (1905—07). УДК і досі є найпоширенішою міжнар. універсальною системою, обов'язковою для класифікації літератури з точних, природничих і тех. наук у бібліотеках. Поряд з нею в СРСР широко застосовують рад. «Бібліотечно-бібліографічну класифікацію» (в. 1—25, 1960—68). Але К. і. має не тільки достоїнства, що полягають у наочному звичному позначенні родо-видових відношень між поняттями, а й чимало обмежень. Ці класифікації, відповідно до формальнологічних правил побудови їх, не дають змоги легко й швидко відображувати процес інтеграції науки, встановлювати класи для нових напрямів на грані окремих дисциплін, проводити багатоаспектне *індексування* документів та пошук їх за будь-яким, раніше не передбаченим поєднанням характеристик. Ці обмеження можна успішно подолати у ф а с е т н и х к л а с и ф і к а ц і я х, початок яким поклала «Класифікація за допомогою двокрапки» Ш.-Р. Ранганатана (1933). Замість єдиного ряду ділень у кожному основному класі, тут є кілька таблиць, кожна з яких побудована на основі якоїсь однієї характеристики або аспекту, що мають назву «фасетів». Індекс, що відображує зміст документа, будується з прийнятих у кожній такій таблиці позначень, які з'єднують за допомогою двокрапки. Фасетні класифікації є кроком уперед від традиційних інформаційно-пошукових мов до дескрипторних мов.

Літ.: Ш а м у р и н Е. И. Очерки по истории библиотечно-библиографической классификации, т. 1—2. М., 1955—59 [бібліогр. т. 1, с. 322—382; т. 2, с. 459—536].
Р. С. Гіляревський.

КЛАСИФІКА́ЦІЯ АВТОМАТИ́ЧНА — віднесення автоматичним пристроєм об'єктів з якоїсь множини до того чи іншого класу заданого (скінченного) набору класів. В основу К. а. покладено аналіз інформації про кожний об'єкт, яку вводять у пристрій. Проблема К. а. належить до проблеми *розпізнавання образів*, і в розв'язуванні її використовують багато понять і методів розпізнавання образів. Зокрема, в одному з варіантів розв'язування введена в пристрій інформація про класифікований об'єкт інтерпретується як сукупність ознак. Кожній ознаці зіставляється координата (багатоградаційна чи двійкова, залежно від природи ознаки) в якомусь просторі ознак, де всякий поданий об'єкт відображується точкою. Якщо вибір ознак вдалий, точки одного класу групуються в компактні нагромадження з порівняно легко апроксимовними границями або, в імовірнісній постановці, розподілом імовірностей. Поданий об'єкт, залежно від того, куди потрапляє в просторі ознак відображальна точка, класифікується згідно з прийнятим *правилом вирішувальним*. К. а. застосовують у мед. і тех. діагностиці, геофіз. розвідуванні, *інформаційно-пошукових системах* тощо.
В. С. Файн.

КЛЮЧОВЕ́ СЛО́ВО — слово чи стійке словосполучення природної мови, що його використовують для вираження певного аспекту смислового змісту документа (чи запиту). При використанні методу координатного індексування пошукові образи являють собою множини К. с., які в цьому разі наз. у н і т е р м а м и. Між К. с. можуть бути відношення синонімії або умовної смислової еквівалентності, тобто синонімії з точки зору даної *інформаційно-пошукової системи*. Нагромадження К. с. шляхом змістового аналізу науково-тех. текстів або алгоритмічно, напр. порівнюванням слів тексту з фіксованим списком неключових слів, є важливим етапом під час вибору вихідної лексики дескрипторних *мов інформаційно-пошукових*; відібрані К. с. об'єднують потім у *дескриптори*. В дескрипторних словниках (інформаційно-пошукових *тезаурусах*) даються посилання від К. с. до відповідних дескрипторів. Тепер у багатьох наукових журналах наводять К. с. статей, що друкуються в цих журналах.
Н. О. Куземська.

КОБО́Л — мова програмування, орієнтована на розв'язування задач обробки даних. Запис алгоритму обробки даних, або програма, має в цій мові вигляд ряду речень, складених з англ. слів, схожих за формою на англ. текст, завдяки чому можна легко опанувати правила користування мовою (в СРСР прийнято рос. варіант мови). Програма обробки даних — т. з. К.-п р о г р а м а — описується в цій мові точно заданим стандартизованим способом, і це дає змогу автоматично перекладати цю програму на внутрішню мову будь-якої машини, для якої складено спец. програму — т. з. К.-т р а н с л я т о р. Перший варіант мови розробили представники амер. фірм і опублікували 1960, у 1961 опубліковано 2-й варіант мови, 1965 — 3-й, значно розширений варіант, а 1968 — стандарт мови. Суттю обробки даних, що на неї орієнтовано К., є багаторазове повторення однотипних операцій над послідовними групами даних. Дані, які підлягають обробці, подають у К. у вигляді вхідних масивів (первісні об'єкти обробки) і вихідних масивів (результати обробки). Масив складається з певної сукупності *записів* і звичайно зберігається на магнітних стрічках, дисках або на перфокартах. На початку масиву записуються т. з. мітки масиву — етикетка, що дає змогу відрізнити один масив від іншого. Етикетка передує послідовно розміщеним записам масиву, після останнього з яких у масиві є вказівка про кінець масиву.

Програма в К. складається з чотирьох розділів. 1-й розділ — о т о т о ж н е н н я — містить у собі назву програми та іншу інформацію, необхідну для ведення документації. 2-й розділ — о б л а д н а н н я — визначає ЦОМ, на якій здійснюватиметься трансляція К.-програми, та ЦОМ, на якій провадитиметь-

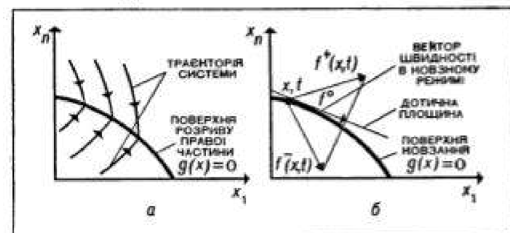
ся виконання створеної транслятором робочої програми. В цьому розділі визначаються й зовнішні пристрої, на яких розміщуватиметься кожний з масивів. 3-й розділ — даних — описує формати вхідних і вихідних даних, що підлягають обробці, та способи організації їх у масивах. За своїм змістом опис характеризує зображення даного на аркуші паперу, а не спосіб розміщення його в пам'яті машини, а саме: описується, з яких знаків це дане складається (літери, цифри і т. ін.), скільки цифр у числі, яка послідовність колонок у таблиці, скільки в ній рядків, який спосіб редагування колонок, який зміст колонок на момент початку розв'язування задачі тощо. Формат окремої колонки таблиці задається за допомогою т. з. шаблона — рядка символів з певного набору; кожний із символів набору має строго визначений зміст, напр., один з них позначає входження літери, другий — входження цифри, третій — положення десяткової точки, четвертий — правила *редагування даних* і т. д. Поява певного символу в рядку шаблона вказує, що на відповідній позиції в даному розміщується символ певної категорії (літера, цифра тощо) або що до символу на даній позиції слід застосувати певне правило редагування. Кожному окремому даному і кожній виділеній групі даних присвоюється певна назва і т. з. номер рівня — двозначне число, за допомогою якого задається впорядкованість даних у таблиці. Щоб зазначити, що певне дане є складником групового даного, його опис вміщують за описом цього групового даного в межах одного запису і присвоюють йому номер рівня, більший за номер рівня групового даного; кожному записові відповідає найменший номер рівня 01, оскільки запис у К. є найвищою формою організації даних. У секції масивів розділу даних описуються особливості масивів, використовуваних у задачі,— організація міток у масиві, групування записів і типи записів, що є в цьому масиві. 4-й розділ — процедур — описує дії, які виконуються над даними під час обробки їх. Кожна дія задається у формі оператора, який складається з дієслова, що визначає дію, й одного або й більше операндів — значень і назв (позначень) даних, які зазнають діяння операторів. Група послідовно записаних операторів, яка закінчується крапкою, наз. реченням. Речення об'єднуються в параграфи, а вони, в свою чергу, можуть бути об'єднані в секції. Програміст присвоює параграфам і секціям назви (мітки), які дають змогу звернутися до відповідної ділянки програми. Оператори розрізняються на: 1) оператори введення — виведення, що забезпечують обмін інформацією між зовнішнім середовищем (перфокарти, магнітні стрічки тощо) і внутрішньою пам'яттю машини: ВІДКРИТИ — готує масив до роботи; ЧИТАТИ — переносить черговий запис вхідного масиву з зовнішнього середовища в оперативну пам'ять, і після цього він стає доступним для обробки; ПИСАТИ — відправляє запис з оперативної пам'яті до вихідного масиву; ЗАКРИТИ — закінчує обробку масиву; ПРИЙНЯТИ — запитує частину інформації оператора та ВИДАТИ — видає на пульт частину інформації; 2) арифметичні оператори — виконують окремі арифм. дії (ДОДАТИ, ВІДНЯТИ, ПОМНОЖИТИ Й ПОДІЛИТИ) або обчислюють за формулою (ОБЧИСЛИТИ); 3) оператор переміщення даних з одночасним редагуванням передаваного даного до формату приймального поля (ПОМІСТИТИ); 4) оператор підрахунку або заміни входжень певного символу в даному (ПЕРЕГЛЯНУТИ); 5) оператор сортування масиву (СОРТУВАТИ); 6) оператори керування послідовністю: ПЕРЕЙТИ — передає керування в зазначену в операторі точку програми; ЗМІНИТИ — змінює зазначену в програмі послідовність виконання операторів, замінюючи назву мітки в операторі переходу; ВИКОНАТИ — дає змогу в певній точці програми виконати деяку групу операторів задану кількість разів, а потім продовжити виконання програми від зазначеної точки в звичайному порядку; ЯКЩО — перевіряє виконання заданих умов і залежно від результату перевірки встановлює порядок виконання операторів. Щоб навести відомості про дані й дії над ними (назви властивостей даних, операторів і т. ін.), в мову К. введено т. з. зарезервовані слова (близько 200 спец. слів), які заборонено використовувати як назви даних і процедур. К.-програма записується на спец. бланках, де кожний рядок перфорується на окремій перфокарті. Розділ процедур та розділ ототожнення не залежать від ЕОМ, на якій виконуватиметься програма, розділ обладнання повністю визначає ця ЕОМ. У розділі даних лише окремі фрази служать для повнішого використання особливостей машини, в усьому іншому й цей розділ не залежить від ЕОМ реалізації. Завдяки цьому, користувачі ЕОМ різних класів можуть легко обмінюватися програмами.

Застосування мови К. спрощує підготовку задачі для ЕОМ та наладжування її, полегшує навчання програмувати й дає змогу вести строгу документацію програм у стандартизованій формі. Успіх застосування мови привів до розробки точного опису стандарту К. й особливостей процесора. В 1967 опубліковано проект амер. стандарту мови К., що грунтується на мові в редакції 1965. Згідно з цією редакцією, мова має чітко виражену модульну структуру й складається з т. з. ядра, в якому є засоби для обробки даних у внутрішній пам'яті машини, й восьми модулів, кожний з яких реалізує ту чи іншу функцію процесу обробки. Модулі є такі: обробки таблиць (організує звертання до індивідуального елемента зі списку аналогічних елементів чи з таблиці, всі рядки якої ідентичні за формою); послідовної обробки записів з масиву (включає описи засобів організації масивів та оператори, що організують *обробку даних послідовну* з масиву); довільної об-

робки записів з масиву (містить у собі опис організації масивів, розміщених у масовій пам'яті, й оператори, які дають змогу здійснити *обробку даних довільну*); довільної (асинхронної) обробки даних (у ньому є засоби для асинхронної обробки даних); сортування даних (містить у собі засоби, що дають змогу організувати сортування масивів); складання звітів (у ньому є конструкції мови, які дають змогу задавати формат сторінки під час видавання даних та розміщення вихідних даних на друкованій сторінці); сегментації програм (у ньому є вказівки, які дають змогу сегментувати робочу програму, складену при трансляції К.-програми, якщо перша не вміщується цілком в оперативну пам'ять) і бібліотеки (містить у собі засоби, які дають змогу включати до К.-програми складені раніше фрагменти, записані мовою К.). В кожному з модулів виділено ряд рівнів складності, й це дає змогу при розробці *транслятора* обирати як вхідну мову підмножину, яка відповідає вимогам застосування і можливостям обладнання й лишається разом з цим у рамках стандарту. В Радянському Союзі розроблено транслятори з рос. варіанту мови К. для ряду вітчизняних машин. Див. також *Мови програмування.*

Літ.: Ющенко Е. Л. [та ін.]. КОБОЛ. (Программированное учебное пособие). К., 1973; USA Standard COBOL. New York, 1968. *Л. П. Бабенко.*

КОВЗНИЙ РЕЖИМ — вид руху динамічної системи, що його описують системою диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. К. р. характеризується тим, що рух проходить по поверхні розриву правої частини у просторі станів системи (або по перетину поверхонь). Для існування К. р. у системі $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, де



Система з ковзним режимом: *а* — фазові траєкторії; *б* — геометрична інтерпретація доозначення.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — вектор-функція, що зазнає розривів на гіперплощині $g(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t) \text{ при } g(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{f}^-(\mathbf{x}, t) \text{ при } g(\mathbf{x}) < 0; \end{cases}$ $\mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}^-(\mathbf{x}, t)$— вектор-функція, неперервна по змінній стану $\mathbf{x}$ і параметру t в області $g(\mathbf{x}) \geqslant 0$ ($g(\mathbf{x}) \leqslant 0$), досить виконати умови $\lim\limits_{g \to +0} \frac{dg}{dt} < 0$ і $\lim\limits_{g \to -0} \frac{dg}{dt} > 0$, які гарантують зустрічність траєкторій системи в околах простору станів, які примикають до гіперплощини розриву правої частини $g(\mathbf{x}) = 0$ (мал. *а*).

Рівняння руху системи по поверхні розриву необхідно довизначати, бо в цьому випадку не виконуються умови класичних теорем існування розв'язку дифер. рівняння. Треба, щоб доозначення розв'язку дифер. рівняння збігалося з розв'язком, який одержують при введенні в механізм, що реалізує розриви правої частини, різних малих неідеальностей, які знімають невизначеність продовження розв'язку вздовж поверхні розриву і при подальшому граничному переході до ідеального випадку. Такий підхід часто приводить до такого доозначення рівняння ковзання:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\},$$

де вектор швидкості $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, t)$ шукають у вигляді:

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, t) = \mu\mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t) + (1 - \mu)\mathbf{f}^-(\mathbf{x}, t), \; 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Цей вектор належить дотичній площині до поверхні $g(\mathbf{x}) = 0$ (мал. *б*). К. р. широко використовують при синтезі релейних систем керування і *систем керування зі змінною структурою.*

Д. Б. Ізосимов, С. К. Коровін, О. С. Риков.

КОД (від лат. codex) — універсальний спосіб відображення інформації під час її зберігання, передавання та обробки у вигляді системи відповідностей між елементами повідомлень і сигналами, що за їхньою допомогою ці елементи можна зафіксувати. Застосовують К. для відображення дискретної інформації в лініях і *каналах зв'язку*, системах автоматики, обчисл. пристроїв та ін. системах, використовуваних у різних галузях техніки. Відображення інформації у вигляді К. широко використовують і живі організми.

Нехай дано множину можливих елементів повідомлень $B = \{b_i\}$, де $i = 1, ..., N$, і якийсь алфавіт A з символами $a_j \in A$, де $j = 1, ..., m$. Скінченну послідовність символів a_j наз. словом у цьому алфавіті. Множину слів в алфавіті A наз. К., якщо її поставлено у взаємно однозначну відповідність до множини B. Кожне слово, що входить до К., наз. кодовим словом (кодовою комбінацією). Кількість символів у кодовому слові наз. довжиною слова. Для запису кодових символів a_j використовують різні позначення у вигляді цифр, букв і спец. знаків. Кількість різних значень m, що їх може набувати кожен кодовий символ, наз. основою К.

Кодове слово $k = (a_{n-1}, ..., a_i, ..., a_0)$ довжини n при цьому можна розглядати як n-розрядне число в *системі числення* з основою m:

$$k = \sum_{j=n-1}^{0} a_j \cdot m^j = a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot m + a_0.$$

Кодові слова можуть мати однакову або різну довжину. Відповідно до цього К. наз. рівномірним або нерівномірним.

Нерівномірні К. застосовують у системах кодування, де враховано статистичні властивості повідомлень з метою мінімізації пересічної довжини слова на елемент повідомлення. Є ефективні методи кодування інформації, де враховано їхню статистичну структуру (код Шеннона — Фано, код Хафмена). Нерівномірні К. широко застосовують у телеграфії. Найвідомішим з цих К. є код Морзе, призначений для кодування алфавітно-цифрової інформації під час передавання її по телеграфних каналах. Особливим класом серед нерівномірних К. є К. без коми (префіксні). Ці К. не потребують розділових знаків між кодовими словами, мають властивість самосинхронізації, що дає змогу однозначно поділяти кодові слова за послідовністю повідомлень.

Найпоширенішими в системах обробки та передавання інформації є рівномірні К. Основа К. здебільшого дорівнює двом (двійкові К.). Вибір такої основи здебільшого залежить від особливостей побудови систем обробки та передавання інформації, які використовують дискретні елементи з двома стійкими станами. Рівномірні двійкові К. широко використовують для відображення вхідної інформації ЦОМ і систем передавання та обробки даних. При введенні двійково-кодової інформації в ЦОМ для компактнішого записування часто використовують К., основи яких є цілі степені числа 2 (вісімковий, шістнадцятковий). Ці К. є прості для перетворення на двійковий і навпаки.

Для відображення числової інформації в ЦОМ великого поширення набули двійкові позиційні К. з природним розподілом вагів розрядів $2^{n-1}, \ldots, 2^i, \ldots, 2^0$ (де n — кількість розрядів). Щоб спростити *алгоритми* виконання арифм. операцій з урахуванням знака і скінченності розрядної сітки операндів, застосовують спец. К. для відображення відносних чисел: прямий, обернений, доповняльний. В усіх цих К. для відображення знака використовують спец. *знаковий розряд*.

У прямому К. знак кодують значенням «0» для додатних чисел і «1» — для від'ємних чисел, а абсолютну величину числа зображують двійковим позиційним К. Прямий К. задовольняє вимоги автомат. одержання знака добутку й частки, його зручно використовувати при виконанні операцій множення й ділення. Проте він не забезпечує заміни віднімання чисел додаванням їхніх кодів, і це утруднює використання його під час виконання операцій додавання й віднімання. Цієї вади не мають зворотний і доповняльний К., що відрізняються від прямого К. лише способом відображення від'ємних чисел.

Обернений К. від'ємного числа утворюється, якщо замінити кожну двійкову цифру додатного числа того самого абсолютного значення, а саме «0» на «1», а «1» на «0». Якщо при підсумовуванні чисел в оберненому К. сума їх виходить за межі діапазону відображення чисел, треба від суми відняти число, кратне $(2^n - 1)$. З цією метою при підсумовуванні обернених К. виконують циклічне перенесення з старшого розряду в молодший. Циклічне перенесення дещо ускладнює операцію додавання чисел, бо під час переходу через нуль потрібен ще один зайвий такт підсумовування. Достоїнством обернених К. є простий зв'язок їх з прямими, бо перетворення прямий К. — обернений К. і навпаки є порозрядною операцією.

В доповняльному К. для відображення від'ємного числа використовують доповнення додатного числа тієї самої абсолютної величини до модуля 2^n. Перевагою доповняльного К. над оберненим є спрощення операції підсумовування відносних чисел, бо при підсумовуванні доповняльних К. не потрібне циклічне перенесення в *суматорі*. Перетворення прямого К. на доповняльний і навпаки не є порозрядними операціями і включають, крім логічної операції — інвертування числа, ще й операцію додавання з одиницею в молодшому розряді. Описані способи кодування чисел легко узагальнити й на випадок К. з основою, відмінною від 2.

Поряд з двійковими позиційними К. в ЦОМ широко застосовують і двійково-десяткові К. У цих К. кожну десяткову цифру відображують у якомусь двійковому К. Найпоширенішим є кодування десяткової цифри чотирма двійковими (тетрадою). Застосовують кілька систем кодування десяткових цифр двійковими тетрадами: К. «8, 4, 2, 1», К. «2, 4, 2, 1», К. «7, 4, 2, 1», К. з надлишком 3 та ін. К. «8, 4, 2, 1» є природним відображенням десяткових цифр у двійковій системі, бо саме такою є природна вага двійкових розрядів у позиційному двійковому К. І решта К. є зваженими, але відрізняються один від одного вагою розрядів, і через це виникають деякі нові властивості. Так, К. «2, 4, 2, 1» (код Айкена) має властивість доповнювання до 9, що спрощує виконання в цьому К. арифм. операцій над відносними числами. Аналогічну властивість мають і К. з надлишком 3 (код Скібітца), в якому значення чисел зсунуто на 3 щодо природного К. «8, 4, 2, 1». А К. «7, 4, 2, 1» цікавий тим, що тетради в ньому мають не більш як дві одиниці. Застосовують і двійково-десяткові К., в яких кожна десяткова цифра кодується п'ятьма і більше двійковими. Надлишковість таких К. можна використати для контролю та корекції передавання та обробки даних. Найвідомішим К. цього класу є К. «2 з 5», що в ньому кожна кодова комбінація містить 2 одиниці й 3 нулі. К. «2 з 5» дає змогу виявляти багато характерних помилок при відображенні числа (див. *Коди коректуючі*). Такі властивості має й двійково-десятковий К. «з надлишком 11» і К. «3а + 2» (код Даймонда), які мають

ще й властивості доповнювання і в цьому розумінні вони аналогічні К. з надлишком 3.

Окрім позиційних систем відображення чисел, є й непозиційні (символічні) системи. Однією з найбільш досліджених непозиційних систем є система числення залишкових класів (СЧЗК). Число N в СЧЗК зображують у вигляді впорядкованого набору залишків (лишків) за взаємно простими основами $p_1, ..., p_i, ..., p_n : N \sim (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$, де α_i — найменший лишок N за модулем p_i. Система основ $p_1, ..., p_i, ..., p_n$ визначає діапазон відображення чисел $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Важливою особливістю СЧЗК є те, що раціональні арифм. операції (додавання, віднімання і множення) в цій системі провадяться незалежно по кожній основі, і це дає змогу істотно збільшити швидкість виконання цих операцій. Другою перевагою СЧЗК є те, що на ній зручно виконувати операції з контролем і корекцією результату, бо помилки локалізовано в межах основ. Коди коректуючі в СЧЗК можна одержати внаслідок розширення системи основ, включивши до її складу спеціально підібрані контрольні основи. Осн. вадою СЧЗК є те, що на ній важко виконувати операції, що потребують знання позиційних характеристик чисел (визначення знака, положення числа в діапазоні, переповнення тощо) і важко відображувати числа з плаваючою комою.

Іншим відомим класом К., що використовує непозиційну систему відображення чисел, є рефлексні К., з них характерним є код Грея. В К. Грея комбінації, що відображують сусідні за величиною числа, відрізняються лише в одній кодовій позиції. Такі К. добре задовольняють вимоги аналогово-цифрового перетворення, усуваючи неоднозначність зчитування величини кута в перетворювачах з кодуючими дисками й зводячи до мінімуму можливі помилки перетворення. Кодові позиції числа в коді Грея пов'язані з відповідними позиціями цього числа в природному двійковому К. співвідношенням: $\gamma_i = (a_{i+1} \oplus \oplus a_i)$, де $(\gamma_n, ..., \gamma_i, ..., \gamma_1)$ — відображення числа N у коді Грея; $(a_n, ..., a_i, ..., a_1)$ — відображення числа N у природному двійковому К.; $\oplus$ — операція підсумовування (порівнювання) за модулем 2. Вадою коду Грея є складність виконання в ньому арифм. операцій, тому при введенні в ЦОМ він здебільшого перетворюється на позиційний К. У системах автоматики й спеціалізованих обчисл. пристроях застосовують і недвійкові К. У таких К. кожний кодовий символ може набувати m різних значень, що дає змогу економніше кодувати повідомлення. Причинами, що утруднюють використання недвійкових систем кодування, є технічні труднощі побудови елементів, здатних надійно зберігати й обробляти інформацію, відображену числом станів, більшим за 2. Відповідно ускладнюються й логіч. та арифм. операції в недвійкових К., але в деяких випадках такі системи доцільно застосовувати заради оптимізації кількості використовуваного устаткування.

Літ.: Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [бібліогр. с. 559—575]; Супрун Б. А. Первичные коды. М., 1970 [бібліогр. с. 155—161]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820].

О. М. Ракін.

КОД СЕМАНТИ́ЧНИЙ — знак інформаційної мови, що являє собою (на відміну від дескриптора у вузькому розумінні слова) похідну одиницю, яка складається з простіших одиниць — семантичних множників. К. с. забезпечує аналітичне задання *відношень парадигматичних* (а в деяких мовах — і синтагматичних). К. с. застосовується здебільшого в інформаційних мовах, які передають різні парадигматичні відношення між словами (підклас 3.3 парадигматичної класифікації — див. *Мова інформаційно-пошукова*). К. с. є в певному розумінні аналогом складного слова природної мови. Він явно відображує деякі зв'язки між поняттями. Це дає змогу на формальному рівні виявляти спільність і відмінність між об'єктами, описаними за допомогою К. с. Напр., у мові системи «БИТ» К. с. $R_{001}\ X_{401}\ R_{202}\ X_{306}\ R_{202}\ X_{506}$ має значення «літак», а $R_{001}X_{401}R_{202}X_{306}R_{202}X_{507}$ — «вертоліт». Тут букви X — семантичні множники, а R — символи, які вказують на наявність певного парадигматичного відношення між К. с. в цілому і відповідним семантичним множником. Перший код інтерпретується так: «вид (R_{001}) літального апарата, важчого за повітря, (X_{401}), який має (R_{202}) силову установку (X_{306}) і крило (X_{506})», другий — «вид літального апарата, важчого за повітря, який має силову установку й несучий гвинт (X_{507})». *Е. Ф. Скороходько.*

КО́ДИ КОРЕКТУ́ЮЧІ — клас кодів, які мають властивість виявляти з заданою точністю помилки, що виникають, і виправляти їх. Осн. призначення К. к. — підвищувати завадостійкість інформаційних систем. К. к. застосовують у системах передавання, зберігання та обробки дискретної інформації.

Розвиток теорії К. к. при передаванні інформації значною мірою стимулювався фундаментальною теоремою К. Шеннона для каналів з шумом, згідно з якою за допомогою належних *кодів* можна передавати інформацію з будь-якою швидкістю, що не перевищує пропускної здатності *каналу зв'язку*, так, щоб імовірність помилки після декодування була довільно малою. Надалі теорія К. к. набула широкого застосування і в задачах зберігання та обробки дискретної інформації в пристроях автоматики й ЦОМ.

В основу побудови різних К. к. покладено принцип введення *надмірності повідомлень*, який полягає в тому, що при кодуванні повідомлень подають додаткову інформацію, яка надає осн. інформації повідомлень завадозахисних властивостей. При декодуванні К. к. на приймальному боці каналу передавання чи обробки інформації здійснюються зворотна операція виділення інформації повідомлення й інформації про виниклі помилки та операція виправлення їх, якщо потрібно.

Розрізняють К. к. за призначенням, коректувальною здатністю, принципами побудови та ін. ознаками. Найбільше досліджено й найпоширенішими стали блокові коди, що використовують як кодові слова послідовності з n символів каналу (блоки). Надмірність у блокові коди вводять внаслідок того, що як кодові слова використовують лише частину всіх можливих послідовностей з n символів. Цю частину слів, які становлять код, добирають відповідно до потрібної коректувальної здатності коду. За використовуваним принципом утворення кодових слів блокові коди ділять на подільні й неподільні. В подільних кодах кодові позиції слів ділять на інформаційні, що мають первісну кодовану інформацію, та перевірні, що мають надмірну інформацію, необхідну для корекції помилок, які виникають. У неподільних кодах зазначеного поділу не можна виконати й надмірність вводять внаслідок перекодовування всієї первісної інформації. При декодуванні неподільних кодів для того, щоб добути інформацію повідомлення в початковому вигляді, потрібне зворотне перекодовування, що є гол. вадою неподільних кодів. Найпоширенішими є двійкові К. к., хоч ряд важливих результатів теорії К. к. можна узагальнити й на коди з основами, відмінними від двійкової. При декодуванні добутого слова, можливо спотвореного шумом, приймається рішення відносно дійсного кодового слова. Це рішення є найкращою гіпотезою, що виходить з наявної інформації, й не є абсолютно вірогідним через статистичний характер гіпотези. Тому при конструюванні коду вирішальне значення має вибір моделі каналу з шумом. Відомо кілька таких моделей, серед них найпоширенішим став симетричний канал, який припускає рівноймовірними помилки різних типів. Модель цього каналу є зручною матем. моделлю й її найінтенсивніше досліджували, хоч багато реальних каналів описано в цій моделі досить наближено.

Ін. моделлю каналу, що набула застосування в пізніших дослідженнях, є асиметричний канал, який враховує можливість появи помилок різних типів з різними ймовірностями, що характерне для багатьох реальних каналів. Описано кілька різновидів моделей асиметричного каналу, що характеризуються різними обмеженнями на ймовірність помилок різних типів (цілком асиметричні канали, канал з частковою асиметрією). Специфічною моделлю каналу з шумом, що також набула застосування в теорії завадостійкого кодування, є канал із стиранням. Особливістю цього каналу є наявність у вихідному алфавіті каналу спец. символу стирання. Спотворення вхідних символів мають характер стирань (переходи в символ стирання, що їм приписують певну ймовірність). Стираючий канал відображує властивості певних реальних каналів, у яких розв'язувальний пристрій на виході каналу має ділянку невизначеності, що включає всі спотворені сигнали. Всі зазначені моделі каналів характеризують можливі спотворення довільного вхідного символу. Характер розподілу помилок у послідовності символів ураховують різні моделі, серед яких можна виділити: а) модель незалежних помилок, яка припускає ймовірності спотворень різних символів послідовності постійними й незалежними (канал без пам'яті). Коректувальна здатність кодів для такої моделі визначається макс. кратністю виявлюваних і виправлюваних помилок; б) модель згрупованих помилок (пачок помилок), яка враховує кореляцію між спотвореннями послідовності символів на ділянці обмеженої довжини. Найімовірніші помилки, що їх вносить така модель, групуються в пакети (пачки), й їх можна охарактеризувати макс. довжиною пачки. В деяких моделях додаткові обмеження встановлюють і на розташування пачок за довжиною кодової послідовності. Відомі й інші моделі, що враховують кореляцію спотворень у послідовності символів (напр., списком можливих помилок).

К. к. для симетричного каналу найбільше досліджено. Теорія цих кодів широко використовує алгебр. структури (групи, кільця, поля, векторні простори тощо). Для кодів, що коректують незалежні помилки, важливу роль відіграє поняття кодової відстані. Віддаль між будь-якою парою двійкових кодових слів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і $y_1 = (y_1, \ldots, y_n)$ визначається співвідношенням: $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i)$, де $d(x, y)$ наз. хеммінговою відстанню, $\oplus$ — операція додавання за модулем 2. Кодова відстань є найменшою хеммінговою відстанню між кодовими словами. Вона визначає коректувальні можливості коду щодо незалежних помилок відповідно до такої осн. властивості: для того, щоб код виявляв усі комбінації з s помилок і виправляв усі комбінації з t помилок, необхідно й достатньо, щоб кодова відстань дорівнювала $(t + s + 1)$. Широкий клас кодів для симетричного каналу становить лінійні (групові) коди, що їхня сукупність кодових слів створює абелеву групу з операції додавання за модулем 2. Групові коди належать до подільних (систематичних) кодів. Для них прийнято позначення (n, k)-код, де n — довжина кодових слів, а k — число інформаційних позицій. Представником цього класу кодів є код Хеммінга.

Код Хеммінга з виявленням однократних помилок (код з контролем на парність) утворюється додаванням до інформаційних позицій однієї перевірної позиції, значення якої доповнює до парної суму одиниць усіх позицій кодового слова. Такий код має кодову відстань 2 й дає змогу виявляти будь-яку однократну помилку й усі помилки непарних кратностей. У коді Хеммінга для виправлення однократних помилок у перевірних позиціях розміщують символи, які є результатами перевірок на парність спеціально пі-

дібраних груп інформаційних позицій. Якщо немає спотворень, перевірки цих груп на парність (спільно з відповідними перевірними символами) дають нульові значення, а кожній однократній помилці відповідає своя сукупність значень перевірок, і це дає змогу однозначно ідентифікувати помилку, а, отже, й виправити її. Кодова відстань у такому коді — 3, її можна збільшити до 4 доданням заг. перевірки на парність усіх позицій кодового слова. Одержаний т. ч. код разом з виправлянням однократних помилок дає змогу й виявляти довільні подвійні помилки.

В заг. випадку лінійні (групові) коди описують за допомогою породжувальної чи перевірної матриці коду. Породжувальна матриця (n, k)-коду має розмірність $n \times k$ і складається з базисних векторів, які задають лінійний векторний простір кодових векторів. Перевірна матриця (n, k)-коду має розмірність $n \times (n - k)$. Рядки цієї матриці визначають перевірні співвідношення між інформаційними й перевірними позиціями коду й їх також можна розглядати як базисні вектори простору, ортогонального просторові кодових векторів. Щоб одержати кодову відстань d, необхідно й достатньо, щоб будь-яка лінійна комбінація з $d - 1$ або менше стовпців перевірної матриці була лінійно-незалежною. Зокрема, перевірну матрицю коду Хеммінга з $d = 3$ можна одержати, вибираючи як стовпці різні ненульові $(n - k)$-позиційні двійкові числа. Відомі й складніші конструкції перевірних матриць, які дають змогу одержувати коди $d > 3$.

Важливим класом групових кодів є ц и к л і ч н і коди, що відзначаються порівняно простими алгоритмами кодування й декодування та високими коректувальними можливостями. Переважна більшість найкращих К. к. для симетричного каналу належить до циклічних кодів або побудована на їхній основі. Циклічний двійковий код визначають як ідеал в *алгебрі лінійній* поліномів над полем коеф. $\{0,1\}$. Осн. властивість циклічних кодів полягає в тому, що разом із словом v код має й усі його циклічні перестановки. Структура коду цілком визначається породжувальним поліномом $g(x)$ степеня $(n - k)$ або перевірним поліномом $h(x) = (1+x^n)\cdot g^{-1}(x)$, степеня k, за якими однозначно можна обчислити породжувальну або перевірну матриці коду. Ін. спосіб задавання циклічних кодів грунтується на використанні коренів полінома $g(x)$, які здебільшого задають степенями якогось елемента α. Серед усіх відомих циклічних кодів для каналу з незалежними помилками найкращими за своїми коректувальними властивостями є коди Боуза — Чоудхурі — Хоквінгема (БЧХ). Ці коди можна побудувати в широкому діапазоні кодових довжин і кодових відстаней. Для будь-яких цілих значень m і t існує код БЧХ довжини $n = 2^m - 1$ з кодовою відстанню $d = 2t + 1$, який має не більш як $m \cdot t$ перевірних символів. Коди БЧХ задаються здебільшого коренями породжувального многочлена, які є послідовними степенями примітивного елемента α поля $GF(2^m) : \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2t}$. Є й ін. конструкції кодів БЧХ, зокрема породжувані й непримітивними елементами поля $GF(2^m)$. Коди БЧХ за своєю надмірністю при заданій кодовій відстані досить економічні й близькі до теор. границі. Код Хеммінга й ряд ін. К. к. можна розглядати як часткові випадки кодів БЧХ. Ін. важливим класом циклічних кодів є коди для каналів з пакетами (пачками) помилок. Найвідомішими кодами цього класу є коди Файра, визначувані породжувальними поліномами вигляду $g(x) = p(x) \cdot (x^c + 1)$, де $p(x)$ — незвідний поліном степеня m. Вони придатні для широкого діапазону довжин кодів і довжин коректованих пачок помилок. До кодів, що виправляють пачки помилок, належать і коди Ейбрамсона та коди Меласа. Широкі можливості для корекції пачок помилок мають і коди Ріда—Соломона і коди БЧХ. Спец. клас К. к. утворюють коди, що локалізують помилки. Вони є проміжними між кодами, що виявляють помилки, й кодами, що виправляють їх, бо дають змогу встановлювати місця помилок з точністю до підблока, тобто кількох кодових позицій кодового слова. Такі коди можна побудувати на основі відомих циклічних кодів. Коди, що локалізують помилки, становлять інтерес для систем передавання з перепитуванням, для якого використовується зворотний канал для завдань завадостійкого кодування багатоблокових структур автоматів та ін.

Окрім К. к., для симетричних каналів великий інтерес являють собою й коди для асиметричних каналів. Урахування асиметрії помилок реальних каналів передавання та обробки інформації в багатьох випадках дає змогу одержати простіші конструкції К. к. або зменшити необхідну надмірність при заданій коректувальній здатності коду. Більшість конструкцій К. к. для асиметричного каналу основано на вагових представленнях кодових слів, при яких кожну кодову позицію зважено якоюсь постійною вагою, а перевірні співвідношення є певними функціями ваги кодових слів. В основу виявлення асиметричних помилок при цьому покладено принцип змінювання ваги. Найвідомішими кодами цього типу є коди постійної ваги (коди з постійною кількістю одиниць), що їх застосовують у техніці зв'язку, перетворювальних пристроях та для кодування десяткових цифр у ЦОМ (коди «2 з 5», «3 з 7»).

Коди для асиметричних каналів виявляють довільний збіг асиметричних помилок, проте належать до неподільних кодів. Їхнім аналогом серед подільних кодів є коди Бергера — Фреймана. Є й коди, що коректують асиметричні помилки й мають меншу надмірність, аніж аналогічні коди для симетричних каналів: коди Кіма—Фреймана й Варшамова—Тененгольца, що коректують однократні асиметричні помилки, код Тененгольца, що коректує

подвійні асиметричні помилки, і коди, що коректують пачки асиметричних помилок. Є й конструкції кодів, що коректують асиметричні помилки в багатоканальних системах. Ці коди використовують, коли проектують зовн. запам'ятовувальні пристрої ЦОМ і багатоканальні системи передавання інформації.

В системах обробки інформації застосовують і К. к., що називаються арифметичними. До таких кодів, окрім вимог корекції помилок, ставлять і вимоги щодо зручності виконання арифм. операцій над кодовими словами (див. *Операції над числами*). Щоб оцінити коректувальну здатність арифм. кодів, використовують відмінні від хеммінгівських поняття помилки й кодової відстані. Арифм. вагу числа N визначають при цьому як мінім. число доданків у зображенні числа у вигляді $N = \sum_i a_i \cdot 2^{ji}$, де $a_i \in \{0; +1; -1\}$. Арифм. відстань між числами N_1 і N_2 — арифм. вага різниці $(N_1 - N_2)$ й дорівнює кратності помилки, що перетворює число N на N_2 (або N_2 на N_1). Таке визначення відстані добре відображує специфіку помилок, що можуть виникати під час виконання арифм. операцій (типу додавання), в т. ч. можливе розмноження помилок по *ланцюгу переносу*. При оцінці коректувальної здатності кодів до незалежних арифм. помилок арифм. відстань є повним аналогом відстані Хеммінга. Найширший клас арифм. кодів утворюють AN-коди, в яких кодоване число N являє добуток його на спеціально підібраний множник A.

Найпростішим кодом з відстанню 2, що виявляє поодинокі арифм. помилки, є код $3N$. Відомі й AN-коди, що виправляють поодинокі й багаторазові арифм. помилки. Параметр A таких кодів істотно залежить від потрібної кодової відстані й діапазону кодованих чисел. У деяких застосуваннях бажано, щоб арифм. код мав властивість самодоповнюватися. Цю властивість можна здобути *зсувом* значень усіх кодових слів AN-коду на певну константу (за аналогією з самодоповнюваними двійково-десятковими кодами). Одержувані таким способом коди наз. $(AN + B)$-кодами. AN-коди й $(AN + B)$-коди належать, як правило, до неподільних кодів. Проте є подільні аналоги AN-кодів, що в них як перевірні символи використовують лишки числа N (інформаційної частини кодового слова) за модулем A чи системою модулів $A_1, \dots, A_s$. Найвідомішими є коди цього типу при $A = 3$; 7, що виявляють арифм. помилки. Ці коди використовують для контролю арифм. операцій у ЦОМ та наскрізного контролю інформаційних трактів ЦОМ. Подільні арифм. коди, що виправляють помилки, можна одержати, відповідно підібравши систему модулів $A_1, \dots, A_s$ при $s \geqslant 2$.

Важливий клас арифм. кодів утворюють коди, що використовують представлення чисел у *системі числення* залишкових класів. Коректувальні властивості таких кодів утворюються внаслідок збільшення кількості основ, використовуваних для представлення чисел, порівняно з мінімально потрібною кількістю основ при заданому діапазоні чисел. Наявність одної надмірної основи дає змогу виявляти помилки, що спотворюють лишок за будь-якою (однією) основою, а двох надмірних основ досить, щоб виправити всі такі помилки. Достоїнством К. к. в системі числення залишкових класів є їхня висока коректувальна здатність. Крім того, операції, пов'язані з корекцією помилок, у таких кодах добре суміщуються зі звичайними операціями над робочими основами.

Окрім блокових К. к., розвинуто й рекурентні К. к., які можна розглядати як особливий спосіб безперервної обробки інформації. В цих кодах перевірні символи перемежовуються з інформаційними, утворюючи безперервну послідовність, що не поділяється на блоки. Рекурентні К. к. досліджено значно менше, ніж аналогічні блокові. Найбільше вивчено коди цього класу, що виправляють пачки помилок, вони мають простіші алгоритми кодування й декодування, ніж аналогічні циклічні коди.

Літ.: Варшамов Р. Р. Математические методы повышения надежности в реальных системах связи. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1964, № 4; Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968 [бібліогр. с. 430—433]; Дадаев Ю. Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. М., 1969 [бібліогр. с. 161—164]; Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 309—316].

О. М. Ряків.

КОДУВА́ННЯ АВТОМА́ТНЕ — кодування, описуване за допомогою узагальненого скінченного автомата, вихід якого в кожний момент часу є якесь, може, пусте слово у вихідному алфавіті. Більшість задач теорії кодування вкладається в таку схему: розглядають клас автоматних кодувань, які мають певні властивості; треба побудувати кодування з розгляданого класу, оптимальне в якомусь заздалегідь заданому розумінні. Звичайно критерій оптимальності кодування так чи інакше пов'язаний з мінімізацією довжин вихідних слів, тоді як потрібні властивості кодування можуть бути досить різноманітними. Зокрема, такими властивостями можуть бути існування зворотного відображення (декодування), можливість виправляти під час декодування помилки різного типу, можливість простої тех. реалізації кодування й декодування і т. п.

Основи *кодування теорії* заклав амер. учений К.-Е. Шеннон (н. 1916). Найповніше досліджено К. а. з одним станом, які наз. алфавітними кодуваннями. При алфавітному кодуванні φ кожній букві a_i вхідного алфавіту $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$ ставлять у відповідність якесь слово $v_i = \varphi(a_i)$ у вихідному алфавіті $B_r = \{b_1, \dots, b_r\}$. Довільне вхідне слово (повідомлення) $a_{i_1} \dots a_{i_n}$ відображується в слово $\varphi(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = \varphi(a_{i_1}) \dots \varphi(a_{i_n}) = v_{i_1} \dots v_{i_n}$ в алфавіті B_r. Множину

$V_\varphi = \{v_1, \ldots, v_m\}$ наз. кодом. *Код* V_φ наз. подільним, якщо з будь-якої рівності $v_{i_1} \ldots v_{i_n} = v_{j_1} \ldots v_{j_l}$ в алфавіті B_r виходить, що $l = n$ і $i_t = j_t$, $t = 1, \ldots, n$. Подільність коду V_φ рівносильна взаємній однозначності алфавітного кодування φ. Зокрема, код є подільним, якщо ніяке кодове слово не є початком іншого. Такі коди (й відповідні їм алфавітні кодування) наз. префіксними. Існують подільні, але не префіксні коди. Для будь-якого подільного коду $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ в алфавіті B_r виконується нерівність $\sum_{i=1}^{m} r^{-l_i} \leqslant 1$ (*), де l_i — довжина слова v_i. Справджується й обернене твердження: якщо $(l_1, \ldots, l_m)$ — набір цілих додатніх чисел, для яких виконується й наведена вище нерівність, то в алфавіті B_r існує префіксний код $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, в якому слово v_j має довжину l_j, $j = 1, \ldots, m$. Якщо числа l_j упорядковано за зростанням, то, згідно з Шенноном, як слово v_j можна взяти перші після коми l_j символів розкладу числа $\sum_{i=1}^{j-1} r^{-l_i}$ в нескінченний r-ичний дріб. Код $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ наз. сильно подільним, якщо з будь-якої рівності $v_{i_1} v_{i_2} \ldots = v_{j_1} v_{j_2} \ldots$ нескінченних послідовностей у B_r виходить, що $i_t = j_t$, $t = 1, 2, \ldots$. Найпростішим прикладом подільного, але не сильно подільного коду є код $\{0, 01, 11\}$. Автомат $\mathfrak{B}$ зі вхідним алфавітом B_r і вихідним A_m наз. декодуючим для алфавітного кодування φ, якщо існує таке число t, що автомат $\mathfrak{B}$ видає кожне слово $a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ через t тактів після того, як у нього надійшло слово $\varphi(a_{i_1} \ldots \ldots a_{i_n})$. Для алфавітного кодування φ існує декодуючий алфавіт тоді й тільки тоді, коли код V_φ є сильно подільним. Код $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ наз. цілком подільним, якщо в алфавіті B_r неможливі рівняння виду $\beta v_{i_1} \ldots v_{i_k} = v_{i_1} \ldots v_{i_l} \beta$, де β — непустий початок слова v_{i_1}, відмінний від v_{j_1}. Для алфавітного кодування φ існує дефінітний декодуючий автомат тоді й тільки тоді, коли код V_φ є цілком подільним. *Автомат дефінітний* дає змогу протягом обмеженого проміжку часу усунути вплив збоїв у вхідній послідовності або в роботі самого автомата. Щоб розпізнати вказані властивості коду $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, будують допоміжний *граф*, вершина якого — непусті слова, які є й початками, й закінченнями деяких кодових слів. При цьому вершина β з'єднується з β' ребром, напрямленим від β до β', якщо існує кодове слово v_i таке, що $\beta = v_i\beta'$ або $v_i = \beta\beta'$. Побудова завершується об'єднанням усіх вершин, відповідних кодовим словам, в одну спільну вершину, позначувану символом Λ. Код V є: 1) подільним, 2) сильно подільним або 3) цілком подільним тоді й тільки тоді, коли в побудованому графі немає відповідно: 1) орієнтованих циклів, які проходять через вершину Λ; 2) орієнтованих циклів, у які можна потрапити з вершини Λ; 3) ніяких орієнтованих циклів.

Найбільш закінчені результати в теорії кодування пов'язані з побудовою кодів, які мають мінім. надмірність при заданих значеннях вільних параметрів. Запропоновані тут конструкції використовують на практиці при стискуванні інформації та вибірці інформації з пам'яті. В найпростішому варіанті задачі припускають, що послідовні появи букв вхідного алфавіту $A_m = \{a_1, \ldots, a_m\}$ статистично незалежні й підпорядковані якомусь розподілові ймовірностей

$$P = \{p_1, \ldots, p_m\} \left(p_i > 0, \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\right).$$

Кожне К. а. φ характеризується середнім числом $L_\varphi(P)$ букв вихідного алфавіту B_r, які припадають на одну букву вхідного алфавіту A_m. Для алфавітного кодування $L_\varphi(P) = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i$, де l_i — довжина слова $\varphi(a_i)$ в алфавіті B_r. Якщо К. а. φ є взаємно однозначним, то $L_\varphi(P) \geqslant H_r(P) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_r \frac{1}{p_i}$. Величину $I_\varphi(P) = L_\varphi(P) - H_r(P)$ наз. надмірністю кодування φ при розподілі P. Задача полягає в тому, щоб відшукати в заданому класі взаємно однозначних кодувань кодування, яке має мінім. надмірність. Оскільки при $l_i =]\log_r \frac{1}{p_i}[$ виконується нерівність (*), то за методом Шеннона можна побудувати алфавітне префіксне кодування з надмірністю, меншою за одиницю, де $]x[$ — найменше ціле, не менше за число x, а $[x]$ — ціла частина числа x (найбільше ціле, не більше за число x).

Одним з осн. досягнень теорії кодування є метод Хаффмена — побудови префіксного алфавітного кодування, яке має мінім. надмірність у класі всіх взаємно однозначних алфавітних кодувань. Істотного зменшення надмірності можна досягти, розбиваючи повідомлення на блоки довжини k й використовуючи алфавітне кодування φ_k цих m^k блоків. Методами Шеннона або Хаффмена можна побудувати префіксне кодування φ_k блоків довжини k таке, що $I_{\varphi_k}(P) < \frac{1}{k}$, причому цю оцінку не можна поліпшити за порядком (при $k \to \infty$) ні для якого розподілу P, крім розподілу, при якому всі числа $\log r \frac{p_i}{p_j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$,

є цілими. Методи Шеннона і Хаффмена застосовні в тому разі, коли відомий *розподіл ймовірностей*. Для випадку невідомих імовірностей доведено, що існує префіксне кодування φ_k блоків довжини k таке, що для будь-якого розподілу ймовірностей P має місце $I_{\varphi_k}(P) < \frac{(m-1)\log_r k + c}{2k}$, де c — якась величина, не залежна від k. З другого боку, встановлено, що для будь-якого префіксного кодування φ_k блоків довжини k існує розподіл P такий, що $I_{\varphi_k}(P) > \frac{(m-1)\log_r k - d}{2k}$, де d — якась величина, не залежна від k.

Більшість праць із теорії кодування присвячено задачі побудови кодів, які допускають виправлення помилок (див. *Коди коректуючі*). Було досліджено переважно т. з. блокові коди, що являють собою підмножини B_r^n усіх слів довжини n в алфавіті $B_r = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. При цьому виявилося зручним розглядати алфавіт B_r як кільце лишків за mod r або як поле Галуа $GF(r)$, якщо r є степінь простого числа, а множину B_r^n розглядати як n-вимірний векторний простір над B_r. Код $V \subset B_r^n$ наз. лінійним, якщо він утворює лінійний підпростір вимірності k в просторі B_r^n. Під помилкою типу заміщення (або просто помилкою) розуміють випадковий перехід однієї букви алфавіту B_r в іншу. В просторі B_r^n вводять метрику Хеммінга, як число координат, у яких два вектори розрізняються, або, що те саме,— як мінім. число помилок, що переводять один вектор в інший. Кожний код $V \subset B_r^n$ характеризується такими параметрами: n — довжина коду, r — основа коду, m — число векторів коду, k — вимірність лінійного коду і d — кодова віддаль, яка дорівнює мінімумові віддалей між різними векторами коду. Є можливість виправити t або менше помилок у кожному векторі, що належить кодові V, тоді й тільки тоді, коли $d \geqslant 2t+1$. Надмірність алфавітного кодування за допомогою коду $V \subset B_r^n$ (коли вхідні букви рівноймовірні) характеризується величиною $n - \log_r m$. Тому, будуючи код з заданим числом виправлюваних помилок, бажано мінімізувати довжину n і максимізувати число елементів m (або вимірність k в разі лінійних кодів). Код, який має макс. число елементів при заданих значеннях решти параметрів, наз. максимальним.

Прикладом кодів для виправлення поодиноких помилок є двійкові лінійні коди Хеммінга

$$H_n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \ldots, \sigma_l^{(i)}) = (0, 0, \ldots, 0)\right\},$$

де $l = [\log_2 n] + 1$ і $(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \ldots, \sigma_l^{(i)})$ — вектор з 0 і 1, який є двійковим записом числа i, тобто такий, що $\sum_{j=1}^{l} \sigma_j^{(i)} 2^{l-j} = i$. Коди H_n мають параметри: n — будь-який, $r = 2$, $k = n - [\log_2 n] - 1$, $d = 3$. Слідом за кодами Хеммінга було запропоновано двійкові лінійні коди Ріда—Маллера порядку h, які можна визначити як множину стовпчиків значень функцій *алгебри логіки* від l змінних, що представні поліномами степеня, не вищого за h. Ці коди мають параметри: $n = 2^l$, $r = 2$, $d = 2^{l-h}$, $k = \sum_{i=0}^{h} c_l^i$ і допускають мажоритарний спосіб виправлення $2^{l-h-1} - 1$ помилок.

Істотний прогрес у побудові коректуючих кодів пов'язаний з подальшою алгебризацією простору B_r^n, в тому разі, коли r є степенем простого числа (в цьому разі замість r писатимемо q). Якщо кожному векторові $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ над полем Галуа з q елементів $GF(q)$ поставити у відповідність поліном $\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, то будь-який лінійний код у B_q^n можна розглядати як підпростір в алгебрі поліномів за модулем $x^n - 1$. Код наз. циклічним, якщо він разом з кожним вектором містить усі його циклічні зсуви. Лінійний код є циклічним тоді й тільки тоді, коли він утворює ідеал в алгебрі поліномів за модулем $x^n - 1$. Таким чином, кожний лінійний циклічний код (ЛЦ код) вимірності k можна розглядати як множину всіх поліномів, кратних в алгебрі поліномів за модулем $x^n - 1$ якомусь поліномові $g(x)$ над $GF(q)$ степеня $n - k$. Поліном $g(x)$ наз. породжувальним поліномом коду. Досить плідним виявився метод побудови ЛЦ кодів, оснований на заданні коренів породжувального полінома, які лежать у певному розширенні поля $GF(q)$. Зокрема, ЛЦ коди Боуза — Чоудхурі — Хоквінгема (коди БЧХ) для виправлення t помилок на довжині $n = q^l - 1$ визначають за допомогою породжувального полінома, який має серед своїх коренів $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^{2t}$, де ξ — первісний елемент поля $GF(q^l)$. Коди БЧХ мають параметри: $n = q^l - 1$, $r = q$, $d \geqslant 2t + 1$ і $k \geqslant n - \left(2t - \left[\frac{2t}{q}\right]\right) l$, якщо $l > 1$ і $k = n - 2t$. При $l = 1$ ці коди (називані кодами Ріда — Соломона) є максимальними при будь-якому t, а при $q = 2$ і $t = 1$ вони є циклічними аналогами макс. кодів Хеммінга довжини $n = 2^l - 1$. Циклічні аналоги кодів Ріда — Маллера (коди ЦРМ) порядку h з дов-

жиною $n = q_l - 1$ визначають за допомогою породжувального полінома, що має як свої корені всі степені ξ^j первісного елемента ξ поля $GF(q^l)$ такі, що сума цифр у q-ічному представленні числа j менша за $(q-1)l - h$. Ці коди мають параметри: $n = q^l - 1$, $r = q$, $d = (q - h + (q-1) \times \times \left[\frac{h}{q-1}\right]) q^{l-1-\left[\frac{h}{q-1}\right]}$ і $k = \sum_{i=1}^{h} T(i, l, q)$, де $T(i, l, q)$ — число впорядкованих розбиттів числа i на l цілих невід'ємних доданків, кожний з яких не перебільшує $q-1$. Зокрема, код ЦРМ 1-го порядку має параметри: $n = q^l - 1$, $r = q$, $d = (q-1)\ q^{l-1}$, $k = l$ і є максимальним. Квадратично-лишковими кодами (КЛ кодами) наз. двійкові ЛЦ коди простої довжини n, де $n \equiv \pm 1 \pmod 8$, породжувальний поліном яких має корені ξ^j, де ξ — первісний корінь степеня n з одиниці, а j — квадратичний лишок за mod n. Вимірність КЛ кодів дорівнює $k = \frac{n+1}{2}$, а кодова віддаль непарна й задовольняє нерівності $d^2 > n$, якщо $n \equiv 1 \pmod 8$ і $d(d-1) \geqslant n - 1$, якщо $n \equiv -1 \pmod 8$. Відзначимо й двійкові лінійні (але не циклічні) коди довжини $n = 2^l$ для виправлення $t\ (t \geqslant 2)$ помилок, які визначають за допомогою певного первісного елемента ξ поля $GF(2^{lt})$ і різних елементів $\eta_i\ (i = 1, 2, \ldots, 2^l)$ поля $GF(2^l)$ так:

$$G_n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\xi - \eta_i} = 0 \text{ в } GF(2^{lt})\right\}.$$

Коди G_n мають параметри: $n = 2^l$, $r = 2$, $k \geqslant n - lt$, $d \geqslant 2t + 1$ і належать до широкого класу лінійних кодів.

Щоб з'ясувати питання про те, наскільки ті чи інші коди близькі до максимальних, розроблено оригінальні методи одержування оцінок допустимих параметрів кодів. Зокрема, для кодів, які виправляють t помилок, встановлено границі щільної упаковки

$$m \leqslant \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{t} c_n^i (r-1)^i}, \qquad (1)$$

якої досягають при $r = q$, $t = 1$, $n = \frac{q^t - 1}{q - 1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$, а також при $r = 2$, $n = 2t + 1$. Крім того, доведено, що цієї границі при $r = q$ досягають ще лише для КЛ коду $r = 2$, $n = 23$, $t = 3$, а також для коду з параметрами $r = 3$, $n = 11$, $t = 2$. В разі, коли число t виправлюваних помилок досить мале порівняно з n, параметри двійкових БЧХ кодів досить близькі до границі щільної упаковки. Проте для кодів, які виправляють фіксовану частину $\mu = \frac{t}{n}$ помилок, істотно сильнішою (коли $\mu < \frac{r-1}{2r}$) є верхня оцінка

$$m \leqslant \frac{(2t+1)\, r^n}{\sum_{i=0}^{s} c_n^i (r-1)^i}, \qquad (2)$$

де

$$s = \left[\frac{r-1}{r}\, n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2rt}{(r-1)\, n}}\right)\right].$$

Найкращі коди для виправлення фіксованої частини помилок можна побудувати методом перебору, їхні параметри задовольняють границю

$$m \geqslant \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{d-1} c_n^i (r-1)^i} \qquad (3)$$

а в випадку лінійних кодів — границю

$$k \geqslant \left[\log_q \frac{q^n}{1 + \sum_{i=0}^{d-2} c_{n-1}^i (q-1)^i}\right].$$

Зближення оцінок (2) і (3) є однією з осн. нерозв'язаних задач теорії кодування. Параметри кодів для виправлення великої кількості помилок задовольняють границю

$$m \leqslant \frac{rd}{rd - (r-1)\, n}, \text{ якщо } \frac{r-1}{r} < \frac{d}{n} \leqslant 1,$$

якої досягають для широкого класу кодів, зокрема, кодів ЦРМ 1-го порядку. Для довільних лінійних кодів справджується оцінка $\sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q_i} \right\rceil \leqslant n$, причому для будь-яких n і d таких, що $\frac{q-1}{q} \leqslant \frac{d}{n} \leqslant 1$, існує лінійний код з параметрами q, n і d, вимірність якого дорівнює найбільшому k, яке задовольняє цю нерівність.

Окрім задачі виправлення заданого числа помилок досліджено й задачу виправлення пачок помилок довжини b, тобто помилок типу заміщення, які бувають у межах відрізка з b послідовних символів, та задачу виправлення помилок інших типів. Серед осн. результатів, одержаних у цих напрямах, відзначимо такі. Якщо $f(x)$ — незвідний многочлен степеня l над $GF(q)$, порядок коренів якого дорівнює s, а h — будь-яке ціле, яке не ділиться на s, то ЛЦ код у B_q^n, де n = н. о. к. (s, h), з породжувальним поліномом $f(x)(x^h - 1)$ має вимірність $k = n - h - l$ і дає змогу виправити будь-яку пачку помилок довжини $b = \min\left(l, \left[\frac{h+1}{2}\right]\right)$.

Двійковий код $U_n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i} \equiv 0 \pmod{(2n+1)}\right\}$ дає змогу, коли $|2n+1|$ — просте число і 2 або —2 є первісним коренем за mod $2n+1$, виправити будь-яку поодиноку арифм. помилку, яка полягає в зміні на $\pm 2^i$ ($i=0, 1, \ldots, n-1$) числового значення кодового вектора. Двійковий код

$$W_n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \cdot i \equiv 0 \pmod{(n+1)}\right\}$$

дає змогу виправити будь-яку поодиноку несиметричну помилку типу заміщення (напр., заміну символа 0 на символ 1), а також виправити будь-яку поодиноку помилку типу випадання (або вставляння) символа, супроводжувану зменшенням (відповідно збільшенням) на одиницю довжини вектора. Коди U_n і W_n близькі до максимальних у класі кодів, які виправляють поодинокі помилки вказаних типів. Практичне використання кодів з виправлянням помилок утруднюється тим, що прагнення зменшити надмірність кодів, як правило, веде до збільшення складності алгоритму декодування з виправлянням помилок. Ця обставина послужила поштовхом для глибокого дослідження можливих алгоритмів декодування відомих кодів для спрощення їх.

Великий вплив теорія кодування має на розв'язування інших задач кібернетики. Відомі приклади, коли використання тих чи інших кодових конструкцій приводило до істотного просування в питаннях, на перший погляд, досить далеких від традиційних задач теорії кодування. Слід вказати на використання коду Хеммінга при одержанні асимптотики мінім. числа контактів, достатнього для реалізації будь-якої функції алгебри логіки від n змінних; на використання нерівності (*) при оцінці складності реалізації формулами одного класу функцій алгебри логіки, на використання кодів з рівними віддалями між векторами для завадостійкого *кодування станів автомата* асинхронного та ін. Задачі синтезу самокоректовних *схем контактних* і самокоректовних схем з функціональних елементів так само підказала теорія кодування, причому для побудови асимптотично оптимальних самокоректовних схем з функціональних елементів використано коди для виправляння помилок.

Літ.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820]; Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 309—316]; Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. Пер. с англ. М., 1971 [бібліогр. с. 449—460].

В. Й. Левенштейн.

КОДУВА́ННЯ СТА́НІВ АВТОМА́ТА — встановлення відповідності між станами автомата і наборами значень змінних, якими ці стани кодуються. К. с. а. — один з етапів *синтезу автоматів структурного*. Кожній кодуючій змінній відповідає елементарний *автомат* композиції, яка реалізує (або повинна реалізувати) первісний абстрактний автомат. Множина значень кожної кодуючої змінної збігається з множиною станів відповідного елементарного автомата. Кількість кодуючих змінних (тобто кількість елементарних автоматів) задає довжину *коду*. Задача К. с. а. — знайти таке кодування, яке задовольняло б певні задані умови. Ці умови, напр., можуть виражати обмеження, що накладаються фіз. особливостями елементарних автоматів, вимогами надійності схеми тощо. Найпоширенішим є двійкове кодування. У цьому разі кодуючі змінні набувають значень у множині, що складається з двох елементів (двійковий структурний алфавіт), а елементарні автомати мають по два стани. Конкретними задачами кодування є, напр., задача протигоночного кодування, задача монотонного кодування і задача економного кодування станів. Умови протигоночного кодування забороняють виникнення гонок у структурному автоматі й полягають у тому, що різне в часі перемикання елементарних автоматів не повинно впливати на результат при переході з одного стану в інший. Для монотонного кодування потрібно, щоб функції збудження структурного автомата були монотонними. Задача економного кодування полягає у знаходженні такого кодування, яке б мінімізувало витрати апаратури при реалізації структурного автомата. Оскільки для деяких автоматів неможливо знайти кодування, яке б задовольняло задані умови, задача кодування тісно пов'язана з задачею відшукання достатніх умов існування кодування з заданими властивостями й алгоритмів перевірки цих умов. Перевірка існування та відшукування потрібного кодування, як правило, пов'язані з перебиранням і мають характер послідовного аналізу варіантів кодування. Ці задачі трудомісткі, тому для розв'язування їх користуються ЦОМ.

Літ.: Мацевитый Л. В., Денисенко Е. Л. О кодировании внутренних состояний некоторых многотактных устройств. «Кибернетика», 1966, № 1; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез управляющих автоматов. М., 1970 [бібліогр. с. 392—398].

Ю. В. Капітонова.

КОДУВА́ННЯ ТЕО́РІЯ — розділ *інформації теорії*, який вивчає способи ототожнювання повідомлень із сигналами, якими відображують ці повідомлення. Кодування широко застосовують для передавання, зберігання й переробки інформації в різних системах. Завданням К. т. є найкраще в певному розумінні узгодження джерела інформації з *каналом зв'язку* (напр., забезпечення максимальної швидкості передавання для заданих статистичних характеристик *повідомлення* або забезпечення заданої завадостійкості при заданих характеристиках завад у каналі чи забезпечення максимальної швидкості переробки інформації при арифм. операціях та ін.). Відповідно до прийнятого критерію оптиміза-

ції розрізняють кілька напрямів у К. т. Найвідомішими з них є статистичне кодування і завадостійке кодування. Об'єктами кодування можуть бути і дискретні (краще розвинуті), і безперервні повідомлення. Процес передавання дискретних повідомлень у системі зв'язку схематично можна показати так. Джерело дискретної інформації випадково вибирає повідомлення X_k з фіксованої множини M_1. У канал зв'язку надходить складний сигнал Y_k, заздалегідь вибраний з множини M_2. У каналі зв'язку сигнал Y_k під дією завад трансформується у випадковий сигнал Z. Після одержання його на виході приймального пристрою утворюється сигнал Y_f, який належить множині $\tilde{M}_2$ вихідних складних сигналів. На основі аналізу сигналу Y_f приймається рішення ототожнити його з одним із повідомлень X_l, яке належить множині M_1. Якщо $X_l = X_k$, то передане повідомлення прийнято правильно. Початок К. т. заклав 1948 амер. математик К. Шеннон (н. 1916). Він сформулював і довів два основні результати, які визначили розвиток К. т. в наступні роки. Один із цих результатів стверджує, що для каналу без завад кодування дискретних повідомлень можна здійснити так, щоб середня кількість двійкових знаків на елемент алфавіту A була як завгодно близька до якоїсь, визначуваної статистичними властивостями джерела, величини H, але не менша за неї (H — *ентропія* джерела інформації). Зазначене кодування названо статистичним (ефективним). Нехай у множині M_1 є 4 незалежні елементи: m_1, m_2, m_3 і m_4 з імовірністю появи їх відповідно $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}25$; $p_3 = p_4 = 0{,}125$. Перетворимо повідомлення на складний двійковий сигнал так: $m_1 \leftrightarrow 00$; $m_2 \leftrightarrow 01$; $m_3 \leftrightarrow 10$, $m_4 \leftrightarrow 11$. Якщо пропускна здатність каналу зв'язку С = 1000 двійкових одиниць за секунду *(бітів)*, то на передавання одного елемента повідомлення потрібно два двійкові символи (0 або 1), а число елементів, переданих за секунду, дорівнює 500. Число двійкових знаків, необхідних для передання повідомлення, напр., з $N = 10\,000$ елементів, дорівнює $H = 20\,000$. Наведений спосіб кодування повідомлень $m_1 \div m_4$ не є оптимальним (найкращим у розумінні наближення швидкості передавання до максимально можливої). Щоб побудувати оптим. код, треба врахувати статистичну структуру джерела повідомлень. Для цього застосовують такий спосіб кодування: $m_1 \leftrightarrow 0$; $m_2 \leftrightarrow 10$; $m_3 \leftrightarrow 110$; $m_4 \leftrightarrow 111$. У цьому разі середня довжина закодованої послідовності з N елементів (N — велике число) дорівнює $(1 \cdot p_1 + 2 \times p_2 + 3 \cdot p_3 + 3 \cdot p_4)\ N = 1{,}75N$. Якщо $N = 10\,000$ елементів, то довжина закодованого повідомлення дорівнюватиме 17 500 двійкових знаків, тобто вона буде менша, аніж у попередньому випадку. Можна показати, що це значення є мінімально можливим. Другий результат, що його одержав К. Шеннон, стверджує, що й для каналу зв'язку з шумами існує такий спосіб кодування скінченної кількості інформації, за яким інформація передаватиметься з якою завгодно високою достовірністю, якщо тільки швидкість надходження її не перевищуватиме пропускну здатність каналу зв'язку. Реалізація цієї можливості нерозривно зв'язана з теорією й технікою *кодів коректуючих* і завадостійких методів приймання. Теореми Шеннона встановлюють лише існування оптимальних або близьких до них кодів, але не вказують способу побудови їх. У загальному випадку умови осн. теорем Шеннона виконуються лише, якщо довжина кодованих повідомлень (кількість елементів алфавіту A, що становлять один елемент множини M_1) збільшується до нескінченності. До того ж виникає небажана велика затримка переданого повідомлення в часі, і, крім того, доводиться ж істотно ускладнювати кодуючі й декодуючі пристрої. Затрати, пов'язані з ускладненням цих пристроїв, можуть бути сумірними і навіть більшими за затрати на підвищення правильності (завадостійкості) передавання внаслідок збільшення потужності передавача, розширення смуги частот каналу, ускладнення способу приймання (виділення корисного сигналу на фоні шумів у приймачі) і т. д.

Дослідження в галузі К. т. провадяться в основному в напрямі обгрунтування й розгляду умов осн. теорем Шеннона і в напрямі створення найкращих методів кодування інформації в тих ситуаціях, коли ці методи можливі, відповідно до цих теорем. Важливе значення надається пошукам способів кодування та декодування, близьких до оптимальних і досить простих при апаратурній реалізації. Методи розв'язування подібних задач (головним чином комбінаторні та алгебричні) розглянуті в ст. *Кодування автоматне.* Актуальною залишається проблема вибору оптим. способу кодування за комплексним критерієм, який враховує економ. втрати, спричинювані затримкою в доставлянні інформації або завадами в каналі зв'язку і пристроях обробки інформації, та затрати на ускладнення апаратури, зумовлені необхідністю застосовувати завадостійке кодування. Вибір оптим. способу завадостійкого кодування при заданих умовах передавання (характеристиках завад у каналі зв'язку) також є складним завданням. Його, як правило, розв'язують для фіксованого методу приймання. Крім розв'язування загальних задач на оптимум, які полягають у відшукуванні кодів, що дають можливість досягти граничних значень швидкості або правильності передавання, К. т. розглядає й ряд вужчих задач, зокрема, задачу побудови коду з мінім. *надмірністю повідомлень* при заданій кількості елементів цього коду та його заданій коректувальній здатності. Усі згадані проблеми не можна вважати розв'язаними в повній мірі, хоч уже й є кілька практично важливих результатів, які дають можливість створити добрі системи передавання інформації.

До осн. результатів К. т. належать: методи побудови ефективних нерівномірних кодів для корельованого алфавіту A і деяких корельованих послідовностей елементів алфавіту A; асимптотичні оцінки коректувальної здатності коду при заданому числі n елементів у кодовому слові та обсязі коду N; алгебричні методи побудови кодів, які виправляють задані різновиди помилок; методи декодування циклічних кодів; методи послідовного й мажоритарного декодування та методи побудови кодів, які дають можливість виявляти й виправляти помилки при виконуванні арифм. і логіч. операцій. Результати К. т. широко застосовують в *автоматів теорії*, техніці зв'язку та радіолокації, біології (при вивченні особливостей передавання генетичної інформації) та в *лінгвістиці математичній*. Статистичне (ефективне) і завадостійке кодування можна застосовувати не лише при передаванні інформації в просторі, а й при її арифм. і логічній обробці (див. *Код*), пошуку (пізнаванні) та зберіганні (передаванні в часі). Є, зокрема, спроби поширити осн. результати завадостійкого кодування за теорією Шеннона й на обчислювальні канали (див. останню роботу з літ.).

Літ.: Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., 1963 [бібліогр. с. 273—275]; Добрушин Р. Л. Теория оптимального кодирования информации. В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму, т. 3. М.— Л., 1966; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 783—820]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965; Виноград С., Коуэн Дж. Д. Надежные вычисления при наличии шумов. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 111—112]. *Г. Ф. Янбих.*

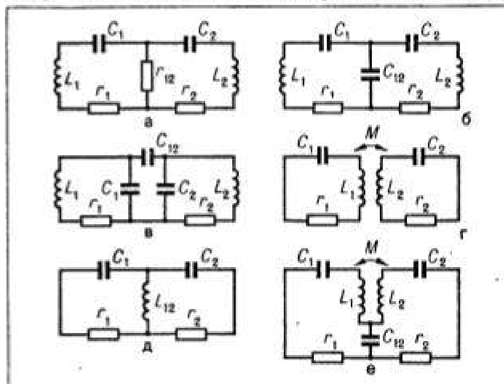
КОЕФІЦІЄНТ ПЕРЕДА́ЧІ АОМ — умовна назва залежності, яка визначає зв'язок між вхідними та вихідними сигналами розв'язуючих елементів або сукупністю їх і призначена для розв'язування деяких задач. Безінерційні лінійні розв'язуючі елементи характеризують коеф. передачі як такий, що дорівнює відношенню вихідного сигналу до вхідного, тому масштабна ланка, напр., має коефіцієнт передачі, який дорівнює якійсь константі. Коеф. передачі лінійного інерційного розв'язуючого елемента наз. ще *передавальною функцією*.

Літ. див. до ст. *Аналогова обчислювальна машина.* *В. Ф. Євдокимов.*

КОЕФІЦІЄНТ ПОВНОТИ́ ПО́ШУКУ — один з параметрів, що характеризує ефективність роботи *інформаційно-пошукової системи.* К. п. п. $R=\frac{a}{a+c}$, де a — число релевантних документів, виданих системою у відповідь на інформаційний запит, а c — число релевантних документів в інформаційному масиві системи, не виданих системою. К. п. п. пов'язаний з коефіцієнтом *втрати інформації* під час пошуку Q співвідношенням $R = 1 - Q$. Див. *Ефективність інформаційного пошуку* технічна, *Релевантність документа.* *Е. Ф. Скороходько.*

КОЕФІЦІЄНТ ТО́ЧНОСТІ ПО́ШУКУ — один з параметрів, що характеризує ефективність роботи *інформаційно-пошукової системи.* К. т. п. $P=\frac{a}{a+b}$, де a — число релевантних документів, виданих системою у відповідь на інформаційний запит, а b — число нерелевантних документів, виданих при цьому системою. К. т. п. пов'язаний з коефіцієнтом *шуму пошукового* S співвідношенням $P = 1 - S$. Див. *Ефективність інформаційного пошуку* технічна, *Релевантність документа.* *Е. Ф. Скороходько.*

КО́ЛА ЗВ'Я́ЗАНІ — електричні кола (контури), в яких процеси, що протікають в одному колі, впливають на процеси в іншому



Принципові схеми коливальних електричних контурів з різними видами зв'язків.

колі. Залежно від виду енергії, спільного для К. з., розрізняють магнітні, електр. і комбіновані зв'язки. Коли К. з. мають спільний резистор, зв'язок між ними наз. гальванічним (мал., *а*). При ємнісному зв'язку спільним для К. з. є електр. поле конденсаторів C_{12} (мал., *б*, *в*). Якщо у К. з. спільним є магнітний потік, то цей зв'язок наз. індуктивним (трансформаторним) (мал., *г*). В цьому випадку вплив здійснюється через взаємну індуктивність котушок L_1 та L_2 і автотрансформаторний (кондуктивний) зв'язок (мал., *д*), що здійснюється через спільну котушку індуктивності L_{12}. При комбінованому трансформаторно-ємнісному зв'язку кола впливають одне на одне за допомогою взаємної індуктивності котушок і спільного електр. поля конденсатора C_{12} (мал., *е*). К. з. застосовують при побудові *аналогових обчислювальних машин.* *А. Г. Тимошенко.*

КОЛИВА́ННЯ ПРИХО́ВАНІ — коливання в лінійних імпульсних системах керування, періоди яких кратні періодам замикання імпульсного елемента (ІЕ). Якщо на вході ІЕ є сигнал, у якому є коливання з частотами ω_1 та ω_2, що відрізняються на $2\pi n/T$ (T — період замикання ІЕ, n — ціле число), то існування таких коливань не можна встановити за реакцією імпульсної системи в дискретні моменти часу, бо інформація про її стан надходить лише в моменти замикання ІЕ. Цю особливість іноді наз. стробоскопічним ефектом. Як відомо, частотні характеристики імпульсних систем $W(j\overline{\omega})$

(див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) є періодичними ф-ціями $\overline{\omega}$ з періодом 2π ($\overline{\omega} = \omega T$). Цим зумовлена їхня однакова реакція на періодичні сигнали з різними частотами, кратними 2π. Щоб позбутися К. п., треба, щоб найбільша частота спектра вхідного сигналу $\overline{\omega}_c$ була набагато менша за частоту замикання елемента $\overline{\omega}_n = 2\pi$ і, згідно з теоремою Котельникова, не перевищувала: $\overline{\omega}_c < \pi = \frac{\overline{\omega}_n}{2}$. У замкнених імпульсних системах часто буває важко наперед встановити періоди коливань, які можуть виникнути в них. Проте й у цьому разі є умова відсутності К. п., яку накладають на полюси q_v *передавальної функції* $W(j\overline{\omega})$ розімкненої системи: $\|\mathrm{Im}\, q_v\| < \pi$. Фіз. суть цієї умови полягає в тому, що період інтервалу замикання ІЕ T має бути менший за будь-який період власних коливань неперервної частини системи. *А. А. Тупик.*

КОЛМОГО́РОВА РІВНЯ́ННЯ — рівняння, які описують перехідні ймовірності в теорії *марковських процесів.*

КОМА́НД МОДИФІКА́ЦІЯ — автоматична зміна команд програми в процесі виконання її. В команді може бути змінено будь-яку її частину: код операції, адреси та ознаки. Здебільшого модифікують адресну частину *команди* при обробці даних, розміщених у різних місцях пам'яті, для настроювання *програми* за місцем і т. ін. За допомогою К. м. вдається будувати компактні програми. Технічно К. м. можна реалізувати з використанням індексних *регістрів*, за допомогою непрямої адресації (*фіксаторів*) і т. д. *В. П. Сьомик.*

КОМА́НД СИСТЕ́МА — сукупність усіх можливих типів команд, реалізованих у даній цифровій обчислювальній машині, розглядувана відповідно до закону композиції, за допомогою якого їх конструюють з кодів операцій і адрес. Мовою К. с. задають *програму* для ЦОМ. К. с. характеризуються кількістю типів операцій, прийнятими *команди форматами* тощо. Машини, в яких набори операцій функціонально однакові, можуть мати різні К. с., які відрізняються одна від одної, напр., форматами, прийнятим законом композиції тощо. Всі *команди* машини можуть мати одну фіксовану довжину. Деякі машини мають команди двох, трьох і більше стандартних розмірів. Є машини зі змінною структурою команд. Вибираючи К. с., враховують простоту тех. реалізації та зручність *програмування ЦОМ*. Щоб зменшити затрати на створення *математичного забезпечення ЦОМ*, розробляють чимало машин, сумісних за програмуванням, тобто таких, що мають ту саму або близькі К. с. *В. П. Сьомик.*

КОМА́НДА машинна — елементарний припис цифровій обчислювальній машині, що передбачає виконання певних операцій. У К. міститься *інформація*, яка визначає дію машини протягом деякого відрізку часу. К. несе таку інформацію: 1) *код* операції, 2) імена (назви) об'єктів, які беруть участь в операції; 3) *адресу* результату; 4) адресу наступної К. *В. П. Сьомик.*

КОМА́НДИ ФОРМА́Т — опис машинної команди та структурних частин її. Формат вказує на організацію команди й метод записування інформації. В межах однієї системи команд можуть бути К. ф., які відрізняються структурою частин і довжиною командного слова. *В. П. Сьомик.*

КОМБІНАТО́РНИЙ АНА́ЛІЗ — частина математики, в якій об'єктом дослідження є множини, що складаються з дискретних (відособлених) елементів. Множини можуть бути різні: скінченні, нескінченні, такі, що допускають усюди впорядкованість елементів, і такі, що мають складнішу структуру. Специфіка методів К. а. полягає в застосуванні двох видів операцій: відбору підмножин (їх наз. вибірками) і операцій впорядкування. Ці операції наз. комбінаторними. Задачі К. а. поділяють в основному на три типи. В задачах 1-го типу розв'язують питання про кількість можливих розв'язків, тобто потрібних вибірок чи розміщень (конфігурацій). У задачах 2-го типу — про існування розв'язків і їхні можливості. В задачах 3-го типу — про способи відшукування оптим. розв'язків, тобто таких, яким властива екстремальність щодо заданої властивості. На розвиток К. а. великою мірою впливають застосування математики, напр., матем. обробка результатів експериментів. К. а. становить загальну теор. основу т. з. дискретної математики (багатьох матем. методів *кібернетики*, *графів теорії*, *програмування цілочислового*, скінченних *груп* тощо). Оперативну частину К. а. становлять такі методи: безпосереднього підрахунку кількості вибірок, твірних функцій, логічні, екстремальні, геометричні та ін. методи.

Методи безпосереднього підрахунку кількості вибірок відомі здавна. Вони становлять зміст т. з. елементарної комбінаторики. Цими методами знаходять числа r-вибірок, що їх одержують з n елементів відповідної множини. Вибірки поділяють на r-сполучення, коли беруть до уваги лише елементи, які складають вибірку, безвідносно до їхнього взаємного розміщення, і r-перестановки, коли враховують і порядок слідування елементів. Методи безпосереднього підрахунку різноманітні. Виведення відповідних формул базується, в основному, на двох логіч. правилах: а) правило суми: нехай з n множини S вибірку A можна одержати p способами, а вибірку B — q способами. Вибірки A й B не можна одержати одночасно. В такій ситуації вибірку A чи вибірку B можна одержати $p + q$ способами; б) правило добутку: якщо з n-множини S вибірку A можна одержати p способами, а після неї q способами одержати вибірку B, то вибірки A й B в зазначеному порядку можна здійснити pq способами.

З формул елементарної комбінаторики основними є

$$P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

(число r-перестановок без повторення елементів);

$$P = n^r$$

(число r-перестановок з повторенням елементів);

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

(число r-сполучень);

$$C = \binom{n+r-1}{r}$$

(число r-сполучень, коли допущено повторення елементів);

$$R = \frac{n!}{r_1!\, r_2!\, \dots\, r_k!}$$

(число впорядкованих розбиттів n-множини на неперетинні підмножини, що складаються відповідно з $r_1, r_2, \dots, r_k$ елементів). Є дуже багато формул елементарної комбінаторики й різноманітних прийомів одержування їх.

Метод твірних функцій сформувався в працях Л. Ейлера і П. Лапласа. Застосовують його не тільки в К. а., а й у теорії чисел, *імовірностей теорії* та в алгебрі. За його допомогою вивчають послідовності об'єктів, напр., r-вибірок з даної n-множини, або їхніх чисел. Значення методу полягає в тому, що він дає змогу оперувати не з окремими комбінаторними об'єктами, а з класами їх, а це дає певні практичні переваги.

Твірна ф-ція для чисел r-сполучень

$$A(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r = (1+t)^n = \prod_{n} (1+t);$$

твірна ф-ція для класу самих r-сполучень елементів, які тут позначено $s_1, \dots, s_n$, має вигляд

$$A(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + s_k t) = \sum_{r=0}^{n} a_r t^r,$$

де a_r — симетричні ф-ції, які становлять шукані сукупності r-сполучень. Якщо деякі елементи s_k повторюються, відповідні біноми виду $(1 + s_k t)$ замінюють поліномами, складеними з тих членів стандартного полінома $\sum_r s_r t^r$, в яких степені параметра t дорівнюють числу (або числам) повторень. Твірну ф-цію для числа r-перестановок одержують у вигляді

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r = \sum_{r=0}^{n} P(n, r) \frac{t^r}{r!} = E(t).$$

У тому разі, коли допускають повторення елементів у перестановках, стандартний поліном вибирають у вигляді $\sum \frac{t^r}{r!}$. А написати формули, де фігурували б самі лише перестановки, неможливо через те, що не можна розрізнити порядок співмножників у добутках.

Існує велика різноманітність видів твірних ф-цій, зумовлювана різноманітністю класів вибірок. Апарат оперування з твірними ф-ціями виявляється здебільшого дуже громіздким. Для надання йому більшої алгоритмічності до цього часу нагромаджено порівняно багато засобів: спец. оператори, символічні числення, спец. числа і спец. ф-ції. Ступінь загальності, досягнутої методом твірних ф-цій у К. а., характеризується тим, що зараз вдається будувати твірні ф-ції для нееквівалентних комбінаторних об'єктів (теорія Пойа та її узагальнення). Ці об'єкти можна наділяти «вагами», тобто числовими характеристиками, які визначаються умовами задачі, а поняття еквівалентності можна вводити через групу підстановок.

Логічні методи К. а. служать для аналізу структури скінченних дискретних множин і для розв'язування питання про існування (чи неіснування) розв'язку комбінаторних задач. Вони характеризуються тим, що в них перелічування поступається перед логічним аналізом, який не завжди ще приводить до регулярних алгоритмів.

Комбінаторні задачі, в яких треба поділяти множини елементів на підмножини залежно від того, чи мають елементи задану сукупність властивостей чи не мають, розв'язують здебільшого методом включення й виключення.

Осн. ф-ла, яка виражає суть методу: нехай дано n-множину елементів і N-множину властивостей $p_1, p_2, \dots, p_N$, які кожен з елементів n-множини може мати в якійсь комбінації. Символ: $\bar{p}_k$ означає відсутність властивості p_k. Тоді множину елементів, які не мають жодної з заданих властивостей, знаходять за ф-лою

$$n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) = n - \sum_{i=1}^{N} n(p_i) + \sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \dots + (-1)_n^N \times (p_1, p_2, \dots, p_N).$$

Ця ф-ла показує, що для того, щоб одержати множину елементів, указану в лівій частині рівності, треба з усієї n-множини виключити елементи, які мають хоча б одну з заданих властивостей. Але при цьому елементи, які мають дві властивості, виявляються виключеними двічі. Тому їх треба повернути і т. д. Отже, метод полягає в тому, що поперемінно відкидають і повертають підмножини, це й відображено в його назві. Метод узагальнено на випадки, коли йдеться про будь-які вибірки властивостей, і на випадок, коли елементи наділено вагами.

Аналізуючи структуру множин, які розглядають разом з певною сукупністю їхніх підмножин, часто застосовують метод заміни підмножин їхніми представниками. В К. а. розроблено необхідні й достатні умови існування систем різних, загальних та ін. видів представників, а для деяких з них знайдено алгоритми знаходження їх. Застосування методу систем представників численні й різноманітні, напр., у теорії сіток при дослідженні допустимості потоків.

Розглянемо клас задач про розподіли елементів n-множини по t комірках. Обумовимо, що елементи повинні розподілятися пачками по r елементів у кожній. Розподіл має бути такий, щоб забезпечити потрапляння в якусь i-у комірку q_i елементів ($i = 1, \ldots, t$). У теоремі Рамсея (1930) доведено, що існує мінім. $N(q_1, q_2, \ldots, q_t; r)$ множина, починаючи з якої заданий розподіл виявляється забезпеченим. Але й досі ніякого регулярного алгоритму для визначення числа $N(q_1, q_2, \ldots, q_t; r)$ не знайдено.

Екстремальні методи К. а. Нехай задано n-множину елементів. На ній визначено множину P комбінаторних об'єктів: r-перестановок, r-сполучень, скінченних послідовностей тощо. На цій множині задано функцію F. Треба знайти *екстремум* цієї функції або ж відшукати ті елементи (чи той елемент) множини P, на яких цей екстремум досягається. Напр., є множина населених пунктів, віддаль між кожною парою яких відома. Треба з-поміж усіх можливих маршрутів знайти для листоноші мінімальний.

Для розв'язування задач такого типу треба, по-перше, мати в розпорядженні множину значень функції F і вміти перебирати їх і, по-друге, розробити метод порівнювання цих значень. Щоб полегшити розв'язування таких задач, розробили й застосовують багато алгоритмів. Спільна ідея всіх методів полягає в заміні повного перебирання всіх варіантів частинними перебираннями меншого обсягу. Зараз для здійснення цієї ідеї немає, очевидно, іншого шляху, як відкидання підмножин, про які наперед відомо, що вони не містять шуканого екстремуму, і звужування сфери перспективних варіантів до розмірів, які допускають неважке перебирання. Методи при цьому виходять досить різнорідні, визначаються вони структурою відповідних множин. Найширше застосовують такі три групи методів: локальних оптимізацій, випадкового пошуку, гілок і границь. У зв'язку з тим, що розв'язування екстремальних комбінаторних задач пов'язане з переборюванням значних обчисл. труднощів, сукупність відповідних методів склалася в окрему галузь обчисл. математики — дискретне програмування.

Таблично-схемні методи К. а. застосовують для досліджування комбінаторних розміщень. В основі уявлення про ці розміщення лежить заг. поняття системи інцидентностей. Дві множини утворюють таку систему, якщо між їхніми елементами встановлено відношення інцидентності, яке виражається поняттями: «належить», «міститься», «лежить на...», «проходить через...» залежно від інтерпретації. Зображують системи інцидентності двовимірними розміщеннями-таблицями. В К. а. вивчають властивості дедалі ширшого класу таблиць, які є інтерпретаціями комбінаторних задач.

У дослідженнях комбінаторних розміщень велику роль відіграє апарат спец. *матриць*. Нехай дано n-множину $S\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ і m-вибірку її підмножин: $M(S)$-$\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Побудуємо $(m \times n)$ = матрицю $A = (a_{ij})$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, в якій $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } s_j \in S_i, \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$

Одержана бінарна матриця дає повний опис системи інцидентності. За допомогою таких матриць часто не тільки інтерпретують, а й доводять теореми і розв'язують задачі К. а. Залежно від типу комбінаторних задач, розв'язуючи їх, використовують різні типи матриць: переставні, попарних порівнювань, матриці Адамара, стохастичні та інші. Сучасні узагальнення цієї теорії включають вивчення класів спец. матриць та інваріантів. Є багато типів комбінаторних таблиць і схем, які мають велике практичне й теор. значення, напр., латинські прямокутники й квадрати, системи трійок Штейнера і Кіркмана. Великим класом таблиць, який активно досліджують, є блок-схеми.

Блок-схеми вводять так: нехай є v-множина елементів m_i (напр., даних експерименту): $i = 1, 2, \ldots, v$. Елементи цієї множини розміщено у b стовпчиках-блоках, які є підмножинами $M_1, M_2, \ldots, M_b$ початкової множини. Їхні перелічування не обов'язково пусті. Число елементів у блоці M_j назвемо його місткістю і позначимо k_j. Кожен елемент може бути в кількох блоках. Нехай r_i — число блоків, що містять елемент m_i, $\lambda_p\left(p = 1, 2, \ldots, \binom{v}{2}\right)$ — число блоків, у яких з'являється p-а невпорядкована пара елементів. Отже, блок-схема є комбінаторне розміщення, параметрами якого є v, b, k_j, r_i, λ_p. Якщо замість пар розглядають трійки чи інші вибірки елементів, то такі розміщення наз. тактичними конфігураціями. Є велика різноманітність видів блок-схем. Латинські квадрати — приклад повних блок-схем, тобто таких, у яких у кожному блоці містяться всі елементи множини ($k_j = v$, $j = 1, 2, \ldots, b$). Системи трійок Штейнера — частинні види неповних ($k_j < v$) зрівноважених ($\lambda_p = \lambda = \text{const}$, $k_j = k = \text{const}$, $r_i = r = \text{const}$) блок-схем, для яких $k = 3$, $\lambda = 1$. Дослідження в області блок-схем зосереджуються тепер навколо проблем існування (чи неіснування) окремих видів блок-схем,

вивчення їхніх властивостей, знаходження ефективних методів побудови їх. При дослідженні цих таблиць використовують результати теорії чисел, *груп теорії*, теорії матриць, опуклих тіл тощо. При цьому виявляється спільність теоретичних, по суті комбінаторних, основ ряду розділів сучас. математики.

Геометричні методи К. а. виходять з геом. інтерпретацій комбінаторних ситуацій за допомогою множини точок, відрізків тощо. Послідовно застосовуючи в К. а. такі інтерпретації, виділяють спец. види геом. систем інцидентностей. Елементи, які взято за початкові, невизначувані, названо так: «точки» P і «лінії» L. Відношення інцидентності $P \in L$ конкретизовано так: «точка P лежить на лінії L» або «лінія L містить точку P». Ці системи, врешті, було підпорядковано системам аксіом типу аксіом геометрії. Уточнення й додаткові пояснення або видозміни вихідних тверджень приводять до різних видів скінченних геометрій, до проблем комбінаторної топології, дискретної геометрії, проективної геометрії, геом. теорії чисел, теорії графів і комбінаторної геометрії. Найпростішими геом. комбінаторними системами є скінченні площини, тобто системи інцидентності двох скінченних множин (точок і ліній), підпорядкованих системі аксіом проективної геометрії. Проте теорію й цих комбінаторних систем ще не розроблено, зокрема, немає умов існування скінченних площин. З багатоманітних систем геом. інцидентностей велику увагу привертають ті системи, де інцидентність вводиться між множиною елементів і деякими множинами пар цих елементів.

Більшу частину розглянутих вище методів К. а. було розроблено для тих задач, об'єкти яких допускали лінійну впорядкованість своїх елементів. Проте заг. комбінаторна теорія не передбачає необхідності такого обмеження. Послідовний, систематичний розвиток комбінаторних методів для множин загальнішої природи — одне з головних завдань сучас. К. а. *Відношення* порядку (символ $\leqslant$) у множинах вводять формально за допомогою аксіом: а) рефлекторності: $a \leqslant a$ для будь-якого $a \in S$; б) рівності: якщо a, $b \in S$ і $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, то $a = b$; в) транзитивності: якщо $a \leqslant b$ і $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$. Додавання четвертої аксіоми про відсутність непорівнянних елементів: г) для будь-яких a, $b \in S$, або $a \leqslant b$, або $b \leqslant a$ визначає вже множину, впорядковану скрізь, чи ланцюг.

Трьома першими аксіомами визначаються *частково впорядковані множини:* кількість таких множин $S(2) = 3$; $S(3) = 19$; $S(4) = 219$; $S(5) = 4231$, а поміж них неізоморфних: $S_н(4) = 16$; $S_н(5) = 63$. Для $n \geqslant 6$ результатів ще не одержано.

Дослідження в галузі частково впорядкованих множин провадяться переважно на множинах усіх підмножин скінченних множин і на множинах усіх натуральних чисел, де відношення порядку $a \leqslant b$ означає, що a ділить b. Серед можливих типів частково впорядкованих множин велику увагу приділяють *структурам*.

К. а. розвивається на межі ряду областей математики. Протягом свого розвитку він зазнавав сильних впливів. Взаємопроникнення методів доходило іноді до того, що К. а. помилково відносили до якогось із розділів математики, який сформувався до того часу.

Літ.: Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. М., 1972 [бібліогр. с. 249—250]; Kaufmann A. Introduction à la combinatorique en vue des applications. Paris, 1968; Холл M. Комбинаторика. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 413—418].

К. О. Рибников.

КОМБІНАЦІЙНА СХЕМА — правильна схема, побудована з елементів, що є *автоматами без пам'яті*. Правильною наз. схему без *зворотних зв'язків*, з'єднання елементів у якій виконано за правилами, що відповідають (у функціональному відношенні) операції суперпозиції функцій. Відповідно до цього й оператор, що його реалізує К. с., є певною функцією *алгебри логіки*. Осн. задачами теорії К. с. є задачі аналізу й синтезу цих схем. Задача аналізу полягає в знаходженні заг. конструктивного прийому *(алгоритму)*, що дає змогу за будь-якою К. с. побудувати вихідні ф-ції цієї схеми і за ними визначити залежність сигналу на кожному з її виходів від сигналів на входах. Розв'язування цієї задачі полягає у виписуванні суперпозицій, що їх визначають з'єднання елементів схеми. Задача синтезу зводиться до представлення функцій, які реалізує К. с., у вигляді суперпозиції ф-цій, що їх реалізує певний наперед заданий набір *логічних елементів ЦОМ*. Така задача має розв'язок лише в тому разі, якщо задавана множина логіч. елементів становить функціонально повну систему. Для розв'язування задачі застосовують апарат алгебри логіки, що набув розвитку в межах *логіки математичної*. У цьому разі вимога функціональної повноти системи логіч. елементів виконується, якщо функції, реалізовувані цими елементами, становлять функціонально повний набір.

К. с. з кількома виходами завжди можна зобразити як певну композицію схем, у кожній з яких є лише один вихід. Завдяки цьому розв'язування задачі синтезу схем з довільним числом виходів можна звести до розв'язування задачі синтезу К. с. з одним виходом, а ця задача, в свою чергу, зводиться до задачі побудови формули алгебри логіки, що являє собою вихідну ф-цію схеми. Дуже близька до неї задача побудови оптимальних з погляду тих чи інших критеріїв К. с. веде до задачі мінімізації відповідних аналітичних уявлень. Хоч на практиці дуже часто обмежуються побудовою аналітичного представлення вихідної ф-ції К. с. та її оптимізацією, розв'язання цих задач є лише частковим розв'язанням заг. задачі синтезу К. с. і в заг. випадку може також з'явитися потреба розв'язувати такі задачі: виражати аналітичні представлення ф-цій, реалізовуваних К. с. і певною заданою системою операторів, забезпечувати потрібну якість фіз.

характеристик схем, порівнювати різні варіанти схем.

Представляти вихідну ф-цію К. с. з допомогою певної заданої системи операторів необхідно в тому разі, коли система ф-цій, що її реалізує застосовувана в процесі побудови К. с. система елементів, не збігається з базисною системою ф-цій, використовуваною під час побудови аналітичного представлення функції (напр., як повну систему використовують систему елементів, що реалізує функцію штрих Шеффера, а як базис — систему, яка складається з функцій — диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії). Розв'язування цієї задачі полягає в записуванні ф-ції, що її реалізує К. с., як суперпозиції ф-цій, які реалізують логіч. елементи. Внаслідок повноти системи логіч. ф-цій ця задача має розв'язок завжди, але переведення в операторний запис аналітичного представлення, оптимального з погляду будь-якого критерію, в заг. випадку не веде до одержання запису, оптимального з погляду цього самого критерію. Потрібна якість фіз. характеристик забезпечується представленням схеми у вигляді структури, що складається з операторів, що їх реалізують окремі логіч. елементи цієї системи, перевіркою того, чи задовольняє схема умови правильності відображення значень логіч. змінних у відповідні їм області фіз. значень, а також підрахунком часових ф-цій схеми. Необхідність представляти схеми у вигляді структури зумовлена тим, що операторний запис ф-ції виходу К. с. не враховує навантажних характеристик логіч. елементів, а також потреби взаємно синхронізувати їх, а, отже, не дає повного уявлення про реальну схему. Зазначене представлення грунтується на нумерації операторів з урахуванням навантажних характеристик відповідних логіч. елементів. Під час нумерації з кожним оператором зіставляють пару чисел: номер каскаду, в якому стоїть елемент, і номер елемента в каскаді. Розроблено заг. принципи побудови К. с. з довільною значністю структурного алфавіту. Найбільше практичне значення має теорія К. с. з двозначним структурним алфавітом.

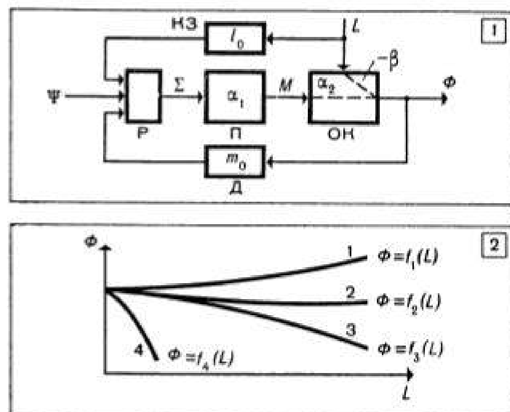
Літ.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бібліогр. с. 464—469]; Рабинович З. А., Капитонова Ю. В. Общие принципы синтеза комбинационных схем. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. 3, № 4.

Ю. Л. Іваськів.

КОМБІНО́ВАНА ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНА МАШИ́НА — те саме, що й *гібридна обчислювальна машина.*

КОМБІНО́ВАНА СИСТЕ́МА АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — система, яка використовує одночасно принцип керування за відхиленням (принцип негативного *зворотного зв'язку*) і принцип керування за збуренням. Першими К. с. а. к., які об'єднують обидва ці принципи, були системи регулювання напруги й струму навантаження електр. генераторів. Зв'язок за збуренням—струмом навантаження генераторів часто наз. *компаундуючим зв'язком в автоматичних системах* регулювання напруги. Іншим прикладом К. с. а. к. є система регулювання швидкості обертання ротора електродвигуна (автоматизований електропривод). Тут зв'язок за відхиленням регульованої величини — швидкості обертання від заданої доповнюється зв'язком за основним збуренням — моментом навантаження двигуна. Широкого застосування набули К. с. а. к. тиску пари, в яких зв'язок за відхиленням тиску пари від заданого значення доповнюється зв'язком за витратою пари.

Структурну блок-схему К. с. а. к. наведено на мал. 1.



1. Структурна схема комбінованої системи автоматичного керування: ОК — об'єкт керування; Р — регулятор; П — підсилювач; КЗ — компандуючий зв'язок; Д — давач; α_1, α_2, β, l_0, m_0 — коефіцієнти підсилювання; закон регулювання $\Sigma = \Psi - m_0 \Phi - l_0 L$; Φ — регульована величина; Ψ — задавальне діяння; L — збурення; M — керуюче діяння. 2. Статична характеристика комбінованої системи: 1 — від'ємний статизм; 2 — астатична настройка; 3 — додатний статизм; 4 — об'єкт без регулятора.

Одна з переваг К. с. а. к. полягає в можливості достатньо широко змінювати нахил статичної характеристики системи $\Phi = f(L)$, де Φ — регульована величина, а L — осн. зовнішнє збурення (мал. 2). Така можливість забезпечується відповідним вибором коефіцієнта зв'язку за збуренням l_0. Вибір нахилу статичної характеристики (статизму системи) не пов'язаний із заг. коефіцієнтом підсилення контура зворотного зв'язку. К. с. а. к. може мати великий нахил характеристики $\Phi = f(L)$ за високим коефіцієнтом підсилення системи. Зокрема, таке настроювання необхідне для стійкої паралельної роботи електр. генераторів (або парових котлів) на спільне навантаження, яке розподіляється пропорційно нахилам статичних характеристик систем регулювання кожного з генераторів (або котлів). Друга перевага К. с. а. к. виявляється при розв'язуванні проблем динаміки й точності. За допомогою відповідних настроювань параметрів замкненого й розімкненого контурів можна незалежно забезпечити потрібну якість перехідного процесу при потрібному статизмі. Відповідним вибором параметрів К. с. а. к.

можна досягнути виконання умов *інваріантності систем автоматичного керування.*

Виконання умов інваріантності дає можливість усунути усталену складову похибку лінійної системи керування, що її спричинюють збурення, за якими здійснюють компаундуючі зв'язки (досягають повної або абсолютної інваріантності). Похибка, що її спричинюють інші збурення, зв'язком за даним збуренням не усувається. Фіз. пояснення повного усунення похибки пов'язане з наявністю в системі двох каналів для передачі дії збурення на дану інваріантну величину. Тут можлива і недокомпенсація, і перекомпенсація похибки (від'ємний статизм). Виконання умов інваріантності не впливає на умови стійкості системи, бо компаундуючі зв'язки розімкнено. Цю властивість наз. властивістю ортогональності умов інваріантності й умов стійкості. Дуже близькими за властивостями до К. с. а. к. є системи автомат. регулювання, в яких можна здійснити т. з. непряме вимірювання збурень (див. *Диференціальна система автоматичного керування*). Широкі можливості у виборі статичних і динамічних властивостей при налагодженні К. с. а. к. визначають їхню основну перевагу порівняно з некомбінованими системами.

Теорія К. с. а. к. має специфічні проблеми. Зв'язок за збуренням є чисто детермінованим, тобто потребує точного розрахунку значень параметрів системи для кожного об'єкта керування. А на параметри зворотного зв'язку за відхиленням регульованої величини не накладають таких жорстких вимог. Цей зв'язок реалізується у вигляді т. з. коректора. Коректор повинен компенсувати дію всіх завад, яких не враховують у розрахунку зв'язку за збуренням, і всі неточності цього розрахунку. Загальна ідея комбінованого керування поширюється на ряд «великих», або *складних систем керування.* В кожній такій системі звичайно можна виділити детерміновану частину, яка піддається детальному аналізові, розрахункові й жорсткому плануванню, й індетерміновану, для якої такий аналіз практично неможливий.

Літ.: Кулебакин В. С. О поведении непрерывно возмущаемых автоматизированных линейных систем. «Доклады АН СССР. Новая серия», 1949, т. 68, № 5; Кулебакин В. С. О выборе оптимальных параметров автоматических регуляторов и следящих систем. «Доклады АН СССР. Новая серия», 1951, т. 77, № 2; Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. К., 1962 [бібліогр. с. 412—416]; Івахненко О. Г., Комаров Б. О. Недокомпенсація, абсолютна інваріантність і перекомпенсація в системах автоматичного регулювання. «Автоматика», 1964, № 2. *О. Г. Івахненко.*

КОМБІНОВАНІ МНОЖИЛЬНО-ДІЛИЛЬНІ ПРИСТРОЇ — див. *Множильно-ділильні пристрої.*

КОМІРКА ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ — сукупність запам'ятовувальних елементів нагромаджувача (ділянка запам'ятовувального середовища), призначена для зберігання одного слова (числа). К. з. п. характеризується числом розрядів *(бітів)*, тобто макс. кількістю двійкових розрядів слова, яка одночасно може зберігатися в ній. У свою чергу, кількість К. з. п. визначає ємність ЗП. Здебільшого записування (зчитування) слова в К. з. п. провадиться шляхом визначення часово-просторових координат за присвоєною їй *адресою.* Можуть бути й інші способи шукання інформації, записаної в К. з. п., напр., асоціативний (див. *Запам'ятовувальний пристрій асоціативний*). Довжина К. з. п. здебільшого дорівнює довжині маш. слова або кратна їй, а термін «комірка пам'яті», який використовують у програмуванні, ототожнюється не з К. з. п., а з частиною її або з кількома К. з. п., які відповідають довжині маш. слова. *Ф. Н. Зиков.*

КОМІТ — *мова програмування*, орієнтована на описування задач *лінгвістики математичної* та *машинного перекладу*, а також для інших задач логічного характеру. Розроблено її в США. Є варіант К., розширений засобами мови *ФОРТРАН.* Оброблювану К. інформацію (напр., текст) поділяють у робочому полі на частини — конституенти, позначувані символами (напр., текст, фраза, слово, частина слова), кожна з яких може мати одну числову чи кілька логіч. ознак. *Програму* записують на К. як послідовність правил. Правило може складатися з 5 частин: назва, вихід (обов'язкові), ліва частина, права частина, координувальна частина (необов'язкові). Правило визначає порядок обробки послідовності розміщених у робочому полі конституент, що їх задає ліва частина правила. Пошук адекватного ланцюжка в робочому полі має асоціативний характер. Конституенти ланцюжка лівої частини й робочого поля вважають адекватними, якщо збігаються їхні символи й відповідно дотримуються вкладених ознак та їхніх значень. У правій частині правила зазначають, як обробити знайдений ланцюжок конституент. Можна переставляти, закреслювати та додавати нові конституенти в робочому полі й переносити, закреслювати та перелічувати ознаки конституент тощо. В координуючій частині можна зазначати будь-яку кількість наступних операцій: 1) введення — виведення в кількох форматах; 2) керування потоком інформації, що надходить у диспетчер і з нього; 3) керування операціями пошуку в списку (*список* становить собою ряд правил, у лівій частині яких може стояти лише одна конституента без ознак; списки можна використати для словників); 4) укрупнення і подрібнення конституент робочого поля; 5) операції з «полицями», що відіграють роль адресної пам'яті, а разом з правилами списку дають змогу вводити мову вищого рівня.

Літ.: Ингве В. Х. Язык для программирования задач машинного перевода. В кн.: Кибернетический сборник, № 6. М., 1963. *Н. О. Баландіна.*

«КОМПАНІ ІНТЕРНАСЬОНАЛЬ ПУР Л'ІНФОРМАТІК» (Compagnie international pour l'informatique) — головна монополія електронно-обчислювального машинобудування у Франції. Засновано її 1966. Виготовляє обчисл. машини сімейства «IRIS».

«IRIS-50» — машина 3-го покоління з універсальним матем. забезпеченням, призначена для керування, наукових розрахунків та обробки інформації в реальному масштабі часу; швидкодія — 4 млн. логіч. операцій за 1 *сек.* «IRIS-80» є машиною загального призначення для роботи в режимі розподілу часу, має 4 центр. процесори паралельної дії з швидкодією кожного — близько 1 млн. операцій за 1 *сек.* В 1971 випущено малогабаритну машину 3-го покоління — «Мітра-15».

Літ.: Зейденберг В. К., Матвеенко Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.

КОМПАУНДУ́ЮЧІ ЗВ'ЯЗКИ́ В АВТОМАТИ́ЧНИХ СИСТЕ́МАХ — канали для формування та передавання на вхід об'єкта регулювання (керування) діянь, функціонально пов'язаних безпосередньо зі збуреннями, що діють на об'єкт, з метою зменшення (компенсації) впливів цих збурень на регульовані координати об'єкта чи встановлення певних залежностей між регульованими координатами й збуреннями. Назву запозичено з галузі електромашинобудування, де для компенсації реакції якоря машини великого поширення набули т. з. пристрої компаундування збудження за струмом навантаження (компаундні обмотки, компаундуючі трансформатори струму з випрямлячами тощо в електр. машинах). К. з. в а. с. є основою принципу регулювання за збуренням (принцип компенсації). На відміну від *зворотних зв'язків* К. з. в а. с. не впливають на стійкість системи, але поступаються перед ними в точності регулювання. Тому К. з. в а. с. застосовують гол. чин. у *комбінованих системах автоматичного керування,* причому здійснюють їх, як правило, тільки щодо збурень, доступних для вимірювання. У загальному випадку в К. з. в а. с. є вимірювач (давач) збурення і, якщо потрібно, його похідних, перетворювальні пристрої та підсилювач. Іноді функції вимірювання, перетворення й підсилення можуть суміщуватися в одному чи більше пристроях. За своїми характеристиками К. з. в а. с. можуть бути як лінійними, так і нелінійними, зв'язками з постійними й змінними параметрами.

Параметри К. з. в а. с. визначаються умовами задачі регулювання. При розв'язуванні задач компенсації вибір параметрів провадиться на основі ідей теорії інваріантності. Але виконання умови цілковитої компенсації (абсолютної інваріантності) здебільшого обмежене умовами фіз. здійсненності параметрів К. з. в а. с. У зв'язку з цим у реальних системах цілковитої компенсації чи перекомпенсації принципово легко досягти лише в усталених режимах. Див. також *Інваріантність систем автоматичного керування.*

Літ.: Івахненко О. Г. Кібернетичні системи з комбінованим керуванням. К., 1963 [бібліогр. с. 471—479]; Уланов Г. М. Регулирование по возмущению. М.— Л., 1960 [бібліогр. с. 106—108]; Ивахненко А. Г. Электроавтоматика. К., 1957 [бібліогр. с. 440—442].

О. М. Костюк.

КОМПЕНСАЦІ́ЙНИЙ СПО́СІБ НАСТРО́ЮВАННЯ ТА ВИМІ́РЮВАННЯ РЕЗУЛЬТА́ТІВ РОЗВ'Я́ЗУВАННЯ — спосіб введення вхідних даних, а також вимірювання результатів розв'язування задачі на *аналоговій обчислювальній машині* (АОМ), який полягає в порівнюванні настроюваної або вимірюваної величини з відомою величиною-еталоном. В АОМ порівнювані величини звичайно є різницями потенціалів (напругами). При цьому у випадку введення первісних даних за настроювані порівнювані величини правлять

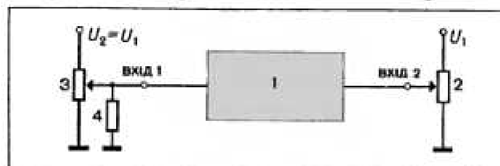


Схема установки коефіцієнта передачі потенціометра компенсаційним методом: *1* — нуль-індикатор; *2* — прецизійний потенціометр; *3* — настроюваний потенціометр; *4* — опір навантаження; U_1 — еталонна напруга; U_2 — опорна напруга.

напруги, пропорційні відповідним даним (напр., коефіцієнтам передачі розв'язувального підсилювача). Порівнювання здійснюється за допомогою *нуль-органа,* що являє собою, як правило, гальванометр або ламповий вольтметр. За нуль-орган може правити і осцилоскоп або спец. пристрій, який реєструє рівність настроюваної або вимірюваної величини еталонній. Основні вимоги до нуль-органа: він не може бути додатковим навантаженням ні для настроюваного (вимірюваного) джерела, ні для еталонного; чутливість його має бути не гірша як 10 *мв* (для АОМ зі шкалою 100 *в*).

Компенсаційний спосіб вимірювання напруг особливо ефективний для електр. кіл постійного струму, бо в цьому разі забезпечується точність вимірювання порядку 0,01% і вища (у спец. випадках похибка може бути доведена до 0,001—0,003%). Така точність і те, що в момент відлічування струм через нуль-орган не протікає, є основними перевагами компенсаційного способу над способами прямого вимірювання, чим і пояснюють широке використання його в АОМ. На мал. показано типову схему встановлення коефіцієнта передачі потенціометра (з урахуванням навантаження) компенсаційним способом. Заданий коефіцієнт передачі встановлюється на прецизійному потенціометрі з лімбом, а напруга з нього подається на вхід *2* нуль-органа. Настроюваний потенціометр, напруга якого подається на вхід *1*, регулюється так, щоб нуль-орган показував нуль. У великих АОМ уся ця процедура виконується з застосуванням слідкуючої системи автоматично за 1—3 *сек*, причому похибка настроювання десятиоборотних потенціометрів не більша як 0,02%. Осн. причинами виникнення похибок є обмежена чутливість нуль-органа і неточність задавання еталонного джерела напруги. Вимірюючи результати розв'язування (в ста-

тичному режимі), вхід *1* нуль-органа підмикають до вимірюваного джерела, а потім, обертаючи лімб прецизійного потенціометра, добиваються нульового показання нуль-органа. Множенням відліку за лімбом на величину *еталонної напруги* одержують шукану напругу. *І. Є. Єфимов.*

КОМПЛЕКСУВА́ННЯ МАШИ́Н — об'єднування двох або більше обчислювальних машин (ОМ) в одну систему (комплекс) для сумісної роботи з метою надати цій сукупності ОМ властивостей, яких кожна з цих машин окремо не мала. Розрізняють три основні види К. м.: комплексування ЦОМ, комплексування АОМ і побудову комплексів з АОМ і ЦОМ.

а) Комплексування ЦОМ здійснюють на різних рівнях залежно від призначення комплексу, цілей комплексування й складу обладнання. За К. м. на рівні зовн. пристроїв будь-яка з машин комплексу може вдаватись до будь-якого з зовн. пристроїв. Можливе комплексування й на такому рівні, коли «усуспільнюються» *оперативні запам'ятовувальні пристрої* (ОЗП) машин комплексу. Процеси обміну інформацією між машинами при цьому істотно пришвидшуються. Найглибший зв'язок між машинами комплексу встановлюється тоді, коли є перехресні канали між ОЗП, *арифметичними пристроями* й навіть блоками керування суміжних машин. ЦОМ комплексують, щоб збільшити загальну продуктивність створеної внаслідок К. м. *обчислювальної системи*, підвищити ефективність використовування окремих ОМ і блоків їх та надійність роботи системи. В різних варіантах К. м. досягають ефектів функціональної спеціалізації, розпаралелювання, спільного запам'ятовувального пристрою, резервування, взаємного контролю; усе це — т. зв. ефекти комплексування.

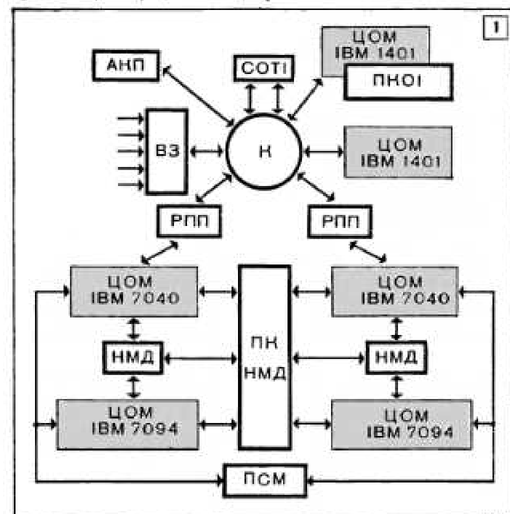
Ефект функціональної спеціалізації полягає в суттєвому скороченні часу розв'язування широкого класу задач. Досягають цього, покладаючи в процесі роботи системи різні спец. ф-ції на відповідні цим ф-ціям машини (потужності). Розрізняють обчисл., обмінні, інтерпретуючі та ін. потужності. До обчисл. потужностей належать ЦОМ із швидкодіючими арифм. пристроями; за обмінні потужності вважають ЦОМ з численними потужними каналами зв'язку з зовнішніми пристроями й пристроями обміну, добре пристосовані для того, щоб виконувати такі операції. Машини з добре розвиненою схемною інтерпретацією вхідної мови, які ефективно працюють у *діалога режимі* з оператором,— це інтерпретуючі потужності. Певні ЦОМ можна одночасно спеціалізувати в кількох напрямах і, відповідно, застосовувати їх як різні потужності.

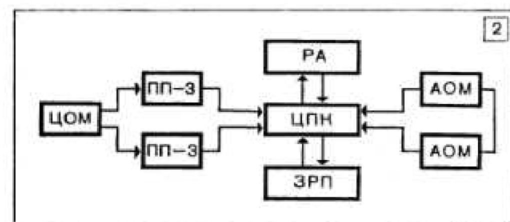
Ефект розпаралелювання полягає в економії машинного часу, його досягають, одночасно виконуючи на різних машинах паралельні гілки одного алгоритму. Ефект спільного запам'ятовувального пристрою виявляється в гнучкості розподілу обсягу пам'яті й збільшенні ефективності його використання. Стосовно оперативного ЗП цей ефект підсилюється від розширення можливостей розпаралелювання алгоритмів. У разі «усуспільнення» зовнішніх ЗП ефект посилюється при функціональній спеціалізації. Ефект резервування полягає в підвищенні надійності роботи системи шляхом підміни машини, яка вийшла з ладу з якоїсь причини, іншою, справною. Ефект взаємного контролю — це скорочення середнього часу виявлення й усунення несправності в машині, коли є змога покласти завдання контролю й діагностики несправностей при відмові однієї з ЦОМ на справні машини комплексу.

Узгоджену роботу машин, об'єднаних у комплекс, забезпечує частково спец. апаратура, частково програмування. Чим глибші зв'язки між машинами комплексу, тим складніше реалізувати їх апаратурно. Коли в комплексі є машини, які різняться за форматом команд, за елементною базою і т. п., потрібні додаткові пристрої з'єднування й узгоджування. Узгоджування машин з різними *мовами машинними* здійснюють, головним чином, двома шляхами: моделюванням однієї машини на іншій і перекладом *програм* на проміжну символічну мову. В першому випадку узгодження здійснюють за допомогою однобічних швидкодіючих запам'ятовувальних пристроїв («емуляторів»), у яких кожна команда «старої» програми перекладається на відповідні команди «нової» програми. У другому — вхідна мова комплексу перекладається на спец. проміжну мову, в певному розумінні близьку всім машинним мовам комплексу. Обмін між машинами відбувається саме цією мовою. Основу програмного узгодження роботи машин комплексу становить сукупність спец. програм, яку наз. *операційною системою* комплексу; вона організовує мультипрограмний режим роботи окремих ОМ і всього комплексу загалом, керує введенням — виведенням, здійснює комутацію зовн. і оперативної пам'яті, реалізує функціональну спеціалізацію, розпаралелювання алгоритмів, резервування й контроль.

Комплексувати ЦОМ можна в *обчислювальних центрах* (ОЦ) загального призначення, де є, напр., надпотужна універсальна ЦОМ і кілька середніх і малих машин. Малі машини виконують, звичайно, досить прості функції: обслуговування зовн. пристроїв і пультів операторів, сортування даних і контроль, окрім того, розв'язують невеликі задачі. Потужну ЦОМ використовують при цьому так, щоб усі її найскладніші функціональні блоки максимально завантажити. К. м. істотно збільшує продуктивність ОЦ, сприяє рівномірному й ефективному завантажуванню його обладнання й раціональному використовуванню його потужностей. Зростає не тільки кількість і обсяг розв'язуваних задач, а й збільшується їхня складність і різноманітність. ЦОМ комплексують і в спеціалізованих

ОЦ, таких, що обслуговують найбільші аеропорти, системи протиповітряної оборони, системи керування космічними польотами і т. п. У таких випадках необхідність К. м. викликана великим обсягом розв'язуваних задач і труднощами розв'язування істотної частини їх у *реальному масштабі часу*. Крім того, в більшості таких систем настільки зростають вимоги до надійності роботи ОЦ, що машини повинні працювати в дуплексному (подвійне резервування) і навіть у триплексному (потрійне резервування) режимах.





1. Схема координаційно-обчислювального центру в м. Пассадені (США).
2. Блок-схема аналого-цифрового комплексу «АЦЭМС-1».

Прикладом комплексу ЦОМ є Центральний обчислювальний комплекс (ЦОК) координаційно-обчислювального центру в м. Пассадені (США) — однієї з основних ланок у системі наземного забезпечення космічних польотів на Місяць та інші планети (мал. 1). ЦОК включає в себе дві ЦОМ великої продуктивності типу «IBM-7094», дві ЦОМ середньої продуктивності типу «IBM-7040», дві малі ЦОМ типу «IBM-1401», нагромаджувачі на магнітних дисках (НМД), розподільно-перетворювальні пристрої (РПП) й ряд допоміжних блоків. Обидві «IBM-7094» використовують як основні обчисл. потужності. Машини «IBM-7040» правлять за обмінні потужності й, окрім того, виконують функції контролю всіх елементів ЦОК. Машини «IBM-1401» виступають у ролі інтерпретуючих потужностей, обслуговуючи пункт керування обміном інформації (ПКОІ) й пристрої виведення й відображення інформації. РПП сукупно з «IBM-7040» забезпечують обмін даними з 48 зовн. пристроями різної швидкодії. Максимальна швидкість обміну РПП і ЦОМ становить 62 500 слів за 1 *сек*. НМД мають ємність по 54 млн. знаків і служать для зберігання вихідних й необроблених даних від «IBM-7094», а також робочих програм і констант. Пристрій керування НМД (ПК НМД) дає можливість здійснювати одночасний обмін з однією ЦОМ «IBM-7094» й однією ЦОМ «IBM-7040». Пристрій спряження машин (ПСМ) забезпечує обмін між машинами «IBM-7094» й «IBM-7040» 36-розрядними паралельними *кодами;* його вмикають на запит будь-якої з цих машин і використовують, насамперед, щоб передавати керівну інформацію між робочими програмами машин, і, окрім того, для контролю при сумісному використанні НМД. Зв'язок між пристроями ЦОК і зовн. системами, до складу яких входить апаратура контролю за польотом (АКП), система обробки телеметричної інформації (СОТІ) й вузол зв'язку (ВЗ), здійснюється за допомогою комутатора (К). Щоб забезпечити надійність роботи ЦОК, передбачено можливість складання з елементів комплексу кількох різних конфігурацій дублювання й резервування, одну з яких і вибирають залежно від вимог до надійності й часу відновлювання працездатності ЦОК у поточний момент.

б) Необхідність комплексувати ЦОМ з АОМ викликана появою ряду задач, для розв'язування яких потрібні й велика точність універсальних цифрових машин, і велика швидкодія аналогових (див. *Аналогова обчислювальна машина*). Ці задачі можна поділити на три групи. До п е р ш о ї групи належать задачі моделювання в реальному масштабі часу динаміки об'єктів, описуваних системами дифер. рівнянь, у яких змінні змінюються з різними швидкостями і в різних діапазонах. Точність розв'язування таких задач визначається, головним чином, точністю представлення повільно змінюваних змінних. Прикладом таких об'єктів може бути літальний апарат. Координати його центру мас змінюються набагато повільніше за змінні, які описують його рух відносно центру мас. Позитивного ефекту від К. м. у цьому разі досягають завдяки тому, що частину системи рівнянь, яка описує швидко змінювані змінні, моделюють на АОМ, а іншу частину — на ЦОМ. До д р у г о ї групи задач належать задачі, пов'язані з випробуванням у процесі проектування різних конструкцій і алгоритмів роботи цифрової керуючої машини зі включенням окремих реальних вузлів системи керування чи керованого об'єкта. Наявність реальних пристроїв у моделі потребує реального масштабу часу її роботи (його в багатьох випадках можна здійснити лише за допомогою АОМ). Разом з тим моделювати цифрову керуючу машину доцільно в цьому разі тільки на ЦОМ. Т р е -

тя група задач — це задачі, в яких система дифер. рівнянь є складовою частиною ітераційного циклу. Такими задачами є, напр., задачі оптим. керування або задачі статистичного моделювання. Використання для розв'язування системи дифер. рівнянь АОМ з прискореним масштабом часу дає змогу істотно скоротити час розв'язування таких задач.

Склад аналого-цифрового комплексу (АЦК) визначається його призначенням. У загальному випадку цей комплекс містить такі частини: аналогову частину, цифрову частину, пристрій спряження й центр. пульт керування. До складу АЦК можуть входити й допоміжні вузли: індикаційні й реєструючі блоки, вузли узгодження, імітуючі блоки й т. п. Цифрова частина може мати одну ЦОМ або й комплекс ЦОМ різного класу й призначення. В аналогову частину теж може входити одна чи кілька АОМ. Потужність і тип комплексованих машин визначаються обсягом і характером задач, що їх мають розв'язувати. Осн. функціями пристрою узгоджування є перетворювання форми інформації з цифрової на аналогову й навпаки, синхронізація роботи машин і керування всіма блоками й частинами АЦК з метою координувати їхню сумісну роботу й найбільше автоматизувати процес розв'язування задачі. Блок керування й синхронізації забезпечує реалізацію циклічних програм і подання одноразових команд і, крім того, здійснює прив'язування системи до реального часу. З центр. пульта керування організовують звертання до різних блоків АЦК й реалізують різні режими роботи комплексу. Такими режимами можуть бути режими пуску, зупину, підготовки задачі, переведення системи на автономну роботу окремих машин, автономної перевірки й наладжування пристрою спряження й режим тестової перевірки всього АЦК. Характерною особливістю роботи з АЦК є необхідність програмування аналогової й цифрової частин комплексу і способу їхньої взаємодії. В разі, коли аналогова частина не допускає автомат. введення інформації, відповідну частину задачі вводять безпосередньо комутацією на *набірному полі* АОМ і ручним встановлюванням потрібних параметрів. А якщо автомат. введення в аналогову частину можливе, всю програму розв'язування задачі вводять до цифрової частини, яка надалі повністю керує аналоговою частиною й перед розв'язуванням задачі, й у процесі розв'язування.

На мал. 2 подано схему аналого-цифрового комплексу «АЦЭМС-1», побудованого на базі трьохадресної універсальної ЦОМ середньої потужності й двох аналогових машин типу «МН-18». Комплекс «АЦЭМС-1» призначено для розв'язування нелінійних звичайних дифер. рівнянь у реальному масштабі часу й розраховано на зв'язок з реальною апаратурою (РА). Щоб збільшити ефективність розв'язування задач в АЦК, створено умови часткової автоматизації операцій введення й виведення *даних*, контролю результатів набору й розв'язування задач. Роботу обчисл. пристроїв організовує єдина система керування ЦПК. В системі наявні три основні сигнали керування: «пуск», «зупин» і «початковий стан», що їх використовують у всіх пристроях комплексу. Осн. режими комплексу — розв'язування й контроль блоків. Пристрій перетворювання інформації ПП-3 здійснює перетворювання *машинних змінних*, які надходять з аналогової частини у вигляді величин напруги, на цифровий *код* і навпаки. Комплекс «АЦЭМС-1» дає змогу моделювати в реальному масштабі часу процеси, в яких швидкість зміни сигналів не перебільшує швидкості зміни синусоїди з амплітудою 50 *в* і частотою 5 *гц*. При цьому, напр., точність розв'язання задачі поздовжнього польоту літака на один-два порядки вища за точність розв'язання її на аналогових машинах. Розв'язування тієї самої задачі лише на цифровій машині з тією самою точністю потребує збільшення масштабу часу в десять раз.

в) Комплексування АОМ найчастіше пов'язано зі специфічними для АОМ обмеженнями, накладуваними на порядок системи розв'язуваних рівнянь, на кількість нелінійностей і змінних коеф. тощо. У цьому разі К. м. веде до простого збільшення обчисл. потужності. При цьому здійснюється побудова моделі системи рівнянь, у якій складовими частинами є блоки двох чи більше аналогових машин. Жодних істотних заходів для стикування й узгодження роботи машин у цьому разі вживати не доводиться. Проте в деяких випадках комплексування вузько спеціалізованих аналогових машин дає якісний ефект. Напр., комплекс з гідроінтерпретатора «ИГ-1» і електроінтегратора «ЭГДА-9-60» дуже ефективно використовують для розв'язування задач конвективного теплообміну в шарі. Процес розв'язування розбивають на послідовність часових інтервалів, у кожному з яких спочатку методом електрогідродинамічних аналогій розв'язують на «ЭГДА-9-60» гідродинамічну частину задачі, а потім, виходячи з одержаного результату, методом гідротеплових *аналогій* на «ИГ-1» виконують розрахунок теплового поля в цьому часовому інтервалі (див. *«ЭГДА»*, *Моделювання на суцільних середовищах*).

Літ.. Голубев-Новожилов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [бібліогр. с. 402—415]; Кудряшов И. А. [та ін.]. Аналоговые и комбинированные электронные вычислительные машины. Л., 1969 [бібліогр. с. 445—446]; Глушков В. М. [та ін.]. Некоторые основные направления развития цифровой вычислительной техники. М., 1970 [бібліогр. с. 91—94].

Л. А. Казакевич.

КОМПЛЕ́КТ ПЕРФОРАЦІЙНИЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ — набір пристроїв, які виконують основні та допоміжні операції при обробці інформації. В комплекті використовують у взаємозв'язку групи пристроїв: 1) підготовки перфокарт (*перфоратори*, *контрольники*, перфоратори репродукційні, зчитувальні, підсумкові); 2) впорядкування масивів перфокарт (сортувальні та розкладально-підбиральні машини); 3) матем. обробки ін-

формації, нанесеної на перфокарти (*табулятори* й перфоратори обчислювальні електронні); 4) друкування даних, нанесених на перфокарти (розшифровуючі машини для перекодування інформації на перфокарти й на друк). Продуктивність перфораційних обчисл. пристроїв неоднакова, тому їх використовують у такому кількісному співвідношенні, яке забезпечує макс. завантаження високопродуктивного пристрою — табулятора. В складі типового К. п. о. є один табулятор, одна *сортувальна машина*, три перфоратори й два контрольники. Потреба й кількість цих пристроїв у комплекті визначається залежно від обсягу й характеру оброблюваної інформації. К. п. о. належать до устаткування машинолічильних станцій і обчисл. центрів. Призначений для автомат. виконання масових лічильних і лічильно-записувальних операцій під час обробки інформації. Використовувати його доцільно там, де кількість результативних чисел у кілька разів менша за кількість введених або принаймні дорівнює їм. Застосування К. п. о. для механізації обліково-обчисл. робіт значно зменшує строки складання звітних зведень, прискорює документооборот, поліпшує якість облікових даних, продуктивність праці працівників обліку стає удвоє-втроє вища, ніж при ручній техніці обліку. *С. П. Куценко.*

КОМУНІКАЦІЙНИЙ ПРОЦЕ́СОР — пристрій, що забезпечує обмін інформацією між *обробки даних системою* та споживачами. Осн. функції К. п.: комутація каналів зв'язку, кодування інформації та перетворювання форми представлення її, контроль даних, первинна обробка даних (напр., редагування тощо). К. п. керують спец. *програми* та сигнали центр. *процесора* системи.

КОНКУРЕ́НЦІЇ МОДЕ́ЛІ — моделі стану економічної системи за умов ринкової конкуренції, які відображують взаємодію між попитом, пропозицією та цінами на товари. Стан рівноваги системи полягає в тому, що попит не повинен перевищувати пропозиції на ринку, він встановлюється для цін $\{p^*\}$, обсягів попиту $\{y_1^*, \ldots, y_m^*\}$ і пропозиції $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ при виконанні таких обмежень. По-перше, кожен j-й виробник відшукує плани затрат — випуску X_j^*, які забезпечують максимум прибутку в цінах рівноваги $(p^*, x_j^*) = \max\,(p^*, x_j)$ для $j = 1, 2, \ldots, n$ і $x_j \in X_j$, де X_j — множина найрізноманітніших планів затрат — випуску j-го виробника. В такій *моделі математичній* розглядаються лише відносні ціни, тому вектор цін нормовано так: $p = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $p_\nu \geqslant 0$, $\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu = 1$. По-друге, кожен i-й споживач максимізує корисність придбаних товарів $U_i(y_i)$ серед усіх можливих векторів споживання за умови, що витрати на придбання товарів не перевищують одержуваного прибутку: $(p^*, y_i) \leqslant (p^*, z_i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(p^*, x_j^*)$, де z_i — вектор товарів, що їх має i-й споживач на початковий період; α_{ij} — частка i-го споживача в прибутку j-го виробника, обумовлена договором (напр., наявністю акцій). По-третє, попит усіх споживачів задовольняється товарами, що вироблені в системі й наявні на початковий період. При цьому будь-який товар, що надходить понад наявний попит, має нульову ціну: $y^* \leqslant x^* + z^*$, $(p^*, y^* - x^* - z^*) = 0$, де вектор y^* відображує сумарний попит усіх споживачів, тобто $y^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^*$; вектор x^* — сумарний обсяг виробн. в системі, тобто $x^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^*$; вектор z^* — заг. обсяг товарів у системі для початкової торгівлі $z^* = \sum_{i=1}^{m} z_i^*$.

Літ.: Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798—819].

Ю. С. Архангельський, Т. І. Приходько, Є. Д. Фесенко.

КОНСТРУКТИ́ВНИЙ АНА́ЛІЗ, р е к у р с и в н и й а н а л і з, о б ч и с л ю в а л ь н и й а н а л і з — назва, що об'єднує різні течії в основах математики й математичному аналізі. Як правило, будуючи К. а., ставлять за мету всі або кілька принципових цілей: 1) побудова системи аналізу, спеціально орієнтованої на реальні конструктивні та обчислювальні можливості (вони часто відходять на 2-й план під час традиційної теоретико-множинної побудови аналізу); 2) вивчення принципових меж обчисл. можливостей в аналізі, вивчення «ефективності» в аналізі (зокрема, дослідження питання про те, за якими первісними даними можна ефективно знаходити ті чи ін. об'єкти аналізу); 3) вивчення обчисленних об'єктів аналізу (обчисленних дійсних чисел, обчисленних функцій над ними тощо), в тому розумінні, в якому, напр., в алгебрі вивчають групи. Дослідження, що є тут, можна дуже грубо поділити на 2 типи: такі, що їх провадять у межах традиційного аналізу, й дослідження, формально не залежні від нього. Перший напрям досліджень представлено рядом праць, у т. ч. основоположними працями А. Тьюрінга, С. Банаха й С. Мазура та Е. Шпекера, в яких було, по суті, вироблено сучасні концепції обчисленного дійсного числа. До 2-го типу належать дослідження з інтуїціоністського аналізу, що виникли в зв'язку з інтуїціоністською програмою побудови математики, яку висунув Л. Е. Брауер, та істотно вплинули на формування задач і методів К. а., рекурсивний аналіз Р. Гудстейна та оригінальна й далеко просунута система К. а., яку розвинув останнім часом Є. Бішоп. У Радянському Союзі починаючи з 50-х ро-

ків 20 ст. інтенсивно розробляли систему К. а., що належить до 2-го типу досліджень і є частиною заг. програми конструктивної побудови математики (див. *Конструктивний напрям у математиці*). Основоположний вклад у розвиток цієї системи (коротко її називають «конструктивний аналіз») внесли А. А. Марков (син), М. О. Шанін та їхні учні. Будучи частиною конструктивної математики, К. а. зберігає її характерні риси. Зокрема, розгляди обмежуються конструктивними об'єктами (здебільшого словами в деяких алфавітах або об'єктами, що допускають очевидне кодування словами) й провадяться в межах *абстракції потенціальної здійсненності* з застосуванням спец. конструктивних правил розуміння матем. суджень. При цьому зовсім виключається використання *абстракції актуальної нескінченності*, й інтуїтивне поняття «ефективності» пов'язується з одним із точних понять алгоритму (в більшості праць, які належать до розглядуваної системи К. а., використовують поняття нормального алгоритму). В межах К. а. одержано велику кількість результатів, цікавих і з погляду проблематики мети 1-ї, і з погляду цілей 2-ї і 3-ї. По суті доведено, що засобами конструктивної математики можна побудувати теорію рядів, інтегрування за Ріманом і Лебегом, функцій комплексної змінної, узагальнених ф-цій та ін. Добуті конструктивні теорії і схожі на однойменні традиційні теорії, і помітно відрізняються від них, проте відмінності ці проявляються не стільки в конкретних питаннях, пов'язаних із застосуванням аналізу, скільки в теор. концепціях (таких, напр., як концепція компактності тощо).

Фундаментальними поняттями К. а. є поняття конструктивного дійсного числа (КДЧ) й конструктивної ф-ції дійсної змінної. Конструктивні дійсні числа можна ввести різними (не завжди еквівалентними) способами. Одним із природних шляхів є шлях, аналогічний канторівській побудові дійсних чисел у традиційному аналізі. Спочатку вводять натуральні числа, як слова в двобуквеному алфавіті {0, 1} вигляду 0, 01, 011, ... Аналогічно визначають раціональні числа, як слова якогось типу в алфавіті {0,1,—,/}. Визначають відношення порядку й рівності над раціональними числами та арифм. операції над ними. Конструктивною послідовністю натуральних чисел (КПНЧ) наз. нормальний алгоритм, який переробляє всяке натуральне число на натуральне. Аналогічно трактують і поняття конструктивної послідовності раціональних чисел (КПРЧ). Схеми нормальних алгоритмів однозначно кодують словами в алфавіті (0,1), код цього алгоритму наз. його *записом*. КПНЧ α наз. регулятором фундаментальності КПРЧ β, якщо для будь-яких натуральних l, m і n, таких, що $l, m \geqslant \alpha(n)$, справджується нерівність $|\beta(l) - \beta(m)| < 2^{-n}$. КПРЧ наз. фундаментальною, якщо можна побудувати її регулятор фундаментальності. Конструктивними дійсними числами наз. раціональні числа й слова в алфавіті (0, 1, $\diamondsuit$) вигляду $U \diamondsuit V$, де U — запис якоїсь КПРЧ, а V — запис КПНЧ, яка є регулятором фундаментальності цієї КПРЧ. Описане поняття КДЧ добре узгоджується з інтуїтивним уявленням про обчисленні дійсні числа як про об'єкти, що допускають ефективну як завгодно точну апроксимацію раціональними числами. Для КДЧ можна визначити природним способом відношення порядку й рівності та арифм. операції (причому ці останні задаються алгоритмами). Система КДЧ з цими відношеннями рівності й порядку та арифм. операціями стає полем. Далі можна ще ввести в розгляд конструктивні послідовності КДЧ (КПДЧ) і визначити в тому самому порядку ідей, що й вище, поняття фундаментальної КПДЧ і поняття конструктивної збіжності КПДЧ до даного КДЧ. Відносно такого поняття збіжності система КДЧ виявляється повною: існує алгоритм, який знаходить, виходячи з запису всякої фундаментальної КПДЧ γ і запису її регулятора фундаментальності, КДЧ, до якого (конструктивно) збігається γ. Методом, аналогічним канторівському, можна довести й теорему про конструктивну незчисленність множин усіх КДЧ, яка полягає в тому, що здійсненним є алгоритм, який переробляє запис усякої КПДЧ на КДЧ, відмінне (в розумінні рівності КДЧ) від усіх членів цієї КПДЧ. Теорема про повноту надає значної схожості конструктивній і класичній теорії границь, яка особливо виявляється в питаннях збіжності тих чи ін. конкретних, використовуваних в аналізі послідовностей і рядів. Але тут є й істотні відмінності, що виявляються, напр., у такому результаті Є. Шпекера: можна побудувати зростаючу КПРЧ β, таку, що завжди $0 < \beta(n) < 1$, і, незважаючи на це, β не є фундаментальною (і, отже, не збігається конструктивно ні до якого КДЧ).

Поняття конструктивної функції (КФ) є природним уточненням інтуїтивного поняття точкової обчисленної ф-ції над обчисленними дійсними числами. Конструктивною ф-цією (однієї дійсної змінної) наз. нормальний алгоритм — такий, що для будь-яких однакових КДЧ x і y, якщо F застосовний до x, то застосовний і до y, і $F(x)$ і $F(y)$ — рівні КДЧ. В термінах КФ можна ввести елементарні ф-ції (показникова ф-ція, тригоном. ф-ції тощо), які мають звичайні властивості; для КФ можна розвинути теорії диференціювання, інтегрування за Ріманом тощо, які є близькими до традиційних. Разом з тим, можливі й незвичайні з традиційного погляду ф-ції: напр., існує скрізь визначена КФ, неперервна на одиничному сегменті й необмежена на ньому. Не має аналогів у традиційному аналізі й теорема, за якою всяка КФ конструктивно неперервна в будь-якій точці, в якій її визначено.

Система понять і методи К. а., даючи змогу істотно просунутися з погляду мети 1-ї, зручна й для виявлення обчислювальних

зв'язків в аналізі, бо багато теорем К. а. є або твердженнями про здійсненність алгоритмів, які будують деякі конструктивні об'єкти за тими чи ін. первісними даними, або твердженнями, що такі алгоритми неможливі. Встановлено нерозв'язність великої кількості природних масових проблем аналізу. Результати цього типу (їх зовсім немає в курсах традиційного аналізу) мають теор. і практичну цінність, бо вони виявляють потенціальні обчислювальні тупики й сприяють чіткому усвідомленню принципових меж обчислювальних можливостей. Напр., доведено неможливість таких алгоритмів (у розумінні одного з точних понять алгоритму): 1) розпізнавального для довільного конструктивного дійсного числа (КДЧ), дорівнює воно нулеві чи ні; 2) такого, що знаходить для кожної збіжної конструктивної послідовності раціональних чисел те КДЧ, до якого вона збігається; 3) такого, що знаходить для кожної сумісної системи лінійних рівнянь (над полем КДЧ) яке-небудь розв'язання її; 4) такого, що знаходить для кожної неперервної, кусково-лінійної, знакозмінної функції її корінь; 5) що знаходить для всякої неперервної, кусково-лінійної на одиничному сегменті функції її інтеграл Рімана за цим сегментом. Теореми неможливості алгоритмів часто супроводяться в К. а. теоремами про існування алгоритмів, які розв'язують розглядувані задачі за повнішими первісними даними (порівняйте теорему про повноту КДЧ і 2-й приклад) або з довільною, наперед заданою точністю (напр., можна побудувати алгоритм, який знаходить для кожної скрізь визначеної знакозмінної конструктивної функції f і кожного n КДЧ $x_{f,n}$ так, що $|f(x_{f,n})| < 2^n$). Зіставлення таких результатів дає змогу в ряді ситуацій одержати уявлення про те, як можна коректно ставити ту чи ін. алгоритм. проблему.

Літ.: «Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; 1962, т. 67; 1964, т. 72; 1967, т. 93; Вейль Г. О философии математики. Пер. с нем. М.— Л., 1934; Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1936, series 2, v. 42, part 3; Turing A. M. A correction. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1937, series 2, v. 43; Specker E. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. «The journal of symbolic logic», 1949, v. 14, № 3; Mazur S. Computable analysis. «Rozprawy matematyczne» [Warszawa], 1963, t. 33 [бібліогр. с. 109—110]; Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИ́ВНИЙ НА́ПРЯМ У МАТЕМА́ТИЦІ, конструктивна математика — напрям досліджень, головне завдання якого — перебудова найважливіших частин традиційної (класичної) математики відповідно до таких методологічних принципів. 1) Системи матем. об'єктів, що їх вивчають у таких теоріях, завжди описують як системи конструктивних об'єктів. 2) Центр. місце належить вивченню відповідностей, заданих за допомогою алгоритмів. 3) Твердження про існування матем. об'єкта, який задовольняє якусь умову, вважають доведеним лише тоді, коли вказано спосіб побудування такого об'єкта.

Під системою конструктивних об'єктів розуміють систему, описану так: а) описано деякі відправні матем. об'єкти, що їх розглядають як елементарні, нерозчленовувані на частини; б) перелічено деякі способи комбінування первісних об'єктів між собою; в) зазначено умову, яку задовольняють ті й лише ті комбінації первісних об'єктів, що їх вважають елементами системи; г) зазначено умову, за якої два елементи системи вважають рівними. При цьому використовують *абстракцію потенціальної здійсненності*, тобто процес побудування комбінацій початкових об'єктів представляють не зв'язаним ніякими обмеженнями в просторі, часі чи матеріалі. З другого боку, ця особливість теорій, що належать до К. н. у м., виключає розгляд сукупностей елементів якоїсь системи конструктивних об'єктів безвідносно до якого-небудь способу описування цих сукупностей, що потребує застосування *абстракції актуальної нескінченності*. У конструктивній математиці допустимими є дані в класичній математиці визначення понять цілого числа, раціонального числа, полінома з раціональними коеф., але недопустимими є дані в ній визначення дійсного числа, ф-ції, множини тощо. Відповідно до п. 2 термін «функція» пов'язаний лише з тими відповідностями, що їх описано задаванням *алгоритму*, який дає змогу ефективно знайти (побудувати) значення ф-ції за значенням аргументу. Аналогічно розуміють терміни «послідовність», «відображення», «функціонал» тощо. Тому деякі способи задавання відображень, використовувані в класичній математиці, не застосовують у конструктивній. Відповідно до п. 3 в конструктивній математиці вважають неприпустимими «чисті» доведення існування, як, напр., відомі доведення теореми Вейєрштраса про обмеженість неперервних ф-цій за допомогою теореми Больцано-Вейєрштраса й «основної теореми алгебри» за допомогою теореми Ліувіля про цілі ф-ції. Аналогічно, якщо доводять твердження про те, що всякий матем. об'єкт якогось типу задовольняє одну з кількох умов, то потрібно зазначити спосіб, який дає змогу дізнатися, яка з умов виконується. Дослідження конструктивного розуміння матем. суджень і конструктивних доведень є предметом спец. розділу матем. логіки (див. *Логіка конструктивна*). Вимоги до доведень, які ставлять у конструктивній математиці, близькі до інтуїціоністських (див. *Інтуїціонізм*), але в деяких пунктах відрізняються від них. Дослідження основоположників інтуїціонізму Л. Брауера та ін., разом з дослідженнями норв. математика Т. Сколема (н. 1887) з теорії рекурсивних ф-цій та англ. математика А. Тьюрінга (1912—1954) з теорії алгоритмів, є одним з ідейних джерел К. н. у м. Філософсько-матем. погляди сучасних конструктивістів далекі від інтуїціоністської філософії. Проте

К. н. у м. цікавий незалежно від будь-яких позицій у галузі філософії математики.

В принципі кожній теорії класичної математики відповідає аналогічна теорія конструктивної математики; під цим часто розуміють конструктивне дифер. числення, конструктивну теорію множин тощо. Співвідношення між системами понять класичної теорії та відповідної конструктивної теорії іноді досить складне. Іноді одному поняттю класичної теорії відповідають двоє понять конструктивної теорії й навпаки. В деяких випадках поняття класичної математики взагалі не має конструктивних еквівалентів, і навпаки, деякі поняття, визначувані в конструктивній математиці, не мають еквівалентів у класичній. Такий самий характер має й відповідність між теоремами класичної та конструктивної теорій. Іноді, щоб довести конструктивний аналог класичної теореми, потрібно застосувати цілком нові ідеї. Праці, присвячені конструктивізації класичної математики, які належать здебільшого до варіанта конструктивної математики, що сформувався в 50-х рр. у працях рад. математика А. А. Маркова (н. 1903) та його учнів, стосуються питань теорії ф-цій дійсної змінної та функціонального аналізу (див. *Конструктивний аналіз*). Крім того, вже є праці, присвячені конструктивізації теорії ф-цій комплексного змінного, теорії узагальнених ф-цій, теорії ймовірностей, теоретико-множинної та комбінаторної топології та деяких ін. теорій. Різні теорії зазнають змін неоднаковою мірою: елементарна теорія чисел і комбінаторика переносяться в конструктивну математику практично без змін, а з теорії множин залишається лише порівняно невелика частина (яка включає, проте, все, що стосується аналізу). Загалом дослідження, що належать до К. н. у м., дають змогу зробити висновок, що матем. теорії, важливі для застосувань математики, в основному можна побудувати в межах конструктивної математики.

Гол. перевага конструктивного способу побудови математики над класичним полягає в тому, що конструктивна математика дає змогу досить просто з'ясувати питання про те, за якими початковими даними можна побудувати розв'язування тієї чи ін. матем. задачі: тут за формулюванням теореми про існування матем. об'єкта відразу можна сказати, за якими початковими даними цей об'єкт можна побудувати, а відмінність ефективних і неефективних доведень, що на неї вказують іноді в класичній математиці, не приводить до цілковитого розв'язання цього питання. Як правило, конструктивна теорія видається набагато громіздкішою й складнішою, ніж відповідна класична теорія. Ця громіздкість є осн. недоліком конструктивного підходу до побудови математики порівняно з класичним. Проте останнім часом досягнуто певних успіхів у розробленні методики викладу конструктивних теорій, які дають підставу вважати згадану громіздкість в основному наслідком того, що в конструктивній математиці ще не розроблено зручної форми викладу. Дослідження з конструктивної математики великою мірою стимулювали розвиток *логіки математичної* та *алгоритмів теорії*. Встановлена в результаті цих досліджень можливість побудувати осн. розділи математики різними способами має велике принципове значення. Дальші дослідження щодо цього спрямовуються г. ч. на те, щоб з'ясувати, чи не може конструктивна математика замінити класичну. Процеси такого роду відбувалися в історії математики (напр., атомістичну геометрію Демокріта заступила геометрія Евкліда). Незважаючи на успіхи, досягнуті К. н. у м., кількість прихильників його не дуже велика.

Літ.: Марков А. А. О конструктивной математике.— Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 67; Bishop E. Foundations of constructive analysis. New York, 1967; Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970. *В. О. Ліфшиць.*

«КОНТРО́Л ДЕ́ЙТА КОРПОРЕ́ЙШЕН» (Control data corporation) — американська фірма, що спеціалізується на випуску електронних цифрових обчислювальних машин великої продуктивності для наукових розрахунків. Заснована 1957. З 1960 випускає ЦОМ на транзисторах, сімейство «CDC-3000» з продуктивністю 300—800 тис. операцій за 1 *сек*, і сімейство «6000» з продуктивністю 1,5—3,5 млн. операцій за 1 *сек*. ЕОМ «CDC-6600» була першою обчисл. машиною, яка використовувала для підвищення продуктивності мультипроцесорну структуру з одного центр. і десяти допоміжних спеціалізованих процесорів. У 1969 фірма випустила одну з найбільших у світі ЦОМ (див. *«CDC-7600»*) продуктивністю понад 10 млн. операцій за 1 *сек*. У 1970 закінчили розробляти надпотужну ЦОМ «Star-100», яка виконує до 100 млн. операцій за 1 *сек*, має інформаційний банк ємністю до 100 млн. *бітів* і систему введення — виведення з пропускною здатністю 100 млн. знаків за 1 *сек*. У машині реалізовано принцип потокової обробки в структурі з кількох спеціалізованих процесорів і використано інтегральні схеми. З 1972 розпочато випуск програмносумісних ЦОМ «Cyber-70». Моделі «72», «73» й «74» відповідають моделям «6400», «6500» і «6600», але співвідношення продуктивності й вартості в них у 1,5—2 рази краще і їх можна використовувати з одним і двома процесорами. Висока продуктивність у них досягається завдяки використанню периферійних процесорів (до 20) для керування периферійними пристроями, коли каналів введення — виведення до 24. Остання машина сімейства «Cyber-76» аналогічна моделі «CDC-7600». Усі машини сімейства побудовано на дискретних компонентах, вони використовують операційну систему «Scope».

Літ.: Зейденберг В. К., Матвеенко Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970; Sippl C. J. Computer dictionary and handbook. Indianapolis — New York, 1968. *Ю. П. Селіванов.*

КОНТРО́ЛЬ АОМ — сукупність операцій, пов'язаних з перевіркою роботи АОМ, локалізацією її відмов, запобіганням їм та прогнозуванням. За цільовим призначенням операції контролю АОМ поділяють на групи.

1) Попередній контроль здійснюють перед використанням машини та розв'язуванням набраної на ній задачі. Він полягає в загальній перевірці готовності АОМ до роботи (перевірка джерел живлення машини, працездатності й точності наладженості операційних блоків, правильності функціонування систем керування, контролю й реєстрації та розв'язування контрольних задач) і в контролі набору задач в АОМ.

2) Оперативний контроль — це контроль за правильністю роботи АОМ у процесі розв'язування задачі. Висновок про роботу АОМ під час розв'язування часто роблять на основі повнішого виду контролю — контролю правильності розв'язання. До основних методів оперативного контролю належать інтуїтивний, функціональний та схемний. Інтуїтивний метод основується на глибокому знанні оператором машини суті досліджуваної на АОМ задачі. При цьому оператор безпосередньо за характером поведінки вихідних характеристик досліджуваної системи може оцінити роботу АОМ. Функціональний метод, до якого в основному належать контроль розв'язання за узагальненими характеристиками досліджуваного на АОМ процесу (напр., за частотою коливань для коливальних систем), і контроль методом надлишкових змінних, пов'язаний зі введенням надлишковості на рівні первісних рівнянь або на рівні функціональних блоків схеми моделювання, використовують переважно для контролю лінійних задач і лінійних блоків. Схемний метод — контроль справності окремих блоків і систем машини: джерел живлення й підсилювачів постійного струму (перенавантаження, *дрейф нульового рівня*).

3) Діагностичний контроль здійснюють для локалізації причини відмови, яку виявлено в процесі попереднього та оперативного контролю. Для локалізації несправностей машини використовують як інтуїтивні способи, основані на високій кваліфікації оператора АОМ, так і формальні методи пошуку, які найпростіше реалізувати в режимі статичного контролю. Діагностику відмов АОМ можна провадити й на основі методу надлишкових змінних.

4) Профілактичний контроль, виконуваний для збільшення середнього часу безвідмовної роботи АОМ, звичайно здійснюється в обсязі зазначеної вище заг. перевірки готовності АОМ до роботи з застосуванням граничних режимів роботи й з використанням спец. випробовувальних пультів для старанної перевірки блоків машини.

Літ.: Игнатьев М. Б. О решении дифференциальных уравнений в системах с контролем и коррекцией. В кн.: IV Всесоюзная конференция-семинар по теории и методам математического моделирования. К., 1964; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.— Л., 1964. *Г. І. Бердяков.*

КОНТРО́ЛЬ НАБО́РУ ЗАДА́Ч В АОМ — сукупність операцій, пов'язаних з перевіркою правильності підготовки до розв'язування схеми моделювання, що її набрано на АОМ. Перший етап — перевірка правильності з'єднань, виконаних на *набірному полі* машини, звичайно здійснюється візуально, зрідка — автоматично. Осн. методом К. н. з. в АОМ є статичний контроль, який полягає в зіставлянні напруг, що діють на виходах блоків схеми моделювання, з їхніми розрахунковими значеннями при задаванні контрольних значень змінних задачі, що її набирають на АОМ, у режимі первісного стану машини. У схемі моделювання в режимі статичного контролю немає зворотних зв'язків, які приводять до нерозрізненних станів при появі помилок у схемі. Це дає змогу використати заг. методи контролю та діагностики неперервних і комбінаційних систем, які легко піддаються формалізації та автоматизації.

Для повнішої перевірки схеми моделювання (перевірки реактивних елементів, стійкості, для попередньої оцінки точності розв'язку тощо) використовують методи динамічного контролю, найпростішим видом якого є перевірка сталих часу й заг. працездатності інтеграторів, яка виконується в режимі інтегрування за постійної вхідної напруги й фіксованого часу. Перевірка схем, які відтворюють дробово-раціональні передавальні ф-ції, здійснюється порівнюванням розрахункових динамічних характеристик схем з експериментальними. Складнішим видом контролю є перевірка схеми моделювання по частинах, динамічні характеристики яких відомі, або поступовим ускладнюванням схеми, починаючи з простого замкненого контура з відомими характеристиками. В багатьох випадках важливим етапом є перевірка стійкості схеми при нульових початкових значеннях похідних і порівняння пробного розв'язку з розрахунковим в усталеному режимі. Щоб перевірити правильність обраного масштабу часу, цей масштаб збільшують (здебільшого у 2 рази) і порівнюють розв'язки, одержані у двох різних масштабах.

Літ.: Шапоров О. М. Техника работы на электронных моделирующих установках. Л., 1968; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.— Л., 1964. *Г. І. Бердяков.*

КОНТРО́ЛЬ ПРОГРА́МНИЙ — контроль за допомогою спеціальних програм, який встановлює відсутність систематичних помилок у роботі машини чи окремих її пристроїв, правильність програм для ЦОМ, відсутність випадкових помилок (збоїв) у роботі машини та правильність обчислень. К. п. відсутності систематичних помилок у роботі машин провадять випробовувальними програмами під час наладжування машини або перевірки її. К. п. правильності програм ЦОМ є однією з форм наладжування програми на машині, його здійснюють спец. *наладжувальні програми*. К. п. відсутності збоїв у роботі машини виконують групи команд, що їх включають до програми розв'язування задачі. Прикладами такого К. п. є повторне обчислення, яке

машина здійснює повторенням кожної ділянки програми при тих самих наборах вихідних даних і порівнюванням результатів. Якщо кожне обчислення дає велику кількість результатів, то застосовують контрольне підсумовування їх і порівнювання не самих результатів, а їхніх контрольних сум або інших показників. К. п. правильності обчислень під час розв'язування задачі здійснюється здебільшого т. з. способом контрольних співвідношень. Якщо одержувані результати мають задовольняти яке-небудь співвідношення, яке було відоме заздалегідь і не використовувалося для знаходження цих результатів, то через певні інтервали обчисл. процесу провадиться (передбачена в програмі) перевірка — чи задовольняють одержані результати з достатнім ступенем точності це контрольне співвідношення. В ряді випадків як контрольні співвідношення використовуються вихідні рівняння. Напр., при розв'язуванні алгебричного рівняння $F(x) = 0$ знайдене значення невідомого $x = a$ підставляється у вихідне рівняння і обчислюється значення ф-ції $F(a)$. Якщо $|F(a)| < \varepsilon$, де ε — задане мале додатне число, то знайдене значення $x = a$ вважається за правильне. Див. також *Діагностика несправностей ЦОМ*.

Літ.: Гнеденко Б. В., Королюк В. С., Ющенко Е. Л. Элементы программирования. М., 1963 [бібліогр. с. 347—348]; Миронов Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [бібліогр. с. 266—267]; Голубев-Новожилов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [бібліогр. с. 402—415]; Ледли Р. С. Программирование и использование цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 628—630].

Г. Д. Фролов.

КОНТРО́ЛЬ ЦОМ — сукупність операцій, за допомогою яких встановлюють, чи є несправності в цифровій обчислювальній машині. Ефективність контролю виражається через імовірність виявлення несправностей ЦОМ, які належать до одного класу або до різних класів (збої, відмови поодинокі і кратні). К. ЦОМ оцінюється також надійністю самого процесу контролю, тобто можливістю його виконання, коли є несправності. К. ЦОМ складається з виконання ряду перевірок, під час яких, як правило, провадиться обчислення значень істинності якогось предиката, що відповідає наявності чи відсутності несправностей. Контроль здійснюють спец. *алгоритми*, які перевіряють, чи є зумовлені несправностями помилки в результатах виконання операцій ЦОМ (див. *Операції машинні*). Ці алгоритми потребують для своєї реалізації або додаткових затрат устаткування (т. з. апаратні засоби контролю), або додаткового витрачання часу. Якщо одночасно з виконанням усіх чи деяких операцій (мікрооперацій) робочих програм автоматично і без зазначення укладачем робочої *програми* відбувається виконання операцій алгоритму контролю, що реалізуються за допомогою апаратних засобів, то ЦОМ, кажуть, має автомат. апаратний контроль.

Поширеними є такі засоби охоплення робочого устаткування апаратним контролем: 1) контроль передавання (здебільшого за парністю); 2) контроль за модулем (mod n, як правило, $n = 3$). За допомогою першого можна виявити всі помилки (непарної кратності) при простих (без перетворювань) пересиланнях чисел та команд, він потребує введення в ЦОМ 5—10% додаткового обладнання. Другий засіб дає можливість виявляти всі одноразові помилки й частину багаторазових помилок. Чим більше n, тим вища ймовірність виявлення багаторазових помилок. Цей контроль потребує введення до 30% додаткового обладнання й реалізується внаслідок одночасного виконання арифм. робочих і контрольних операцій з подальшим порівнюванням їхніх результатів. Завдяки безперервності виконання операцій апаратний К. ЦОМ виявляє не тільки відмови, а й збої.

На відміну від апаратних, для програмних алгоритмів контролю потрібне витрачання додаткового часу, а не затрати устаткування. Алгоритмами програмного контролю є періодично виконувані випробувальні програми й розширені (шляхом введення подвійного-потрійного обчислення, контрольних співвідношень) робочі програми (див. *Контроль програмний*). Осн. завдання що розв'язують, створюючи випробувальні програми: 1) побудова тестів, що виявляють несправності (поодинокі, кратні, явні й неявні, що виявляються при складних режимах); 2) побудова надійної і швидкодіючої послідовності перевірок. Застосування апаратного або програмного контролю залежить від призначення ЦОМ. Для ЦОМ, використовуваних у відповідальних системах, застосовують апаратний за модулем і програмний контроль, при цьому програмний контроль використовують як засіб профілактичної перевірки всього обладнання (у т. ч. і того, що реалізує апаратний контроль). Порівнюючи програмний і апаратний контроль, враховують, що додаткове обладнання апаратного контролю ЦОМ збільшує імовірність виникнення несправності (в межах до 30%), а програмний не дає змоги досягти максимуму корисного часу роботи ЦОМ. Застосовуючи К. ЦОМ у процесі профілактичних заходів, часто використовують і додаткове обладнання, щоб створити профілактичні режими роботи обладнання (складніші, ніж нормальний). Здебільшого К. ЦОМ дає певну інформацію і про місце несправності. Для дальшого шукання блока, що містить відмову або був причиною збою, застосовують *діагностику несправностей ЦОМ*.

Літ.: Клямко Э. И. Схемный и тестовый контроль автоматических цифровых вычислительных машин. М., 1963 [бібліогр. с. 191]; Миронов Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [бібліогр. с. 266—267]; Путинцев Н. Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. М., 1966 [бібліогр. с. 417—418]; Сидоров А. М. Методы контроля электронных цифровых машин. М., 1966 [бібліогр. с. 160]; Волков А. Ф., Ведещенков В. А., Зенкин В. Д. Автоматический поиск неисправностей в ЦВМ. М., 1968 [бібліогр. с. 144—146]

Г. А. Миронов.

КОНТРО́ЛЬНЕ ПІДСУМО́ВУВАННЯ — один із методів *контролю програмного*, який за-

стосовують переважно для перевірки цілості інформації при груповому передаванні чи зберіганні її. К. п. полягає в тому, що після передачі чисел або після певного періоду зберігання їх обчислюється сума цих чисел (як правило, підсумовування здійснюють з циклічним переносом), яку потім порівнюють з обчисленою раніше сумою. Незбіг сум є ознакою помилки. *Г. І. Бердаков.*

КОНТРО́ЛЬНИК — пристрій для виявлення помилок, допущених при перфорації перфокарт. К. виконують такі операції: контролюють перфорацію перфокарт згідно з даними на документах; контролюють чисті поля перфокарт; пропускають перфокарти без контролю на одну або кілька колонок; автоматично відмічають перевірені колонки перфокарт і придатні перфокарти; автоматично розкладають придатні й браковані перфокарти; підраховують, скільки перфокарт пропущено через машину. К. використовують у *комплекті перфораційному обчислювальному*: вітчизн. К. моделі К45-6 перевіряють правильність цифрових отворів 45-колонкових перфокарт, К. моделі К80-6 — 80-колонкових перфокарт; КА80-2 використовують для перевірки правильності отворів на перфокартах. *С. П. Куценко.*

КОН'ЮНКТИ́ВНА НОРМА́ЛЬНА ФО́РМА — див. *Логічних виразів нормальні форми.*

КОН'Ю́НКЦІЯ — *булева функція* двох аргументів. Позначають її знаком & або ·, задають такою таблицею істинності:

X	Y	X & Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

К. відповідає в розмовній мові сполучникові «і». Вона комутативна, асоціативна й дистрибутивна щодо *диз'юнкції слабкої* й разом з нею та з запереченням К. використовують у нормальних формах представлення булевих ф-цій. Логічні перемикальні елементи, що реалізують ф-цію К., наз. схемами збігу, або вентилями, їх широко застосовують у схемах ЦОМ.

КООРДИНАЦІ́ЙНО-КЕРУ́ЮЧИЙ ЦЕНТР ПІДПРИЄ́МСТВА — див. *Автоматизовані системи управління підприємством, Інформаційно-обчислювальний центр підприємства.*

КОРЕКТУ́ЮЧІ ПРИ́СТРОЇ — пристрої в системах автоматичного керування (САК), які забезпечують задані показники якості роботи цих систем. К. п. класифікують: за способом вмикання в САК — на послідовні (їх вмикають у пряме коло системи), зустрічно-паралельні (їх вмикають у місцевий *зворотний зв'язок*), паралельні і К. п., які здійснюють зв'язки за збуреннями (задаваннями) (див. *Корекція систем автоматичного керування*); за характером перетворюваного сигналу — на неперервні (на постійному струмі), дискретні й на змінному струмі; за видом залежності вихідних сигналів К. п. від вхідних — на лінійні й нелінійні; за способом здійснення — на пасивні й активні; за принципом дії — на електричні, електромеханічні й механічні.

Найпростішими К. п. є пасивні чотириполюсники, які складаються з резисторів і ємностей і реалізують такі *передавальні функції*:

1) $W_1(p) = \dfrac{k_1 p}{1 + T_1 p}$ — реальна диференціювальна ланка (k_1 — коеф. передачі, T_1 — стала часу, p — оператор Лапласа);

2) $W_2(p) = \dfrac{k_2(1 + T_2 p)}{1 + T_3(p)}$ — при $T_2 > T_3$ — реальна диференціювальна ланка, при $T_3 > T_2$ — ланка інтегрувальної дії (k_2 — коеф. передачі, T_2, T_3 — сталі часу);

3) $W_3(p) = \dfrac{k_3}{1 + T_4(p)}$ — інерційна ланка;

4) $W_4(p) = \dfrac{(1 + T_6 p)(1 + T_7 p)}{(1 + T_5 p)(1 + T_8 p)}$ — інтегро-диференціювальна ланка, $T_5 > T_6 > T_7 > T_8$.

Першу реальну диференціювальну ланку як К. п. застосовують лише при зустрічно-паралельній корекції (ЗПК). Решту ланок можна використати при послідовній і паралельній корекціях. Складнішими, з погляду тех. реалізації, є активні К. п., яких звичайно реалізують на *підсилювачах операційних.* Великі можливості є в нелінійних К. п. завдяки тому, що їхні параметри залежать від величини вхідного сигналу. Так, при великих сигналах розузгодження нелінійний К. п. зменшує *демпфування* системи, а це призводить до розширення смуги пропускання і, отже, до різкішої реакції системи, а при зменшенні сигналу розузгодження — збільшує демпфування, внаслідок чого звужується смуга пропускання системи, сповільнюється реакція системи і цим зменшується величина перерегулювання. Для корекції імпульсних систем застосовують і неперервні, й імпульсні К. п. Неперервні К. п. відповідно змінюють характеристики частини системи, яка перетворює неперервні сигнали. Імпульсні К. п. можна здійснювати у вигляді імпульсних фільтрів або цифрових обчислювальних пристроїв. Специфічними К. п. імпульсних систем є К. п., які змінюють форми керуючих імпульсів. Є різні методи розрахунку зазначених вище К. п. (див. *Дискретних систем автоматичного керування синтез, Неперервних систем автоматичного керування синтез*).

К. п. за збуреннями (задаваннями) можна реалізувати, якщо є змога виміряти відповідні *збурювальні діяння* безпосередньо або, в деяких випадках, посередньо, застосувавши т. з. «диференціальні вилки» (див. *Диференціальна система автоматичного керування*). Про розрахунок цих К. п. див. *Інваріант-*

ність систем автоматичного керування і *Компаундуючі зв'язки в автоматичних системах.* *Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.*

КОРЕ́КЦІЯ ДРЕ́ЙФУ НУЛЯ́ — зменшення змін вихідної напруги підсилювачів постійного струму при незмінному вхідному сигналі, спричинених нестабільністю джерел живлення й параметрів елементів підсилювачів та впливом ряду ін. факторів, які важко контролювати. Розрізняють ручну, параметричну й автоматичну К. д. н. Ручна К. д. н. провадиться періодично шляхом зміни параметрів компонентів (опорів) схеми. При параметричній К. д. н. у схемах підсилювачів передбачено елементи, зміни параметрів яких під діянням факторів, що спричинюють дрейф, приводять до компенсації цього дрейфу. З методів автоматичної К. д. н. дуже поширеним став метод, при якому в підсилювачі використовується додатковий бездрейфовий канал підсилення на змінному струмі з застосуванням *модуляції* та демодуляції вхідного сигналу. К. д. н. використовується в *аналогових обчислювальних машинах.* *В. В. Васильєв.*

КОРЕ́КЦІЯ СИСТЕ́М АВТОМАТИ́ЧНОГО КЕРУВА́ННЯ — змінювання динамічних властивостей систем автоматичного керування (САК), щоб забезпечити потрібні показники якості процесу керування (запаси стійкості, точність, час регулювання тощо). Здійснюється шляхом зміни параметрів САК (коефіцієнта підсилення розімкненої системи, сталих часу тощо) або її структури. Корекція системи може забезпечуватися й за допомогою вмикання додаткових (коректуючих) пристроїв у пряме коло системи (послідовна корекція), в місцевий зворотний зв'язок (зустрічно-паралельна корекція), паралельно одному з елементів системи (паралельна корекція) чи застосування комбінованого принципу керування, тобто вмикання коректуючого кола за осн. *збурювальним діянням* (навантаженням) у *стабілізації системах* або задавальним діянням у *слідкуючих системах.*

Послідовна корекція дає змогу ввести в закон керування складові, пропорційні похідним та інтегралові від сигналу помилки. Складові, пропорційні похідним, зменшують час регулювання, але збільшують чутливість системи до завад, а пропорційні інтегралові — підвищують точність, але зменшують запаси стійкості. Зустрічно-паралельна корекція, здійснювана шляхом вмикання в систему місцевого *зворотного зв'язку* (ЗЗ), дає змогу, як правило, при жорсткому ЗЗ зменшити час регулювання, а при гнучкому ЗЗ — зменшити коливальність *перехідного процесу*, тобто наблизити його до монотонного. В деяких випадках застосовують паралельну корекцію, підмикання *коректуючого пристрою* паралельно одному з елементів системи. Найпоширенішим методом синтезу послідовних, зустрічно-паралельних і паралельних коректуючих елементів є метод, який ґрунтується на застосуванні логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.

Корекція за допомогою введення в систему додаткового сигналу за задавальним або збурювальним діянням дає змогу підвищити точність роботи системи. На відміну від зазначених способів корекції елементи цього кола містяться поза основним замкненим контуром системи і їх наз. *компаундуючими зв'язками в автоматичних системах.* К. с. а. к. за збуренням, розрахована за умовами інваріантності, дає змогу реалізувати точні інваріантні системи (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

Літ.: Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 364—371]; Теория автоматического регулирования, кн. 2. М., 1967 [бібліогр. с. 653—674].

Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.

КОРЕЛЯ́ТОР, корелометр, корелограф — спеціалізований пристрій для автоматичного обчислювання *автокореляційних функцій* і *взаємних кореляційних функцій* стаціонарних процесів (або процесів, які можна звести до стаціонарних). Звичайно термін К. застосовують для визначення будь-якого перетворювача, вихідний сигнал якого можна розглядати як *кореляційну функцію* вхідних сигналів. Такі К. широко застосовують у радіотехніці, техніці автоматичного керування тощо. К., який обчислює якусь сукупність значень кореляційної функції, відповідну певному інтервалові зміни її аргументу (часових затримок) і має вимірювальний прилад для відлічування цих значень, звичайно наз. корелометром. К., який забезпечує автомат. реєстрацію графіків кореляційної ф-ції (корелограм) на яких-небудь носіях (паперовій стрічці, кіностріччі), наз. корелографом.

За апаратурного обчислювання кореляційних ф-цій стаціонарних *випадкових процесів* припускають, що цим процесам притаманна властивість ергодичності (див. *Ергодична теорія*). Це дає змогу використовувати в К. усереднення за часом. Обчислення кореляційних ф-цій потребує нескінченно великого інтервалу усереднення, але на практиці доводиться обмежуватися інтервалом скінченної тривалості, тобто К. обчислює не кореляційну ф-цію випадкового процесу, а її оцінку

$$A_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}(t)\,\mathring{x}(t-\tau)\,dt,$$

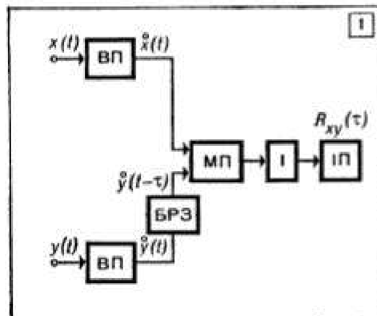
де T — інтервал усереднення, $\mathring{x}(t) = x(t) - m_x$ — центроване значення випадкового процесу $x(t)$, m_x — *математичне сподівання* випадкового процесу $x(t)$. Тривалість інтервалу усереднення залежить від спектрального складу досліджуваних випадкових процесів і необхідного ступеня точності обчислення кореляційних ф-цій.

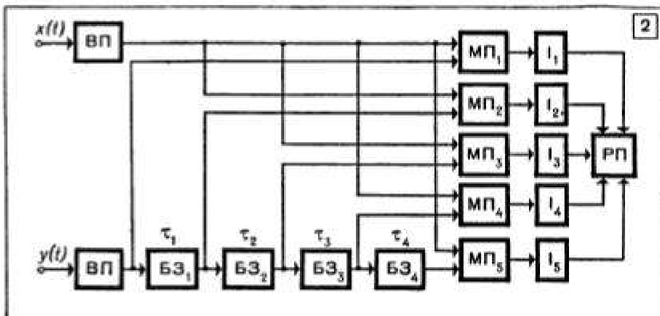
Аналогічно обчислюють взаємну кореляційну ф-цію випадкових процесів $x(t)$ і $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}(t)\,\mathring{y}(t-\tau)\,dt,$$

де $\overset{\circ}{x}(t)$ і $\overset{\circ}{y}(t)$ — центровані значення випадкових процесів $x(t)$ і $y(t)$.

З огляду на те, що практично можна реалізувати лише додатні затримки τ, обчислюючи автокореляційну ф-цію, її значення визначають лише для додатніх τ, але це не має істотного значення, бо $A_x(-\tau) = A_x(\tau)$. Визначаючи значення взаємної кореляційної ф-ції $R_{xy}(\tau)$ для від'ємних τ, враховують, що $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$. Це дає змогу міняти місцями вхідні сигнали К. $x(t)$ і $y(t)$ й визначати значення взаємної кореляційної ф-ції $R_{yx}(\tau)$ за додатніх τ.





1. Блок-схема мультиплікаційного корелятора: ВП — вхідний пристрій.
2. Блок-схема мультиплікаційного корелятора паралельної дії, який обчислює п'ять точок кореляційної функції: $БЗ_1, ..., БЗ_4$ — блоки запізнювання; РП — реєструючий пристрій.

Найпоширенішими є К., в яких обчислюють кореляційні ф-ції з використовуванням наведених вище формул. У цих К. вхідні сигнали (затриманий і незатриманий) перемножуються, через це їх наз. мультиплікаційними К., або К. з множенням вхідних сигналів. Мультиплікаційний К. для обчислювання взаємної кореляційної ф-ції (мал. 1) здійснює: перетворювання вхідних сигналів $x(t)$ та $y(t)$ на відповідні фіз. величини (напругу, струм, світловий потік) з попередньою обробкою їх (центрування, *квантування* за рівнем або за часом тощо); відносний зсув (затримку) одного з сигналів на час τ у блоці регульованого запізнювання БРЗ (див. *Запізнювання блок*); перемножування двох сигналів $x(t)$ та $y(t-\tau)$ у множильному пристрої МП; усереднення одержаного добутку протягом інтервалу часу T в усереднювальній (або інтегрувальній) ланці І (див. *Пристрій інтегрувальний*); показ або реєстрацію обчислень значень кореляційної ф-ції, які відповідають заданим значенням аргумента τ за допомогою індикаторного, або реєструючого, пристрою ІП.

Процес обчислювання кореляційних ф-цій може здійснюватися і послідовно, і паралельно. В першому випадку обчислювання виконують послідовно, точка за точкою, для кожного заданого значення τ. Щоб одержати всю криву кореляційної ф-ції, операції обчислювання повторюють для різних значень τ, при цьому τ може змінюватись і неперервно, і дискретно. Повний час обчислювання $T_п = T(N+1)$, де T — час усереднення в обчислюванні однієї точки кореляційної ф-ції, N — кількість обчислених точок. Для паралельного способу обчислювання К. будують у вигляді багатоканального пристрою з кількістю каналів, яка дорівнює кількості одночасно обчислюваних точок кореляційних ф-цій. Кожний канал містить свій множильний пристрій МП й усереднювальну (інтегрувальну) ланку І, а також пристрій затримки, який забезпечує запізнювання, відповідне даній точці кореляційної ф-ції. Спрощену блок-схему мультиплікаційного К. паралельної дії зображено на мал. 2. Використання схем паралельної дії пришвидшує час аналізу, проте істотно ускладнює схему К.

Разом з мультиплікаційним К. значно поширились і К., в яких операцію множення здійснюють за допомогою двох пристроїв піднесення до квадрату (квадраторів) з використанням виразу

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

Іноді К. будують, використовуючи один квадратор. У такому разі обчислення кореляційних функцій проводять за формулою

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) \pm y(t-\tau)]^2\,dt = R_x(0) + R_y(0) \pm 2R_{xy}(\tau).$$

К., в яких використано квадратори, наз. інтерференційними. Є й інші методи обчислювання кореляційних ф-цій: компенсаційний метод, метод діаграм розсіювання та ін. Значно поширився метод апроксимації кореляційних ф-цій за допомогою системи ортогональних ф-цій, у якому визначають коефіцієнти розкладання кореляційної ф-ції в певний ряд (напр., за поліномами Лагерра тощо).

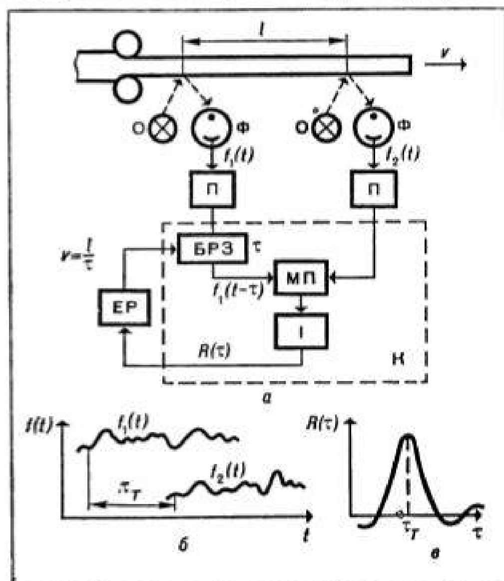
Залежно від форми представлення сигналів при обчислюванні кореляційних ф-цій розрізняють К. аналогові (неперервної дії) й цифрові (дискретної дії). Відомий ще ряд гібридних К., в яких використовують і аналогову, й цифрову форми представлення сигналів. Найпоширеніші — аналогові К., порівняно прості будовою, які забезпечують задовільну

точність обчислювання ф-цій (похибка — порядку кількох відсотків). Цифрові К. дають змогу одержувати значно вищу точність порівняно з аналоговими, але вони складніші.

Розглянуті методи і схеми обчислювань кореляційних ф-цій часто використовують з квантуванням досліджуваних сигналів і за часом, і за рівнем. Значного поширення почали набувати К. з грубим квантуванням сигналів за рівнем — релейні, полярні (знакові) К. і К. Стілтьєса, які обчислюють відповідно *релейні кореляційні функції, кореляційні функції полярні, Стілтьєса кореляційні функції*. В релейних і полярних К. відповідно один або два вхідні сигнали піддають квантуванню за двома рівнями з використанням інформації лише про знак первісного сигналу. Завдяки використанню в них елементів дискретної техніки, релейні й полярні К. відзначаються схемною простотою. Так, замість множильних пристроїв у них використовують прості схеми збігу, а замість блока регульованого запізнювання — регістри зсуву з регульовною частотою тактових (просувних) імпульсів. Обчислювані при цьому релейні й полярні кореляційні ф-ції відрізняються від справжніх оцінок кореляційних ф-цій на величину якоїсь методичної *похибки*, яку можна врахувати, градуюючи К. Разом з тим простота таких К. робить їх досить перспективними в багатьох галузях техніки (автом. керування, техніка зв'язку, технічна діагностика, *кореляційні екстремальні системи* та ін.). У К. Стілтьєса один з двох досліджуваних сигналів грубо квантується за кількома рівнями (звичайно за 3—4), а другий лишається незмінним. Квантований сигнал піддають часовій затримці й перемножують з неквантованим за допомогою звичайних схем збігу. К. Стілтьєса поєднує простоту будови з достатньо високою точністю обчислювання кореляційної ф-ції (при п'яти рівнях квантування похибка становить лише частки відсотка). Схемні й конструктивні особливості різних К. досить різноманітні. Так, є пневматичні, електромеханічні, фотоелектронні, оптичні й електронні К. (електронні найпоширеніші).

Літ.: Синицын Б. С. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, 1964 [бібліогр. с. 202—216]; Балл Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1968 [бібліогр. с. 150—158]; Чеголин П. М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. М., 1969 [бібліогр. с. 375—381]; Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н. Автоматические цифровые корреляторы. М., 1971 [бібліогр. с. 234—238]; Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [бібліогр. с. 437—452]; Ланге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [бібліогр. с. 426—442]. *С. Ф. Козубовський.*

КОРЕЛЯЦІЙНА ЕКСТРЕМАЛЬНА СИСТЕМА — *система екстремального регулювання*, завданням якої є підтримувати екстремальне значення вихідного сигналу корелятора (взаємну кореляційну функцію його вхідних сигналів). Розрізняють одновимірні К. е. с., в яких максимізовувана *кореляційна функція* залежить від одного аргументу (часового зсуву між вхідними сигналами корелятора), і багатовимірні, в яких ця функція є функцією кількох (двох і більше) аргументів (просторових зсувів і поворотів суміщуваних зображень). За приклад найпростішої одновимірної К. е. с. може бути автомат. кореляційний вимірювач швидкості руху металу під час прокатки (мал.). На поверхню металу, який рухається з швидкістю v, проектують у вигляді двох різких світлових штрихів зображення ниток двох освітлювачів О, які перебувають на відстані l один від одного.



Кореляційна екстремальна система для вимірювання швидкості руху прокату: *а* — блок-схема; *б* — вхідні сигнали корелятора; *в* — вихідний сигнал корелятора.

Фотодавачі Ф сприймають змінну яскравість цих світлових штрихів, зумовлену нерівномірною поверхневою структурою металу. Одержувані на виході фотодавачів випадкові сигнали $f_1(t)$ і $f_2(t)$, пропорційні яскравості штрихів, підсилюються підсилювачами П й подаються на вхід *корелятора* К (його окреслено пунктиром). Корелятор складається з блока регульованого запізнювання БРЗ, множильного пристрою МП та інтегратора І. До виходу корелятора підімкнено вимірювальний прилад. Вхідні сигнали корелятора подібні за формою, але сигнал правого фотодавача відстає за часом на величину транспортного запізнювання $\tau_т$ (мал., *б*):

$$f_2(t) \approx f_1(t - \tau_т), \quad \tau_т = \frac{l}{v}.$$

Вихідний сигнал корелятора $R(\tau)$ (мал., *в*) являє собою оцінку *взаємної кореляційної функції* вхідних сигналів

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t-\tau) f_2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t-\tau) f_1(t-\tau_т)\, dt.$$

Він максимальний при $\tau = \tau_т$, тобто при рівності введеного регульованого запізнювання τ транспортному запізнюванню $\tau_т$ сигналу, зніманого з правого фотодавача. Т. ч., корелятор являє собою об'єкт регулювання з екстремальною характеристикою. *Регулятор екстремальний* ЕР підмикають до виходу корелятора, він діє на БРЗ так, щоб автоматично підтримувалося макс. значення взаємної кореляційної функції $R(\tau)$. При цьому $\tau = \tau_т$, $v = \frac{l}{\tau}$, а значення швидкості відлічують безпосередньо по шкалі БРЗ. Отже, в К. е. с. об'єктом регулювання є корелятор, регульованою величиною — вихідний сигнал корелятора, а регулюючим діянням — сигнал, який керує БРЗ.

Осн. областями застосування К. е. с. є *автоматизація керування виробничим процесом* (у металургії, хімії, харчовій пром-сті, енергетиці і т. п.) й навігація (космічна й морська). Одновимірні К. е. с. використовують здебільшого як вимірювачі параметрів руху різних об'єктів — швидкості (автомат. кореляційні вимірювачі швидкості), віддалі (кореляційні радіолокатори й ехолоти), напряму (кореляційні пеленгатори) та витрат різних рідких, сипких і газоподібних речовин і багатокомпонентних сумішей (кореляційні витратоміри). В таких К. е. с. параметри руху визначають вимірюванням часових інтервалів (відносного часового зсуву) між двома випадковими сигналами. Для вимірювання застосовують компенсаційний метод, при якому вимірювану величину (часовий інтервал) порівнюють з якоюсь еталонною величиною (каліброваною часовою затримкою). Цей метод дає змогу здійснювати вимірювання з дуже високою точністю (відносна *похибка* вимірювання становить частки процента). Багатовимірні К. е. с. застосовують як автомат. орієнтатори при русі об'єктів по радіолокаційних картах місцевості й по зоряних картах, а також у пристроях для автомат. настроювання електронної апаратури. Дію цих систем основано на суміщуванні двох зображень (еталонного й порівнюваного) шляхом автомат. відшукування максимуму їхніх кореляційних ф-цій. Як еталонне зображення використовують спец. карту заданого маршруту руху об'єкта, з якою порівнюють, напр., зображення ділянки місцевості, одержуване на екрані радіолокатора, встановленого на рухомому об'єкті. При цьому кожне з порівнюваних зображень розглядають як двовимірну реалізацію якоїсь стаціонарної випадкової функції (розподіл коефіцієнта яскравості або прозорості). Для обчислювання взаємної кореляційної функції суміщуваних зображень використовують оптичні корелятори. Достоїнствами К. е. с. є велика точність, безконтактність (відсутність безпосереднього контакту з об'єктами, параметри руху яких вимірюються), можливість пасивно одержувати вхідні сигнали (тобто використовувати природну інформацію, яка є безпосередньо в самих рухомих об'єктах, не опромінюючи їх зовн. джерелом), можливість працювати напівактивно (використовувати випадкові сигнали, відбиті рухомим об'єктом) та ін.

Літ.: Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., 1963 [бібліогр. с. 455—465]; Козубовский С. Ф. Автоматические корреляционные измерители скорости. К., 1963; Медведев Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем. М., 1967 [бібліогр. с. 447—454]; Поиск экстремума (Математические методы и автоматические системы). Томск, 1969; Самонастраивающиеся системы. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 527—528].

С. Ф. Козубовський.

КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ — теорія, яка розглядає методи обчислювання *кореляційних функцій* після лінійних і нелінійних перетворень *випадкових процесів*. Застосовують її в *автоматичного керування теорії*, в статистичній радіотехніці, радіолокації, теорії зв'язку та в інших галузях техніки. Нехай $\xi(t), -\infty < t < \infty$ — дійсний випадковий процес і нехай $a(t) = M\xi(t)$ — його *математичне сподівання*. Кореляційною ф-цією процесу $\xi(t)$ наз. функцію, залежну від двох змінних

$$R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)].$$

Для *стаціонарних випадкових процесів* кореляційна ф-ція $R(\tau)$ залежить від одного змінного $\tau = t - s$. Нехай $\xi(t)$ і $\eta(t)$ — дійсні стаціонарні й стаціонарно пов'язані випадкові процеси, визначені при $-\infty < t < \infty$ з матем. сподіваннями відповідно $a(t)$ і $b(t)$. Взаємною кореляційною ф-цією процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ наз. ф-цію

$$R_{\xi\eta}(t - s) = M[\xi(t) - a(t)][\eta(s) - b(s)].$$

Розглянемо дійсний випадковий процес $\xi(t)$ з нульовим матем. сподіванням і кореляційною ф-цією $R(t_1, t_2)$. Кореляційну функцію $B(t_1, t_2)$ процесу $\eta(t)$ на виході лінійної системи з імпульсною перехідною ф-цією $h(t, s)$ визначають з виразу

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, s_1) R(s_1, s_2) h(t_2, s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Нехай $\xi(t)$ — процес типу «білого шуму» з енергетичним спектром $2N_0$. Кореляційна ф-ція процесу $\eta(t)$ на виході диференціювальної схеми CR-ланцюжка з передавальною ф-цією

$$\varphi(\lambda) = \frac{i\lambda RC}{1 + i\lambda RC}$$

має вигляд

$$B(\tau) = N_0\delta(t) - \frac{N_0\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|},$$

де $\alpha = \frac{1}{RC}$.

Лінійну систему зі змінними в часі параметрами наз. **параметричною**. Такою системою є, напр., лінія затримки, робота якої описується виразом $\eta(t) = \xi[t - f(t)]$, де $f(t)$ — задана ф-ція часу. В цьому разі кореляційна ф-ція процесу $\eta(t)$ має вигляд

$$B(t_1, t_2) = R[f(t_1) - f(t_2) + t_2 - t_1].$$

Параметричними системами є й амплітудний модулятор, інтегрувальний RC-ланцюжок зі змінними параметрами тощо. Параметричну систему, параметри якої змінюються випадково, наз. лінійною системою з випадковими параметрами. Такими системами є, напр., більшість радіоканалів зв'язку.

Важливим розділом К. т. в. п. є нелінійні перетворення випадкових процесів. Для обчислювання кореляційних ф-цій випадкових процесів на виході нелінійних систем широко використовують метод характеристичних ф-цій, метод розвинення випадкового процесу в ряд і метод Вінера. Метод характеристичних ф-цій передбачає спец. вид перетворення Лапласа нелінійної ф-ції, яка описує систему тоді, коли на вході діє *гауссівський випадковий процес* із нульовим матем. сподіванням і нормованою кореляційною ф-цією $R(\tau)$. Методом розвинення випадкового процесу в ряд розглядають квадратичний перетворювач з наступною лінійною фільтрацією одержаного процесу. Метод Вінера є ефективним методом обчислювання кореляційної ф-ції процесу на виході нелінійної системи. В основі цього методу лежить можливість ортогонального зображення нелінійного оператора, який описує розглядувану систему. Якщо вхідний процес є *марковським процесом*, широко застосовують методи, основані на використанні диф. та інтегр. рівнянь. К. т. в. п. застосовують в апаратурних методах аналізу випадкових процесів. За приклади можуть правити корелометри — прилади для вимірювання кореляційних ф-цій фіз. процесів, кореляційні приймачі виявлення радіотехн. сигналів тощо (див. *Корелятор*).

Літ.: Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. М., 1966; Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 196—201].

О. М. Деменін.

КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ — мішаний центральний момент 2-го порядку двох випадкових функцій; для дійсного випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \lambda$ її визначають за рівністю $R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s)$, $t, s \in \lambda$, де M — символ *математичного сподівання*. Ф-цію $R(t, s)$ часто наз. **автокореляційною функцією**. Взаємною К. ф. дійсних *випадкових процесів* $\xi(t)$ і $\eta(t)$, $t \in \lambda$ наз. ф-цію $R_{\xi,\eta}(t, s) = M\xi(t)\eta(s) - M\xi(t) \cdot M\eta(s)$, $t, s \in \lambda$. К. ф. $R(t, s)$ дійсна й невід'ємно визначена, вона характеризує енерг. властивості процесу $\xi(t)$. Див. також *Кореляційна теорія випадкових процесів*.

КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ПОЛЯРНА (**знакова**) — функція, яка характеризує ступінь зв'язку між знаками стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 (у цьому разі її наз. полярною *автокореляційною функцією*). Функцію, яка характеризує ступінь зв'язку між знаком стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ в момент часу t_1 і знаком іншого випадкового стаціонарного й стаціонарно зв'язаного з ним процесу $y(t)$ в момент часу t_2, наз. полярною *взаємною кореляційною функцією*. Ці функції визначають відповідно за виразами

$$R_{xx}^{**}(t_1, t_2) = M[\operatorname{sgn}\{x(t_1) - m_x(t_1)\}\operatorname{sgn}\{x(t_2) - m_x(t_2)\}],$$

$$R_{xy}^{**}(t_1, t_2) = M[\operatorname{sgn}\{x(t_1) - m_x(t_1)\}\operatorname{sgn}\{y(t_2) - m_y(t_2)\}],$$

де $R_{xx}^{**}(t_1, t_2)$ — полярна автокореляційна функція випадкового процесу $x(t)$; $R_{xy}^{**}(t_1, t_2)$ — полярна взаємна кореляційна функція випадкових процесів $x(t)$ й $y(t)$; M — символ операції матем. сподівання; $m_x(t)$, $m_y(t)$ — матем. сподівання процесів $x(t)$ й $y(t)$. К. ф. п. набувають значення в межах від -1 до $+1$. Якщо розглядувані процеси $x(t)$ й $y(t)$ є ергодичними (див. *Ергодична теорія*), то для обчислювання К. ф. п. можна використовувати усереднення в часі відповідно до виразів

$$R_{xx}^{**}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \mathring{x}(t) \operatorname{sgn}[\mathring{x}(t+\tau)]\, dt$$

і

$$R_{xy}^{**}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \mathring{x}(t) \operatorname{sgn}[\mathring{y}(t+\tau)]\, dt,$$

де $\tau = t_2 - t_1$, $\mathring{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, $\mathring{y}(t) = y(t) - m_y(t)$.

Якщо процеси $x(t)$ й $y(t)$ нормальні й мають нормальний (гауссівський) сумісний розподіл, то нормовані автокореляційна $\rho_{xx}(\tau)$ і взаємна кореляційна $\rho_{xy}(\tau)$ функції цих процесів зв'язані відповідно з полярною автокореляційною $R_{xx}^{**}(\tau)$ і взаємною кореляційною $R_{xy}^{**}(\tau)$ функціями співвідношеннями

$$\rho_{xx}(\tau) = \sin\left[\frac{\pi}{2} R_{xx}^{**}(\tau)\right],$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \sin\left[\frac{\pi}{2} R_{xy}^{**}(\tau)\right].$$

К. ф. п. застосовують у техніці автомат. керування, зв'язку, радіолокації й ін. галузях.

Літ.: Козубовський С. Ф. Загальна теорія квантування за рівнем та її застосування до визначення кореляції. «Автоматика», 1963, № 1; Veltman B. P., Kwakernaak H. Teorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter Signale und Systeme. «Regelungstech-

nik», 1961, Bd. 9, № 9; Вельтман Б. П., ван ден Бос А. Применение релейного коррелятора и коррелятора совпадения знаков в автоматическом регулировании. В кн.: Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 1. М., 1965.

С. Ф. Козубовський.

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АПАРАТУРНИЙ АНАЛІЗ випадкових процесів — автоматичне обчислювання *автокореляційних функцій* та *взаємних кореляційних функцій* випадкових процесів за допомогою спеціалізованих обчислювальних приладів — *кореляторів* (корелометрів, корелографів). Метою К. а. а. є дослідження кореляційних зв'язків між різними випадковими величинами та функціями або між значеннями тієї самої випадкової функції при різних значеннях аргументу. К. а. а. може здійснюватись або після закінчення процесу шляхом автомат. введення в корелятор інформації, раніше зафіксованої на яких-небудь носіях (папері, магн. стрічці, кіностріччі, перфострічці та ін.), або одночасно з досліджуваним процесом (у реальному масштабі часу) шляхом введення в корелятор поточних значень сигналів, що надходять з давачів або перетворювачів, безпосередньо пов'язаних з процесом (оперативний кореляційний аналіз).

Випадкові процеси при К. а. а. зазнають *квантування* за часом або (і) за рівнем. Внаслідок квантування за часом реалізація випадкового процесу набуває вигляду випадкової послідовності, зручної для введення в цифровий корелятор. Квантування неперервної реалізації випадкового сигналу за рівнем приводить до представлення цього сигналу у вигляді *функції ступінчастої*, для обробки якої можна застосовувати елементи дискретної техніки, щоб істотно спростити апаратуру, потрібну для К. а. а. (при незначній втраті точності аналізу).

Методи К. а. а. можна класифікувати як за видом матем. операцій, які покладено в їхню основу (усереднення за часом, усереднення за множиною, перетворення Фур'є для спектра потужності сигналу), так і за способом виконання операцій (аналоговий і дискретний); до дискретного можна віднести й методи релейної та полярної кореляції і *Стілтьєса кореляційні функції*.

К. а. а. широко застосовують у радіоелектроніці й техніці зв'язку — для визначення характеристик сигналів і систем передавання інформації, в акустиці — для вивчення шумів різної природи, в автомат. керуванні — для визначення динамічних характеристик керованих об'єктів, у біології та медицині — для аналізу електроенцефалограм та електрокардіограм, в аеронавігації — для вимірювання висоти й швидкості польоту літаків тощо.

Літ.: Синицын Б. С. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, 1964 [бібліогр. с. 202—216]; Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [бібліогр. с. 437—452]; Балл Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1968 [бібліогр. с. 150—158]; Ланге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [бібліогр. с. 426—442].

С. Ф. Козубовський.

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗПІЗНАВАННЯ — *правило вирішувальне* в розпізнаванні образів, згідно з яким розпізнаваний об'єкт відноситься до того з класів $j = 1, \ldots, J$, для якого скалярний добуток вектора ознак розпізнаваного об'єкта $x = (x_1, \ldots, x_n)$ й нормованого еталонного вектора класу $e_j(\beta) = (e_{j1}(\beta), \ldots, e_{jn}(\beta))$, що залежить від параметрів β допустимих перетворень *еталонів*, досягає абсолютного максимуму і x належить до класу j^*, якщо $f(x, j^*) = \max_j f(x, j)$, де ф-ція $f(x, j) = \max_{\beta \in B_j} \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ji}(\beta)$. Тут B_j — множина значень параметрів β допустимих перетворень еталона j-го класу. Нормування еталонного вектора таке, що за будь-якого перетворення β сума його компонент дорівнює нулеві, а модуль (довжина вектора) — одиниці. К. м. р. використовують, напр., для розпізнавання машинописних знаків одного типу шрифту. Ознаками $x_1, \ldots, x_n$ тут є ступені зачорненості клітин двовимірної *сітківки* (растра), на яку проектують розпізнаваний знак. Еталони (до нормування) — це «типові» в певному розумінні зображення кожного із знаків алфавіту на сітківці. Параметр допустимих перетворень задає всі можливі зсуви (переноси) еталона по сітківці.

К. м. р. можна розглядати як варіант т. з. кусково-лінійних методів *розпізнавання образів*, коли замість прямого перелічування еталонів кожного класу задається їхня параметрична залежність у вигляді еталонної області $E_j = \{e_j(\beta)/\beta \in B_j\}$. Близькість до неї в якійсь заданій метриці визначає схожість (див. *Схожості критерії*) розпізнаваного об'єкта з об'єктами цього класу. Осн. перевага К. м. р. — інваріантність до заданих допустимих перетворень еталонів та інваріантність до перетворень вектора ознак x вигляду $\alpha_1 x + \alpha_2 u$, де u — вектор з одиничними компонентами, а α_1 і α_2 — довільні величини ($\alpha_1 > 0$). В розглядуваному прикладі це забезпечує інваріантність методу до т. з. «оптичних» перетворень розпізнаваних знаків (рівномірного змінювання зачорненості клітин сітківки й контрастності ліній знака) й до переносів знаків по сітківці.

К. м. р. можна вивести як статистичний *алгоритм розпізнавання* (див. *Статистичні методи розпізнавання*), якщо ввести певні припущення про статистичні характеристики розпізнаваних об'єктів і вважати за оптим. алгоритм, у якому будуються оцінки макс. правдоподібності для всіх параметрів допустимих перетворень еталонів кожного класу.

К. м. р. чи близькі до нього методи було реалізовано в деяких сучасних *читаючих автоматах* (напр., у вітчизняному автоматі ЧАРС або амер. автоматі CDC 915 Page Reader). При розпізнаванні машинописних букв одного типу шрифту К. м. р. дає змогу одержати середню частоту помилок порядку $10^{-3} \div 10^{-5}$.

Літ.: Читающие автоматы и распознавание образов. К., 1965; Уилсон Р. Оптические читающие устройства. Пер. с англ. М., 1969.

Г. Л. Гімельфарб.

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ЧИТАЮЧИЙ АВТОМАТ — див. *Читаючий автомат кореляційний.*

КОРЕЛЯЦІЯ в теорії ймовірностей — стохастична (ймовірнісна) залежність між випадковими величинами, яка не має, взагалі кажучи, строго функціонального характеру. Найпростішою й найуживанішою числовою характеристикою кореляційної залежності між *випадковими величинами* ξ й η з *математичними сподіваннями* a_ξ і a_η і *дисперсіями* σ_ξ^2 й σ_η^2 відповідно є т. з. коефіцієнт К., визначуваний ф-лою

$$R = \frac{M(\xi - a_\xi)(\eta - a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

де M — символ матем. сподівання. Якщо ξ й η незалежні (у ймовірнісному розумінні, див. *Незалежність* у теорії ймовірності), то $R = 0$. Завжди $|R| \leqslant 1$, причому $|R| = 1$ тоді й тільки тоді, коли ξ й η лінійно залежні (в останньому випадку $\eta = R\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - a_\xi) + a_\eta$). У заг. випадку величина $\eta^* = R\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - a_\xi) + a_\eta$ дає найкраще лінійне наближення для величини η в тому розумінні, що

$$M(\eta - \eta^*)^2 = \min_{C_1, C_2} M(\eta - C_1\xi - C_2)^2,$$

де мінімум беруть за найрізноманітнішими сталими C_1 і C_2. Якщо $R = 0$, то величини ξ й η наз. некорельованими. Якщо ξ й η — незалежні, то вони й некорельовані. Обернене твердження в заг. випадку неправильне; проте, якщо величини ξ й η мають сумісний нормальний розподіл, то з некорельованості ξ й η випливає їхня незалежність. Коеф. К. величин ξ й η характеризує лише міру їхньої лінійної залежності: він може дорівнювати 0 навіть тоді, коли між величинами ξ й η є строго функціональна (зрозуміло, нелінійна) залежність. Нехай (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) — незалежні спостереження пари випадкових величин ξ, η. У *математичній статистиці* як наближене значення невідомого коеф. К. R між величинами ξ й η використовують т. з. статистичний коефіцієнт К.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, а $\bar{y}$ і S_y^2 визначаються аналогічно за спостереженнями $y_1, y_2, \ldots, y_n$. При великій кількості спостережень n статистичний коеф. К. r близький до теор. коеф. К. R. У матем. статистиці розроблено методи оцінок точності визначення R за r. Див. також *Корелятор, Кореляційна функція.* *М. П. Слободенюк.*

КОРЕНЕВОГО ГОДОГРАФА МЕТОД — метод розрахунку лінеаризованих *систем керування замкнених* за траєкторіями коренів характеристичного рівняння системи при зміні якого-небудь параметра наладжування (здебільшого коефіцієнта підсилення). Запропонували цей метод 1948 незалежно один від одного К. Ф. Теодорчик (СРСР) і В. Івенс (США). Кореневим годографом наз. геом. місце коренів характеристичного рівняння замкненої системи при зміні коеф. підсилення K від 0 до ∞. Якщо зобразити *передавальну функцію* розімкненої системи у вигляді $W_{роз}(p) = KW(p)$, де K — коеф. підсилення, то рівняння, еквівалентне характеристичному рівнянню замкненої системи, можна записати так:

$$K \cdot W(p) = -1. \qquad (1)$$

Замінивши p на $j\omega$, одержимо вираз для модуля й аргумента

$$|KW(j\omega)| = 1, \arg|W(j\omega)| = \pm\pi(2h+1) \quad (2)$$
$$(h=0, 1, \ldots),$$

що лежить в основі К. г. м.

Запишемо передавальну функцію розімкненої системи у вигляді

$$KW(p) = K\frac{Q(p)}{R(p)},$$

де $Q(p)$ має m коренів $N_1, \ldots, N_m$ (нулів), а $R(p)$ — n коренів $P_1, \ldots, P_n$ (полюсів), які треба задати. $Q(p)$ і $R(p)$ можна зобразити:

$$Q(p) = q\prod_{i=1}^{m}(p - N_i); \quad R(p) = r\prod_{i=1}^{n}(p - P_i),$$

звідкіля

$$KW(p) = K\frac{q}{r}\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(p - N_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p - P_i)}. \qquad (3)$$

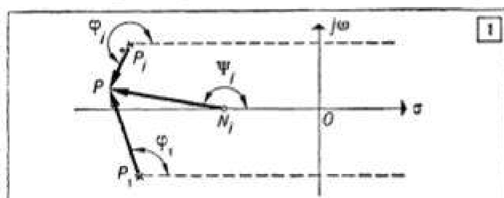
Кожен із співмножників (3) представляє на комплексній площині вектор, який проведено від точки P_i (або N_i) до довільної точки p під відповідним кутом до дійсної осі: φ_i — для полюсів або Ψ_i — для нулів (мал. 1). Якщо точка p_h є одним з коренів характеристичного рівняння замкненої системи (1), то згідно з (2) й (3) мають виконуватися співвідношення

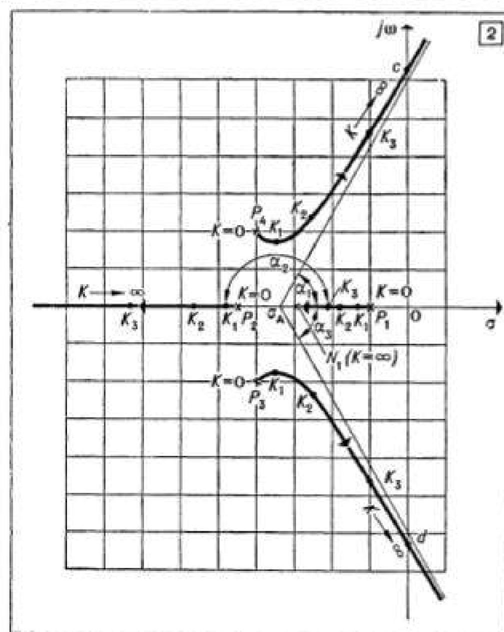
$$\sum_{i=1}^{m}\Psi_i - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \pm\pi(2h+1) \qquad (4)$$

і

$$K = \frac{r}{q}\cdot\frac{l_1 \ldots l_n}{l_1^0 \ldots l_m^0}, \qquad (5)$$

де $l_1^0 \dots l_m^0$ і $l_1 \dots l_n$ — довжини векторів $(p_k - P_i)$ і $(p_k - N_i)$ відповідно.
Для побудови годографа осн. значення має рівняння (4), куди вираз для коеф. підсилення (5) не входить. Тому, якщо знайдено корінь рівняння (1) за допомогою виразу (4), то значення K знаходять з (5) і наносять поряд з відповідною точкою годографа. Сукупність точок p_k на площині $p = \sigma + j\omega$ утворює n гілок кореневого годографа при зміні K від 0 до ∞, причому кількість його гілок дорівнює порядкові системи. Але безпосередньо відшукувати рівняння (1) за допомогою виразу (4) важко. В. Івенс розробив прості правила, що дають змогу спростити побудову кореневого годографа. Нехай передавальна ф-ція розімкненої системи має вигляд





$$W_{\text{роз}}(p) = K \times \frac{(p - N_1)}{(p - P_1)(p - P_2)(p - P_3)(p - P_4)}, \quad (6)$$

причому розміщення полюсів $P_1 \div P_4$ і нуля N_1 на комплексній площині показано на мал. 2 (хрестиками і кружечком відповідно). Застосуємо спочатку такі правила. 1) Відрізки дійсної осі, по яких переміщуються дійсні корені при зміні K від 0 до ∞ є гілками кореневого годографа й містяться в тих частинах осі, праворуч від яких розташоване непарне заг. число дійсних нулів і полюсів розімкненої системи. 2) Гілки, що не лежать на дійсній осі, симетричні їй. 3) Гілки кореневого годографа починаються при $K = 0$ в полюсах P_i. При $K \to \infty$ m гілок закінчуються в нулях N_i, а решта $n - m$ — прямують до нескінченності. Це дає змогу зразу визначити дві гілки кореневого годографа: $P_1 - N_1$ і $P_2 - \infty$ (мал. 2). Гілки, що починаються в полюсах P_3 і P_4, будуть симетричні відносно дійсної осі й закінчуються також на нескінченності. 4) Асимптоти гілок, що йдуть при $K \to \infty$ до нескінченності, розходяться променями з точки A на дійсній осі з абсцисою

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{j=1}^{m} N_j}{m - n} \quad (7)$$

під кутами α_i до дійсної осі, причому

$$\alpha_i = \frac{2i + 1}{n - m}\pi; \quad (i = 0, 1, \dots, n - m - 1). \quad (8)$$

У нашому прикладі кількість асимптот $n - m = 3$, тому з точки з абсцисою σ_A проводимо три промені під кутами $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_1 = \pi$ і $\alpha_2 = \frac{5}{3}\pi\left(\text{або } \alpha_2 = -\frac{\pi}{3}\right)$ (мал. 2).

5) Точки перетину кореневого годографа з уявною віссю знаходять або за допомогою *стійкості критеріїв* (Гурвіца, Рауса, Найквіста або Михайлова), або за допомогою безпосереднього застосування рівняння фаз (2), і це є кращим для системи високого порядку. Це саме рівняння використовують і для визначення кутів входу кореневого годографа в комплексні нулі й виходу з комплексних полюсів. Кути входу в дійсні нулі й виходу з дійсних полюсів дорівнюють 0° або 180°. За цим правилом знаходять точки c і d на уявній осі та кути, під якими гілки виходять з полюсів $P_3 - P_4$. Зазначені правила дають змогу побудувати всі гілки кореневого годографа. Після цього слід визначити значення K уздовж годографа. Для цього в будь-яку точку p^0 на одній з гілок проводять вектори $(p^0 - P_i)$ і $(p^0 - N_i)$ та обчислюють K за формулою (5). Розроблено також методи, що дають змогу побудувати кореневий годограф за логарифм. частотними характеристиками.

Кореневий годограф дає змогу визначати осн. динамічні параметри системи: границю стійкості (перетин його з уявною віссю); ступінь стійкості (дійсна частина найближчого до уявної осі кореня); ступінь коливальності (відношення уявної частини до дійсної для

найближчого до уявної осі кореня); декремент загасання (величина, обернена ступеневі коливальності) для будь-якого заданого значення коеф. підсилення K (або ін. параметра наладжування); час перехідного процесу й перерегулювання за величиною коренів, найближчих до уявної осі. К. г. м. можна використати при синтезі *коректуючих пристроїв.* Є спец. прилади й апаратура, що дають змогу автоматизувати процес побудови кореневого годографа.

Літ.: Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М., 1972 [бібліогр. с. 442—446]; Траксел Дж. Синтез систем автоматического регулирования. Пер. с англ. М., 1959. *А. А. Тунік.*

КОРЕНІВ АЛГЕБРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ. Знаходження всіх коренів алгебр. многочлена є однією з допоміжних задач, що трапляються найчастіше і виникають при розв'язанні таких важливих задач, як стійкість руху та ін. Розглянемо докладно лише два найефективніші способи знаходження коренів на цифрових та гібридних обчисл. машинах.

Для великих ЦОМ необхідні такі методи знаходження коренів многочлена, які, з одного боку, були б універсальними, тобто такими, що підходять для будь-яких коеф. (комплексних чи дійсних), не залежали б від вхідних даних (початкового наближення тощо), для реалізації їх потрібні були б тільки коеф. многочлена (мінімум інформації); з другого боку — були б швидкозбіжними. Побудувати такі методи можна, створюючи «гібриди» між методами спуску і методом Ньютона; це пов'язане з відсутністю у поверхні $F(x, y) = |f(z)|^2$, де $f(z)$ — многочлен $(z = x + iy)$, *екстремумів локальних,* відмінних від коренів.

Нехай $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ і для якогось z

$$f(z) \neq 0;\quad f'(z) = 0;\quad f''(z) = 0;\ \ldots;$$
$$f^{(l-1)}(z) = 0;\quad f^{(l)}(z) \neq 0.$$

Тоді, використовуючи розвинення в ряд Тейлора, одержимо

$$f(z+h) = f(z) + \frac{f^{(l)}(z)}{l!} h^l + O(|h|^{l+1});$$

$$\bar f(z+h) = \bar f(z) + \frac{\bar f^{(l)}(z)}{l!} \bar h^l + O(|\bar h|^{l+1}).$$

Помноживши ці рівності одна на одну, одержимо

$$|f(z+h)|^2 - |f(z)|^2 =$$
$$= 2\,\frac{|\bar f(z) f^{(l)}(z)|}{l!}|h|^l \cos(l\varphi + \alpha) + O(|h|^{l+1}), \tag{1}$$

де $\varphi = \arg h$; $\alpha = \arg(\bar f(z) f^{(l)}(z))$. При досить малому $|h|$ знак лівої частини рівності (1) визначається знаком $\cos(l\varphi + \alpha)$. Він від'ємний при $\frac{\pi(4k+1) - 2\alpha}{2l} < \varphi < \frac{\pi(4k+3) - 2\alpha}{2l}$,

тобто для кожної фіксованої точки $z \in l$ секторів спадання і l секторів зростання ф-ції $F(x, y)$, де l — порядок першої з похідних, яка відрізняється від нуля, ф-ції $f(z)$ у точці z. Найшвидше спадання $|f(z)|^2$ (найшвидший спуск) буде при $\cos(l\varphi + \alpha) = -1$; $l\varphi + \alpha = \pi$;

$$\arg h = \varphi = \frac{\pi - \alpha}{l} = \frac{\pi - \arg(\bar f(z) f^{(l)}(z))}{l} =$$
$$= \arg\left[\left(-\frac{1}{f(z) f^{(l)}(z)}\right)^{1/l}\right];$$

отже
$$h = t\left(-\frac{f(z)}{f^{(l)}(z)}\right)^{1/l}, \tag{2}$$

де $t > 0$. З (1) очевидно, що при t достатньо малому та h, вибраному відповідно до рівності (2), справджується нерівність $|f(z+h)|^2 < |f(z)|^2$. Замінивши z на z_k, t на t_k і h на $z_{k+1} - z_k$, одержимо

$$z_{k+1} = z_k + t_k\left(-\frac{f(z_k)}{f^{(l_k)}(z_k)}\right)^{1/l_k}, \tag{3}$$

де l_k — порядок першої з похідних, яка відрізняється від нуля, ф-ції $f(z)$ у точці z_k.

При $l_k = 1$ маємо (метод Воєводіна)

$$z_{k+1} = z_k - t_k \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}. \tag{4}$$

Таким чином, узявши в рівнянні (3) одне із значень кореня степеня t_k з комплексного числа, одержимо єдину ітеративну схему і для стаціонарної, і для нестаціонарної точок.

Оскільки в рівнянні (3) t_k наперед невідоме, то використовують такий ітеративний процес:

$$t_k^0 = \min\left(\sqrt[l_k]{l_k!},\ \frac{(l_k+1)\,|f^{(l_k)}(z_k)|^{\frac{l_k+1}{l_k}}}{|f(z_k)|^{1/l_k}\,|f^{(l_k+1)}(z_k)|}\right); \tag{5}$$

$$z_k^{t_k^j} = z_k + t_k^j\left(-\frac{f(z_k)}{f_{l_k}(z_k)}\right)^{1/l_k};$$

якщо

$$\left|f\left(z_k^{t_k^j}\right)\right| \geqslant |f(z_k)|,\ \text{то}\ t_k^{j+1} = t_k^j/2;$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Зрозуміло, що можна знайти такий номер j, для якого справджуватиметься нерівність $|f(z_k^{t_k^j})| < |f(z_k)|$. У цьому випадку беремо

$z_{k+1} = z_k^{t_k^j}$. Ітеративний процес (3) та (5) збігається з будь-якого початкового наближення до одного з коренів алгебр. многочлена. У зв'язку з тим, що $l_k = 1$, поблизу шуканого кореня міститься окіл цього кореня, в якому збігається метод Ньютона. Тому процес (3) і (5) після скінченної кількості ітерацій K перейде в метод Ньютона

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \qquad (6)$$

тобто збігатиметься з квадратичною швидкістю (для некратних коренів). Відшукавши один з коренів $z^{(0)}$, визначають $f_1(z) = \frac{f(z)}{z - z^{(0)}}$ і знаходять корінь многочлена $n-1$-ого степеня $f_1(z)$ і т. д., поки не буде визначено всі n коренів алгебр. многочлена.

Зазначений спосіб можна узагальнити на розв'язування такої задачі: визначити $\inf |f(z)|$ в даній області D, де $f(z)$ многочлен. Для цієї задачі й будь-який локальний екстремум є *екстремумом глобальним*. Відшукуючи напрям спадання $|f(z)|$ в D, необхідно з усіх можливих напрямів спадання $|f(z)|$, що випливають з ф-ли (1), визначити напрям, уподовж якого можливим є скінченний рух у границях D. Крок t_k необхідно підпорядкувати вимозі, щоб точки z_k залишалися в D (докладніше про такого типу алгоритми див. у ст. *Можливих напрямів метод*). Ефективно реалізувати К. а. м. с. о. на ЦОМ неможливо без урахування всіх видів *похибок*, пов'язаних з даною задачею. Абс. похибку Δ_1 за рахунок неточності задання коеф. многочлена в околі кореня z_0 оцінюють за виразом

$$\Delta_1 \approx \frac{1}{|f'(z^0)|}(|z^0|^n|\Delta a_0| + |z^{(0)}|^{n-1}|\Delta a_1| + \cdots + |\Delta a_n|),$$

де Δa_i — абс. похибки коеф. a_i. Якщо всі $|\Delta a_i|$ не перевищують $|\Delta|$, то

$$\Delta_1 \approx \frac{(1 - |z^{(0)}|)^{n+1}}{(1 - |z^{(0)}|)\,|f'(z^0)|} \cdot |\Delta|.$$

Абс. похибку методу Δ_2 можна оцінити за ф-лою:

$$\Delta_2 \approx \left| \frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})} \right|$$

(для некратних коренів). Абс. похибку заокруглення при обчислюванні многочлена $f(z^{(0)})$ за схемою Горнера оцінюють як

$$\Delta_3 \leqslant \frac{1 - |z^{(0)}|^n}{1 - |z^{(0)}|} \cdot 2^{-\tau-1}$$ при представленні

чисел у формі з фіксованою комою та

$$\Delta_3 \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i z^{(0)\,n-1}| \cdot 1{,}06\,(2n+1) \cdot 2^{-\tau-1}$$ при

$n \cdot 2^{-\tau} < 0{,}1$ при представленні чисел у формі з плаваючою комою, де τ — кількість двійкових розрядів мантис маш. представлення числа. Один з доцільних планів відшукування коренів з урахуванням наведених похибок полягає ось у чому. Після того, як орієнтовно знайдено величину одного з коренів, треба обчислити похибку Δ_1. Виходячи з цього, задають якусь величину Δ_2, вважаючи для визначеності, що вона не перевищує Δ_1. Орієнтуючись на потрібну величину Δ_2, можна визначити точність, з якою треба провадити обчислювання, напр., кількість розрядів τ для машин зі змінною розрядністю. Якщо машина має сталу розрядність і метод розв'язування фіксований, то похибка заокруглення відіграє таку саму роль, як і похибка Δ_1.

Найпоширенішим з К. а. м. с. о. на *гібридних обчислювальних машинах* є метод зведення до задачі відшукування мінімумів ф-ції $\Phi(x, y) = \Psi(f(z))$, де $\Psi(f)$ — додатно визначена, неперервна разом зі своїми похідними ф-ція вигляду $\sqrt{\beta^2 + f_1^2} + \sqrt{\beta^2 + f_2^2}$, f_1 та f_2 — дійсні ф-ції, $f = f_1 + if_2$, β — достатньо мала стала величина. Ф-ція $\Phi(x, y)$ має в кожній точці таку кількість секторів спадання і зростання, яким є найменший порядок похідної многочлена f, що відрізняється від нуля. $\Phi(x, y)$ не має локальних мінімумів, які відрізняються від глобального. Для відшукування коренів на гібридних обчисл. машинах застосовують методи швидкого спуску, зокрема, методи покоординатного спуску з різних точок простору відшукуваних змінних, і це зумовлено тим, що відшукати корені різних точок (час пошуку звичайно — 0,5 *сек*) можна швидко і шукання коренів відбувається досить наочно. На зовн. пристроях гібридних обчисл. машин зручно спостерігати траєкторії пошуку коренів з різних точок простору відшукуваних змінних, перетини ф-ції Φ площинами $\Phi = C$ і т. п. Для обчислювання будь-якого многочлена тут можна обмежитися такими операціями, як лінійна комбінація та множення ф-цій, а також суперпозиція ф-цій. Для конструювання ф-ли многочлена за допомогою таких операцій вводять додаткові рівняння, напр., для многочлена 4-го степеня $z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = 0$, $p_m = q_m + ir_m$, $m = 1, 2, 3, 4$; $z = x + iy$, за допомогою додаткових рівнянь знаходять елементи комплексного числа $z^2 = x_2 + iy_2$, $x_2 = x^2 - y^2$, $y_2 = 2\,xy$; після чого $f_1 = x_2^2 - y_2^2 + q_1(x_2 x - y_2 y) - r_1(x_2 y + xy_2) + q_2 x_2 - r_2 y_2 + q_3 x - r_3 y + q_4$, $f_2 = 2x_2 y_2 + q_1(x_2 y + xy_2) + r_1(x_2 x - y_2 y) + q_2 y_2 + r_2 x_2 + q_3 y + r_3 x + r_4$.

Літ.: Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М., 1960 [бібліогр. с. 210—213]; Воеводин В. В. Применение метода спуска для определения всех корней алгебраического многочлена. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1961, т. 1, № 2; Кац И. С., Майергойз М. Д. Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений в комплексной области. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 3.

Г. І. Грездов, В. В. Іванов, М. Д. Майергойз.

КОРЕНІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ. Найпоширенішими на практиці є трансцендентні рівняння (див. *Рівнянь класифікація*) вигляду

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

де неперервні функції $f(x)$ комплексної змінної x можна як завгодно близько апроксимувати многочленом $P_n(x)$ при достатньо великому степені n. Укажемо на умови, при яких за наближені розв'язки рівняння (1) можна взяти корені $P_n(x)$ — розв'язки алгебр. рівняння $P_n(x) = 0$. Нехай ф-цію $f(x)$ визначено в області D, причому D містить усі розв'язки рівняння (1), тобто корені $f(x)$, і нехай $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$, $x \in D$. Позначимо через x_n який-небудь корінь $P_n(x)$. Якщо x_n, починаючи з якогось n, потрапляє в D і збігається до $\tilde{x}$, коли $\varepsilon_n \to 0$, то $\tilde{x}$ є коренем $f(x)$. Нехай тепер $\tilde{x}$ — який-небудь корінь $f(x)$, $\tilde{x} \in D$, і нехай D — замкнена обмежена множина. Позначимо через F множину значень ф-ції f на D. Якщо $f(x)$ відображає D на F взаємно однозначно, то існує обернене відображення, неперервне на F. У цьому випадку й за умови, що x_n, починаючи з якогось n, потрапляє в D, в будь-який окіл $\tilde{x}$, що лежить у D, потрапить якийсь корінь $P_n(x)$ для достатньо великого n. Умова $x_n \in D$ може не виконуватися. Тоді за x_n треба взяти точку, в якій $|P_n(x)| = \inf_{x \in D} |P_n(x)|$ (див. *Некоректно поставлених задач способи розв'язування*). Отже, в ряді досить заг. випадків задачу наближеного розв'язування рівняння (1) можна звести до задачі апроксимації $f(x)$ многочленами і до задачі наближеного відшукування коренів многочленів (див. *Коренів алгебричних многочленів способи обчислювання*).

Якщо ф-ція $f(x)$ дійсного змінного x має на відрізку $[a, b]$ першу похідну $f'(x)$, що має, можливо, лише розриви 1-го роду, то відшукати всі розв'язки рівняння (1) на $[a, b]$ можна так. Вибирають число M, що задовольняє співвідношення

$$M \geqslant \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|, \qquad (2)$$

як початкове наближення x_0 беруть точку a і здійснюють ітеративний процес

$$x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{M}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

який збігається до найближчого справа від x_0 розв'язку рівняння (1). Відшукавши один з розв'язків рівняння (1) $x^{(1)}$ з заданою точністю ε, вибирають нове початкове наближення $x_0 = x^{(1)} + \varepsilon$ і знову здійснюють ітеративний процес (3) і т. д. доти, поки не буде знайдено всі розв'язки на відрізку $[a, b]$, тобто до виконання нерівності $x \geqslant b$.

Зазначені способи раціонально застосовувати для відшукання всіх коренів $f(x)$ з невисокою точністю. Одним з найпоширеніших методів уточнення коренів $f(x)$ є метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

якому властива квадратична швидкість збіжності (для некратних коренів).

Останнім часом підвищився інтерес до методу січних:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Це пов'язане з тим, що порядок швидкості збіжності методу січних $(1 + \sqrt{5})/2 \approx \approx 1{,}618$, а на кожній ітерації, крім першої, на відміну від методу Ньютона, обчислюють одне значення ф-ції.

Для уточнення розв'язку рівняння (1) широко застосовують ітеративний метод Ейткіна — Стеффенсена

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))},$$

якому властива квадратична швидкість збіжності. Обчислювання ф-ції, корінь якої відшукується, часто є трудомістким, тривалим і дорогим. Тому виникає задача побудови оптим. алгоритмів пошуку кореня.

Розв'язування трансцендентного рівняння (1) з неперервною ф-цією $f(x)$ на *гібридній обчислювальній машині* зводиться здебільшого до задачі відшукування мінімуму додатно визначеної ф-ції $F(x) = \varphi(f(x))$. Мінімуми $F(x)$ відшукують тими самими способами, що й у випадку алгебр. многочленів. Ф-цію $f(x)$ на гібридній обчисл. машині будують на наборі алгебр. і трансцендентних неперервних ф-цій (лінійна комбінація, x_i^2, $x_i x_j$, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $|x|$, $\max(x_i, x_j, x_k)$, $\min(x_i, x_j, x_k)$ та ін.), вводячи додаткові рівняння. На пристроях виведення гібридної обчисл. машини зручно спостерігати траєкторії пошуку розв'язків, перетини ф-ції $F(x)$ площинами $F(x) = C$ тощо.

Розв'язуючи деякі трансцендентні рівняння заг. вигляду на гібридних обчисл. машинах, застосовують метод зведення до розв'язування системи неперервних трансцендентних рівнянь. Конструктивний аналіз багатьох ф-цій, заданих аналітично, веде до представлення $f(x)$ у вигляді $f(x) = \varphi(x, x_1, \ldots, x_m)$, де φ — неперервна ф-ція змінних $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$, $x_i = x_i(\Psi_i(x))$, має неперервну обернену ф-цію $\Psi_i(x) = \eta_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Застосувавши вираз для оберненої ф-ції η_i, одержимо систему $m + 1$ трансцендентних рівнянь $\varphi(x, x_1, \ldots, x_m) = 0$, $\eta_1(x_1)$ —

$-\Psi_1(x)=0, \ldots, \eta_m(x_m)-\Psi_m(x)=0$ з $m+1$ невідомими. Ліва частина системи неперервна за змінними $x, x_1, \ldots, x_m$, якщо неперервними є ф-ції $\Psi_i(x)$. Якщо $\Psi_i(x)$ не задовольняють умов неперервності, над кожною з них виконують таку ж саму процедуру, як і з ф-цією $f(x)$ і т. д., доки цілком не усунуть розривні й багатозначні ф-ції.

Більшість рівнянь, що трапляються на практиці, містять наближені числа. Здебільшого розв'язують осн. рівняння, тобто числа, що є в його запису, в процесі розв'язування вважають за точні. Як показує дослідження некоректних задач, іноді буває правильнішим розв'язувати якесь допоміжне регуляризоване рівняння. Нехай задане наближене рівняння має вигляд

$$f(x, a_1(\pm\Delta a_1), \quad a_2(\pm\Delta a_2), \ldots, a_m(\pm\Delta a_m))=0,$$

де x — невідоме, $a_i(\pm\Delta a_i)$ — наближені числа, що їх задано з точністю до Δa_i. Тоді осн. рівняння має вигляд

$$f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)=0.$$

Це рівняння в околі кожного однократного кореня x^0 визначає x як неявну ф-цію від $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Знайдемо диференціал цієї неявної ф-ції

$$dx=\frac{1}{f'_x(x^0)}\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial f}{\partial a_2}da_2+ + \cdots \frac{\partial f}{\partial a_m}da_m\right).$$

Якщо похибки Δa_i достатньо малі, то спадкова похибка визначення кореня з осн. рівняння

$$\Delta_1 x^0\approx\frac{1}{|f'_x(x_0)|}(|f'_{a_1}|\Delta a_1+|f'_{a_2}|\Delta a_2+ + \cdots +|f'_{a_m}|\Delta a_m).$$

Знайшовши наближений корінь $\tilde{x}^0$, корисно для контролю обчислити *похибку* методу $\Delta_2\tilde{x}^0$. Для цього можна скористатися з ф-ли Ньютона: $\Delta_2\tilde{x}^0\approx\left|\frac{f(\tilde{x}^0)}{f'(\tilde{x}^0)}\right|$. Щоб уникнути випадку кратних коренів, корисно ще застосовувати ф-лу Ньютона для обчислювання коренів $\frac{f(x)}{f'(x)}$:

$$\Delta_2\tilde{x}^0\approx\left|\frac{f(\tilde{x}^0)f'(\tilde{x}^0)}{f'(\tilde{x}^0)^2-f''(\tilde{x}^0)\cdot f'(\tilde{x}^0)}\right|.$$

Доцільно вимагати, щоб $\Delta_2\tilde{x}^0\leqslant\Delta_1\tilde{x}^0$. Похибку $\Delta_3\tilde{x}^0$, яка виникає внаслідок реалізації вибраного алгоритму на обчисл. машині, треба оцінювати залежно від особливостей цієї машини (див. *Похибок обчислювань теорія*).

Літ.: Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М., 1960 [бібліогр. с. 210—213]; Черноусько Ф. Л. Оптимальный алгоритм поиска корня функции, вычисляемой приближенно. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1968, т. 8, № 4; Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 209—214].

Г. І. Грездов, В. В. Іванов, М. Д. Майєргойз.

КОРИ́СНОСТІ ТЕО́РІЯ — буржуазна економічна теорія, яка визначає вартість матеріальних благ їхньою граничною корисністю для споживача. Найбільшого розвитку К. т. набула в працях представників т. з. австрійської школи економістів. Матем. варіант К. т. сформулювали в середині 19 ст. англ. економіст У. С. Джевонс і австр. економіст Л. Вальрас. К. т. виходить з раціональної поведінки індивідуума, який прагне максимізувати задоволення від володіння різними благами. В міру збільшення кількості певного блага задоволення від володіння останньою його одиницею зменшується. За К. т., корисність останньої одиниці й визначає вартість та ціну будь-якої одиниці даного блага. В матем. інтерпретації заг. величина корисності є ф-цією кількості даного блага, а гранична корисність визначається першою похідною цієї ф-ції. К. т. зазнавала критики не лише в марксистській, а й у буржуазній економ. літературі. Визначення вартості граничною корисністю підміняє суб'єктивно-психологічними факторами об'єктивну основу вартості — кількість суспільно необхідної праці на виробництво товару. Орієнтація на індивідуума, взятого поза суспільними відносинами, виключає можливість наук. аналізу економіки, бо виробництво, обмін та розподіл нерозривно пов'язані з панівним суспільним ладом і виробничими відносинами. Заперечення суб'єктивістської теорії граничної корисності не означає відмови від кількісного аналізу споживчих вартостей та суспільної корисності різних матеріальних благ, а це необхідно, зокрема, для побудови критерію оптимальності в моделях оптим. планування нар. господарства. *Л. Л. Терехов.*

КОШІ́ ЗАДА́ЧІ ДЛЯ ЗВИЧА́ЙНИХ ДИФЕРЕНЦІА́ЛЬНИХ РІВНЯ́НЬ СПО́СОБИ РОЗВ'Я́ЗУВАННЯ. Задача Коші (з. К.) для системи звичайних дифер. рівнянь (з. д. р.) сформувалась у зв'язку з необхідністю розв'язувати деякі типові задачі природознавства. Ці задачі є, як правило, задачами з початковими умовами для канонічних систем; їх здебільшого перетворюють до вигляду з. К. для нормальної системи з. д. р. Нижче розглянуто деякі способи розв'язування останньої задачі.

У квадратурах з. К. для з. д. р. розв'язується досить рідко. Особливий інтерес щодо цього становить випадок, коли система з. д. р. є лінійною. У заг. випадку питання про побудову наближень розв'язку з. К. для з. д. р.

пов'язують з питанням про існування цього розв'язку. Теорему існування звичайно доводять або методом послідовних наближень Пікара, або методом ламаних Ейлера; умову єдиності можна вибирати або в формі Ліпшиця, або в іншій формі за рамками теореми існування.

Метод Пікара набув дальшого розвитку в методі двобічних наближень Чаплигіна, центр. частиною якого є теорія дифер. нерівностей. Проте методи Пікара і Чаплигіна, якщо реалізують їх на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою, можуть приводити до нестійких обчислень. Найчастіше вживаними методами наближеного розв'язування з. К. для з. д. р. на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою є т. з. різницеві методи, які виникли в результаті узагальнення методу Ейлера. Ідея цього методу полягає в тому, що з. К. для рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

зводять до з. К. для різницевого рівняння

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \qquad (2)$$

яке наз. тепер рівнянням Ейлера, де y_k — набл. значення для $y(x_k)$ — точного розв'язку з. К. для з. д. р. (1), $x_k = x_0 + kh$, $h > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Розглядаючи з. К. для рівняння (2) передусім як метод наближеного розв'язування з. К. для з. д. р. (1), Ейлер намагався уточнити його. З цією метою він побудував асимптотичне розвинення

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + hy'(x_{k-1}) + \cdots + \frac{h^s}{s!} \times$$

$$\times y^{(s)}(x_{k-1}) + O(h^{s+1}), \qquad (3)$$

де h — крок інтегрування, x_k — вузли сітки. За допомогою цього розвинення йому вдалося зрозуміти причини низької точності методу, визначуваного рівнянням (2), оскільки його одержують з (3) при $s = 1$, відкинувши залишковий член і замінивши $y(x_k)$ через y_k, і накреслити шляхи усунення їх. Проте методи вищих степенів (степенем методу наз. найвищий степінь многочлена, для якого метод є точний), побудовані за допомогою розвинення (3), виявились громіздкими через складність обчислень, необхідних для одержання y'', y''', ...

Щоб обминути згадану вище трудність, англ. матем. Дж. Адамс у результаті інтегрування з. д. р. (1) вздовж шуканого розв'язку й заміни підінтегральних ф-цій інтерполяційним многочленом у формі Лагранжа (див. *Інтерполяція функцій*) одержав асимптотичне розвинення, аналогічне (3):

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + h\sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_{k-i}, y(x_{k-i})) +$$

$$+ O(h^{n+2}), \qquad (4)$$

де n — степінь інтерполяційного многочлена, β_i — числа, що їх одержують у результаті інтегрування коефіцієнтів Лагранжа. Із (4) одержують т. з. ф-ли Адамса, які наводяться в різницевій формі

$$y_k = y_{k-1} + h\left(f_{k-1} + \frac{1}{2}\nabla f_{k-1} + \right.$$

$$+ \frac{5}{12}\nabla^2 f_{k-1} + \frac{3}{8}\nabla^3 f_{k-1} + \frac{251}{720}\nabla^4 f_{k-1} +$$

$$\left. + \frac{95}{288}\nabla^5 f_{k-1} + \frac{19\,087}{60\,480}\nabla^6 f_{k-1} + \cdots\right)$$

— явна або екстраполяційна, і

$$y_k = y_{k-1} +$$

$$+ h\left(f_k - \frac{1}{2}\nabla f_k - \frac{1}{12}\nabla^2 f_k - \frac{1}{24}\nabla^3 f_k - \right.$$

$$\left. - \frac{19}{720}\nabla^4 f_k - \frac{3}{160}\nabla^5 f_k - \frac{863}{60\,480}\nabla^6 f_k - \cdots\right)$$

— неявна або інтерполяційна,

де $\nabla^i f_k$ — різниця назад, $f_k = f(x_k, y_k)$.

Аналогічно одержують ф-лу Ністрема

$$y_k = y_{k-2} + h\left(2f_{k-1} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{k-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\nabla^3 f_{k-1} + \frac{29}{90}\nabla^4 f_{k-1} + \frac{14}{45}\nabla^5 f_{k-1} + \cdots\right)$$

— явна і ф-лу центральних різниць

$$y_k = y_{k-2} + h\left(2f_{k-1} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_k - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{90}\nabla^4 f_{k+1} + \frac{1}{756}\nabla^6 f_{k+2} - \cdots\right) -$$

неявна.

Дві останні ф-ли наз. ф-лами типу Адамса. За явними ф-лами звичайно провадять обчислення з кроком h і повторне обчислення з кроком gh ($g = \frac{1}{2}$ або $g = 2$); крок вибирають за вимогою, щоб одержувані внаслідок цього наближені розв'язки відрізнялися один від одного не більше, як на наперед задану величину. Неявні ф-ли становлять основу передбачально-виправляльних методів, методів Адамса: за явною ф-лою ведуть обчислення з кроком h (передбачення), потім за неявною ф-лою степеня, на одиницю більшого за степінь явної ф-ли, з кроком h роблять «виправлення». Крок h вибирають за вимогою, щоб передбачений і виправлений «розв'язок» відрізнялись один від одного не більше, як на наперед задану величину. Ф-ли Адамса і наведені вище ф-ли типу Адамса та ін. того самого типу фіксованого степеня в ординатній формі можна записати так:

$$A_h y_k \equiv \sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{k-1} - h\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_{k+l-i} = 0, \quad (5)$$

де l, m, n — цілі числа, $m > 0$, $n \geqslant 0$; α_i,

β_i — дійсні числа, а $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_m \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$ і $\beta_n \neq 0$. Початкові значення для ф-ли (5), яких бракує, вибирають так, щоб різниця між двома початковими значеннями мала принаймні порядок $O(h)$. Значення α_i і β_i, m і n одержують або внаслідок перетворювання ф-л Адамса і ф-л типу Адамса, або методом невизначених коеф. при заданих m і n, виходячи з вимог: 1) розв'язності рівняння (5) з відповідними початковими значеннями; 2) збіжності методу, що його визначають за ф-лою (5) з відповідними початковими значеннями; 3) максимальності ступеня апроксимації рівняння (1) рівнянням (5), тобто з вимоги, щоб у розвиненні $A_h y(x_k) = O(h^{s+1})$ натуральне s було максимальним. При $l < 0$ одержують явні ф-ли, при $l = 0$ — неявні, при $l > 0$ — неявні з забіганням уперед; при $m = 1$ і $l = -1$ або $l = 0$ — ф-ли Адамса.

В зв'язку з тим, що різницеве рівняння (5) має порядок, взагалі кажучи, вищий як перший, виникає питання про стійкість методу, означуваного ф-лою (5), розв'язування якого зводиться до вимоги, щоб різницевий оператор $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{k-i}$ був стійким або умовно стійким за Ляпуновим. При $m = n$ і $l \leqslant 0$ стійкі методи вигляду (5) можуть бути щонайбільше — степеня $n + 1$; при парному n можливі стійкі ф-ли степеня $n + 2$, напр., ф-ла Сімпсона: $y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f_k + 4f_{k-1} + f_{k-2})$, степінь якої дорівнює 4.

Щоб подолати трудність, яка виникла в Л. Ейлера, нім. математики К. Рунге і В. Кутта побудували ще одно асимптотичне розвинення для $y(x_k)$

$$R_h y(x_k) \equiv y(x_k) - y(x_{k-1}) - p_1 k_1(h) - \ldots - p_r k_r(h) = O(h^{s+1}), \quad (6)$$

де r — задане натуральне число, $k_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$, при цьому $\xi_i = x_{k-1} + \alpha_i h$, $\alpha_1 = 0$; $\eta_i = y_{k-1} + \beta_{i,1} k_1(h) + \ldots + \beta_{i,i-1} k_{i-1}(h)$, $\beta_{10} = 0$; а p_i, α_i і β_{ij} — деякі дійсні числа, які одержують з вимоги, щоб у розвиненні (6) натуральне s, яке наз. степенем методу, було максимальне (ці числа визначаються, взагалі кажучи, неоднозначно). Нижче наведено приклади ф-л Рунге — Кутти:

при $r = 2$, $s = 2$: $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\beta_{21} = \frac{2}{3}$; при $r = 3$, $s = 3$: $p_1 = \frac{4}{9}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{2}{9}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{3}{4}$;

при $r = 4$, $s = 4$: $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = 1$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{1}{2}$, $\beta_{41} = \beta_{42} = 0$, $\beta_{43} = 1$.

Важливою позитивною особливістю методів Рунге — Кутти порівняно з методами Адамса і типу Адамса є те, що вони допускають розрахунки на нерівномірних сітках, а передумовою методів Адамса і типу Адамса є рівномірні сітки. Якщо задано нерівномірну сітку $\sigma = \langle x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b \rangle$, яка дробить відрізок $[a, b]$, то числа $h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ наз. кроками сітки σ і $h = \max_k h_k$ — її нормою. Додатне число λ і додатну неперервно-диференційовану на $[a, b]$ ф-цію $\varphi(x)$ наз. відповідно параметром і ф-цією розподілу кроків сітки σ, якщо $h_k = \lambda\varphi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$ і $h_{n-1} \geqslant \lambda\varphi(x_{n-1})$. Для довільної сітки існує ф-ція розподілу кроків, за якої параметр дорівнює її нормі. Ф-ли Рунге — Кутти завжди явні, і через це кроки сітки інтегрування за ними можна знаходити способом «обчислювання і переобчислювання».

Для методу Адамса, стійкого (умовно стійкого) методу типу Адамса або методу Рунге — Кутти степеня s на відповідній довільній сітці при достатній гладкості вектор-функції f справджується мажорантна апріорна оцінка похибки методу

$$\delta_k = y(x_k) - y_k = O(h^s), \quad (7)$$

яка є рівномірною відносно k й забезпечує збіжність кожного з названих методів. Вона не придатна для розраховування кроків через її грубість. Точнішою оцінкою похибки зазначених методів є апріорне асимптотичне розвинення

$$\delta_k = \lambda^s C \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) \varphi^s(\xi)\, d\xi + O(\lambda^{s+1}), \quad (8)$$

яке справджується при достатній гладкості вектор-функції f, де C — константа, що є функціоналом від застосовуваного методу, $\Omega(\xi, x)$ — матрицант матриці $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y = y(x)}$, $\Psi(x, y(x))$ — значення дифер. оператора $\psi[f]$ уздовж графіка $(x, y(x))$, що його визначають за рівністю

$$A_h y(x_k) = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+2})$$

для методу Адамса або типу Адамса й за рівністю

$$R_h y(x_k) = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+2})$$

для методу Рунге — Кутти; для методу Адамса або типу Адамса треба вважати, що λ дорівнює кроковій h рівномірної сітки при $\varphi(\xi) \equiv 1$. Апостеріорне асимптотичне розвинення похибки зазначених методів можна одержати з розвинення (8), замінивши в ньому точний розв'язок $y(x)$ кусково-лінійним континуальним заповненням наближеного розв'язку y_k (континуальним заповненням сіткової ф-ції y_k наз. ф-цію $\varphi(x)$, яка задовольняє умови $\varphi(x_k) = y_k$).

Доведено, що серед неявних стійких ф-л типу Адамса найвищого степеня при парному n не існує ф-ли, для якої константа C у розвиненні (8) досягає мінімуму, тобто оптим. ф-ли типу Адамса. Проте можна побудувати ф-ли типу Адамса, близькі до оптимальних.

При інтегруванні з. К. для з. д. р. (1) на відрізку $[a, b]$ методом Рунге — Кутти можна побудувати сітку $\sigma = (\lambda, \varphi_0)$, що на сукупності сіток, які задовольняють умову нормування $\int_a^b \frac{dx}{\varphi(x)} = b - a$ забезпечує мінімум функціоналу $\int_a^b \Omega(\xi, b) |\Psi(\xi, y(\xi))| \varphi^s(\xi) d\xi$ за умови, що ф-ція $\Psi(\xi, y(\xi))$ не змінює знака на відрізку $[a, b]$. Такі сітки наз. асимптотично оптимальними. Якщо після цього параметр λ вибрати так, щоб уздовж сітки (λ, φ_0) міра похибки відповідного наближеного розв'язку не перевищувала наперед заданої величини, то одержимо асимптотично оптим. сітку, яка забезпечує асимптотично гарантовану міру похибки наближеного розв'язку (див. *Похибок обчислювань теорія*).

Реалізуючи на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою той чи інший з описаних вище методів розв'язування з. К. для з. д. р. (1), через *похибки* заокруглень замість сіткової ф-ції y_k одержують сіткову ф-цію $\overset{*}{y}_k$, яку наз. числовим розв'язком розглядуваної задачі. Різниця $d_k = y_k - \overset{*}{y}_k$ є похибкою внаслідок заокруглень, а різниця $D_k = y(x_k) - \overset{*}{y}_k = \delta_k + d_k$ — повною похибкою числового розв'язку. При цьому вважають, що неусувна похибка, яка виникає через похибки вхідної інформації, дорівнює нулеві, бо розв'язувану з. К. розглядають поки що як точно поставлену.

Традиційний підхід до врахування похибки внаслідок заокруглень, який вироблено в *обчислювальній математиці*, полягає в тому, що здійснюється така організація обчислювання, при якій міра похибки методу виявляється значно більшою, ніж міра похибки внаслідок заокруглень. Цей принцип можна сформулювати як вимогу, щоб головний член асимптотичного розвинення повної похибки збігався з головним членом асимптотичного розвинення похибки методу: $D_k = \lambda^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \times \Psi(\xi, y(\xi)) \varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1})$. Зрозуміло, це становить умову вибору кроків сітки наближеного інтегрування. Чисельні експерименти на модельних задачах підтверджують існування таких кроків, які прийнято наз. асимптотичними.

З усього цього випливає, що вибір сітки при інтегруванні з заданою мірою похибки з. К. для з. д. р. описаними вище методами пов'язаний з великими труднощами. Тому виникли двобічні різницеві методи типу Адамса і типу Рунге — Кутти. З них розглянемо другі, бо перші не привели до задовільних алгоритмів. Перевага двобічних методів полягає в тому, що коли за наближений розв'язок з. К. для рівняння (1) взяти півсуму двобічних наближень, то їхня піврізниця становитиме тонку мажорантну оцінку похибки цього наближення.

Двобічні методи типу Рунге — Кутти одержують з вимоги, щоб в асимптотичному розвиненні

$$R_h y(x_k) \equiv h^{s+1} \cdot \alpha \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+1}) \quad (9)$$

натуральне s набувало макс. значення і α було параметром. Пари двобічних ф-л одержують, якщо α надають значень протилежних знаків з однаковими модулями. Двобічності наближень досягають, коли вибирають досить малі кроки (і, можливо, й значення α), виходячи з вимоги, щоб знак розвинення (9) збігався зі знаком його головного члена. Крім того, вибираючи кроки (і значення α), враховують такі вимоги: міра обчисл. похибки чисельного розв'язку має бути істотно менша за міру похибки методу і міра повної похибки чисельного розв'язку повинна мати гарантовану оцінку. Наведемо приклади двобічних ф-л:

при $r = 2$, $s = 1$, $\Psi[f] = f_x$: $\alpha = \frac{1}{24}$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{11}{24}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{24}$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{13}{24}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$,

при $r = 3$, $s = 2$, $\Psi[f] = f_x f_y + f_x f_y^2$: $\alpha = 1$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = 1$; $\beta_{31} = \frac{7}{4}$, $\beta_{32} = -\frac{5}{4}$, $\alpha = -1$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = 1$, $\beta_{31} = -\frac{5}{4}$, $\beta_{32} = \frac{7}{4}$.

Багато пар ф-л в одному алгоритмі використовують у зв'язку з необхідністю «обминати» нулі оператора $\Psi[f]$.

Поняття неусувної похибки за своєю природою виходить за рамки обчисл. математики, бо зміна її пов'язана зі зміною похибки вхідної інформації, що її одержують, як правило, експериментально. А оцінка неусувної похибки може бути корисна при визначенні доцільної похибки, з якою треба розв'язувати розглядувану задачу.

Основу для одержання оцінок неусувної похибки становлять т. з. рівняння у варіаціях. Нехай з. К. для з. д. р.

$$y' = \tilde{f}(x, y) \tag{10}$$

означає «точний» матем. опис якоїсь природничонаукової задачі, а з. К. для з. д. р. (1) — наближений і заданий її опис. Нехай $\tilde{y}(x)$ — точний розв'язок згаданої з. К. для з. д. р. (10). Тоді рівняння у варіаціях для рівняння (1) записують так:

$$u' = F(x, y(x), u) \cdot u + \\ + \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x)), \tag{11}$$

де $u(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$, F — матриця N-го порядку, елемент $F^{(i,j)}$ якої дорівнює нулеві, якщо $u^{(j)} = 0$, а якщо ні, то $F^{(i,j)}$ дорівнює відповідній частинній розділеній різниці ф-ції $f^i(x, y)$ за змінною $y^{(j)}$, N — розмірність вектора y. Оскільки на практиці досить часто з. К. для рівняння (10) відрізняється від з. К. для рівняння (1) лише початковими умовами, доцільно назвати способи оцінки векторфункції $u(x)$ при $\tilde{f}(x, y) - f(x, y) \equiv 0$. У цьому випадку досить тонкі оцінки можна одержати або за допомогою численних модифікацій методу двобічних наближень Чаплигіна з урахуванням необхідних конкретних властивостей рівняння (11), або за допомогою 2-го методу Ляпунова, якщо якась норма будь-якого розв'язку рівняння (11) монотонно не зростає, або за допомогою іншого тонкого методу, що враховує конкретні властивості рівняння (11). Нехай $G(x, u)$ — симетрична квадратична форма від u з коефіцієнтами, можливо, залежними від x, що являє собою квадрат названої норми, а $M(x)$ — максимум повної похідної від $G(x, u)$ по x згідно з рівнянням (11), обчислений в обмеженій замкненій частині простору, що містить розв'язок $u(x)$. Тоді справджується оцінка

$$|u^{(i)}(x)| \leqslant (G(x_0, u(x_0)) \times \\ \times A_{N-i}^{(i)}(x)/A_N(x))^{1/2} \exp \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} M(\xi)\, d\xi,$$

$$i = 1, \ldots, N,$$

де $A_N(x)$ — дискримінант форми $G(x, u)$, $A_{N-i}^{(i)}(x)$ — мінор, що його одержують із $A_N(x)$, викресливши i-ий рядок і i-ий стовпчик. У випадку, коли $\tilde{f}(x, y - f(x, y) \not\equiv \not\equiv 0$, для одержання тонких оцінок векторфункції $u(x)$ можна застосовувати вже згадані методи або узагальнення їх.

Для розв'язування з. К. для з. д. р. з невисокою точністю можна застосовувати аналогові пристрої. З. К. для системи канонічних рівнянь, кожне з яких є рівнянням 2-го порядку, трапляється досить часто. В зв'язку з цим для таких з. К. розроблено неопосередковані способи наближеного розв'язування, аналогічні розглянутим вище.

Літ.: Горбунов А. Д. Разностные уравнения и разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967; Гайсарян С. С. О выборе оптимальных сеток при численном интегрировании задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов, в. 2. К., 1969; Бахвалов Н. С. Лекции по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Материалы Международной летней школы по численным методам, в. 2. К., 1970 [бібліогр. с. 127—135].

О. Д. Горбунов.

КРА́ЙНЯ ТО́ЧКА, в е р ш и н а о п у к л о ї м н о ж и н и X л і н і й н о г о п р о с т о р у E — така точка x, яку не можна зобразити у вигляді $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, де $x_1 \neq x_2$ — деякі точки множини X, $0 < \lambda < 1$. К. т. наз. ще екстремальною точкою *опуклої множини.*

Напр., у скінченновимірному евклідовому просторі E^n К. т. є вершини многогранника, точки границі кулі. Множина X може не мати К. т. (напр., відкрита куля). У просторі E^n всяка непорожня замкнена обмежена опукла множина X має К. т.: кожну точку множини X можна зобразити у вигляді опуклої лінійної комбінації К. т. *Ю. М. Данилін.*

КРАЙОВА́ ЗАДА́ЧА — задача одержання розв'язку диференціального рівняння (або системи рівнянь) у заданій області при заданих додаткових умовах на розв'язок у точках її границі. Ці обмеження мають вигляд однієї або кількох рівностей і наз. к р а й о в и м и у м о в а м и (к. у.). Матем. рівняння К. з. для системи звичайних диф. рівнянь порядку N можна записати так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad g(x_0, x_l) = 0, \ t \in [0, l], \tag{1}$$

де перша ф-ла означає векторний запис системи, 2-а — векторний запис к. у., а $x_0 = x(0)$, $x_l = x(l)$. Вимірність r вектора $g(x_0, x_l)$ може й не збігатися з N. При $r < N$ К. з. наз. н е д о в и з н а ч е н о ю, при $r = N$ — в и з н а ч е н о ю, а при $r > N$ — п е р е в и з н а ч е н о ю. В застосуваннях найчастіше маємо справу з випадком, коли $r = N$, оскільки в цьому випадку є широкі класи К. з., що мають єдиний розв'язок. А взагалі К. з. може й не мати розв'язку. Практично апріорі встановити існування розв'язку К. з., як правило, досить складно. Якщо к. у. мають вигляд $g_1(x_0) = 0$, $g_2(x_l) = 0$, то К. з. наз. задачею з розщепленими к. у. На практиці трапляються задачі для систем звичайних диф. рівнянь, у яких додаткові обмеження складніші за (1), напр.:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \; g(x_0, x_1, x_2, \; \ldots, x_l) + \int_0^l \varphi(\tau, x)\, d\tau = 0, \qquad (2)$$

де $x_i = x(t_i)$, t_i — задані точки на $[0, l]$, а $\varphi(\tau, x)$ — задана вектор-ф-ція. Такі задачі наз. узагальненими К. з. Якщо $\varphi \equiv 0$, то задача (2) наз. багатоточковою К. з., а задачу (1), яка є окремим випадком задачі (2), наз. двоточковою К. з. Задача з к. у. $g(x_\alpha) = 0$, заданою лише в одній точці $t_\alpha \in [0, l]$, наз. одноточковою К. з. Розв'язування такої задачі зводиться до відшукування всіх розв'язків x_α^* системи $g(x_\alpha) = 0$ і наступного розв'язування задач Коші $\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_\alpha) = x_\alpha^*$. Задачу (2) можна просто звести до форми (1), але зі збільшеним порядком системи диф. рівнянь. Якщо $f(t, x)$, $g(x_0, x_l)$ лінійні по x, x_0, x_l, то К. з. наз. лінійною. Загальний вигляд лінійної К. з. такий:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \quad Bx_0 + Cx_l = d, \qquad (3)$$

де A, B і C — задані матриці, а f і d — задані вектори. Одним з основних джерел К. з. є варіаційні задачі, що виникають при дослідженні фіз. систем із зосередженими параметрами. Умови мінімуму найпоширеніших функціоналів у вигляді одновимірних інтегралів являють собою в багатьох випадках рівняння К. з. *Понтрягіна принцип максимуму* дає змогу зводити до К. з. і некласичні варіаційні задачі, коли область обмежень на керування замкнена,— т. з. задачі на побудову оптим. керувань. К. з. для звичайних диф. рівнянь виникають і при розв'язуванні К. з. для рівнянь з частинними похідними методом прямих і при різних ін. способах зведення багатовимірних К. з. до одновимірних. Лінійні однорідні К. з. (тобто задачі типу (3) при $f = 0$ і $d = 0$) одержуємо при дослідженні власних частот коливань фіз. систем.

К. з. для рівнянь з частинними похідними трапляються звичайно у зв'язку з рівняннями еліптичного типу, оскільки такі задачі мають широке практичне застосування в механіці пружного тіла, гідромеханіці, при дослідженні теплопередавання й електромагнетизму та в ін. галузях фізики (див. *Еліптичного типу диференціальних рівнянь у частинних похідних способи розв'язування*). Але матем. К. з. можна сформулювати для будь-якого рівняння з частинними похідними або системи таких рівнянь. У застосуваннях часто формулюються К. з. для самоспряженого еліптичного рівняння 2-го порядку

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f, \qquad (4)$$

де k і f можуть залежати і від просторових координат, і від розв'язку з його похідними. Поширеність рівняння (4) пояснюється тим, що воно виражає закон збереження маси або енергії для нескінченно малого об'єму. За типом к. у. розрізняють 1-у, 2-у і 3-ю К. з. для рівняння (4). В 1-й К. з. (задачі Діріхле) задаються значення розв'язку на границі Г області: $u = \beta$, в 2-й (задачі Неймана) — значення норм. похідної на Г: $\frac{\partial u}{\partial n} = \beta$, а в 3-й К. з.— умова $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta$ на Г. В усіх трьох ф-лах α і β — це ф-ції координат точок границі, але вони можуть залежати й від розв'язку та його похідних. Для рівняння (4) трапляється ще й мішана К. з., в якої к. у. належать до різних типів на різних ділянках границі, і задача зі скісною похідною, в якій к. у. на Г мають вигляд: $\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha u = \beta$, де s — напрям, що не збігається з напрямом нормалі до Г. Окремим випадком рівняння (4) є рівняння Лапласа (при $k = 1$ і $f = 0$), Пуассона (при $k = 1$, f не залежному від розв'язку u) і Гельмгольца (при $k = 1$, $f = cu + d$, де c, d можуть залежати лише від координат). Якщо коеф. рівняння (4) і к. у. не залежать від розв'язку, то К. з. наз. лінійною. К. з. для еліптичних рівнянь вищого за 2-й порядку виникають у задачах механіки пружного тіла і в гідромеханіці в'язкої рідини. Якщо порядок рівняння $2n$, то для визначеності задачі необхідно задати на границі області n к. у. На тих ділянках границі, які заздалегідь не визначено й які визначають у процесі розв'язування К. з., кількість к. у. має бути на одиницю більшою. К. з. із наперед невідомою границею трапляються при дослідженні течії рідини з вільними поверхнями або кількох незмішуваних рідин, при дослідженні теплопередавання з фазовими переходами речовини (плавленням, випаровуванням і т. ін.). К. з. для систем рівнянь еліптичного типу виникають у механіці пружного тіла, в магнітогідродинаміці, в задачах термопружності, тобто взагалі там, де необхідно досліджувати взаємний вплив різних фіз. процесів. Крім того, такі К. з. виникають і з варіаційних задач для фіз. систем з розподіленими параметрами. Умови існування розв'язку К. з. досліджено достатньою мірою лише для задач із простими к. у. Термін К. з. застосовують інколи й для граничних задач теорії ф-цій комплексної змінної.

Літ. див. до ст. *Крайових задач способи розв'язування.*

В. Є. Шаманський.

КРАЙОВИХ ЗАДАЧ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ. Крайовою задачею (к. з.) називають сукупність двох систем інтегро-диференціальних рівнянь (див. *Рівнянь класифікація*) й функціональних співвідношень, які відносяться до скалярної чи векторної невідомої функції $\overline{u}(t, \overline{x})$, із яких першу систему (1) визначено в якійсь області Ω змінних t, $\overline{x}(x_1, \ldots, x_m)$, а другу (2) — на частині або на

всій границі Σ області Ω, а також, може, на деяких підмноговидах $\Sigma_i \subset \Omega$ розмірності, меншої за розмірність Ω. Для визначеності вважатимемо, що система (1) має вигляд

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, S\bar{u}), \qquad (1)$$

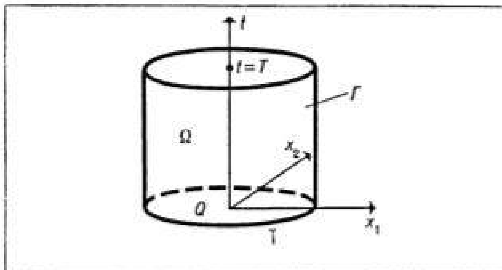
де $\bar{u}(t, \bar{x}) = \{u_1(t_1, x_1, \ldots, x_m), \ldots u_n(t, x_1, \ldots, x_m)\}$, L — векторна ф-ція своїх аргументів, $D = \{D_1^{\alpha_1}, \ldots, D_m^{\alpha_m}\}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leqslant p$ (p — порядок системи), $S\bar{u} = \iint k(t, \bar{x}, \bar{u})\, d\bar{x}dt$ — інтегральний *оператор*, у якому інтегрування здійснюється по всіх чи по частині змінних t, $\bar{x}$. Область Ω є відкритим циліндром у просторі $t, x_1, \ldots, x_m$ з основою Q, яка міститься в площині $t = 0$, віссю, паралельною осі t, й бічною поверхнею Γ (див. мал.). У цьому разі говорять, що Ω є топологічним добутком Q на відкритий інтервал

$$H = \{0 < t < T\}; \quad \Omega = Q \times H; \quad \Gamma = \gamma \times H, \quad \gamma = \partial Q$$

(границя Q). Обмеження для функції $\bar{u}$ мають вигляд

$$\left.\begin{array}{lll} l(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, s\bar{u}) = 0, & t, x \in \Gamma, & \text{а)} \\ \bar{u}(0, \bar{x}) = \bar{u}_0(\bar{x}), & x \in Q & \text{б)} \end{array}\right\}, \quad (2)$$

де l — векторна ф-ція всіх аргументів, визначена на Γ, оператори диференціювання D мають порядок q, як правило, менший, ніж p, s — якийсь оператор, визначений на Γ. Рівняння (1) й (2) описують нестаціонарну *крайову задачу* (н. к. з.), або задачу Коші, рівняння (1) — розвиток якогось процесу; рівняння (2а) визначають крайові умови, умови (2б) — початкові дані. Н. к. з. описують здебільшого поведінку якоїсь фіз. системи (атом, молекула; ансамбль атомів і молекул, з яких складається тверде, рідке чи газоподібне тіло; вакуум, заповнений випромінюванням; розмноження нейтронів у реакторі тощо).



Область інтегрування нестаціонарної крайової задачі у фазовому просторі t, x_1, x_2.

Інтегро-дифер. рівняння (1) відповідає континуальній *моделі математичній* (див. *Чисельні методи*) фіз. процесу, крайові умови (2а) ефективно описують взаємодію фіз. системи з навколишнім середовищем, початкові дані (2б) описують початковий стан системи. Якщо оператори L, l, S, s і ф-ція $\bar{u}(t, \bar{x})$ не залежать від t, то умову (2б) відкидають і приходять до стаціонарної крайової задачі (с. к. з.). Якщо оператори L, l, S і s є лінійними, то й к. з. є лінійною, в противному разі — нелінійною. У випадку лінійної н. к. з. рівняння (1) і (2) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = z(t, \bar{x})\bar{u} + \bar{f}(t, \bar{x}), \quad t, \bar{x} \in \Omega, \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{lll} l(t, \bar{x})\bar{u} = \bar{g}(t, \bar{x}), & t, \bar{x} \in \Gamma, & \text{(а)} \\ \bar{u}(0, \bar{x}) = \bar{u}_0(\bar{x}), & \bar{x} \in Q, & \text{(б)} \end{array}\right\}, \quad (4)$$

де оператори $L(t, \bar{x})$ і $l(t, \bar{x})$ лінійні, ф-ції $\bar{f}(t, \bar{x})$, $\bar{g}(t, \bar{x})$ (ф-ції крайових умов) і $\bar{u}_0(\bar{x})$ (ф-ція початкових даних) наз. вхідними даними н. к. з. (3), (4). Лінійну н. к. з. (3), (4) наз. коректно поставленою, якщо розв'язок $\bar{u}(t, \bar{x})$ задачі (3), (4) єдиний і неперервно залежить у якійсь нормі, матриці, або взагалі топології від вхідних даних задачі. Коли $\bar{f}(t, \bar{x}) = 0$, $\bar{g}(t, \bar{x}) = 0$, к. з. (3), (4) є однорідною й справджується принцип суперпозиції: разом з розв'язками $\bar{u}_1(t, \bar{x})$, $\bar{u}_2(t, \bar{x})$ задачі (3) розв'язком буде також $C_1\bar{u}_1(t, \bar{x}) + C_2\bar{u}_2(t, \bar{x})$. У цьому разі $\bar{u}(t, \bar{x})$ представляють у вигляді

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t)\bar{u}_0(\bar{x}), \qquad (5)$$

де $S(t)$ — лінійний обмежений оператор у якомусь банаховому просторі B (див. *Простір абстрактний*) ф-цій $\bar{v}(\bar{x})$, які задовольняють крайову умову $l(\bar{v}) = 0$; при цьому для кожного $t \in H$, $\bar{u}(t, \bar{x}) \in B$ правильним є співвідношення

$$\|S(t)\|_B \leqslant M(T) < \infty. \qquad (6)$$

Коли $\bar{f}(t, \bar{x}) \neq 0$, то за достатньо гладких коеф. і вхідних даних рівняння (3), (4) правильним є представлення

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t, 0)\bar{u}_0(\bar{x}) + \int_0^t S(t, \tau)\bar{f}(\tau, \bar{x})\, d\tau, \qquad (7)$$

де $S(t_2, t_1)$ — оператор переходу, який задовольняє співвідношення

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{u}(t_2, \bar{x}) = S(t_2, t_1)\bar{u}(t_1, \bar{x}), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T, & \text{(а)} \\ S(t_3, t_1) = S(t_3, t_2)S(t_2, t_1), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant T, & \text{(б)} \end{array}\right\} \quad (8)$$

$\lim_{t_2 \to t_1+0} S(t_2, t_1) = I$ (тотожний оператор). При цьому $S(t, 0) = S(t)$.

Осн. метод розв'язування задачі Коші (3), (4) полягає в апроксимації її скінченновимірними задачами Коші. Це роблять різними способами. До класичних методів належить метод Рітца — Гальоркіна (метод проектування), до пізніших — метод прямих і метод скінченних різниць.

Останнім часом намітилося зближення класичних методів проектування зі скінченнорізницевими на основі т. з. варіаційно-різницевих схем. У зв'язку з розвитком ЕОМ скінченнорізницевий метод став найуніверсальнішим для розв'язування систем (3), (4). Особливо ефективний він для нелінійних систем (1), (2), бо дає змогу автоматично в процесі розв'язування задачі лінеаризувати її. Скінченнорізницеві методи дають змогу розв'язувати н. к. з. крок за кроком за допомогою явної або неявної схем. В останньому випадку доводиться розв'язувати на кожному кроці деяку с. к. з. Т. ч., в неявних схемах розв'язування н. к. з. зводиться до повторного розв'язування с. к. з.

Пряме розв'язування с. к. з., тобто зведення с. к. з. до задачі Коші, можливе лише в найпростіших випадках. Так, задача

$$\frac{d^2u}{dx^2} - k^2(x)\,u = f(x); \quad \frac{du(0)}{dx} = 0; \; u(1) = 1 \tag{9}$$

зводиться до сукупності трьох задач Коші:

$$\frac{dl}{dx} = k^2(x) - l^2(x), \quad l(0) = 0; \tag{10а}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - l(x)\,y, \quad y(0) = 0; \tag{10б}$$

$$\frac{du}{dx} = l(x)\,u + y(x), \quad u(1) = 1. \tag{10в}$$

Задачі (10) інтегрують на відрізку [0, 1], перші дві в напрямі зростання x, останню — в зворотному напрямі. Всі три задачі стійкі. Такий метод розв'язування с. к. з. наз. методом дифер. прогонки, або методом дифер. факторизації. Більше вживаною є скінченнорізницева прогонка, або скінченнорізницева факторизація, яку застосовують до різницевого аналога с. к. з. За виконання певних умов одновимірну скінченнорізницеву с. к. з.

$$\Lambda \overline{u} = \overline{f} \tag{11}$$

розв'язують методом векторної або скалярної прогонки. Тут Λ є одновимірний скінченнорізницевий аналог оператора

$$L = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{d^k}{dx^k}, \tag{12}$$

де a_k — квадратні *матриці* вимірності n у просторі змінних $u_1, \ldots, u_n$. Застосування векторної прогонки до розв'язування одновимірної с. к. з., як правило, є економічним у тому розумінні, що кількість операцій, яка припадає на точку сітки, обмежена сталою, залежною від оператора Λ, а не від кількості N точок сітки. Пряме перенесення методу одновимірної прогонки на багатовимірні с. к. з. приводить до т. з. методу матричної прогонки. Однак цей метод не економічний, бо кількість ітерацій, яка припадає на точку сітки, залежить від заг. кількості точок сітки N і зростає як додатний степінь N. В окремих випадках можна представляти багатовимірну с. к. з. як якусь задачу Коші. Іноді в рівнянні (1) с. к. з.

$$L\overline{u} + \overline{f} = 0 \tag{13}$$

одну змінну, напр. x_1, можна виділити, так що (13) набуває вигляду

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1} = \Phi\overline{u} + f, \tag{14}$$

де оператор Φ не залежить від $D = \frac{d}{dx}$. Якщо при цьому Γ містить вісь x, і крайові умови на осі x_1 визначають $\overline{u_0}(x_2, \ldots, x_m)$, то за відповідної структури оператора Φ і крайових умов на Γ, що забезпечують коректність задачі, с. к. з. можна прямо розв'язати як задачу Коші. В такий спосіб можна розв'язати, напр., задачі обтікання тіла надзвуковим потоком ідеальної рідини чи задачу обтікання в'язким потоком у наближенні примежового шару. Здебільшого для розв'язування с. к. з. вдаються до *ітераційних методів,* більшість яких грунтується на аксіоматичних властивостях розв'язків н. к. з.

Відомо, що розв'язки $u(t, \overline{x})$ задачі Коші для рівняння теплопровідності з стаціонарними крайовими умовами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(\overline{x}), \; t, \; \overline{x} \in \Omega; && \text{(а)} \\ &u(t, \overline{x}) = g(\overline{x}), \; \overline{x} \in \gamma, && \text{(б)} \\ &u(0, \overline{x}) = u_0(\overline{x}), \; \overline{x} \in Q && \text{(в)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

має таку асимптотичну властивість:

$$u(t, \overline{x}) \to u(\overline{x}), \; t \to \infty. \tag{16}$$

При цьому ф-ція $u(\overline{x})$ не залежить від вибору $u_0(\overline{x})$ і є розв'язком с. к. з.

$$\left.\begin{aligned} &a^2\Delta u + f(\overline{x}) = 0 \quad \overline{x} \in \Omega && \text{(а)} \\ &u(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \gamma && \text{(б)} \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Отже, розв'язок с. к. з. (17) можна одержати граничним переходом (16) з розв'язку н. к. з. (15). Асимптотична властивість (16) справджується щодо розв'язків багатьох н. к. з., в т. ч. й нелінійних, і використовують її для одержання розв'язків відповідних с. к. з. Такий метод наз. методом стаціонуван-

н я (встановлення). В методі встановлення ітераційна схема розв'язування с. к. з. може просто збігатися зі скінченнорізницевою схемою інтегрування відповідної н. к. з. Явні схеми скінченнорізницевого розв'язування є простими в реалізації, але потребують великої затрати машинного часу. Неявні схеми простої апроксимації (див. *Дробових кроків метод*) можна реалізувати з будь-яким кроком у часі, однак при цьому на кожному кроці знову доводиться розв'язувати с. к. з. аналогічного виду. Щоб уникнути цього й одержати економічну схему інтегрування, вдаються до методу набл. факторизації, поєднуючи її зі схемою універсального алгоритму. Так, якщо L — сильно еліптичний оператор, то с. к. з.

$$Lu + f(\overline{x}) = 0, \quad \overline{x} \in Q; \quad u(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \gamma \quad (18)$$

ставиться у відповідність релаксаційний процес

$$\left.\begin{aligned} &\Psi \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(\overline{x}),\ t,\ \overline{x} \in \Omega; && (а)\\ &u(t, \overline{x}) = g(\overline{x}),\ \overline{x} \in \gamma; && (б)\\ &u(0, \overline{x}) = u_0(\overline{x}),\ \overline{x} \in Q, && (в)\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

де Ψ — релаксаційний оператор факторизованої структури

$$\Psi = \prod_{i=1}^{s} \Psi_i, \quad \Psi_i = I + \alpha L_i, \quad (20)$$

де Ψ_i — оператори легко оборотні, здебільшого одновимірні, й такі, що процес із дискретним часом

$$\Psi \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = L u^n + f^n \quad (21)$$

збігається для всіх τ. Гранична ф-ція $u(\overline{x}) = \lim_{t \to \infty} u(t, \overline{x})$ не залежить від $u_0(\overline{x})$ і дає розв'язок с. к. з. (18).

Для розв'язування с. к. з. з постійними коеф. успішно застосовують класичні методи точкових джерел, зосереджених навантажень тощо, які ведуть до розв'язку с. к. з. у вигляді суперпозиції елементарних розв'язків, відповідних «зосередженим у точці» умовам (умови типу δ-ф-ції). Цей метод приводить до інтегр. рівнянь 1-го й 2-го роду для ф-цій джерел $\overline{\varphi}(\overline{x})$ на границі

$$\overline{g}(\overline{x}) = \int K(\overline{x}, \overline{s}) \cdot \varphi(\overline{s})\, d\overline{s} + \alpha\overline{\varphi}(\overline{x}),\ \overline{x},\ \overline{s} \in \gamma, \quad (22)$$

де ядро $K(\overline{x}, \overline{s})$ може бути й сингулярним. При $\alpha = 0$ маємо інтегр. рівняння Фредгольма 1-го роду, а при $\alpha \neq 0$ — рівняння Фредгольма 2-го роду.

Після дискретизації рівняння (22) приходять до системи лінійних рівнянь (недостатньо обумовленої, коли $\alpha = 0$), яку розв'язують прямими або ітераційними методами. Формально різницевий аналог (22) має меншу вимірність, ніж різницевий аналог (21), однак розв'язування цих систем є порівнянними в часі, бо в (22) є повністю заповнена матриця, тоді як у (21) є лише матриці з кількома ненульовими діагоналями.

Слід виділити особливий клас с. к. з. — задачі на власні значення й задачі зі змінним спектром. В с. к. з. на власні значення міститься параметр λ, за часткових значень якого с. к. з. втрачає єдиність розв'язку; ці значення λ наз. в л а с н и м и з н а ч е н н я м и с. к. з.; множина власних значень утворює с п е к т р задачі. Так, якщо L — самоспряжений додатний оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\overline{x}) \frac{d}{\partial \overline{x}_j}, \quad (23)$$

то в с. к. з.

$$Lu = \lambda u,\ \overline{x} \in Q,\ u(\overline{x}) = 0,\ \overline{x} \in \gamma \quad (24)$$

є дискретний зліченний спектр дійсних значень λ_k (всі додатні) й відповідна йому система взаємоортогональних власних ф-цій $u_n(\overline{x})$, які є розв'язком с. к. з. (24).

Скінченнорізницевий аналог (24) приводить до задачі лінійної алгебри про повний спектр симетричної матриці, для якої є ефективні методи розв'язування. Іноді треба знайти власне значення з певною екстремальною властивістю (максимальне або мінімальне за модулем, за дійсною або уявною частиною тощо). В цьому разі застосовують також методи встановлення.

С. к. з. зі змінним спектром відповідають задачі (24), коли спектр оператора L знакозмінний. Тоді застосовують ітераційні методи й складнішої структури, напр., багатошарові з вибором параметра релаксації.

До важливих нелінійних с. к. з. приходять, відшукуючи стаціонарні й автомодельні розв'язки в газовій динаміці. В цьому разі дифер. рівняння, якими описано автомодельне розв'язування, мають, як правило, особливості в граничних точках і в заздалегідь невідомих точках усередині. Заг. теорії таких крайових задач ще не розроблено.

Літ.: Ф а д д е е в Д. К., Ф а д д е е в а В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., 1963 [бібліогр. с. 677—734]; С о б о л е в С. Л. Уравнения математической физики. М., 1966; Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. М., 1966; Я н е н к о Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [бібліогр. с. 189—193]; Я н е н к о Н. Н. Введение в разностные методы математической физики, ч. 1—2. Новосибирск, 1968 [бібліогр. ч. 2, с. 379—385]; Р о ж д е с т в е н с к и й Б. Л., Я н е н к о Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968 [бібліогр. с. 585—592]; В л а д и м и р о в В. С. Уравнения математической физики. М., 1971 [бібліогр. с. 510—512]; Г о д у н о в С. К. Уравнения математической физики. М., 1971; М а р ч у к Г. И., К у з н е ц о в Ю. А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск, 1972 [бібліогр. с. 176—203]; К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 793—813]; У и л к и н с о н Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 559—564].

М. М. Яненко.

КРАЙОВІ УМОВИ — обмеження у вигляді одного чи кількох рівнянь, заданих у точках границі *крайових задач*.

КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ СПОСОБИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЮВАННЯ — див. *Кубатурні формули*.

КРИТЕРІЇ ЯКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ — сукупність прийнятих (постульованих) показників, які дають змогу оцінювати якість роботи *систем автоматичного керування* (САК). Критерії ці можна розділити на дві великі групи. До однієї групи, універсальної, входять інтегральні критерії — функціонали, числові значення яких правлять за міру якості САК. Критерії цієї групи вживаються частіше. Друга група критеріїв грунтується на задаванні певного розташування полюсів системи і застосовують її виключно для оцінювання якості лінійних систем. На відміну від безпосередніх оцінок показників якості, К. я. с. а. к. зв'язані певними залежностями з параметрами САК, і це дає можливість використовувати їх, розв'язуючи задачі синтезу.

Досить поширеною є оцінка якості за узагальненим інтегральним критерієм $I = \int_0^T f(x)\,dt$, де $f(x)$ — функція змінних, що характеризують стан системи, напр., від величини перехідної складової *похибки* $x(t)$ та її похідних, *керуючих діянь* та ін. З цього критерію залежно від виду $f(x)$ можна одержати оцінки для різних окремих випадків, напр.:

1) $f(x) = 1$ (тоді $I = \int_0^T dt$ — час перехідного процесу);

2) $$f(x) = x(t) \qquad \left(\text{тоді } I = \int_0^T x(t)\,dt,\right.$$
$$f(x) = |x(t)| \qquad I = \int_0^T |x(t)|\,dt$$
— інтегральні оцінки);

3) $f(x) = x^2(t)$ (тоді $I = \int_0^T x^2(t)\,dt$ — квадратична похибка).

Для лінійних систем більшість оцінок наведеного типу можна одержати без прямого інтегрування дифер. рівнянь САК та побудови *перехідних процесів*. Проте для нелінійних систем ці оцінки не можна застосовувати, не розв'язуючи рівняння системи і не будуючи кривої $x(t)$, а це обмежує застосування їх. Аналогічні К. я. с. а. к. використовують, оцінюючи дискретні системи (див. *Дискретних систем автоматичного керування синтез*). Коли на САК діють випадкові збурення, за найпоширеніший критерій якості динамічної точності править середня квадратична похибка, яка є характеристикою розсіяння можливих значень *випадкової величини* відносно їхнього середнього значення і яку визначають як додатне значення квадратного кореня з дисперсії випадкової величини:

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\, p(x)\, dx},$$

де m_x — *математичне сподівання* x, $p(x)$ — щільність імовірності.

Для стаціонарної випадкової ф-ції σ_x визначають аналогічно, але з усередненням у часі

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x(t)]^2\, dt}$$

де T — довжина відрізка на експериментальній кривій $x(t)$. Разом з цими оцінками при синтезі систем з випадковими діяннями використовують питомий риск, загальний риск тощо (див. *Дуальне керування*).

Критерії розподілу коренів дають змогу, якщо відомі корені характеристичного рівняння (полюси *передавальної функції*) й корені чисельника оператора замкненої системи (нулі передавальної функції), одержати деякі характеристики перехідного процесу. Можлива й обернена задача — так розташувати корені на комплексній площині, навіть не знаючи їхніх величин, щоб перехідний процес задовольняв певні вимоги. Осн. критеріями тут є загасання η, яке являє собою абсолютну величину дійсної складової кореня, розташованого ближче від інших до уявної осі, і коливальність $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, де 2φ — кут, що охоплює сектор комплексної напівплощини з вершиною в початку координат; усередині й на границі кута містяться всі корені. Обидві ці величини можна визначити без розв'язування характеристичних рівнянь. Критерії η та μ можна зв'язати певними співвідношеннями як з параметрами системи, так і з осн. характеристиками перехідного процесу. Застосовують також різні частотні критерії, основані на використанні перетворень Фур'є та Лапласа для одержання узагальнених частотних характеристик, які визначають перехідний процес за ненульових початкових умов у широкому класі діянь. При цьому як початкові дані можна використати не тільки дифер. рівняння, а й експериментально одержані частотні характеристики. В окремому випадку нульових початкових умов діяння типу *функції ступінчастої*

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin t\omega\, d\omega$$

показники якості оцінюються за властивостями дійсної частотної характеристики $P(\omega)$ без обчислення інтеграла. Зв'язок критеріїв з показниками перехідного процесу звичайно здійснюється у вигляді нерівностей.

Літ.: Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960; Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.— Л., 1962 [бібліогр. с. 596—600]; Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [бібліогр. с. 594—618]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [бібліогр. с. 743—763].

О. Л. Циганков.

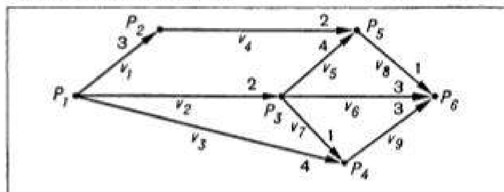
КРИТЕ́РІЙ СЕМАНТИ́ЧНОЇ ВІДПОВІ́ДНОСТІ — набір правил, за якими в даній автоматизованій інформаційно-пошуковій системі формально визначається ступінь семантичної близькості *пошукового образу документа* й *пошукового припису*, щоб зробити висновок про *релевантність документа* щодо інформаційного запиту. К. с. в. містить здебільшого інформацію про потрібну для релевантності порогову величину ступеня семантичної близькості.

Найпростіший К. с. в. передбачає цілковитий збіг пошукового образу документа з пошуковим приписом. Прикладом застосування такого К. с. в. можуть бути *інформаційно-пошукові системи* (ІПС), побудовані на використанні алфавітно-предметних і бібліотечно-бібліографічних класифікацій, хоча в них застосовують і критерій збігу початку пошукового образу документа (цифрового чи буквено-цифрового індексу) з індексом запиту. Критерій «на збіг» рідко застосовується в ІПС, побудованих на використанні дескрипторних мов; найпоширенішим простим К. с. в. в ІПС дескрипторного типу є критерій «на входження», який потребує, щоб у складі пошукового образу документа були всі *дескриптори* пошукового припису. Проте вимога про цілковитий збіг пошукового образу документа з пошуковим приписом (або цілковите «входження» дескрипторів припису) обмежує можливості реальних ІПС. Тому більша частина розроблених К. с. в. для існуючих ІПС враховує можливість часткового збігу пошукового образу документа з пошуковим приписом. При цьому для релевантності документа щодо інформаційного запиту потрібно, щоб був не лише частковий збіг, а й ступінь такого збігу, що перевищує порогове значення. Якщо величина часткового збігу пошукового образу документа з пошуковим приписом, можливо коректована в процесі функціонування ІПС, досягає заданого значення, то документ вважається релевантним і видається у відповідь на інформаційний запит. Є багато варіантів К. с. в., це зумовлюється особливостями інформаційно-пошукової мови, використовуваної в ІПС, та конкретними завданнями, що їх розв'язує дана ІПС.

Л. Е. Пшенична.

КРИТИ́ЧНИЙ ШЛЯХ — послідовність технологічно взаємопов'язаних робіт сіткового плану-графіка, що з'єднує початкову й кінцеву події й має максимальну «довжину» (під довжиною тут розуміють сумарну тривалість усіх робіт, які входять до послідовності). Напр., сітковий графік (мал.) має два К. ш.: перший проходить через v_2, v_5, v_8, другий — через v_3, v_9 (цифри поруч зі стрілками означають тривалість робіт, зображуваних цими стрілками). Поняття К. ш. використовують під час керування комплексом робіт, виконуваних згідно з сітковим планом-графіком. При цьому роботам, які лежать на К. ш., приділяють особливу увагу, бо будь-яка затримка у виконанні якоїсь з них призводить до зриву строку закінчення всього комплексу робіт. Такий метод планування і керування наз. інколи методом «критичного шляху».

І. К. Цикунов.



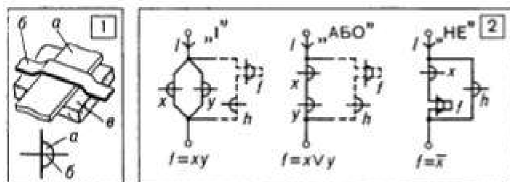
Сітковий графік.

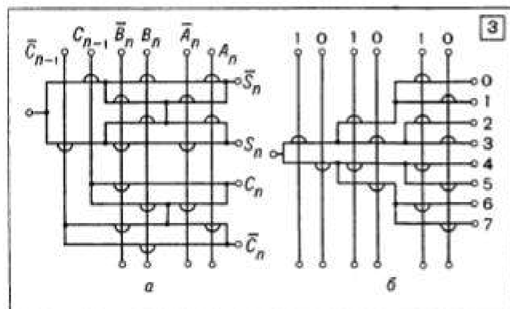
КРІОГЕ́ННІ ЕЛЕМЕ́НТИ ОБЧИ́СЛЮВАЛЬНОЇ ТЕ́ХНІКИ — елементи, основані на використанні явища надпровідності. Існує кілька типів їх: персистори, персистатрони, кріотрони, колотрони, кріосари, кріосистори, тунельні кріотрони та ін. Найперспективніші — *кріотрони* й тунельні кріотрони.

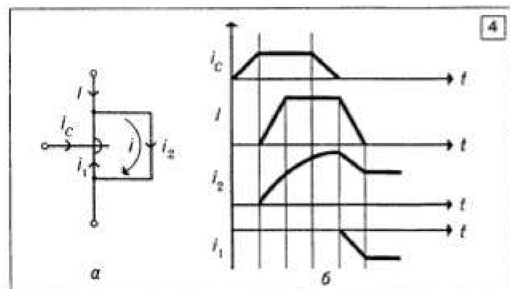
КРІОТРО́Н — надпровідниковий пристрій, опір керованого елемента якого змінюється залежно від величини керуючого магнітного поля. Використовується як один з *кріогенних елементів обчислювальної техніки.* Спочатку (з 1955) К. виконували у вигляді дротової конструкції, напр., з танталового стрижня, що був вентилем, та обмотки на ньому, виготовленої, напр., з ніобієвого дроту,— вона виконувала функції затвора. З 1957 застосовують плівкові К. (мал. 1), що являють собою розділені ізоляцією перетинні плівки — вентиль (*а*) і затвор (*б*), які містяться над екраном (*в*); останній поліпшує прямокутність перемикальної характеристики К. і збільшує його швидкодію. Використовують переважно плівкові К.; дротяні застосовують лише як засіб для моделювання нових кріотронних пристроїв. У тунельному К. за допомогою струму в плівковому затворі здійснюється подавлення тунельного ефекту між двома іншими плівками. Широкому впровадженню тунельних К. перешкоджають технологічні труднощі виготовлення їх.

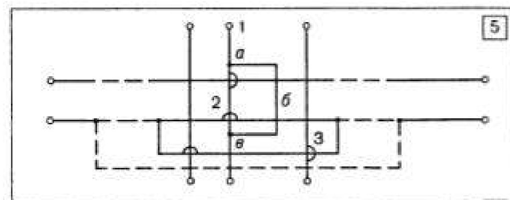
К. можна використовувати для побудови найрізноманітніших схем, застосовуваних в обчисл. техніці: логічних — перемикачів, *дешифраторів, суматорів комбінаційних* і т. ін.; запам'ятовувальних — елементарних комірок адресного й асоціативного ЗП, *тригерів, регістрів* і нагромаджувальних *лічильників;* підсилювачів малих сигналів, формувачів вихідних та керуючих сигналів; вимірювальних та перетворювальних схем, суміжних з обчислювальними системами, давачів магнітного поля й низьких температур, генераторів і перетворювачів частоти тощо. Надзвичайно простий за конструкцією, К. має перемикальні характеристики, аналогічні харак-

теристикам електронних ламп або напівпровідникових приладів. Форму цих характеристик можна змінювати, змінюючи деталі конструкції К. або співвідношення між розмірами вентиля і затвора. Напр., К. з надпровідним екраном під вентилем має ступінчасту перемикальну характеристику, необхідну для схем релейного типу і формувачів, а К. без екрана — лінійну характеристику, необхідну для підсилювальних, перетворювальних та вимірювальних схем. Змінюючи відношення ширини вентиля К. до ширини його затвора, можна змінювати коефіцієнт підсилення. Можна й керувати коефіцієнтом підсилення за допомогою додаткового магнітного поля зміщення і т. ін.









1. Конструкція (вгорі) й умовне позначення (внизу) кріотрона.
2. Приклади логічних елементів «І», «АБО» й «НЕ» на кріотронах.
3. Схеми комбінаційного суматора (*а*) і дешифратора (*б*) на кріотронах: A і B — доданки; C_{n-1} — перенос із попереднього розряду; C_n — перенос у наступний розряд; S_n — сума.
4. Схема персисторного контуру (*а*) і струмові діаграми (*б*) в ньому.
5. Схема асоціативного запам'ятовувального елемента на кріотронах.

На основі К. звичайно реалізують функції двозначної логіки. При побудові двозначних логічних елементів двом значенням логічних змінних відповідають такі два режими роботи К.: опору вентиля немає (стан надпровідності) і є (стан надпровідності зруйновано). Перший стан забезпечується, якщо струму в затворі немає або величина його менша за критичну; другий — коли струм затвора більший за критичний. Хоч абсолютна величина опору вентиля у другому стані дуже мала (10^{-3} — 10^{-5} *ом*), вона перевищує опір надпровідного вентиля в нескінченне число разів.

На мал. 2 показано способи реалізації логічних операцій «І», «АБО» та «НЕ» в схемах на основі К. Аналогічно можна реалізувати й інші функціонально повні набори. В схемах, зображених на мал. 2, використано принцип витіснення струму надпровідності з лівої гілки контура в праву, коли поєднанню вхідних сигналів x та y відповідає одиничне значення ф-ції f. Вихідний сигнал у схемах «І» й «АБО» — це струм у правій гілці, який можна використати як струм затворів К. навантаження, в схемі «НЕ» — це струм у лівій гілці. Специфічна особливість таких елементів полягає в тому, що після вимкнення вхідних сигналів x та y елементи не повертаються до первісного стану, тобто струм із правої гілки не може спонтанно перемикатися в ліву. Для повернення будь-якого з цих елементів до первісного стану цей струм можна витіснити сигналом повернення h за допомогою допоміжного К. Можливий і інший принцип побудови логічних схем, при якому окрім сигналів змінних x, y, ... використовують ще й сигнали їхніх інверсій $\overline{x}$, $\overline{y}$, ...

На мал. 3 показано схеми комбінаційного суматора (*а*) та дешифратора (*б*) на К., побудованих з використанням цього принципу. В 1962 було доведено принципову можливість побудови ЦОМ повністю з К. і обумовлено специфіку її організації, проте будувати з К. арифметичні та керуючі блоки машини недоцільно. Тому основна галузь застосування логічних кріотронних елементів — це блоки керування адресним та асоціативним кріотронним З П й самі комірки адресного та особливо *запам'ятовувального пристрою асоціативного*.

Для зберігання інформації в кріотронній схемі основним є спосіб, оснований на використанні циркуляції струму надпровідності в замкненому надпровідному контурі протягом якого завгодно часу. Такий струм називають **персисторним**. Записування персисторного струму в контур пояснено на мал. 4. Струм запису I спочатку надходить до правої гілки, індуктивність якої в кілька разів більша, ніж у лівої гілки, але її активний

опір завжди дорівнює нулеві, а в лівій гілці надпровідність у момент записування руйнується струмом i_c. Після зняття i_c перерозподілу струмів між гілками не відбувається, якщо величина струму i_2 менша за власний критичний струм у правій гілці. Але в момент вимикання струму I електромагнітна енергія, запасена в індуктивності правої гілки, перерозподіляється по всьому контуру, внаслідок чого в ньому замикається персисторний струм $i_2 = -i_1$, який може існувати до моменту запирання К. струмом i_c. Зображений на мал. 4, *а* персисторний контур є основою *комірок запам'ятовувального пристрою* адресних та асоціативних пристроїв. Крім персисторного контура, до складу цих комірок вводять додаткові К. для адресного керування зчитуванням і записуванням інформації, а в асоціативному ЗП — ще й для виконання логічних операцій, пов'язаних з асоціативним пошуком,— логічного порівнювання, накладання заборони (маски) тощо. На мал. 5 показано схему асоціативного запам'ятовувального елемента на чотирьох К. Тут контур *абва*— персисторний. У його гілці *ав* провадиться порівнювання записаної інформації з ознакою опиту, який надходить по шині 1. При незбігу записаної інформації з ознакою опиту запирається кріотрон 2. Зчитування здійснюється за допомогою кріотрона 3.

Впровадження пристроїв на К. в обчисл. техніку стримується слабо розвиненою технологією виготовлення великих *інтегральних схем.* Такі пристрої становитимуть практичний інтерес, якщо вони за своїми характеристиками значно переважатимуть аналогічні пристрої на некріогенних елементах: напр., якщо асоціативні ЗП матимуть ємність 10^6 *біт*, а адресні — 10^8 *біт* і частоту звертання — порядку мегагерца. Це стане можливим, коли за один технологічний цикл виготовлятимуться плати, що мають сотні тисяч елементів.

Літ.: Кан Я. С., Михайлов Г. А., Рахубовский В. А. Макет ЦВМ на криотронах с программным управлением. «Механизация и автоматизация управления», 1966, № 3; Ченцов Р. А. Криотроника. «Электронная техника. Серия 15. Криогенная электроника», 1969, в. 1; Алфеев В. Н. Криогенная электроника. «Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника», 1970, т. 13, № 10; Бремер Дж. Сверхпроводящие устройства. Пер. с англ. М., 1964; Гейндж Р. Криоэлектронное гибридное запоминающее устройство сверхбольшой емкости с произвольной выборкой. «Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике США», 1968, т. 56, № 10.

І. О. Артеменко, І. Д. Войтович, Г. О. Михайлов.

КРОК КВАНТУВАННЯ — див. *Квантування.*

КУБ ФЕРИТОВИЙ — блок *оперативного запам'ятовувального пристрою,* призначений для зберігання інформації, складено його з *матриць запам'ятовувальних* з феромагн. осердями, плівковими магнітопроводами тощо.

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ — формули виду

$$\int_\Omega p(x)\, f(x)\, dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}), \qquad (1)$$

де Ω — область інтегрування в n-вимірному евклідовому просторі (див. *Простір абстрактний*), $p(x)$ — фіксована функція (*вагова функція*), $f(x)$ належить достатньо широкому класові функцій, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, точки $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ називаються вузлами і числа C_j — коефіцієнтами К. ф. Вузли звичайно належать Ω, але ця вимога не є необхідною. Сума в (1) є узагальненням суми Рімана і наз. вона кубатурною сумою. При $n = 1$ ф-ла (1) і сума в правій частині наз. квадратурними. Кубатурну суму й беруть за наближене значення інтеграла з лівої частини ф-ли (1).

Один із способів одержування К. ф. оснований на інтерполяції (див. *Інтерполяція функцій*). Виберемо $M(m, n) = (m+n)!\ /m!n!$ точок $x^{(j)}$ ($j = 1, \ldots M(m, n)$) в Ω, які не лежать на алгебр. гіперповерхні порядку m. Побудуємо інтерполяційний многочлен степеня m ф-ції $f(x)$ за її значеннями в $x^{(j)}$ й запишемо наближену рівність

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^{M(m,n)} L_j(x)\, f(x^{(j)}), \qquad (2)$$

де $L_j(x)$ — многочлен впливу вузла $x^{(j)}$. Він дорівнює 1 в $x^{(j)}$ і 0 — в решті вузлів. Помноживши обидві частини рівності (2) на $p(x)$ та інтегруючи по Ω, одержимо К. ф. виду (1), у якій $N = M(m, n)$ і

$$C_j = \int_\Omega p(x)\, L_j(x)\, dx. \qquad (3)$$

Вважають, що існують $\int_\Omega p(x)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\, dx$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — невід'ємні цілі числа), які називаються моментами $p(x)$. К. ф., $M(m, n)$ вузлів якої не лежать на алгебр. гіперповерхні порядку m, а коеф. визначаються рівністю (3), наз. інтерполяційною.

Коеф. C_j можна знайти й з лінійної алгебр. системи, яку одержимо, якщо запишемо, що К. ф. точна для всіх одночленів степеня, меншого за m або рівного йому, від n змінних. Це грунтується на тому, що інтерполяційна К. ф. є точною для таких многочленів. Обернене твердження: К. ф. з $M(m, n)$ вузлами, точна для многочленів степеня, меншого за m або рівного йому, є інтерполяційною,— не завжди правильне. Наведемо відповідну теорему. Для того, щоб К. ф. (1), точна для многочленів степеня, не вищого за m, була інтерполяційною, необхідно й достатньо, щоб ранг матриці $[\varphi_1(x^{(j)}), \varphi_2(x^{(j)}), \ldots$

$\ldots, \varphi_{M(m,n)}(x^{(j)})]_{j=1}^{N}$ розміру $N \times M(m, n)$, дорівнював N. Тут через $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ позначено одночлени від n змінних, занумеровані так, що одночлени меншого степеня мають менший номер, а одночлени одного й того самого степеня занумеровано як завгодно. Зокрема, $\varphi_1(x) = 1$.

Якщо Ω і $p(x)$ мають симетрію, то в деяких випадках удається побудувати К. ф., точні для многочленів степеня, меншого за m або рівного йому, з меншою за $M(m, n)$ кількістю вузлів. Зменшення кількості вузлів досягають шляхом спец. вибору їх.

Для найпростіших областей, зокрема для куба, кулі, симплексу й $p(x) = 1$, можна побудувати К. ф. n-кратним застосуванням квадратурних ф-л. Напр., якщо Ω — куб: $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, то за допомогою, скажімо, квадратурної ф-ли Гаусса з k вузлами t_i й коеф. A_i одержимо К. ф.

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \cong \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{k} A_{i_1} \ldots A_{i_n} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}),$$

яка має k^n вузлів і є точною, коли $f = x_1^{\alpha_1} \times \ldots \times x_n^{\alpha_n}$, де $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 2k - 1$ ($i = 1, \ldots, n$). Вадою таких формул є швидке збільшення кількості вузлів при зростанні n.

Серед К. ф., точних для многочленів степеня, меншого за m або рівного йому, великий інтерес становлять ті, які мають найменше вузлів. У разі, коли $m = 1, 2$, такі ф-ли побудовано за будь-якого n і для довільних Ω й $p(x) \geqslant 0$; при цьому найменша кількість вузлів дорівнює 1 у першому випадку, і $n + 1$ — в другому. При $m \geqslant 3$ найменша кількість вузлів залежить від області Ω й вагової ф-ції. Напр., при $m = 3$ для області з центр. симетрією й $p(x) = 1$ найменша кількість вузлів дорівнює $2n$, а для симплексу й $p(x) = 1$ вона дорівнює $n + 2$. Цими двома прикладами й вичерпується випадок $m = 3$ за будь-якого n; при $m > 3$ й $n > 2$ К. ф. з найменшою кількістю вузлів не відомі навіть для областей окремого виду. При $n = 2$ випадок, коли $m = 3$, досліджено для довільної Ω й невід'ємної $p(x)$, не такі повні результати одержано для $m = 4,5$.

Наведемо ще два результати про знак коеф. К. ф. за припущення, що $p(x) \geqslant 0$ в області Ω. Якщо Ω обмежена й замкнена, то існує К. ф. з $M(m, n)$ вузлами, точна для многочленів степеня, меншого за m або рівного йому, й така, що вузли належать Ω і коеф. невід'ємні. Питання про фактичну побудову такої ф-ли залишається відкритим. Якщо К. ф. точна для многочленів степеня, меншого за m або рівного йому, то серед її коеф. є не менше як $M(l, n)$ додатних, де $l = [m/2]$ — ціла частина числа $m/2$. Звідси випливає, що $M(l, n)$ — нижня межа для кількості вузлів такої ф-ли.

Нехай X — банахів простір функцій, заданих на Ω, такий, що залишковий член К. ф. (1) $l(f)$ (різниця між інтегралом і кубатурною сумою) є лінійним функціоналом в X. Норма функціоналу

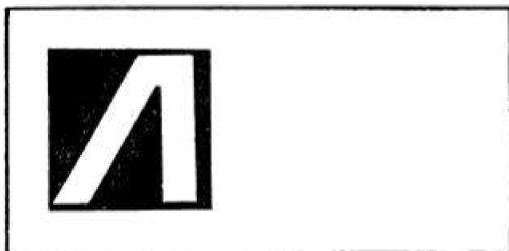
$$\|l\| = \sup_{\|f\| = 1} l(f)$$

характеризує якість К. ф. для ф-цій простору X.

Інший підхід до побудови К. ф. грунтується на мінімізації $\|l\|$ як ф-ції вузлів $x^{(j)}$ і коеф. C_j шуканої К. ф. (за фіксованої кількості вузлів). Навіть при $n = 1$ цей підхід здійснено лише в найпростіших окремих випадках. Для будь-якого n важливі результати одержав рад. математик С. Л. Соболєв (н. 1908). Ці результати пов'язані з мінімізацією $\|l\|$ як ф-ції коеф. C_j, при цьому припускають, що вузли $x^{(j)}$ фіксовані й утворюють правильну гратку. Як X, зокрема, беруть простір L_2^m (E_n), де $m > \frac{n}{2}$ й шукана К. ф. повинна бути точною для всіх многочленів степеня, меншого за m. Для обчислювання кратних інтегралів застосовують і метод статистичних випробувань — т. з. *Монте-Карло метод* і метод, який грунтується на використовуванні теорії чисел.

Літ.: Бусленко Н. П. [та ін.]. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло). М., 1962 [бібліогр. с. 313—327]; Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М., 1963 [бібліогр. с. 214—216]; Соболев С. Л. Лекции по теории кубатурных формул, ч. 1—2. Новосибирск, 1964—65 [бібліогр. ч. 1, с. 191]; Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966 [бібліогр. с. 324—360]; Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.

І. П. Мисовських



ЛАГ І ТАГ СИСТЕ́МИ — різновиди *Поста числень,* які характеризуються специфічними правилами виведення. ЛАГ системи мають правила виду $s_{i_1} \ldots s_{i_\beta} \to E_i$, які застосовують так: якщо перші β букв слова є $s_{i_1} \ldots s_{i_\beta}$, то в ньому стирають першу букву, тобто s_{i_1}, і справа до цього слова дописують слово E_i (E_i може бути й пустим). ТАГ системи мають правила виду $s_i \to E_i$; крім цих правил, для них вказано ще й якесь ціле додатне число β. Застосування правил виведення в ТАГ системах полягає ось у чому: якщо слово починається буквою s_i, то в ньому стирають перші β букв і справа приписують слово E_i. Якщо довжина первісного слова $\leqslant \beta$, то правила виведення до нього не застосовні.

З кожною системою правил виведення пов'язуються такі дві основні проблеми: 1) проблема зупинки: чи є рекурсивною чи ні сукупність усіх тих слів, починаючи з яких процес застосування правил виведення обривається; 2) проблема вивідності: чи для кожного слова є рекурсивною сукупність усіх тих слів, які одержують за скінченне число застосувань правил виведення.

Є такі ЛАГ і ТАГ системи, для яких проблема вивідності є алгоритмічно нерозв'язною. Нехай ε — макс. довжина правих частин правил виведення, $\bar{\varepsilon}$ — їхня мінім. довжина. Показано, що при $\beta = 2$, $\varepsilon = 3$ і $\bar{\varepsilon} = 1$ існує ТАГ система з нерозв'язною проблемою зупинки і при $\beta = \varepsilon = 2$ — така сама ЛАГ система.

Літ.: W a n g H. Tag systems and Lag systems. «Mathematische annalen», 1963, B. 152, H. 1.

М. І. Кратко.

ЛАГРА́НЖА ЗАДА́ЧА — варіаційна задача на умовний екстремум. Формулюється так: серед кривих $y(x)$, що задовольняють дифер. рівняння зв'язку

$$\Phi_i(x, y, y') = 0, \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{1}$$

$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, m, \; m < n$

і граничні умови

$$\varphi_i(x_1, y(x_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \; k \leqslant n + 1;$$

$$\eta_j(x_2, y(x_2)) = 0, \quad j = 1, \ldots, p, \; p \leqslant n + 1$$

відшукати таку, на якій функціонал $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$ досягає екстремального значення. Щоб розв'язок задачі мав місце, ф-ції g, Φ_i, φ_i, η_i, f повинні задовольняти певні вимоги (див. *Больца задача, Задача з рухомими кінцями*). Замість дифер. рівнянь зв'язку (1) обмеження можуть задаватися рівняннями $g_i(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $m < n$; кінці x_1 і x_2 можуть бути фіксованими. Л. з. — окремий випадок задачі Больца, тому її теорія переноситься на Л. з. За допомогою правила множників (див. *Лагранжа правило множників*) Л. з. зводиться до задачі без обмеження.

Літ. див. до ст. *Варіаційне числення.*

Ю. М. Данилін.

ЛАГРА́НЖА ПРА́ВИЛО МНО́ЖНИКІВ — метод розв'язування задач на умовний екстремум, що полягає в побудові системи рівнянь, яку повинен задовольняти *екстремум* функції $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, на множині Ω, означуваній системою рівнянь $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, де $m < n$. Розглянемо задачу знаходження точки x^*, для якої

$$f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in \Omega\}. \tag{1}$$

Нехай у точці x^* хоча б один з визначників m-го порядку матриці

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

не дорівнює нулеві. Щоб вектор $x^* \in \Omega$ був розв'язком задачі (1), необхідно, щоб знайшлось m чисел $u_1, \ldots, u_m$, які разом з вектором x^* задовольняють таку систему з $m + n$ рівнянь з $m + n$ невідомими:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ф-ція $F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$ наз. ф у н к ц і є ю Л а г р а н ж а, а числа $u_1, \ldots, u_m$ — м н о ж н и к а м и Л а г р а н ж а.

Р. А. Поляк, М. Є. Примак.

ЛАНЦЮ́Г г р а ф а — послідовність вигляду $Q = x_0u_1x_1u_2x_2 \ldots x_{l-1}u_lx_l$, де ребра $u_1, u_2, \ldots, u_l$ всі різні й ребро u_i з'єднує (в будь-якому напрямі) вершини x_{i-1} та x_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) графа $L = (X, U; P)$. Вершину x_0 наз. початковою, вершину x_l — кінцевою, а число $l \geqslant 0$ — довжиною Л. Л. наз. простим, якщо всі його вершини різні. Л., який містить усі ребра графа, наз. ейлеровим, а простий Л., що містить усі вершини графа,— гамільтоновим. Якщо в послідовності Q кожне ребро u_i — це дуга, що йде з x_{i-1} в x_i ($i = 1, 2, \ldots, l$), то Л. наз. орієнтованим (допустивши поряд з дугами ще й петлі, одержимо

шлях). Якщо в Q дозволити повторення ребер, то одержимо маршрут. Див. також *Графів теорія*. *Г. О. Донець, О. О. Зиков.*

ЛАНЦЮ́Г ЗАОКРУ́ГЛЕННЯ — спеціальне устаткування в *суматорах*, призначене для заокруглювання одержуваного результату, щоб зменшити похибки при виконанні арифм. операцій. При цьому похибка результату виконання операцій не перевищує половини значення молодшого розряду числа. Л. з. складається звичайно з одного *тригера* й *ланцюга переносу* між цим тригером і молодшим розрядом суматора. При зсуві мантиси праворуч на тригері Л. з. запам'ятовується старша з цифр зсунутої частини мантиси за межі сітки. Під час наступного підсумовування ця цифра у вигляді переносу надходить до молодшого розряду суматора. Див. *Арифметика з плаваючою комою*, *Операції над числами*. *Д. О. Поспелов.*

ЛАНЦЮ́Г ПЕРЕНО́СУ — спеціальний тракт у суматорах і лічильниках цифрових обчислювальних машин для передавання цифри переносу з одного розряду в інший. У *суматорах послідовних* Л. п. становить затримку, ввімкнену у вигляді елемента зворотного зв'язку в однорозрядній підсумовувальній схемі. У *суматорах паралельних* Л. п. складається з багатьох каналів із затримками між виходами однорозрядних підсумовувальних схем і входами схем сусідніх старших розрядів. Збільшенню швидкодії паралельних суматорів заважає послідовний характер формування переносів і виникнення наскрізних переносів (що виникають послідовно у кількох сусідніх розрядах), внаслідок чого значно збільшується час підсумовування. Щоб уникнути втрат часу хоч від наскрізних переносів, у суматорі часто поряд з Л. п. з молодшого в сусідній старший розряд конструюють ланцюги групового переносу на кілька розрядів (усередині групи перенос у кожному розряді виникає одночасно, а між групами може бути організований або наскрізний перенос, або одночасний перенос). Встановлено, що матем. сподівання довжини макс. переносу в двійкових паралельних суматорах наближається до величини, що дорівнює $\log_2 n$, де n — число розрядів суматора; тому число розрядів у групі беруть з урахуванням значення n. Для прискорення переносів часто використовують спеціальні суматори (надпаралельні й паралельно-паралельні). Оскільки $\log_2 n \ll n$, частіше при проектуванні суматорів використовують асинхронний принцип керування закінченням підсумовування. В цьому випадку конструюють спеціальну схему, яка визначає момент завершення переносів.

Літ.: Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]; Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [бібліогр. с. 559—575].

Д. О. Поспелов.

ЛАНЦЮЖО́К — скінченна послідовність символів. Поняття «Л.» запроваджене в *лінгвістиці математичній*, тотожне поняттю *слово* в теорії алгоритмів.

ЛАПЛА́СА ДИСКРЕ́ТНІ ПЕРЕТВО́РЮВАННЯ — перетворювання, що встановлюють зв'язок між оригіналами й зображеннями решітчастих функцій. Пряме Л. д. п. *функції решітчастої* $f[n]$ і зсуненої решітчастої ф-ції $f[n, \varepsilon]$ визначається відповідно такими співвідношеннями:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\, e^{-qn} \qquad (1,\ а)$$

і

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon]\, e^{-qn}. \qquad (1,\ б)$$

Тут $q = sT$ — комплексне число, яке наз. параметром Л. д. п.; T — інтервал дискретності решітчастої ф-ції; s — параметр звичайного перетворення Лапласа.

Значення $\operatorname{Re} q = \sigma_з$, для якого при $\operatorname{Re} q > \sigma_з$ ряди (1) збігаються, а при $\operatorname{Re} q < \sigma_з$ — розбігаються, наз. абсцисою збіжності. В (1) решітчасті функції $f[n]$ і $f[n, \varepsilon]$ наз. о р и г і н а л а м и, а функції комплексної змінної $F^*(q)$ і $F^*(q, \varepsilon)$ — зображеннями. Співвідношення (1) скорочено записують у вигляді:

$$F^*(q) = D\{f[n]\} \div\!\!\rightarrow f[n] \qquad (2,\ а)$$

і

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} \div\!\!\rightarrow f[n, \varepsilon], \qquad (2,\ б)$$

де D — символ Л. д. п., а $\div\!\!\rightarrow$ — знак відповідності між оригіналом і зображенням.

Часто користуються ще й такими перетвореннями:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]\, z^{-n} \qquad (3,\ а)$$

і

$$F^*(z, m) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT, mT]\, z^{-n}, \qquad (3,\ б)$$

де $z = e^{sT}$, їх наз. відповідно z-п е р е т в о р е н н я м та м о д и ф і к о в а н и м z-п е р е т в о р е н н я м і позначають так:

$$F^*(z) = z\{f[nT]\} \div\!\!\rightarrow f[nT] \qquad (4,\ а)$$

і

$$F^*(z, m) = Z_m\{f[nT, mT]\} \div\!\!\rightarrow f[nT, mT]. \qquad (4,б)$$

Крім о д н о с т о р о н н і х Л. д. п., які наведено вище, користуються й д в о с т о р о н н і м и Л. д. п., які визначаються (1) або (3), коли підсумовування здійснюється в межах $-\infty \leqslant n \leqslant +\infty$. Якщо оригінали дорівнюють нулеві при $n < 0$, то двостороннє Л. д. п. збігається з одностороннім.

Будь-яку решітчасту ф-цію $f[n]$ (з постійним інтервалом дискретності) можна подати як суму N решітчастих ф-цій $f_j[n]$, що їх наз. к о м п о н е н т а м и з п р о п у с к о м:

$$f[n] = \sum_{j=0}^{N-1} f_j[n], \qquad (5)$$

де

$$f_j[n] = \begin{cases} f[n] & \text{при } n = j + kN; \\ 0 & \text{при } n \neq j + kN; \end{cases}$$

$j = 0, 1, \ldots, N-1; \quad k = 0, 1, \ldots; \quad N \geqslant 2,$

z — перетворення цих компонент, або т. з. z-перетворення з пропуском, яке визначають за формулою (2), його можна зобразити у вигляді

$$F_j^*(z) = z\{f_j[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_j[n] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(j + kN) z^{-j-kN}. \qquad (6)$$

Це перетворення можна визначити і за зображенням початкової решітчастої ф-ції

$$F_j^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{F(\omega)}{\omega} \frac{\omega^j z^{-j}}{1 - \omega^N z^{-N}} d\omega, \quad (7)$$

де $F(\omega) = F^*(z)|_{z=\omega}$, а M — замкнений контур, який відокремлює особливості $\frac{F(\omega)}{\omega}$ та $\frac{1}{(1-\omega)^N}$.

Досліджуючи дискретні системи з амплітудно-імпульсною модуляцією 2-го роду (див. *Модуляція імпульсна*), іноколи застосовують т. з. p-перетворення, яке є звичайним перетворенням Лапласа ф-цій $f_p(t)$, що їх визначають так:

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } nT \leqslant t \leqslant (n+m)T, \\ 0 & \text{при } (n+m)T < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (8)$$
$$0 < m < 1.$$

Перетворення, яке встановлює зв'язок між зображеннями $F_p(s)$ та $F(s)$ функцій $f_p(t)$ і $f(t)$, відповідно позначають через $\mathbf{P}[F(s)]$ і визначають за такою ф-лою:

$$F_p(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(\nu) \frac{1 - e^{-m(s-\nu)}}{(s-\nu)[1 - e^{-T(s-\nu)}]} d\nu, \quad (9)$$

де $F(\nu) = F(s)|_{s=\nu}$, а Γ — контур інтегрування, який охоплює зліва всі полюси $F(\nu)$. p-перетворення поширюється й на функції $f_n(t)$, які визначають так:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t_n \leqslant t \leqslant t_n + h_{n+1}; \\ 0 & \text{при } t_n + h_{n+1} < t < t_{n+1}; \end{cases} \quad (10)$$

$$h_{n+1} < t_{n+1} - t_n; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

і використовують при аналізі дискретних систем із скінченним часом знімання даних, у яких одночасно відбувається частотно-, широтно- й амплітудно-імпульсна (2-го роду) модуляція.

Обернені Л. д. п., що дають змогу за зображеннями визначити оригінали, одержують за формулами обернення

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(q) e^{qn} dq; \quad (11, а)$$

і

$$f[n, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(q, \varepsilon) e^{qn} dq, \quad (11, б)$$

де $c > \sigma_a$.

Для зображень, які являють собою дробово-раціональні ф-ції за e^q (або z), застосовують формули розкладання, аналогічні таким у звичайному перетворенні Лапласа; застосовують і методи, які грунтуються на розвиненні зображень у ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (12)$$

При цьому в (12) членові $c_k z^{-k}$ відповідає значення решітчастої ф-ції в момент часу $n = k$, тобто $c_k = f[n]|_{n=k}$. Зв'язок між зображеннями за Лапласом і Л. д. п. встановлюють співвідношеннями

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi i r)\varepsilon} F(q + 2\pi i r), \quad (13, а)$$

$$F^*(q) = {}^1/_2 f[0] + \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi i r) \quad (13, б)$$

і

$$F(q) = \int_0^1 e^{-q\varepsilon} F^*(q, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (14)$$

які записують іноді у вигляді:

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{F(q)\}; \quad (15, а)$$

$$F(q) = D^{-1}\{F^*(q, \varepsilon)\}. \quad (15, б)$$

Співвідношення, подібні (11) та (13) — (15), властиві й z-перетворенням. Подібно до (15, б) для позначення обернених перетворень використовують символи D^{-1}, z^{-1}, Z_m^{-1}, $\mathbf{P}^{-1}$. У практичних розрахунках широко використовують таблиці зображень для найпоширеніших функцій, що дає змогу знаходити оригінали без звертання до загальних формул зворотного Л. д. п.

Л. д. п. використовують при дослідженні дискретних систем автомат. керування, наближеному дослідженні неперервних систем, розв'язуванні різницевих рівнянь тощо.

Літ.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бібліогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [бібліогр. с. 173—174]; Фридланд Б. Импульсные системы регулирования с периодически меняющимися параметрами. В кн.: Тру-

ды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2. М., 1961; Д ж у р и Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Пер. с англ. М., 1963 [бібліогр. с. 445—450]; Д ё ч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. Пер. с нем. М., 1971.

Ю. В. Крементуло.

ЛЕЖА́НДРА — КЛЕ́БША УМО́ВА — необхідна умова екстремуму для варіаційних задач, одержана з використанням другої варіації функціоналу. Формулюється вона так: для того, щоб функціонал $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$, визначений на кривих з фіксованими кінцями, досягав на кривій C мінімуму (максимуму), необхідно, щоб уздовж цієї кривої виконувалась умова $\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Л.— К. у. для *Больца задачі:* щоб функціонал $I(y)$ досягав мінімуму на припустимій кривій C, що задовольняє правило множників, необхідно, щоб уздовж неї виконувалася нерівність $\frac{\partial^2 F}{\partial y'_k \partial y'_j} \delta_k \delta_j \geqslant 0$ при будь-яких $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \neq 0$, що задовольняють рівняння $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y'_h} \delta_k = 0$.

Літ. див. до ст. *Варіаційне числення.*

Ю. М. Данилін.

ЛІНГВІ́СТИКА МАТЕМАТИ́ЧНА — прикладна математична дисципліна, основне завдання якої — розробка точних методів вивчення природних мов, а інакше, розробка метамови лінгвістики.

Виникнення Л. м. у 2-й пол. 50-х рр. 20 ст. зумовлене насамперед внутр. потребами лінгвістики, стимулював його і розвиток автоматичного перекладу (див. *Машинний переклад*), що вимагав уточнення лінгвістичних понять. Крім автомат. перекладу, методи Л. м. застосовують і в інших галузях лінгвістики. Л. м., хоч і не є частиною власне лінгвістики, розвивається в щільному контакті з нею; разом з тим усередині Л. м. виникають і самостійні проблеми, що не завжди мають безпосередні застосування в лінгвістиці. В Л. м. широко використовують методи *алгоритмів теорії*, *автоматів теорії* та алгебри.

Природно уявляти функціонування мови як процес перетворювання деяких об'єктів (їх можна назвати «смислами») на об'єкти іншої природи — «тексти», і навпаки. З міркувань змісту ці перетворювання можна розчленувати на етапи. Напр., при одному з найгрубіших членувань якийсь етап може полягати в переході від «смислів» до «синтаксичних структур» — наборів елементів речень, з'єднаних «синтаксичними зв'язками», але ще не розміщених у лінійну послідовність. На наступному етапі виходить лінійна послідовність слів, а потім слова перетворюються на ланцюжки звуків (див. *Модель «смисл ↔ текст»*). Для формального описування такого процесу треба побудувати матем. поняття, які були б моделями «смислів», «текстів» і результатів проміжних етапів (щоб модель «працювала», ці об'єкти повинні бути конструктивними). Етапи перетворення природно моделювати ефективними відображеннями відповідних множин об'єктів одна в одну. Але картина ускладнюється тим, що зазначене перетворювання неоднозначне, і такими самими є всі чи майже всі (залежно від способу членування) проміжні етапи. Це зумовлено однією з найважливіших особливостей мови — явищем синонімії, тобто можливістю передавати той самий зміст різними засобами. Тому, щоб моделювати ці етапи, доводиться будувати замість детермінованих систем (алгоритмів) недетерміновані (числення), які дають змогу для кожного об'єкта одного «рівня» перечислювати відповідні йому об'єкти наступного «рівня», а також перечислювати для кожного об'єкта всі синонімічні йому об'єкти того самого «рівня». Такі числення відомі під назвою *граматик формальних*. Незначна модифікація поняття формальної граматики дає системи, що дозволяють перечислювати множини «правильних» об'єктів одного рівня, тобто таких, з якими можна регулярним способом зіставляти будь-які об'єкти попередніх рівнів та множини пар об'єктів «сусідніх» рівнів (напр., речення і його «синтаксичну структуру»), які відповідають одне одному. Саме такі варіанти формальних граматик у наш час розроблено найповніше. При побудові формальних граматик, крім осн. об'єктів, що моделюють елементи різних рівнів (напр., слова), доводиться використовувати допоміжні об'єкти, які є відношеннями на множинах основних об'єктів або класифікації осн. об'єктів (напр., граматичні категорії). У зв'язку з цим виникає необхідність формального вивчення таких відношень і класифікацій.

Отже, можна виділити три аспекти формального описування мови: описування будови мовних об'єктів різних рівнів, описування деяких спец. відношень і класифікацій на множинах цих об'єктів і описування перетворень одних об'єктів на інші, а також будови множин «правильних» об'єктів. Цим аспектам відповідають три осн. розділи Л. м.: 1) розробка й вивчення способів описування структури відрізків мови; 2) вивчення формальної будови лінгвістично значимих відношень і класифікацій на множинах мовних об'єктів (побудовані для цього формальні системи здебільшого наз. аналітичними моделями мови) і 3) теорія формальних граматик.

Теорію способів описування структур відрізків мови можна в матем. відношенні охарактеризувати як певне спец. відгалуження *графів теорії*, бо відповідні структури є, як правило, графи або подібні до графів об'єкти. Так, для описування синтаксичної структури речення використовують т. з. дерева підпорядкування (синтаксичного) — дерева з додатковим відношенням лінійного порядку (яке відповідає порядкові слів у реченні). Дуги дерев підпорядкування здебільшого позначають символами типів відношень (напр. «предикативне» — відношення

між присудком і підметом, «означальне» — відношення між означуваним і означеним та ін.). Поняття дерева підпорядкування формалізує звичайні «шкільні» уявлення про синтаксичні зв'язки. Але навіть така проста формалізація дала змогу виявити надто важливий лінгвістичний факт — т. з. явище проективності, яке полягає в тому, що, як правило, між двома словами a і b, такими, що a підпорядковує b, не може бути жодного слова, яке не було б підпорядковане безпосередньо чи посередньо слову a (випадків недодержання цього правила порівняно небагато, і їх можна закономірно пояснити). Іншим способом подавання синтаксичної структури речення є системи складників, які також представлені у вигляді дерев. На ближчих до смислу рівнях уже не вдається обійтись деревами і доводиться використовувати графи загальнішого вигляду. Останнім часом інтенсивно розробляють способи описування рівнів, проміжних між синтаксичними і «суто смисловими», але достатньою мірою розроблених засобів описування «суто смислового» рівня поки що нема.

Теорія аналітичних моделей мови використовує, як правило, нескладний матем. апарат (найпростіші поняття *логіки математичної*, теорії множин та алгебри, зокрема, теорії півгруп). Конструкції цієї теорії починаються від наборів «невпорядкованих» даних і завершуються побудовою (не обов'язково ефективною) систем, що в певному розумінні описують будову мови; це дає підставу вважати такі конструкції «моделями діяльності лінгвіста». Одним з гол. завдань теорії аналітичних моделей мови є формалізація традиційних лінгвістичних категорій як от: частина мови, відмінок, рід, фонема та ін. Існуючі способи формалізації («моделі») цих категорій можна поділити на два типи. У моделях 1-го типу вихідні набори — це множини ланцюжків, тобто лінійно впорядкованих послідовностей елементів. У моделях граматичних категорій ці ланцюжки інтерпретуються як «граматично правильні речення» (до набору вихідних даних можна включати вказівки й на явну неправильність деяких ланцюжків).

Моделі 2-го типу, які з'явилися в середині 60-х рр. 20 ст., і в разі граматичних категорій дають змогу одержати дужче адекватне наближення до традиційних понять, мають за вихідні дані набори відомостей про здатність одних елементів підпорядковувати собі інші. Напр., кожен відмінок українського (російського) іменника описують як сукупність форм іменників, якими в певному точному розумінні однаково керують інші слова. За допомогою аналітичних моделей вивчають не тільки *відношення парадигматичні*, а й *відношення синтагматичні*. Такі моделі також можна поділити на два типи за характером вихідних даних (про це йшлося вище).

Близькою до теорії аналітичних моделей мови є теорія лінгвістичного дешифрування, що займається будуванням процедур, які застосовують щодо «невпорядкованих» емпіричних даних про мову і які схожі в цьому на аналітичні моделі, але, на відміну від аналітичних моделей, завжди ефективні й за їхньою допомогою можна одержувати не тільки абстрактні визначення, а й конкретні відомості про структуру конкретних мов. Дешифрувальні алгоритми, як правило, складніші за аналітичні моделі. Прикладом можуть бути алгоритми виділення голосних і приголосних у тексті.

Теорія формальних граматик посідає центр. місце в Л. м., бо саме вона дає засоби для вивчення власне функціонування мови. Водночас вона вирізняється з-поміж інших відділів Л. м. більшою складністю апарату (схожого на апарат теорії алгоритмів і заг. теорії автоматів, з якими в неї є багато точок зіткнення) і набагато більшою складністю матем. задач, які виникають у ній. Формальні граматики найгрунтовніше вивчених типів являють собою системи («пристрої»), які дають змогу породжувати або розпізнавати множини ланцюжків, що їх інтерпретують здебільшого як множини граматично правильних речень деяких мов, і зіставляти з ланцюжками, що входять у ці множини, описи їхньої синтаксичної структури в термінах систем складників або дерев підпорядкування. Найбільше значення з цих граматик мають *граматики породжувальні*, які запровадив амер. вчений Н. Хомський. Осн. частиною породжувальної граматики є скінченна система правил підстановки, кожне з яких дає змогу замінити в довільному ланцюжку якийсь певний підланцюжок (ліву частину правила) іншим певним підланцюжком (праву частину правила). Ліві й праві частини правил містять символи двох типів: основні, які можуть бути в породжуваних граматикою реченнях (інтерпретують їх як слова), і допоміжні, що бувають тільки на проміжних стадіях породження (їх інтерпретують як символи граматичних категорій). Породження (вивід) речення полягає в послідовному застосуванні правил, причому вихідний ланцюжок, з якого починається вивід, складається з одного спец. допоміжного символу (S), що його наз. початковим і інтерпретують як символ категорії «речення».

Множина ланцюжків осн. символів, що їх виводять з початкового символу, наз. мовою, яку породжує граматика. Залежно від виду правил виділяють різні типи породжувальних граматик: граматики складників (НС-граматики), безконтекстні, автоматні та ін. Найбільше значення для лінгвістичного застосування мають НС-граматики (у яких на кожному кроці фактично замінюється тільки один символ), бо вони дають змогу природно зіставляти виводжувані в них ланцюжки з системами складників. Спеціальні граматики — безконтекстні й автоматні — також становлять великий лінгвістичний інтерес. Важливу роль у теорії породжувальних граматик відіграє вивчення різних класів граматик, проміжних між НС-граматиками та безконтекст-

ними і між безконтекстними та автоматними, та з'ясування співвідношень між відповідними класами породжуваних мов.

Матем. значення породжувальних граматик полягає в тому, що вони є одним із засобів ефективного задавання множин. Клас мов, що їх породжують такі довільні граматики, збігається з класом рекурсивно перелічних множин. Особливий інтерес із цього погляду становлять НС-граматики, безконтекстні й автоматні граматики, бо породжувані ними мови примітивно рекурсивні і до того ж входять до найнижчих класів існуючих ієрархій примітивно рекурсивних множин за складністю обчислювання (ці мови можна вважати «просто побудованими»), і водночас їх цілком вистачає для багатьох важливих матем. застосувань. У зв'язку з цим істотне значення має вивчення класів автоматів, які еквівалентні тим чи іншим класам граматик, тобто описують ті самі мови. Зокрема, автоматні граматики еквівалентні *автоматам скінченним*, безконтекстні — автоматам з магазинною пам'яттю (див. *Автомат магазинний*), НС-граматики — лінійно обмеженим *Тьюрінга машинам*, тобто таким машинам Тьюрінга, які переробляють кожен ланцюжок, не виходячи за межі тієї ділянки стрічки, де її записано спочатку.

Одним з важливих напрямів теорії породжувальних граматик є вивчення складності виводів. Складність виводу в граматиці можна вимірювати різними способами, з яких найуніверсальнішими є два — за кількістю кроків виводу (часова складність) і за обсягом використовуваної «пам'яті», тобто за макс. довжиною проміжного ланцюжка виводу (ємнісна складність). Вдається одержати ряд верхніх і нижніх оцінок часової й ємнісної складності виводу в граматиках різних класів (причому найскладніше одержувати нижні оцінки), а також деякі відомості про можливість будувати для тих чи інших граматик еквівалентні (тобто такі, що породжують ті самі мови) з простішими виводами, і про міру зростання складності при переході від якоїсь граматики до еквівалентної їй граматики простішого вигляду. Для НС-граматик є ще й специфічні характеристики складності виводу: глибина за Інгве, ступінь самовставляння, тісно пов'язані зі складністю систем складників, які зіставляють з виводжуваними ланцюжками. Ці характеристики мають важливе значення для лінгвістичного застосування. Для безконтекстних граматик важливою характеристикою виводу є активна ємність — макс. кількість входжень допоміжних символів у проміжний ланцюжок виводу.

Теорія складності виводів у граматиках багато в чому паралельна теорії *алгоритмів складності*, але не є копією її. Крім складності виводів, вивчають і складність самих граматик, яку можна вимірювати, напр., сумою довжин лівих і правих частин правил або кількістю допоміжних символів. До згаданих напрямів відносять і вивчення складності розпізнавання мов, що їх породжують граматики різних класів. Тут розв'язують задачі такого типу: для того чи іншого класу граматик зазначають оцінки складності роботи автомата якогось заданого виду (напр., машини Тьюрінга з даною кількістю стрічок і головок), що розпізнає мову, породжувану граматикою цього класу (розпізнавати мову — означає для кожного ланцюжка, поданого на вхід автомата, давати відповідь на питання, чи належить він мові). Складність роботи автомата можна при цьому вимірювати кількістю кроків або обсягом затрачуваної пам'яті. Так, будь-яку безконтекстну мову розпізнає машина Тьюрінга з однією стрічкою і однією головкою, яка витрачає на роботу з будь-яким ланцюжком довжиною n не більш як n^4 кроків.

Один із розділів теорії породжувальних граматик — теорія «керування виводом»; вона вивчає будову множин, породжуваних граматиками при накладанні тих чи інших обмежень на виводи. Можливість використати не довільні, а тільки якісь певні виводи краще відображує ситуацію, що є в природній мові. Осн. завдання полягає тут у встановленні співвідношень між класами мов, породжуваних граматиками різних типів з різними обмеженнями. Прикладом граматики з обмеженнями на виводи може бути т. з. матрична граматика, правила якої мають такий самий вигляд, як у безконтекстній, але вони згруповані в скінченні послідовності (причому, одне правило може траплятися кілька разів і в одній послідовності, і в різних), і правила кожної послідовності дозволяється застосовувати тільки всі підряд і в заданому порядку. Клас мов, що їх породжують матричні граматики, є строго проміжним між класами безконтекстних мов і НС-мов. Значне місце в теорії породжувальних граматик займають алгоритм. проблеми, зокрема проблеми існування алгоритмів, що за граматикою певного класу розпізнають, чи має породжувана нею мова ту чи іншу властивість. Дуже часто такі проблеми розв'язуються негативно. Так, у класі НС-граматик з «цікавих» щодо змісту властивостей мов розпізнаваними є тільки властивості типу «містити даний ланцюжок»; а такі властивості, як «бути пустим», «бути скінченним», «мати пусте доповнення», «мати скінченне доповнення», «бути безконтекстною мовою», в цьому класі не розпізнаванні. У класі безконтекстних граматик пустота і скінченність мови розпізнаванні, а пустота й скінченність доповнення залишаються нерозпізнаванними. Крім граматик Хомського, є й інші види граматик для описування множин ланцюжків — граматики залежностей, що зіставляють з ланцюжками дерева підпорядкування, *граматики категоріальні*, в яких інформація про синтаксичну будову мови міститься не в правилах, а залежить від особливої структури допоміжного словника, та ін. Розробляють і концепції граматик для переробки не ланцюжків, а графів — найчастіше дерев, а іноді й об'єктів загальнішої при-

роди. Використання таких граматик для описування природних мов дає змогу розглядати окремо синтаксичну структуру речення і лінійний порядок слів, які за змістом належать до різних рівнів, і тим самим адекватніше моделювати функціонування мови. Прикладом можуть бути т. з. лексико-синтаксичні Δ-граматики. У них перероблюваними об'єктами є дерева з позначками на вершинах (інтерпретованими як лексичні одиниці) і на дугах (їх інтерпретують як типи синтаксичних зв'язків). Правила, як і в граматиках Хомського, є правилами підстановки. Δ-граматики призначені для перетворювання одних дерев на інші, але їх можна використовувати й для породження дерев.

Л. м. широко застосовують не тільки для дослідження природних мов, а й у побудові та вивченні штучних мов, зокрема, *мов програмування*. Див. також *Мови моделі аналітичні*.

Літ.: Кулагина О. С. Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств. «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1; Сухотин Б. В. Алгоритмы лингвистической дешифровки. В кн.: Проблемы структурной лингвистики. М., 1963; Ревзин И. И. Метод моделирования и типология славянских языков. М., 1967 [бібліогр. с. 277—290]; Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М., 1969 [бібліогр. с. 188—192]; Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973 [бібліогр. с. 349—356]; Хомский Н. Синтаксические структуры. В кн.: Новое в лингвистике, в. 2. М., 1962; Hopcroft J. E., Ullman J. D. Formal languages and their relation to automata. London, 1969 [бібліогр. с. 233—238].

О. В. Гладкий.

ЛІНГВІСТИКА ПРИКЛАДНА́ — розділ лінгвістики, що має безпосередні практичні застосування. Під практичними застосуваннями розуміють: створювання і вдосконалювання систем писемності для неписемних народів (напр., в СРСР у 20-х роках створювали алфавіти для народів, що не мали до революції писемності); складання двомовних, багатомовних, термінологічних, орфографічних і деяких інших словників; питання перекладу, зокрема науково-технічного тексту, дешифрування невідомих писемностей (див. *Дешифрування текстів*); стилістичне опрацювання та редагування текстів; деякі питання методики викладання мов; *машинний переклад* з однієї штучної мови на іншу; автомат. синтез усної мови (створювання *читаючих автоматів* та ін.); створювання *мов інформаційних* для різних галузей науки; мов для *взаємодії людини з обчислювальною машиною; словників частотних*, конкордансів і *тезаурусів, реферування автоматичне* та *анотування автоматичне* текстів. Л. п. використовує традиційні лінгвістичні методи (описовий, порівняльний, порівняльно-історичний та ін.) і нові методи (структурні та математичні) з використанням сучасних технічних засобів, зокрема ЕЦОМ. Нові методи в Л. п. інтенсивно розвиваються з 50-х років під впливом потреб науково-технічного прогресу — необхідності формалізувати та впорядкувати мовні засоби передавання інформації, щоб зробити доступними для огляду великі масиви інформації. Ці нові методи вторгаються і в традиційні розділи Л. п. (використання ЕЦОМ для дешифрування невідомих писемностей та для створювання різних типів і профілів словників). Сучасна Л. п. міцно базується на теор. мовознавчих дослідженнях і характеризується зв'язком з іншими науками: математикою, фізикою (зв'язок лінгвістики з акустикою при автомат. синтезі усної мови), зоопсихологією і зоосеміотикою, історією та археологією (дешифрування невідомих писемностей). Надалі можливі ширші зв'язки з медициною (вивчення особливостей мови при діагностиці деяких захворювань), криміналістикою (встановлення авторства на основі лінгвостатистичних методів) та ін. Має місце й значний зворотний вплив, коли методи, що виникли для розв'язування прикладних задач, переростають у важливі загальнолінгвістичні концепції (уявлення про породжувальні процедури, *граматики трансформаційні*, моделі глибинного синтаксису і породжування тексту за заданою смисловою структурою та ін.).

Ф. О. Нікітіна.

ЛІНГВІСТИ́ЧНА СТАТИ́СТИКА — галузь мовознавства, яка займається аналізом кількісних характеристик мови й мовлення. Осн. первісним матеріалом Л. с. є текст, що його розглядають як послідовність лінгвістичних одиниць фіксованого рівня (текст можна розглядати як послідовність букв, фонем, складів, морфів, словоформ і речень). Вивчають статистичні характеристики розподілу лінгвістичних одиниць у мовному тексті й на основі цих даних формують висловлювання про систему мови та механізм породження тексту. Найважливіші поняття (напр., поняття генеральної сукупності та вибірки) і матем. апарат Л. с. запозичує у *математичної статистики*. Так, вибіркою можуть бути або тексти, або лінгвістичні форми. Відповідно до цього змінюється й уявлення про генеральну сукупність: нею може бути сукупність текстів чи одиниць, які є в них. Крім того, як різні генеральні сукупності можна розглядати й інвентарі лінгвістичних форм. У цьому разі кожна лінгвістична форма є вибіркою (з повторенням) з інвентаря форм одного з попередніх рівнів, напр., будь-які речення можна розглядати як вибірку слів з інвентаря словоформ або як вибірку морфів з інвентаря морфем, або як вибірку звуків мови з інвентаря фонем. Залежно від характеру досліджуваних лінгвістичних одиниць розрізняють фонологічну статистику, яка займається статистичним вивченням закономірностей вживання звуків мови, фонем, складів тощо, морфологічну статистику, яка займається статистичним вивченням уживання різних морфологічних форм (основ, суфіксів, моделей слів, частин мови тощо), лексичну статистику, яка займається статистичним вивченням закономірностей вживання слів та словосполучень. Стилістична статистика встановлює статистичними методами особли-

вості функціональних, жанрових та індивідуальних стилів. Крім зазначених розділів, у Л. с. виділяють ще й типологічну статистику, яка займається виробленням кількісних типологічних ознак мов, і хронологічну статистику (глотохронологію), яка розробляє методи визначення часу розходження мов. У всіх розділах Л. с. використовують поняття частоти лінгвістичної форми як міри вживаності її.

Л. с. як наук. дисципліна виникла у зв'язку з прагненням розширити сукупність структурних характеристик лінгвістичних форм характеристикою вживаності їх. При цьому виходили з припущення, що будь-якій лінгвістичній формі властива апріорна ймовірність бути вжитою в тексті. Ця ймовірність і має характеризувати вживаність даної лінгвістичної форми. Для відшукування ймовірностей використовують вибірковий метод статистики, за яким одержують наближену оцінку вживаності лінгвістичної форми у вигляді її відносної частоти. Л. с. вивчає не лише відносні частоти лінгвістичних форм та їхніх класів, а й такі характеристики форм, як їхній розмір (довжина), поєднуваність (сила зв'язку), розподіл у тексті. Відмінність між текстами може полягати в різному складі форм і в різній уживаності їх. Це використовує стилістична статистика, яка виробляє методи порівнювання текстів за складом та уживаністю форм і одержання оцінок ступеня відмінності між текстами. Тексти різними мовами характеризуються неоднаковою відносною частотою вживання різнотипних елементів, і це використовують у типологічній статистиці для розробляння методів типологічного зіставлення мов та одержання оцінок для т. з. типологічних індексів. Напр., відношення кількості морфем до кількості слів у тексті може бути мірою синтезу мови (це відношення наз. індексом синтетичності). Так, індекс синтетичності в'єтнамської мови, в якій слова практично одноморфемні, становить 1,06, а ескімоської — 3,72. Між ними розміщуються англійська (1,68), російська ($\approx 1,90$) і українська ($\approx 1,80$) мови. Окрему галузь Л. с. становлять дослідження, в яких використовують методи теорії інформації. У Л. с. сформульовано такі специфічні лінгвістичні задачі, як знаходження обсягу словника тексту за довжиною тексту, знаходження обсягу повного словника письменника за вибіркою з текстів цього письменника, оцінка ступеня неоднорідності текстів на різних рівнях, характеристика статистичної структури тексту, встановлення зв'язків між статистичними характеристиками лінгвістичних форм різних рівнів тощо. Під час розв'язування цих задач виникли проблеми вивчення лінгвостатистичних розподілів. У дослідженні структури мови використовують і якісні, і кількісні характеристики її елементів, і це дає змогу глибше зрозуміти механізм мови й принципи породження її. Дані про вживаність елементів мови, насамперед слів, широко використовують у таких прикладних галузях, як викладання мов, текстологія, стенографія, *машинний переклад*, зв'язок тощо. Див. також *Мови інформаційні вимірювання*.

Літ.: Фрумкина Р. М. Статистические методы изучения лексики. М., 1964 [бібліогр. с. 111—114]; Перебейнос В. И. Частота и сочетаемость фонем современного украинского языка. К., 1965 [бібліогр. с. 38]; Статистичні параметри стилів. К., 1967; Шайкевич А. Я. Опыт статистического выделения функциональных стилей. «Вопросы языкознания», 1968, № 1; Пиотровский Р. Г. Информационные измерения языка. Л., 1968 [бібліогр. с. 108—112]; Перебийніс В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фонем сучасної української літературної мови. К., 1970; Ермоленко Г. В. Лингвистическая статистика. Краткий очерк и библиографический указатель. Алма-Ата, 1970; Головин Б. Н. Язык и статистика. М., 1971 [бібліогр. с. 181—186]; Guiraud P. Problèmes et méthodes de la statistique linguistique. Dordrecht, 1959; Herdan G. The advanced theory of language as choice and chance. Berlin — Heidelberg — New York, 1966.

В. М. Андрющенко.

ЛІНІЙНА ФОРМА, лінійний функціонал, ковектор — скалярна лінійна функція векторного аргумента. Нехай V — лінійний простір над полем K. Ф-ція $a(x)$, визначена на V й зі значеннями в K, наз. Л. ф. (лінійним функціоналом на V), якщо для всіх $x, y \in V$ і $\alpha \in K$ виконується рівність $a(x + y) = a(x) + a(y)$; $a(\alpha x) = \alpha[a(x)]$. У випадку скінченновимірного V та обраного базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ для $\hat{V}$ Л. ф. $a(x)$ виражається у вигляді $a(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$, де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координати вектора x у вибраному базисі. В узагальненні такого подання, у функціональних просторах Л. ф. задають звичайно інтегралами. Л. ф. на V самі утворюють для операцій додавання і множення на скаляр лінійний простір $\hat{V}$, який наз. спряженим (або двоїстим) щодо простору V. Для скінченновимірних V простір $\hat{V}$ ізоморфний первісному просторові V. У випадку функціональних чи топологічних лінійних просторів окремо розглядають ті Л. ф., що є неперервними в топології простору; двоїстим простором у такому разі вважають сукупність неперервних функціоналів. Л. ф. і *оператори лінійні* — один з головних розділів *алгебри лінійної*, їх часто застосовують у геометрії, функціональному аналізі та прикладних розділах математики, а також у кібернетиці. Зокрема, напр., у задачах лінійного програмування й теорії ігор інколи буває потрібно знайти такий розв'язок системи лінійних нерівностей, який мінімізує деяку задану Л. ф., яка описує «вартість» цього розв'язку.

Л. А. Калужнін.

ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ — сукупність способів, які забезпечують відшукання вектора x із системи рівнянь

$$Ax = y, \qquad (1)$$

де A — квадратна матриця і y — права частина системи рівнянь. У заг. запису $x = A^{-1}y$ і при $y \neq 0$ розв'язок існує, якщо $\det A \neq 0$. Практично Л. а. с. р. с. р. розріз-

няють залежно від структури вихідних даних (*матриці* A й вектора y), порядку матриці A й типу використовуваних ЕОМ. Л. а. с. р. с. р. мають винятково велике значення в практиці обчислювання. Це пояснюється головним чином тим, що лінійне щодо шуканих коеф. наближення найрізноманітніших *моделей математичних* досліджуваних реальних процесів, яке приводить до лінійних алгебр. систем (л. а. с.), виявляється зручним у застосуванні й нерідко достатнім щодо потрібної точності. Задачі розв'язання л. а. с. виникають, зокрема, при обробці експериментальних даних за методом найменших квадратів, наближеному розв'язуванні лінійних інтегр. і дифер. рівнянь методом скінченних різниць та варіаційними методами, в методах послідовної лінеаризації при розв'язуванні нелінійних операторних рівнянь тощо.

Розглянемо Л. а. с. р. с. р. залежно від характерних для практики відмінностей в обсязі та структурі початкових даних.

1. Л. а. с. (1) має матрицю, близьку до виродженої, а саме: зміна елементів матриці A в межах точності задавання їх може привести до чисто виродженої матриці A_0 ($\det A_0 = 0$). Такі задачі наз. некоректно поставленими. На практиці зазначені задачі виникають найчастіше тоді, коли реальний процес описується системою рівнянь з чисто виродженою матрицею, але в результаті неминучих похибок вимірювань одержана наближена система (1) має матрицю, яка вже відрізняється від чисто виродженої. Можливий і випадок, коли $\det A = 0$, а наближений вектор y не задовольняє умов розв'язності. Інакше кажучи, така система не має «класичного» матем. розв'язку. Для побудови розв'язків некоректно поставлених задач, навіть якщо вони розв'язні, виявляються абсолютно неприйнятними чисельні методи, які дають математично точні розв'язки заданої системи (1). Це пояснюється тим, що в даній ситуації розв'язок системи дуже чутливий до малих змін початкових даних і матем. точний розв'язок «збуреної» системи (1) може виявитися дуже далеким від стану реального процесу. В цьому разі для побудови розв'язку треба використати методи регуляризації для розв'язування вироджених л. а. с. (див. *Некоректно поставлених задач способи розв'язування*). Один з методів регуляризації полягає в тому, що замість системи (1) розв'язують завжди розв'язну систему

$$\alpha x + A^* A x = A^* y, \qquad (2)$$

де $\alpha > 0$, A^* — спряжена з A матриця. При певній залежності α від точності початкових даних, напр., при $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, де $\varepsilon \geqslant \max (\|\delta A\|, \|\delta y\|)$, $\|\delta A\|$ і $\|\delta y\|$ — спектральні норми можливих варіацій відповідно A та y, розв'язок системи (2) зводиться, коли $\varepsilon \to 0$, до т. з. норм. розв'язку системи (1) (до того з векторів, який дає мінім. значення $\|Ax - y\|$ і має мінім. значення $\|x\|$). Якщо варіювати ε неможливо, методи регуляризації можуть стати практично неефективними. В таких випадках необхідно переформулювати початкову задачу або змінити умови одержання початкових даних.

2. Відомо, що можливі варіації δA заданої невиродженої матриці A не можуть перетворити її на вироджену матрицю $A_0 = A + \delta A$, якщо виконується умова $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ або

$$\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1 \qquad (3)$$

в будь-якій з норм. Зокрема, в спектральній нормі це значить, що норма збурення $\|\delta A\|$ має бути меншою за мінімальний модуль власного значення матриці A (в разі симетричної A) або меншою від квадратного кореня з мінім. власного значення матриці A^*A (для довільної матриці A). Інакше кажучи, виконання умови (3) гарантує вихід за межі 1-го випадку. Але ця умова аж ніяк не забезпечує близькості розв'язків справжньої, але невідомої нам системи $\tilde{A}x = \tilde{y}$ і заданої наближеної системи $Ax = y$ ($\tilde{A} = A + \delta A$, $\tilde{y} = y + \delta y$). Навіть точні розв'язки цих двох систем при виконанні умови (3) можуть дуже відрізнятися один від одного. Ф-ла

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leqslant \|A\| \|A^{-1}\| \times$$

$$\times \frac{\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \dfrac{\|\delta y\|}{\|y\|}}{1 - \|\delta y\| / \|y\|} \quad (\delta x = \tilde{x} - x)$$

дає верхню границю для відносної *похибки* розв'язку через відносні похибки заданих матриць A та вектора y при виконанні умови (3). Оцінки, одержані за цією ф-лою, здебільшого дуже завищені. При достатньо малих δA та δy в рамках лінійної теорії $\delta x = A^{-1} \times (-\delta A \tilde{x} + \delta y)$, звідки $\dfrac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leqslant \|A\| \|A^{-1}\| \times \left(\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \dfrac{\|\delta y\|}{\|y\|} \right)$. Беручи δy та δA за випадкові нормально розподілені величини (див. *Нормальний розподіл*), одержуємо, що в рамках лінійної теорії δx також нормально розподілене, і область його можливих значень при заданій *імовірності* точно збігається з відповідним гіпер-еліпсоїдом розсіювання. При числовому розв'язанні л. а. с. (1) досить попасти в будь-яку точку цього еліпсоїда, і це при великих його розмірах може полегшити розв'язання задачі, але при цьому сам розв'язок може втратити практичний смисл. У цьому разі доводиться мати справу з т. з. погано обумовленою системою, розв'язок якої має лише стійку проекцію на підпростір, утворений власними векторами матриці A^*A, що відповідають більшим власним значенням. Тому, коли не можна переформулювати задачу так, щоб одержати досить добре обумовлену систему, то для заданої погано обумовленої задачі є сенс знаходити лише згадану стійку проекцію. Один із способів відшукування цієї проекції може грунтуватися на попередньому відшуканні необхідних власних чисел і векторів (див. ***Власних значень і власних векторів***

матриць способи обчислювання), після чого $A^*y = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A^*y, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$ і шукана проекція $x_{\text{пр}} = \sum_{k=m}^{n} \frac{(A^*y, e_k)}{\lambda_k (e_k, e_k)} e_k$, де $\{\lambda_k\}_m$ — обрані великі власні значення, e_k — одиничні вектори в напрямі взаємно-ортогональних осей. Часто за практичним смислом задачі нас влаштовує будь-яке x, яке дає достатньо мале значення $\|\tilde{A}x - \tilde{y}\|$. Якщо x_δ таке, що $\|Ax_\delta - y\| \leqslant \delta$, то $\|\tilde{A}x - \tilde{y}\| \leqslant \delta + \|\delta A\| \|x_\delta\| + \|\delta y\|$, і ми маємо право обирати δ, яке мінімізує одержану оцінку. Ф-ція $\|Ax - y\|^2$ від x завжди опукла і квадратична. На цьому грунтується багато способів мінімізації $\|Ax - y\|$ і тим самим — відшукання розв'язку л. а. с.

Розглянуті вище системи — це певною мірою особливі системи, які на практиці трапляються не так уже й рідко. Методи розв'язування їх з'явилися недавно, і багато деталей *алгоритмів*, що реалізують їх, потребують ще подальшого вдосконалення.

3. Методи розв'язування добре обумовлених систем розроблено достатньо добре; вони стали «класичними». Завдання полягає в тому, щоб з цих різноманітних методів відібрати необхідний мінімум при створенні оптим. матем. забезпечення конкретних машин і систем. Розглянемо докладніше окремі лише Л. а. с. р. с. р., до яких вдаються найчастіше, розв'язуючи л. а. с. на ЦОМ та АОМ. Прямі (точні) методи застосовують здебільшого при невеликому порядку системи. З таких методів розглянемо компактну схему методу Гаусса з аналогом вибирання гол. елемента за стовпчиком, метод відображень та метод квадратного кореня (цей останній — для додатно визначеної матриці). Скрізь вважатимемо, що суми парних добутків компонент векторів обчислюються на ЦОМ із заокругленням лише результатів, при цьому ЦОМ працює в режимі з плаваючою комою. Компактна схема при $A = \{a_{ij}\}_1^n$, $y = \{y_i\}_1^n$ здійснює безпосереднє розкладання матриці A на дві трикутні $A = LU$, де L — нижня трикутна з одиницями на гол. діагоналі, і U — верхня трикутна. Розкладання записують у вигляді допоміжної матриці

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \dots u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} \dots u_{2n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} \dots u_{nn} \end{pmatrix},$$

елементи якої обчислюють за ф-лами

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj},\ i \leqslant j;\ l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right) : u_{jj},\ i > j.$$

Права частина перетворюється на вектор f за ф-лою $f_i = y_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}f_k$. Розв'язок обчислюють за ф-лою

$$x_i^\circ = \frac{1}{u_{ii}}\left(f_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right),$$

$$i = n, n-1, \dots, 1.$$

Щоб забезпечити аналог вибирання головного елемента за стовпчиком, обчислюють у такий спосіб. На кожному кроці r ($r = 1, 2, \dots, n$) обчислюють вирази $s_t = a_{tr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{tk}u_{kr}$, $t = r, r+1, \dots, n$. Якщо $\max_t |s_t| = |s_{r'}|$, то рядки r та r' міняють місцями, і після цього

$$u_{rr} = s_{r'},\ l_{tr} = \frac{s_t}{u_{rr}},\ u_{rt} = a_{rt} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kt},\quad t = r+1, \dots, n.$$

Аналогічні перетворення виконують і над елементами правої частини. Такий вибір головного елемента забезпечує $|l_{ij}| \leqslant 1$. Реалізація зазначеного алгоритму на ЦОМ вимагає зберігання n^2 чисел, виконання n ділень, $n^3/3$ множень, n^3 додавань і порядку n^2 логіч. операцій. При цьому тут і далі враховують лише гол. степені n.

Для характеристики точності будь-якого з прямих методів можна використовувати поняття еквівалентного збурення (е. з.), що вказує, яка зміна початкових даних системи еквівалентна сумарному впливові похибок заокруглення на обчислюваний розв'язок. Позначимо символами з індексом t обчислені величини, де t — кількість двійкових розрядів мантиси маш. представлення числа. Розв'язок x_t точно задовольняє не систему (1), а систему $(A + dA)\ x_t = y + dy$, де dA та dy — відповідні е. з. Головну частину F е. з. в усіх прямих методах становлять похибки заокруглення, що виникають при розкладанні (перетворенні) матриці A. У випадку компактної схеми: $L_tU_t \equiv A + F$, де $\|F\|_E \leqslant C_1 \times 2^{-t}\|A\|_E$; C_1 — константа, що залежить від величини $\max_{ij}|u_{ij}|$; $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$.

Метод відображень грунтується на ортогональному перетворюванні початкової системи до системи з трикутною матрицею. Перетворювання над початковою матрицею $A = A_1$ виконують за правилом: $A_{k+1} = U_kA_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ за допомогою матриць відображення U_i. За заданим вектором z та одиничним координатним вектором e завжди можна побудувати матрицю відображення $U = I - 2WW^*$, $\|W\| = 1$ (I — одинична матриця, W — матриця-стовпчик),

для якої $Uz = \alpha e$. Для цього досить взяти $\alpha^2 = (z, z)$, $W = \frac{1}{\rho}(z - \alpha e)$, $\rho^2 = 2[\alpha^2 - \alpha(z, e)]$. На 1-му кроці вважаємо $z = a_1^{(0)}$, $e = e_1$, де $a_1^{(0)}$ — 1-й стовпчик матриці A_1, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $W_1^* = \rho W^* = (a_{11} \pm \alpha, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\alpha^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2$, α має знак a_{11}, $u_1 = I - kW_1W_1^*$, де $k = \frac{1}{\alpha^2 \pm \alpha a_{11}}$. В результаті $A_2 = U_1 A_1 = A_1 - kW_1W_1^*A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & B \end{pmatrix}$, де B — матриця $n - 1$-го порядку. Далі процес повторюють для матриці B. Аналогічні перетворення виконують над правою частиною: $b_{k+1} = u_k b_k$. Одержану внаслідок цього систему з трикутною матрицею розв'язують простим методом послідовного виключення. Даний алгоритм потребує ще й n^2 комірок пам'яті ЦОМ, $2n - 1$ ділень, $^2/_3\ n^3$ множень, $^2/_3\ n^3$ додавань, $^1/_3\ n^3$ логічних операцій та n операцій добування квадратного кореня. Для нього

$$\|F\|_E < 3,35(n-1)[1 + 9,01 \cdot 2^{-t}]^{n-2} \times$$
$$\times 2^{-t}\|A\|_E \approx C_2 n 2^{-t}\|A\|_E.$$

Обчислювальна схема методу квадратного кореня (для додатно визначеної матриці) полягає в представленні A у вигляді $A = S^*S$, де S — верхня трикутна матриця, і розв'язуванні двох трикутних систем $S^*z = y$ та $Sx = z$. Елементи матриці S знаходять за ф-лами

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}},\ s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}},\ s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2},$$

$$s_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}\right) : s_{ii}.$$

При цьому потрібно мати $n^2/2$ комірок пам'яті, n ділень, $n^3/6$ множень, $n^3/6$ додавань, n^3 логіч. операцій та n операцій добування квадратного кореня. Тут $\|F\|_E \leqslant C_3 \times 2^{-t}\|A\|_E$. Статистичний аналіз похибок заокруглення показує, що мажорантну оцінку для методу відображень можна поліпшити в $\sqrt{n}$, а для методів квадратного кореня та компактної схеми в цій оцінці можна поліпшити лише постійні коефіцієнти.

Ітеративні методи розв'язування л. а. с. системи (1) на ЦОМ застосовують здебільшого при великих n та щоб уточнити розв'язок при будь-якому n. Одним з найпростіших ітеративних методів є метод послідовних наближень (м. п. н.): $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + y$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, де $B = I - A$, $x^{(0)}$ — задано. Для збіжності методу при будь-якому $x^{(0)}$ потрібно й достатньо, щоб усі власні значення матриці B були за модулем менші за 1. Якщо $\|B\| < 1$, то похибка методу $\|x - x^{(p+1)}\| \leqslant \frac{\|B\|^{p+1}}{1 - \|B\|}\|Ax^{(0)} - y\|$. Якщо B представлено у вигляді $B = T^{-1}GT$ і $\|G\| < 1$, то $\|x - x^{(p+1)}\| \leqslant \|T^{-1}\|\|T\| \cdot \frac{\|G\|^p}{1 - \|G\|} \cdot \|Ax^{(0)} - y\|$. Для реалізації методу потрібно мати pn^2 множень та додавань. При великих p і парних $n = 2l$ це число можна зменшити приблизно вдвічі, використовуючи тотожність

$$\sum_{j=1}^{2l} b_{ij}x_j^{(k)} = \sum_{u=1}^{l}(b_{i2u-1} + x_{2u}^{(k)}) \cdot (b_{i2u} + x_{2u-1}^{(k)}) - \sum_{u=1}^{l} x_{2u-1}^{(k)}x_{2u}^{(k)} - \alpha_i,\quad i = 1, 2, \ldots, 2l,$$

де $\alpha_i = \sum_{u=1}^{l} b_{i2u-1} \cdot b_{i2u}$ не залежать від номера ітерації k і обчислюють їх лише раз. З урахуванням заокруглення на кожному кроці м. п. н. лише $x^{(k+1)}$ похибка заокруглення методу

$$\|x^{(p+1)} - x_t^{(p+1)}\| \leqslant \frac{2^{-\tau}\max\limits_{0<s<p}\|x^{(s)}\|}{1 - q}(1 - q)^{p+1},$$

де $q < 1$, і дорівнює зазначеним вище $\|B\|$ або $\|G\|^{1-q}$. М. п. н. у канонічній формі може бути представлений у вигляді $x_\tau + Ax = y$, $x^{(0)} = x_0$, де $x_\tau = \frac{1}{\tau}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$, $x = x^{(k)}$ і параметр $\tau = 1$. Якщо A — симетрична і додатно визначена матриця, то для розв'язання л. а. с. (1) можна застосувати ітеративні методи з прискоренням збіжності, що їх реалізують за схемою

$$Cx_\tau + Ax = y,\quad x^{(0)} = x_0, \tag{4}$$

де C — симетрична й позитивно визначена матриця-регуляризатор, яку вибирають з умов економічності ітеративного процесу, напр., з умов, щоб кількість операцій на одній ітерації була якнайменша, а швидкість збіжності процесу — якнайбільша. Параметр τ звичайно обчислюють за ф-лою $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, де $\gamma_1(Cx, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant \gamma_2(Cx, x)$.

При цьому ітеративний процес (4) збігається зі швидкістю геом. прогресії, знаменник якої $\rho = (\gamma_2 - \gamma_1) : (\gamma_2 + \gamma_1)$. На відміну від однокрокових методів (4) двокрокові ітеративні методи в канонічній формі записують у вигляді

$$C(x_{\overset{\circ}{\tau}} + \varkappa t^2 x_{\bar{\tau}\tau}) + Ax^{(\kappa)} = y,\ x^{(0)} = x_0,\ x^{(1)} = x_1, \tag{5}$$

де $x_{\overset{\circ}{\tau}} = \frac{1}{2\tau}(x^{(k+1)} - x^{(k-1)}), x_{\bar{\tau}\tau} = \frac{1}{\tau^2}(x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}), \tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}, \varkappa = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4}$. (5)

Для процесу (5) $\rho = (\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}) : (\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1})$. Зазначені ітеративні методи є прикладами лінійних методів у тому розумінні, що чергове наближення є лінійною функцією попереднього наближення (або попередніх наближень).

Другу групу ітеративних методів становлять варіаційні методи: якнайскорішого спуску, мінім. нев'язок, спряжених градієнтів та ін., побудовані на принципі мінімізації відповідної квадратичної ф-ції (про ці та деякі інші методи див. також *Операторних рівнянь способи розв'язування*, *Чисельні методи*). Системи лінійних алгебр. рівнянь з дійсними коефіцієнтами можна розв'язувати й на АОМ, користуючись методом аналогій або квазіаналогій. Суть методу аналогій полягає в тому, що з елементів АОМ складають коло, електр. стан якого описується системою рівнянь, подібною до системи, яку треба розв'язати. Метод квазіаналогій відрізняється тим, що складають коло, рівняння якого не подібні, а лише еквівалентні заданим у тому розумінні, що серед їхніх розв'язків містяться й розв'язки заданої системи. Метод квазіаналогій застосовують тоді, коли не існує кола, рівняння якого подібні до заданих, або тоді, коли таке коло існує, але є нестійким. Найперспективнішими є квазіаналогові моделі систем лінійних алгебр. рівнянь. Відповідно до їхніх властивостей їх можна поділити на три групи: 1) моделі, придатні для одержання нормального розв'язку сумісних систем; 2) моделі, придатні для одержання нормального розв'язку сумісних і несумісних систем за умови, що кількість рівнянь більша або дорівнює кількості невідомих, а ранг матриці дорівнює кількості невідомих; 3) моделі, придатні для розв'язування систем заг. вигляду, але вони дають розв'язок, наближений до нормального. В моделях останньої групи реалізують метод регуляризації Тихонова. В моделях, придатних для одержання нормального розв'язку несумісних систем, є напруги, пропорційні відхилам заданих рівнянь. Відносна похибка розв'язків систем алгебр. рівнянь, одержуваних на АОМ, залежно від обумовленості, здебільшого коливається в межах від кількох десятих процента до кількох процентів.

Літ.: Пухов Г. Е., Борковский Б. А. Принципы построения квазианалоговых моделей систем линейных алгебраических уравнений. В кн.: Доклады четвертой межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники, сб. 3. М., 1962; Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., 1963 [бібліогр. с. 677—734]; Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М., 1966 [бібліогр. с. 247—248]; Фаддеев Д. К., Кублановская В. Н., Фаддеева В. Н. Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами. В кн.: Материалы Международной летней школы по численным методам, в. 1. М., 1968; Глушков В. М., Молчанов И. Н., Николенко Л. Д. О наборе программ для решения систем линейных алгебраических уравнений на машинах серии «Мир». «Кибернетика», 1968, № 6; Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 160—163].

Б. А. Борковський, В. В. Іванов, Л. Д. Ніколенко, І. М. Молчанов.

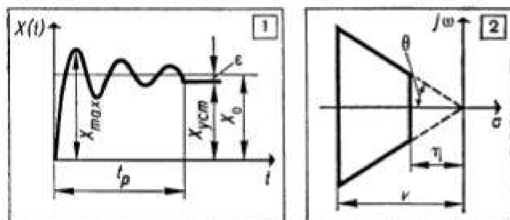
ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ АНАЛІЗ — дослідження впливу структури, числових значень параметрів і зовнішніх діянь на динамічні властивості й поведінку лінійних систем. Аналіз здійснюють на основі вивчення властивостей розв'язків дифер. рівнянь, які описують систему. В заг. випадку автомат. системи описують нелінійними дифер. рівняннями. Проте процеси, які відбуваються в деяких нелінійних системах, неістотно відрізняються від процесів у лінійних системах, тому для аналізу таких систем можна застосувати т. з. лінеаризовані рівняння першого наближення. За достатньо малих збурень, які діють на систему, з лінеаризованих рівнянь можна робити висновки про деякі важливі властивості первісної системи. Питання про правомірність і межі застосовності методу лінеаризації в дослідженнях динаміки систем найповніше й до кінця дослідив рос. математик О. М. Ляпунов (див. *Ляпунова методи*). Для аналізу властивостей лінійних систем автомат. керування ефективними є методи, засновані на інтегральних перетвореннях Лапласа й Фур'є, т. з. операторні методи. Осн. змістом аналізу лінійних систем є дослідження стійкості, якості *перехідного процесу* й точності відтворення *керуючого діяння*.

Дослідження стійкості є першою й основною задачею аналізу систем автомат. керування. Для того, щоб лінійна система з постійними параметрами була асимптотично стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини коренів були від'ємними (див. *Стійкості неперервних систем теорія*). Проблему стійкості (як і взагалі аналізу лінійних систем) було б вичерпано, якби можна було достатньо просто обчислити корені. Але через важкість обчислювання коренів було розроблено методи оцінювання знаків дійсних частин непрямим шляхом, за коефіцієнтами характеристичного рівняння на основі т. з. *стійкості критеріїв*. Найпоширенішими є алгебр. критерії Гурвіца й Рауса, частотний критерій Найквіста й графоаналітичний критерій Михайлова (див. *Гурвіца теорема*).

Часто буває необхідно встановити, за яких значень параметрів, що входять у коефіцієнти характеристичного рівняння, система буде стійкою. Найпростішим і найефективнішим для цього є метод D-розбиття. Він полягає в побудові кривої, яка є відображенням уявної осі площини коренів на площині параметрів системи. Ця крива розбиває площину на ряд областей, кожній з яких відповідає певна кількість коренів з від'ємною дійсною частиною. Заштриховуючи, виділяють ту область, у якій найбільше таких коренів,

а потім, користуючись будь-яким критерієм стійкості, перевіряють стійкість для яких-небудь значень параметрів з цієї області. Якщо система стійка для цих контрольних значень параметрів, то вона буде стійкою для всіх значень параметра всередині цієї області.

Стійкість характеризує динамічні властивості системи далеко не повністю. Істотними є ще й інші показники, які в сукупності характеризують якість процесу регулювання. Ця якість певним способом пов'язана з якістю перехідного процесу —



1. Крива перехідного процесу.
2. Область визначення коренів характеристичного рівняння.

реакції системи на вхідне діяння типу одиничного поштовху. Тому якість процесу регулювання можна аналізувати за показниками якості перехідного процесу (див. *Критерії якості систем автоматичного керування*). Якість перехідного процесу аналізують безпосередньо — на основі перехідної характеристики системи, якщо характеристика відома чи її легко визначити, або ж посередньо — з коефіцієнтів характеристичного рівняння тощо. Застосовують такі показники якості перехідного процесу: час перехідного процесу t_p, величину абсолютної статичної *похибки* $\varepsilon = x_0 - x_{уст}$ або відносної статичної похибки $\Delta = \frac{\varepsilon}{x_0}$, величину перерегулювання $\sigma = \frac{x_{max} - x_0}{x_0}$, величину коливальності μ (число коливань за час t_p) (мал. 1) тощо. Тут x_0, $x_{уст}$ і x_{max} — відповідно задане, усталене (за час t_p) й макс. значення регульованої величини. Як і в разі аналізу стійкості, розроблено непрямі методи аналізу якості лінійних автомат. систем, які не потребують визначення перехідної характеристики та обчислювання коренів характеристичного рівняння. До непрямих методів аналізу якості перехідного процесу належать методи, засновані на вивченні розміщення коренів характеристичного рівняння на комплексній площині та на використанні частотних характеристик, інтегральні методи тощо. Якщо всі корені характеристичного рівняння розміщено всередині трапеції зліва від уявної осі комплексної площини (мал. 2), де η — ступінь стійкості, а $\operatorname{tg}\theta = \mu$ — величина коливальності, то це свідчить про те, що показники якості будуть не гірші за задані значення $\eta = \frac{\ln 1/\Delta}{t_p}$, t_p, Δ і μ, які визначають межі цієї трапеції. Задача аналізу якості й полягає у встановленні цього факту. Його можна достатньо просто виявити на основі т. з. методу зсунутого характеристичного рівняння. Зсунуте рівняння $A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_n = 0$ одержують заміною s на $z - \eta$ у характеристичному рівнянні. Це відповідає перенесенню уявної осі площини коренів уліво на величину η. Крім того, поворотом уявної осі на кут $(90° - \theta)$ проти стрілки годинника й відповідним перетворенням характеристичного рівняння одержують перетворене характеристичне рівняння. Якщо корені перетвореного і зсунутого рівнянь мають від'ємні дійсні частини, то корені первісного характеристичного рівняння всі розміщено всередині трапеції. Так достатньо просто можна не тільки встановити факт розміщення всіх коренів усередині бажаної області, заданої тех. умовами, а й вибрати параметри системи так, щоб усі корені входили до цієї області. Це здійснюють відповідним вибором параметрів системи, виходячи з умов стійкості зсунутого й перетвореного характеристичних рівнянь.

Для аналізу стійкості та якості перехідного процесу застосовують і *кореневого годографа метод*. Він полягає в побудові кореневих траєкторій — тобто геом. місця всієї сукупності значень коренів характеристичного рівняння залежно від змін якого-небудь параметра системи. З цих траєкторій можна достатньо повно судити про стійкість і якість перехідного процесу системи. Істотною хибою цього методу є складність побудови траєкторії коренів.

Розглянуті методи оцінки якості перехідного процесу мають одну спільну хибу: вони не враховують впливу правої частини дифер. рівняння системи, від якої теж істотно залежить якість перехідного процесу. Справді, перехідну характеристику визначають як розв'язок неоднорідного дифер. рівняння системи

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x(t) = b_0\frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x_{вх}(t)$$

при одиничному вході $x_{вх}(t) = 1(t)$ й нульових початкових умовах. Права частина рівняння залежить від того, до якого елемента системи прикладено діяння $x_{вх}(t)$, а ліва — не залежить. Зображення за Лапласом перехідної характеристики внаслідок цього рівняння буде

$$X(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n}\cdot\frac{1}{s}.$$

Враховуючи в аналізі якості лише ліву частину рівняння, користуються фактично спо-

твореною перехідною характеристикою

$$X(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \cdot \frac{1}{s},$$

що безумовно впливає на результати аналізу якості. Але за інших однакових умов якість реального перехідного процесу загалом тим краща, чим кращі показники якості, одержані без урахування правої частини рівняння, тобто викладені методи, безперечно, мають цінність.

Велике значення мають частотні методи аналізу якості, що дають змогу оцінити якість за видом різних частотних характеристик системи.

Разом з розглянутими методами для оцінки якості широко застосовують і інтегральні методи, які дають змогу враховувати і знаменник, і чисельник передатної функції, тобто враховувати не лише ліву, а й праву частини дифер. рівнянь системи. Найчастіше застосовують такі інтегральні оцінки:

$$I_1 = \int_0^\infty x(t)\,dt,\ I_2 = \int_0^\infty x^2(t)\,dt,\quad I_3 = \\ = \int_0^\infty [x^2(t) + k\dot{x}^2(t)]\,dt,$$

де $x(t)$ — імпульсна перехідна характеристика. Якість системи тим краща, чим менші значення цих інтегралів. В аналізі якості інтегральними методами звичайно ставлять дві задачі: 1) визначити величину інтеграла і 2) так підібрати параметри системи, щоб значення інтеграла було мінімальним. Обидві ці задачі розв'язують непрямим способом, який не потребує визначення перехідної характеристики. Інтеграли I_1, I_2 і I_3 можна виразити через коефіцієнти лівої й правої частин дифер. рівняння системи і, отже, за ними можна обчислити значення цих інтегралів або ж мінімізувати їх відповідним вибором настроювальних параметрів системи, які входять у ці коефіцієнти.

Однією з важливих задач аналізу лінійних систем керування є дослідження вимушених рухів, спричинених зовн. діяннями, тобто аналіз точності відтворення керуючого сигналу на фоні завад і шкідливих збурень. Про останні звичайно відомо лише те, що вони належать до певного класу функцій — детермінованих або випадкових. Якщо про збурення нічого не відомо, крім того, що вони змінюються в заданому діапазоні, то цю задачу іноді можна розв'язувати методами теорії інваріантності (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*). При випадковому характері завад і збурень цю задачу розв'язують методами теорії випадкових функцій — статистичними методами, суть яких полягає, гол. чин., в оцінці точності функціонування системи за величиною її середньоквадратичної похибки. Залежно від статистичних властивостей завад і збурень розроблено різні методи аналізу точності лінійних систем. Аналіз лінійних систем з погляду точності при зміні параметрів системи здійснюють на основі теорії чутливості (див. *Динамічних систем теорія чутливості*).

Характерно, що аналіз точності будь-якими методами не виключає аналізу стійкості та якості перехідного процесу. Для аналізу систем з багатьма регульованими величинами, крім розглянутого, розв'язують ще додатково задачу автономного керування (див. *Автономність*).

Літ.: Воронов А. А. Основы теории автоматического управления, ч. 1. М.— Л., 1965 [бібліогр. с. 382—392]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [бібліогр. с. 743—763].

А. Г. Шевельов.

ЛІНІЙНІ ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ — функції *алгебри логіки*, які можна представити у вигляді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + \\ + a_nx_n \pmod 2.$$

Кожна Л. ф. а. л. повністю визначається набором своїх коефіцієнтів $a_0, \ldots, a_n$, які набувають значень 0 або 1. Звідси видно, що кількість усіх Л. ф. а. л. від n аргументів дорівнює 2^{n+1}. Зокрема, всі ф-ції однієї змінної — лінійні. Клас усіх Л. ф. а. л. є *класом замкненим функцій алгебри логіки;* більше того, він є *класом передповним функцій алгебри логіки.*

ЛІСП — спискова *мова програмування.* Первісну інформацію записують у вигляді *списків.* Напр., TIMES, ONE (*plus*, X, A), Y.

Програма мовою Л.— це *рекурсивна функція* символьних виразів, яка будується, як і арифм. ф-ції, з елементарних за допомогою умовного оператора та оператора суперпозиції. Умовний оператор має вигляд $(p_1 \to l_1; \ldots$ $\ldots; p_n \to l_n)$. Результатом його виконання буде вираз l_i, якщо p_i — істинне. Є п'ять елементарних ф-цій: *atom* — булева ф-ція, що визначає, чи є досліджуваний вираз атомом — неподільною одиницею інформації; *eq* — булева ф-ція, що встановлює рівність двох атомів; *car*, *cdr* — ф-ції, що виявляють із списку перший та решту елементів відповідно; *cons* — об'єднання двох списків в один. Є не тільки елементарні, а й складніші ф-ції, які будуються з елементарних, напр., підстановку у виразі z замість усіх входжень символу y виразу x запишуть у вигляді такої ф-ції:

$$subst[x;\ y;\ z] = [atom[z] \to eg[z;\ y] \to x; \\ [T \to z]; \\ T \to cons[subst[x;\ y;\ car[z]]; \\ subst[x;\ y;\ cdr[z]]]].$$

Тут T означає «істина». Цей запис є прикладом програми мовою Л. Ця мова набула дальшого розвитку в ряді ін. мов.

Літ.: McCarthy J. Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, part 1.«Communications of the Association of Computing Machinery», 1960, v. 3, № 4. *Т. О. Грінченко.*

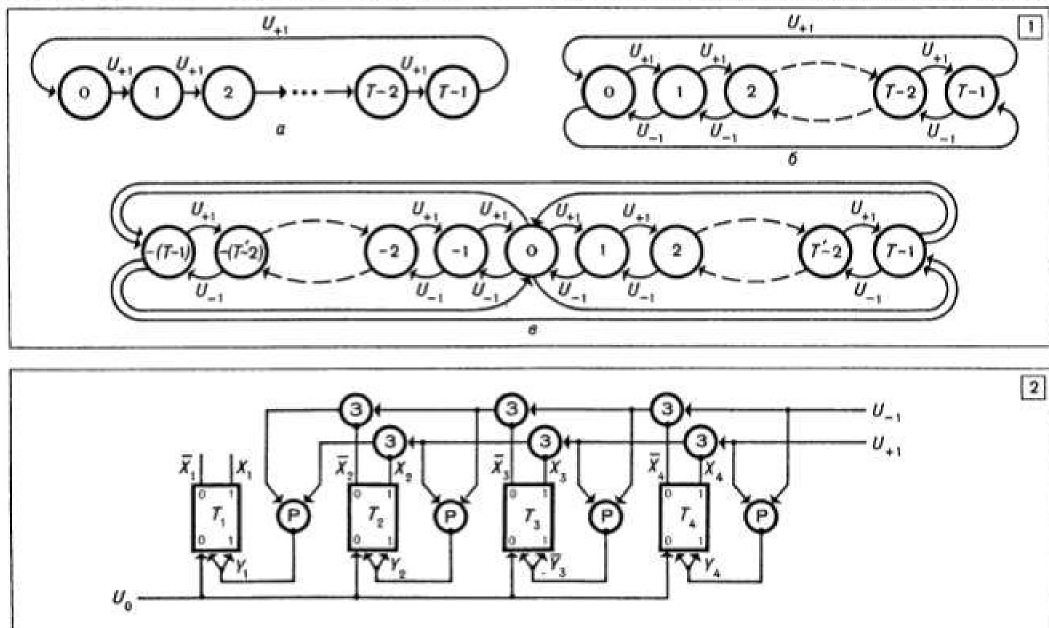
ЛІЧИЛЬНИК — пристрій для підраховування імпульсів у різноманітних засобах автоматики, телемеханіки тощо; часто використовується як *блок ЦОМ типовий*, який виконує операцію лічби одиниць. Л. має один або два види сусідніх переходів у заданій множині станів T (періоді). З будь-якого i-го стану під діянням вхідного сигналу «+1» переводить у $(i \oplus 1)$-й стан, а під діянням вхідного сигналу «—1» — у $(i \ominus 1)$-й стан відповідно до заданих модулів лічби ($\oplus$ та $\ominus$ — операції додавання та віднімання за модулем). Номери станів Л. відлічуються від якогось початкового стану з номером $i = 0$. Коли Л. досягає граничного стану ($i_{\max} = T - 1$), він черговим вхідним сигналом повертається в початковий стан. Крім того, в практичних схемах Л. звичайно передбачається можливість установлення Л. з будь-якого стану в початковий під впливом спец. установного сигналу.

За видом переходів Л. розподіляють на три осн. групи: прості, реверсивні односторонні й реверсивні двосторонні (мал. 1). На простi Л. надходять вхідні сигнали одного знака, звичайно «+1», тобто їхні *графи* переходів характеризуються наявністю переходів лише в одному напрямі — прямому, визначуваному збільшенням номера станів до граничного значення $i_{\max} = T - 1$ (мал. 1, *а*). Реверсивні односторонні Л. мають переходи в двох напрямах — прямому й зворотному. Разом з тим у цих Л. немає станів з номерами $i < 0$ (згідно з прийнятою нумерацією) (мал. 1, *б*). Під діянням сигналу, який додається («+1»), Л. з $(T - 1)$-го стану повертається в початковий стан, а під діянням сигналу, який віднімається («—1»), — з початкового стану в $(T - 1)$-й стан, тобто лічба кількостей різнополярних одиниць здійснюється в ньому за модулем T. В реверсивних двосторонніх Л. можливі стани з номерами $i < 0$, відповідно до чого граф переходів цих Л. складається з двох графів односторонніх Л., послідовно з'єднаних між собою (мал. 1, *в*). Перехід такого Л. буде

$$T = T_{i>0} + T_{i<0} - 1,$$

де $T_{i>0}$ і $T_{i<0}$ є множинами додатних і від'ємних станів Л. За станом двосторонніх реверсивних Л. визначається різниця кількостей (N') доданих (N_+) і віднятих (N_-) сигналів $N' = N_+ - N_-$ із зазначенням її знака (на відміну від односторонніх реверсивних Л.). Це забезпечує можливість виконувати в таких Л. операції типу додавання й віднімання за умови, коли число-імпульсні *коди* представляють числа, які додаються та віднімаються. За системами кодування станів розрізняють Л. трьох осн. типів: Л. з позиційним двійковим або десятковим кодуванням; Л. з позиційним одиничним або комбінованим кодуванням; Л. з непозиційним сусіднім кодуванням.

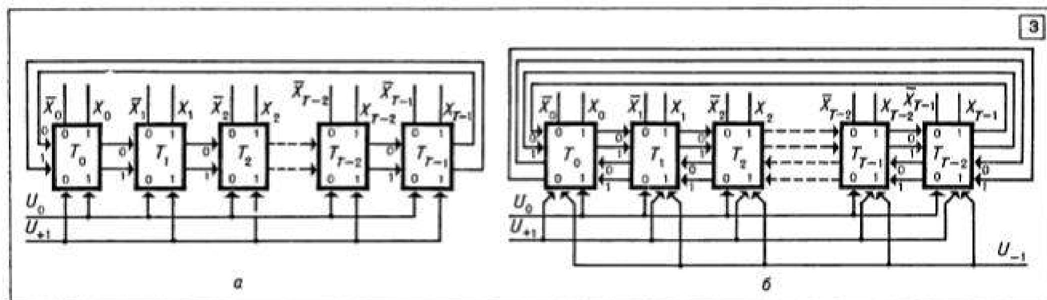
У Л. з позиційним двійковим або десятковим кодуванням коди станів ототожнюються з числами, вира-

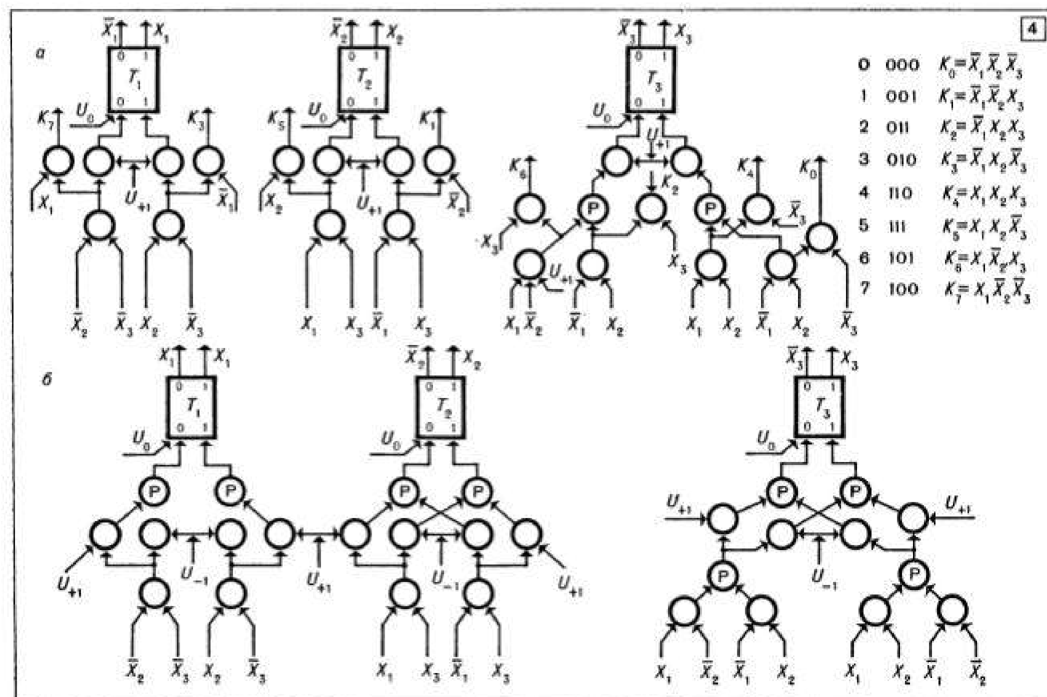


1. Графи переходів лічильників: *а* — простого; *б* — реверсивного одностороннього; *в* — реверсивного двостороннього (U_{+1}, U_{-1} — сигнали «+1», «—1» відповідно; 0,..., T—1 — стани лічильника).
2. Блок-схема реверсивного одностороннього лічильника з наскрізними перенесеннями (З — імпульсно-потенціальний збіг; Р — імпульсний розподіл; U_{+1}, U_{-1} — відповідно вхідні сигнали «+1», «—1»; Y_i — керуючий сигнал на вході тригера; U_0 — сигнал установлення лічильника в початковий стан).

женими у відповідних системах кодування. З цих Л. широко застосовують Л. з двійковим кодуванням (двійкові Л.) не лише через те, що двійкова *система числення* поширеніша, а й через меншу складність схем двійкових Л. порівняно з десятковими. Такі Л. можна виконати на *тригерах* з лічильним входом і з роздільними входами. Л. на тригерах з роздільними входами відрізняються від Л. на тригерах з лічильним входом умовно, ронньому Л. (переходи в якому задано графом, як показано на мал. 1, *б*) використовують схему мал. 2 в поєднанні з додатковими ланцюгами розряду знака й керування. Щоб підвищити швидкодію Л., застосовують способи частково-групових та групових процесів (див. *Ланцюг переносу*).

В *потенціально-імпульсній елементній структурі* блок-схема різних варіантів Л. збігається з їхніми загальними блок-схемами.





3. Блок-схеми лічильників з одиничним кодуванням: *а* — простого; *б* — реверсивного одностороннього.
4. Блок-схеми лічильників з сусіднім кодуванням: *а* — простого з вихідним дешифратором; *б* — реверсивного одностороннього (K_i — *i*-а константа стану лічильника).

оскільки в будь-якому випадку в кожному розряді реалізується функція підсумовування за модулем 2, і схема одного розряду являє собою лічильний каскад з додатковим формуванням сигналів перенесення та позичання. Для прикладу наведено блок-схему реверсивного одностороннього Л. з наскрізними перенесеннями (мал. 2). В реверсивному двосто- На вхід тригерів надходять імпульсні сигнали, а з їхніх виходів знімаються потенціальні сигнали. Тому всі вентилі повинні мати імпульсний вихід, тобто бути потенціально-імпульсними. Л. розгляданої елементної структури зручно виконувати на тригерах з вхідними діодно-трансформаторними вентилями. У потенціальній елементній структу-

рі (див. *Потенціальні логічні елементи*) для реалізації Л. кількість тригерів подвоюється, бо кожний розряд являє собою лічильний тригерний каскад, який складається з двох тригерів, що мають відповідні вентилі. В *імпульсній елементній структурі* для Л. застосовують два варіанти тригерних лічильних каскадів. Один з них виконано на одному динамічному тригері, і в ньому немає інверсного виходу, а другий — на двох таких тригерах, які утворюють прямий та інверсний виходи каскаду. В обох варіантах перемикальні сигнали, які знімаються з вихідних вентилів тригерів, можна використовувати і як сигнали перенесення.

Розглянуті особливості побудови позиційних Л. на різних елементних структурах характерні для Л. з десятковим кодуванням. Кожний числовий розряд десяткового Л. може мати будь-яке з десяти значень і тому має складатися не менш як з чотирьох тригерів. Способи реалізації операцій додавання одиниці з цифрою, яка зберігається в десятковому розряді, і віднімання одиниці з цієї цифри залежать від способу кодування десяткових цифр. Проте незалежно від цього зв'язки між окремими десятковими розрядами в Л. з десятковим кодуванням аналогічні зв'язкам між двійковими розрядами в Л. з двійковим кодуванням.

У Л. з позиційним о д и н и ч н и м і к о м б і н о в а н и м к о д у в а н н я м числа визначаються місцеположенням маркіруючого коду в *регістрі* так, що при сусідніх місцеположеннях числа, представлені цими кодами, відрізняються на одну (одиничний код) або дві (парноодиничний код) одиниці. Отже, Л. з одиничним кодуванням являють собою зсувний регістр із заздалегідь введеним маркіруючим кодом, який зсувається за допомогою вхідного сигналу («+1» або «—1») на один розряд у бік, відповідний знакові одиниці, представленої даним сигналом. Простий і реверсивний односторонній Л. з одиничним кодуванням (мал. 3) являють собою звичайні зсувні регістри, тому спосіб формування сигналів переносу в ланцюгах зсуву не показано. У наведених на мал. 3 схемах реалізуються всі переходи згідно з графами Л. на мал. 1, *а* та *б*. Кожний i-й стан Л. визначається перебуванням в одиничному стані тільки одного i-го розряду (або двох сусідніх розрядів при парноодиничному кодуванні). При такому кодуванні станів Л. відпадає потреба в операції дешифрування кодів станів Л., тобто в наявності вихідного *дешифратора*, якщо треба, напр., утворити спец. сигнали, які взаємно однозначно відповідають певним станам Л. Реалізація розглядуваних Л. у різних елементних структурах не відрізняється від реалізації зсувних регістрів. Проте при побудові Л. з одиничним кодуванням у потенціальній елементній структурі доцільно використовувати маркіруючий код з двома сусідніми одиницями, тобто 11; при цьому можна не подвоювати кількості тригерів у Л. (що є необхідним у звичайному зсувному регістрі на потенціальних елементах). Л. з комбінованим кодуванням складаються з k окремих (часткових) Л. з одиничним кодуванням. Кожний частковий Л. є відповідним розрядом усього Л. з вагою

$$w_i = \prod_{j=i+1}^{k} T_j,$$

де i — номер даного розряду, T_j — період часткового Л. j-го розряду. Кожна комбінація можливих станів часткових Л. являє собою стан усього Л. і в разі потреби виділяється операцією дешифрування. Від вибору кількості часткових Л. і величин їхніх періодів залежить кількість апаратури в Л., складність функцій дешифрування та швидкодія Л.

У Л. з н е п о з и ц і й н и м с у с і д н і м к о д у в а н н я м стани кодуються т. з. сусідніми кодами: коди будь-яких сусідніх станів Л. відрізняються на код одного розряду, тобто, щоб здійснити перехід з i-го стану в $(i \oplus 1)$-й або $(i \ominus 1)$-й стан, у Л. перемикають тільки один його розряд (тригер). На мал. 4 подано загальні блок-схеми простого Л. з сусіднім кодуванням з періодом $T = 8$ (мал. 4, *а*) та реверсивного одностороннього Л. з сусіднім кодуванням (мал. 4, *б*). Двосторонній реверсивний Л. з сусіднім кодуванням найпростіше реалізується на основі використання одностороннього реверсивного Л. і спец. розряду знака при представленні від'ємних чисел додатковим до T кодом. Л. з сусіднім кодуванням будують в усіх елементних структурах, де або на входах тригерів встановлюють *елементи затримки*, або самі вхідні каскади тригерів є логіч. затримувальними елементами. Проте для побудови цих Л. у потенціальній елементній структурі можна обійтися без подвоєння числа тригерів на кожний розряд, якщо, чергуючи вхідні, рознесені в часі, сигнали по двох роздільних ланцюгах, добитися незалежності функцій збудження тригерів Л., які викликають сусідні переходи, від одних і тих самих змінних.

Л. з сусіднім кодуванням за своєю структурою найближчі до розглянутих позиційних Л. з двійковим кодуванням. Швидкодію Л. цих типів можна вважати однаковою. Проте функції дешифрування у Л. з сусіднім кодуванням простіші, ніж у Л. з двійковим кодуванням.

Літ.: Р а б и н о в и ч З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [бібліогр. с. 299—301]. *В. М. Коваль.*

ЛІЧИ́ЛЬНО-РОЗВ'Я́ЗУВАЛЬНИЙ ПРИ́СТРІЙ — див. *Розв'язувальний пристрій.*

ЛОГІ́КА БАГАТОЗНА́ЧНА — галузь математики, яка вивчає властивості функцій, значеннями яких, як і значеннями їхніх аргументів, є елементи з заданої множини, сімейств і алгебр таких функцій, у яких роль операцій виконують операції суперпозиції й деякі їхні аналоги. Іноді предмет Л. б. розширюють, включаючи в неї різні логіч. числення. Нижче термін Л. б. розумітимемо без такого включення. Л. б. посідає проміжне місце між *логікою*

математичною, алгеброю і теор. кібернетикою. Спочатку Л. б. використовували для вивчення логіч. числень *(числення висловлювань* і *предикатів)*, у яких висловлюванням надавали будь-яку скінченну (більшу за 1) і іноді нескінченну множини значень істинності. Це давало змогу, крім загальних, розглядати й спец. задачі матем. логіки, пов'язані з оцінкою міри істинності модальних висловлювань та висловлювань, у яких не зазначено час і місце подій, і т. п. Історично першими системами Л. б. виявилися двозначне числення Дж. Буля (середина 19 ст.), пізніше оформлене зусиллями англ. логіка Б. Рассела (1872—1971), нім. логіка Д. Гільберта (1862—1943), амер. математика Е. Поста (1897—1954) та ін. у двозначну логіку (див. *Алгебра логіки*); тризначна логіка Лукасевича (1920) і k-значна логіка Е. Поста (1921). Одночасно Пост запропонував розглядати Л. б. як алгебри і встановив цілий ряд істотних властивостей цих алгебр. Відтоді Л. б. стала важливим об'єктом алгебри. Згодом (у 30—40-х роках 20 ст.) в процесі розвитку *кібернетики* з'ясувалося велике прикладне значення Л. б. Було встановлено, що мова Л. б. зручна для описування функціонування складних електр. схем, і це стало новим поштовхом до її розвитку. Проміжне положення Л. б. відіграло велику роль у її формуванні й розвитку, бо забезпечило постановку нових задач і потребувало розробки нових методів для розв'язання їх.

Ось яку концепцію, що узагальнює побудову алгебри логіки, покладено в основу побудови Л. б. Виходять з деяких висловлювань, істинність значень яких градуйована й утворює якусь множину E. Абстрагуючись від змісту цих висловлювань, цікавляться насамперед їхніми значеннями щодо істинності, й це дає змогу поділити всі вихідні висловлювання на групи, які відповідають одному й тому значенню істинності. Ці значення, а також змінні з алфавіту $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, які приймають як значення вказані величини, вважаються елементарними висловлюваннями (константами і змінними відповідно). За аналогією з логікою суджень вводять деякі відношення над елементарними висловлюваннями, точніше функції, що, як і їхні аргументи, приймають як значення константи й відповідають різним логічним зв'язкам над висловлюваннями. Ці функції, що утворюють множину M, наз. елементарними. Множина M є підмножиною множини P_E всіх т. з. ф-цій $|E|$-значної логіки, тобто функцій, які залежать від змінних з алфавіту X і набувають значення з E (тут через $|E|$ позначено потужність E). Потім вводять поняття формули, яке відповідає змістовому представленню складного висловлювання, побудованого з вихідних висловлювань. Ф-ли будують з позначень (елементарних ф-л) виду $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ елементарних ф-цій з M за правилами підстановки ф-цій однієї в одну замість деяких змінних і шляхом підстановки змінних з X замість змінних розглядуваних ф-цій (операції суперпозиції). В результаті одержуємо множину $\langle M \rangle$ усіх ф-л над M. Змістові складні висловлювання під час фіксації в них значень істинності вихідних висловлювань також набувають значення істинності з E. Ці значення визначаються структурою складного висловлювання і логічними зв'язками, що входять до нього. Тим самим кожне складне висловлювання визначає якусь ф-цію $|E|$-значної логіки (похідну зв'язку). Формально кожній ф-лі приписується ф-ція з P_E (суперпозиція над M), яка є ф-цією, що звичайно визначається цією ф-лою. Кажуть також, що ф-ла реалізує приписану їй ф-цію. Всі суперпозиції над M утворюють множину $[M] \subseteq P_E$, яку наз. замиканням множини M. З погляду змісту побудова Л. б. завершується вказівкою множин логіч. зв'язок, складних висловлювань і похідних зв'язок. За аналогією з цим і формальне задавання Л. б. (точніше: $|E|$-значної логіки) буде еквівалентним задаванню множин M, $\langle M \rangle$ і $[M]$. Кажуть також, що Л. б. породжується множиною M. Цю модель, що відіграє важливу роль у матем. логіці й теор. кібернетиці, наз. формульною. Своєрідність підходу теор. кібернетики до Л. б. полягає в розгляді Л. б. як керуючої системи. Елементарні ф-ли при цьому відіграють роль елементів, що виконують певні операції, а ф-ли інтерпретуються як схеми, побудовані з елементів, і як такі, що здійснюють переробку вхідної інформації на вихідну. Такого роду керуючі системи, відомі в кібернетиці як схеми з функціональних елементів, відіграють фундаментальну роль у теор. і практ. питаннях кібернетики.

Існує кілька загальних проблем Л. б., цікавих з позицій матем. логіки й алгебри та з позицій кібернетики. До них належать, наприклад, питання про включення $M_2 \subseteq \subseteq [M_1]$ при заданих M_1, $M_2 \subseteq P_E$ (задача про виразність) і про вказівку множини всіх ф-л з $\langle M_1 \rangle$, що реалізують ф-ції з M_2 при $M_2 \subseteq [M_1]$ (задача про описування). Окремим випадком задачі про описування є важливе питання матем. логіки про вказівку всіх ф-л, які реалізують задану константу, а це, наприклад, є еквівалентним для числення висловлювань побудові всіх тотожно істинних або відповідно тотожно хибних висловлювань. Проміжним питанням між матем. логікою й алгеброю, яке примикає до задачі про описування, є задача про тотожні перетворення. В ній при заданій множині M потрібно виділити в якомусь розумінні найпростішу підмножину пар рівних (тобто таких, що реалізують одну й ту саму ф-цію) ф-л з $\langle M \rangle$, яка дає змогу шляхом підстановки виділених рівних ф-л одної замість одної одержати з будь-якої ф-ли всі ф-ли, рівні їй. Аналогічне місце посідає одне з найважливіших питань Л. б.— т. з. проблема повноти, яка полягає в зазначенні всіх підмножин M_1 заданої замкненої, тобто такої, що збігається зі своїм замиканням, множини M_2, таких, що

$[M_1] = M_2$. До неї примикає задача про базиси, яка полягає в зазначенні всіх повних M_2 підмножин M_1, жодна власна підмножина яких уже не є повною. Глобальною задачею для Л. б. є задача про побудову структури замкнених множин у даній Л. б. і з'ясування її різних властивостей. Характерне для теорії керуючих систем питання про складність цих систем, природно, можна поставити й щодо ф-л і ф-цій з Л. б. При такому підході типовою є така задача про складність реалізації. На множині всіх елементарних ф-л певним способом вводять числову міру (складність ф-л), яку потім поширюють на множину всіх ф-л, наприклад, шляхом підсумовування мір усіх тих елементарних ф-л, які беруть участь у побудові заданої ф-ли. Для заданої ф-ції треба вказати ту ф-лу (найпростішу ф-лу), яка реалізує цю ф-цію й має найменшу складність, а також з'ясувати, як ця складність залежить від деяких властивостей розглядуваної ф-ції. Досліджують різні узагальнення цієї задачі. Широке коло питань, пов'язане з реалізацією ф-цій ф-лами з наперед заданими властивостями, в певному розумінні примикає до вже розглянутого питання про складність реалізації. Тут насамперед слід назвати задачу про реалізацію ф-цій алгебри логіки *диз'юнктивними нормальними формами* і пов'язану з цим т. з. задачу мінімізації, а також узагальнення цієї задачі на ф-ції k-значної логіки при $k > 2$. Сюди ж належать задачі про реалізацію ф-цій ф-лами в певному розумінні обмеженої глибини, коли ланцюжок підставлюваних одна в одну виділених елементарних ф-л не може перевищувати певної константи, а це за відповідної інтерпретації може бути пов'язане з надійністю або швидкістю обчислення ф-ції ф-лами; задачі про декомпозицію, тобто про реалізацію ф-ції від n змінних за допомогою ф-л, побудованих з елементарних ф-л, що реалізують ф-ції, залежні не менш, як від n змінних, і ряд інших.

Розглядаючи ряд задач і в тому числі про виразність, про повноту, про описування структури замкнених класів та інші, де на перший план висуваються відповідності типу множина M та її замикання $[M]$ і затушовується інша роль ф-л над M, крім їхньої здатності породжувати нові ф-ції, часто переходять до іншої моделі Л. б. (термальної), в якій множина $\langle M \rangle$ замінюється множиною термів, що являють собою ті самі ф-ли, але побудовані не з імен індивідуальних ф-цій, а з узагальнених (змінних) імен ф-цій, з фіксованою для даного змінного імені арністю. Ці терми фактично відіграють роль часткових операторів над множиною M. Наступний крок на цьому шляху, що в певному розумінні спрощує щойно введену термальну модель, веде до розгляду Л. б. як алгебри. Найбільше вживаною є алгебра, яку запровадив рад. математик А. І. Мальцев (1909—68). Ця алгебра будується так. Спочатку уточнюють будову множини P_E припущенням про те, що кожна ф-ція f з урахуванням фіктивних змінних залежить від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де n залежить від f. Потім визначають п'ять операцій ζ, τ, Δ, ∇, $*$. Перші чотири з них є унарними й фактично діють на множині індексів змінних ф-цій $f(x_1, \ldots, x_n)$ таким чином:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}).$$

При цьому для одномісної ф-ції вважають $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$. Операція $*$ бінарна, діє одночасно на індекси змінних розглядуваної пари ф-цій $f(x_1, \ldots, x_n)$ і $g(x_1, \ldots, x_m)$ і на саму пару, ставлячи їй у відповідність ф-цію $(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$. Таким чином приходять до алгебри $M_E = \langle M; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$, яку часто і вважають основною моделлю $|E|$-значної логіки (операторна модель) і називають алгеброю $|E|$-значної логіки. Крім перелічених задач, для цієї моделі характерна й задача про представлення, яка полягає в описуванні всіх підалгебр $|E_1|$-значної логіки, ізоморфних алгебрі $|E_2|$ значної логіки. Побудовані з операторів алгебри M_E після зазначення ф-цій, до яких їх застосовують, фактично легко можна інтерпретувати як ф-ли у формульній моделі Л. б. і тим самим вивчення формульної моделі Л. б., а також розгляд усіх згаданих вище задач можна здійснювати на алгебрі M_E. Слід відзначити, що всі загальні задачі для Л. б. набувають особливого змісту й значимості після відповідного уточнення постановок їх і розглядуваних моделей Л. б. і уточнення, що в загальному випадку вони, природно, мало оглядні. До найважливіших прикладів Л. б. можна віднести алгебри $\mathcal{P}_E = \langle P_E; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ при $|E| = k$, $2 \leqslant k < \aleph_0$ і при $|E| = \aleph_0$, серед яких найдокладніше досліджено випадок $k = 2$. Найважливішим результатом тут є повний опис Е. Постом структури всіх підалгебр. Множина всіх підалгебр виявилася лічбовою, кожна підалгебра будується ефективно, ефективно й зазначається включення їх одна в одну. Е. Пост показав також, що в будь-якій підалгебрі є скінченний базис, і число ф-цій у ньому не перевищує чотирьох. З цих результатів легко можна одержати й розв'язання згаданих задач про виразність, про повноту і про базиси. На основі результатів Е. Поста амер. логік Р. Ліндон розв'язав задачу про тотожні перетворення. Значно удосконалено для цієї алгебри й розв'язування задачі про складність реалізації. Щодо повних скінченних систем, то рад. математик О. Б. Лупанов (н. 1932) для майже всіх ф-цій указав поведінку міри складності «найпростіших» ф-л, які реалізують ці ф-ції, й побудував відповідний алгоритм синтезу ф-л. Значно удосконалено розв'язування задач про

побудову оптимальних за складністю ф-л, що реалізують ф-ції надійно або досить добре за швидкодією. Разом слід відзначити, що в зазначеному напрямі щодо сімейств ф-цій, які становлять незначну частку від усіх ф-цій, а також щодо індивідуальних ф-цій заг. теорія поки що є далекою від завершення. Досягнуто зрушень і в розв'язанні інших з уже згаданих вище задач. Слід підкреслити особливість випадку $k = 2$, з якою пов'язана пильна увага до цієї задачі з боку дослідників. Ця особливість полягає у вдалому сполученні простоти розглядуваної алгебри з можливістю моделювати за її допомогою різні об'єкти, зокрема й шляхом відповідного кодування ф-ції й алгебри k-значних логік при $k > 2$, правда, одержувані при цьому алгебри, які є декартовими ступенями підалгебр алгебри $\mathcal{P}_E$, $k = 2$, природно, вже не матимуть такого набору операцій, як в алгебрах k-значних логік.

Менш глибоко досліджено алгебри скінченнозначних логік (при $3 \leqslant k < \aleph_0$). Задачу про виразність остаточно розв'язано лише для скінченних систем M_1 і M_2, при цьому зазначено алгоритм розв'язування її. Найдокладніше розроблено питання, пов'язані з задачами про повноту, про представлення та базиси. Тут для $\mathcal{P}_E$ слід назвати насамперед ефективне описування всіх максим. підалгебр, континуальність множини підалгебр та існування підалгебр, які мають базис будь-якої скінченної й лічбової потужності, й таких, які зовсім не мають базисів, а це свідчить про істотну відмінність випадків, коли $k = 2$ і $k > 2$; асимптотичні оцінки числа максим. підалгебр і числа т. з. простих базисів в $\mathcal{P}_E$, тобто таких, які втрачають властивість повноти після ототожнення будь-якої пари змінних у будь-якої з ф-цій цього базису, а також розв'язання А. І. Мальцевим задачі про представлення для алгебр $\mathcal{P}_{E_1}$ і $\mathcal{P}_{E_2}$. В галузі оцінок складностей формул деякі принципові теореми, наприклад, про порядок складності найпростіших ф-л для майже всіх функцій можна поширити з випадку $k = 2$ й на випадок довільного натурального k, однак такої самої глибокої теорії, як і в випадку $k = 2$ тут не одержано. Є певні результати й у задачі про мінімізацію.

Менш досліджено й алгебру $\aleph_0$-значної логіки. Тут можна виділити для встановлення гіперконтинуальності множини максим. підалгебр і одержання деяких критеріїв повноти в припущенні, що розглядувані системи мають ряд наперед заданих властивостей, наприклад, мають усі одномісні ф-ції і т. п. Помітне місце в проблематиці Л. б. посідають питання дослідження спец. замкнених класів ф-цій Л. б., які становлять інтерес насамперед у зв'язку з питанням інтерпретації різних логіч. числень. Тут слід назвати вже згадану тризначну логіку Лукасевича, яку породжують ф-ції $1 - x$, $\min(1, 1 - x_1 + x_2)$, де x_1, x_2 приймають як значення $0, {}^1/_2, 1$, k-значну логіку Поста, породжену ф-ціями $x_1 + 1 \pmod{k}$ і $\max(x_1, x_2)$, де x_1, x_2 набувають значень $0, 1, \ldots, k - 1$, а також Л. б., що відповідають матрицям Ст. Яськовського, М.-Л. Мак-Нотона та ін. Ці дослідження становлять інтерес і з погляду нагромадження фактів для побудови заг. теорії Л. б., і для встановлення за їхньою допомогою деяких нових властивостей інтерпретовуваних логіч. числень.

Як зазначалося, до Л. б. можна віднести й такі алгебри функцій $|E|$-значних логік, у яких запас операцій дещо відрізняється від описаного вище. Як правило, це досягається або звуженням зазначеного запасу, або введенням до числа операцій деяких ф-цій розглядуваної алгебри. Є й інші змістові задачі, які ведуть до нестандартних моделей Л. б. Найчастіше ці задачі пов'язані з виділенням спец. допустимих класів формул з $\langle M \rangle$, зазначення яких веде до певних часткових алгебр Л. б.

Літ.: Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14; Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [бібліогр. с. 113—115]; Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста. «Алгебра и логика», 1966, т. 5, в. 2; Rosenberg I. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. «Rozpravy Československé Akademie Věd», 1970, r. 80, v. 4.

В. Б. Кудрявцев.

ЛО́ГІКА КОНСТРУКТИ́ВНА — розділ *логіки математичної*, що вивчає логічні аспекти конструктивної математики. Задачі Л. к. поділяють на дві групи. До першої групи належать: побудова формалізованих мов конструктивної математики, строгіша характеристика поняття істинної ф-ли й побудова формальних апаратів логічного виведення для кожної з таких мов; до другої — вивчення класу конструктивно істинних ф-л і формального апарату логічного виведення конструктивної математики матем. методами. Задачі першої групи розв'язують на основі аналізу методів доведення, які складаються в процесі становлення й розвитку конструктивної математики (див. *Доведень теорія*). Характерні особливості формалізованих мов, поняття істинної ф-ли й дедуктивних апаратів, що їх вивчають у Л. к., визначаються особливостями конструктивної математики, зокрема принципом, згідно з яким твердження про існування матем. об'єкта, що задовольняє якусь умову, вважають обгрунтованим лише тоді, коли вказано спосіб побудови такого об'єкта (див. *Конструктивний напрям у математиці*). Серед формалізованих мов, що їх розглядають у Л. к., розрізняють *мови логіко-математичні* й логічні. Ф-ла логіко-матем. мови відповідає лише одному судженню з якоїсь галузі конструктивної математики, а ф-ла логічної мови — цілому класові матем. су-

джень з однаковою логічною структурою (це зумовлено, напр., тим, що в таких формулах є змінні для суджень або *предикатів*). Найважливіші логіко-матем. мови — це логіко-арифм. мова, мови, які містять змінні для слів та алгоритмів, і мови з підпорядкованими змінними. Логічними мовами, які вивчають у Л. к., можуть бути, напр., мови *числення висловлювань* і числення предикатів.

Для схожих мов пропонували в деяких випадках нееквівалентні визначення поняття істинної ф-ли, і це свідчить про існування різних варіантів конструктивної математики. Найістотніші розходження між різними варіантами існують у поглядах на прийнятність тези Черча й принципу конструктивного підбору, що його висунув рад. математик А. А. Марков (н. 1903). Цей принцип полягає ось у чому. Якщо для властивості P натуральних чисел є *алгоритм*, який з'ясовує для всякого натурального числа n, чи має n властивість P, і якщо спростовано припущення про те, що жодне число цієї властивості не має, то існує натуральне число з властивістю P.

Як обгрунтування сумісності цього принципу з осн. вимогою до доведень існування в конструктивній математиці, А. А. Марков вказує, що в описаній ситуації можна знайти число n з властивістю P, перебираючи натуральні числа (починаючи від нуля в порядку зростання їх) і перевіряючи для кожного розглядуваного числа n, чи є в нього властивість P.

Одне з можливих визначень поняття конструктивної істинності формул логіко-арифм. мови грунтується на понятті рекурсивної реалізовності. Індукцією за кількістю входжень логічних знаків у ф-лу F визначають відношення «натуральне число n реалізує ф-лу F». За визначенням, напр., число n реалізує ф-лу $A \vee B$, якщо n є номером (у певному фіксованому впорядкуванні пар натуральних чисел) пари, перший член якої a є 0 або 1, а другий член b — числом, яке реалізує ф-лу A (якщо $a = 0$) і ф-лу B (якщо $a = 1$); число n реалізує ф-лу $\forall x A (x)$, якщо n — номер загальнорекурсивної ф-ції φ, такої, що для будь-якого k число $\varphi (k)$ реалізує ф-лу $A (k)$. Приймаючи тезу Черча, арифм. ф-лу вважають істинною тоді, коли є число, що її реалізує. Напр., ф-ла $\forall x (P (x) \vee \neg P (x))$ може бути реалізована тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм розпізнавання числа x властивості P. Другим засобом характеристики поняття конструктивно істинної ф-ли є зазначення алгоритму, який переробляє довільну ф-лу на ф-лу якогось простого типу або на ф-лу простішої мови, ф-лу, що її розглядають як «роз'яснення» або «розшифрування» вихідної ф-ли. Таким є алгоритм виявлення конструктивної задачі, цей алгоритм переводить довільну ф-лу мови (по суті еквівалентної логіко-арифметичній мові), яка дає змогу формулювати судження про слова й алгоритми, в ф-лу виду $\exists x_1 \dots x_n A$, де A не містить знаків $\vee$, $\exists$, або в ф-лу, в якій взагалі немає цих знаків. В основу цього алгоритму покладено ідею, близьку до ідеї реалізовності, тезу Черча й принцип Маркова. Описано ще й алгоритми, які усувають у ф-лі підпорядковані змінні. Умовою істинності ф-ли логічної мови природно вважати істинність усіх ф-л певної логіко-матем. мови, що мають ту саму логіч. структуру. Таке, напр., поняття реалізовності ф-л числення висловлювань.

Дедуктивні системи Л. к. часто одержують з відповідних класичних систем, відкидаючи неприйнятні аксіоми, схеми аксіом або правила виведення, найчастіше — *виключеного третього закон* або закон подвійного заперечення. Так одержують конструктивне числення висловлювань, конструктивне числення предикатів і конструктивну арифметику. Ці системи можна розширити, напр., приєднуючи до них такі істинні конструктивно, але не класично, аксіоми, як формула $\forall x \exists y P (x, y) \to \exists f \forall x P (x, f (x))$, де x, y — змінні для натуральних чисел, f — змінна для загальнорекурсивних ф-цій.

Одним з осн. завдань Л. к. є дослідження коректності й повноти апаратів логіч. виведення (відносно того чи іншого визначення поняття конструктивно істинної ф-ли), тобто дослідження того, чи всяка ф-ла, яку можна довести, істинна (коректність) і чи всяку істинну ф-лу можна довести (повнота). З теореми про коректність для арифметики (всяку ф-лу логіко-арифм. мови, яку можна довести в конструктивній арифметиці, можна реалізувати) випливає реалізовність кожної пропозиційної ф-ли, яку можна довести в конструктивному численні висловлювань. *Геделя теореми про неповноту* справджуються не лише для класичних, а й для конструктивних логіко-матем. числень, так що для всіх достатньо багатих логіко-матем. мов конструктивної математики не можна вказати повні апарати логіч. виведення. Питання про повноту важливих логічних числень у класичній логіці й у Л. к. розв'язують по-різному. Так, у класичній логіці числення висловлювань і числення предикатів будуть повними, а в конструктивному численні висловлювань існують реалізовні пропозиційні ф-ли, які в ньому не можна довести. До завдань Л. к. входить ще дослідження логічних числень поза зв'язком з поняттям істинної ф-ли, зокрема, дослідження проблеми розв'язності, відшукування класів ф-л, для яких довідність у конструктивному численні еквівалентна довідності у відповідному класичному численні, побудова операцій занурювання з конструктивних числень у класичні та з класичних у конструктивні, побудова числень, пристосованих для пошуків логічного виведення і алгоритмів пошуку логічного виведення (див. *Генцена формальні системи*).

Значення Л. к. для розвитку конструктивної математики полягає в тому, що за допомогою понять і теорем Л. к. можна пояснювати конструктивне розуміння матем. суджень, досліджувати, наскільки глибокі відмінності

між конкретними теоріями конструктивної математики й відповідними класичними теоріями та між різними варіантами теорій конструктивної математики.

Літ.: Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; Марков А. А. О конструктивной математике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 67; Идельсон А. В. Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1964, т. 72; Шанин Н. А. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л. Гудстейна. В кн.: Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970; Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952.
В. О. Ліфшиць.

ЛОГІКА МАЖОРИТАРНА — розділ *структурної теорії автоматів*, у якому розглядаються властивості мажоритарного базису та способи представлення в ньому логічних функцій. Мажоритарний базис складається з мажоритарної операції:

$$\mathrm{maj}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} a_2, & \text{коли } \sum_{j=1}^{n} x_j \geqslant a_2; \\ \sum_{j=1}^{n} x_j, & \text{коли } -a_1 < \sum_{j=1}^{n} x_j < a_2; \\ -a_1, & \text{коли } \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant -a_1, \end{cases}$$

де x_j — цілі числа, $x_j \in [-a_1, a_2]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (n — непарне), $a_2, a_1 > 0$, операції діаметрального заперечення $\bar{x} = a_2 - a_1 - x$ (множина значень x повинна бути інваріантною відносно цієї операції) та констант. 1 і 0. Мажоритарний базис являє собою функціонально повну систему елементарних операторів при будь-якому непарному $n \geqslant 3$. Будь-яку логіч. функцію можна представити в мажоритарному базисі (з довільномісцевою мажоритарною операцією) за допомогою розкладання ф-цій за змінними, що відповідає каскадній побудові сітки (див. *Каскадів метод*), яка реалізує цю ф-цію. Мінімізація ф-цій у цьому разі заснована на відповідному виборі способу та порядку виключання змінних. До економічнішої реалізації, як правило, приводять методи функціональної декомпозиції в мажоритарному базисі, коли образом декомпозиції є мажоритарна операція, а до складових декомпозицій ставлять кілька вимог, пов'язаних з простотою реалізації цих ф-цій. Розв'язування задачі декомпозиції зводиться до розв'язування систем логіч. рівнянь у мажоритарному базисі. Найбільшого розвитку методи Л. м. набули для тримісної мажоритарної операції у двозначній логіці ($a_1 = a_2 = 1$; $x_j = -1, 1$; $n = 3$).

Літ.: Варшавский В. И. Мажоритарная декомпозиция. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 9; Варшавский В. И. Мажоритарная операция в многозначной логике. «Кибернетика», 1969, № 2; Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я. Проектирование вычислительных и управляющих схем на мажоритарных элементах. Л., 1969 [бібліогр. с. 34—35]; Cohn M., Lindaman R. Axiomatic majority-decision logic. «IRE transactions on electronic computers», 1961, v. EC-10, № 1.
Б. Л. Овсієвич.

ЛОГІКА МАТЕМАТИЧНА, формальна логіка — дедуктивна математична теорія, яка досліджує схеми або форми завжди істинних висловлювань, тобто схеми висловлювань, істинних для довільних сукупностей об'єктів. Вона тісно пов'язана з традиційною логікою, тобто наукою про побудову правильних умовиводів: кожній теоремі Л. м., яка містить певні умови, однозначно відповідає схема правильного умовиводу. Л. м. є основою сучас. логіки, поза її рамками лишається тільки небагато напрямів — індуктивна логіка, діалектична логіка. До Л. м. в широкому розумінні, крім власне логіч. числень, відносять деякі матем. науки, які виникли під впливом запитів логіки, такі, як *моделей теорія, алгоритмів теорія*, різні алгебри, що виникли при дослідженні логіч. конструкцій, та ін. До Л. м. відносять і конкретні дослідження різних наук. теорій, що їх проводять з метою з'ясувати їхню логіч. несуперечливість і дедукційні можливості, напр., дослідження питань основ математики, логіч. дослідження мов тощо. Деякі з цих теорій тісно пов'язані з Л. м., інші відокремились від неї й набули самостійного значення (напр., *булеві алгебри*), так що чітко окреслити границі Л. м. досить важко. У вужчому розумінні термін «Л. м.» означає науку, об'єктами вивчення якої є математика та інші дедуктивні системи, точніше логіч. слушність виводів і конструкцій, що розглядають у них, тобто цей термін відносять до логіки, яка розвивається відповідно до потреб математики. Її наз. також метаматематикою. або *металогікою*.

Логіка — наука про побудову правильних умовиводів суто формальним шляхом, коли виходять з вигляду засновків, а не їхнього змісту, має багатовікову історію. Досить велику частину формальної логіки викладено у вигляді фігур силогізмів (див. *Силогістика*) в працях Арістотеля. В такому вигляді формальна логіка розвивалася до середини 19 ст. Її розробляли як один з напрямів філософії, але помітного практичного застосування вона не набула.

В середині 19 ст. здійснено спроби зобразити логіку у вигляді алгебр. системи й вивчати її тими самими методами, що й інші розділи математики. Цей напрям, у розробці якого перші успішні кроки зробив англ. математик Дж. Буль (1815—64), виявився надзвичайно плідним. Тепер *алгебра логіки* відіграє важливу теор. і практичну роль. Дещо пізніше здійснено спроби знайти в логіці обгрунтування математики. Перші роботи в цьому напрямі належать нім. логікові Г. Фреге

(1848—1925), англ. ученим А. Уайтхеду (1861—1947) та Б. Расселу (1872—1971). А. Уайтхед і Б. Рассел розробили теорію типів, вільну від відомих антиномій теорії множин, у т. ч. й від антиномії Рассела, яка є в системі Фреге. У працях Фреге, Уайтхеда й Рассела розроблено логіку предикатів, причому в роботах Уайтхеда й Рассела вона тісно переплетена з теорією типів. Великий внесок у розвиток сучасної Л. м. зробив німецький математик Д. Гільберт (1862—1943). Хоч висунута ним програма обгрунтування математики виявилася неслушною (див. *Формалізм* у математиці, *Геделя теореми про неповноту*), проте при спробі здійснити її було значною мірою розроблено проблеми логіки. Зокрема, Д. Гільберт виділив числення предикатів як систему, не залежну від теорії типів. Дальший розвиток Л. м. був пов'язаний, в основному, з запитами математики. Великі заслуги тут належать австр. математикові К. Геделю (нар. 1906), амер. математикові А. Черчу (нар. 1903), рад. математикові А. І. Мальцеву (1909—68), амер. математику А. Тарському (нар. 1902) та ін.

Основу сучасної Л. м. становлять *числення висловлювань* і числення предикатів. Перше оперує висловлюваннями (твердженнями), які виступають як єдине ціле, не розглядаючи їхньої суб'єктно-предикатної структури. Складні висловлювання утворюються з простіших за допомогою логіч. зв'язок. У численні висловлювань використовують не конкретні висловлювання, а висловлювальні змінні, тому тут вивчають не конкретні висловлювання, а висловлювальні функції, які перетворюються на висловлювання, коли всі висловлювальні змінні, які входять до них, замінити висловлюваннями. Істинність чи хибність одержаного складного висловлювання залежить тільки від істинності чи хибності складових висловлювань і не залежить від їхнього змісту. Вивчення цього числення як алгебр. системи становить предмет алгебри логіки.

Усі поняття й теореми числення висловлювань використовують у ширшій логіч. теорії, що її наз. численням предикатів, у якому, на відміну від числення висловлювань, розглядають внутр. структуру простих висловлювань, що з них потім утворюють складні висловлювання. А саме: у висловлюванні виділяють підмет і присудок (предикат). Якщо в даному реченні видалити підмет і на його місце підставити інший підмет, одержимо інше висловлювання. Таким чином, присудок (предикат) являє собою висловлювальну форму, визначену на множині об'єктів, які можуть виступати як підмети. Мова числення предикатів набагато виразніша, ніж мова числення висловлювань, за її допомогою вдається виразити значні фрагменти математики (див. *Елементарні теорії*).

Галузь застосування Л. м. розширюється. Л. м., крім вивчення побудови правильних міркувань у звичайній мові, займається аналізом осн. понять у науці (зокрема, в математиці). Для цього вона залучає поняття *множин теорії* або арифметики. Таким чином Л. м. набула широкого застосування в методології науки. Новою і дуже перспективною галуззю застосування Л. м. є *кібернетика*. Кібернетика не тільки використовує результати, одержані раніше в Л. м., а й стимулює нові дослідження та появу нових наук. напрямів. Напр., зв'язок між релейно-контактними схемами та формулами алгебри логіки стимулював розвиток алгебри логіки. Питання повноти функцій алгебри логіки, їхньої декомпозиції та мінімізації розроблено завдяки пошукові методів синтезу оптим. схем.

Л. м. широко застосовували і в *автоматів теорії*, зокрема для того, щоб описувати функціонування автоматів, щоб задавати умови функціонування автоматів, щоб вивчати їхню обчисл. здатність (див. *Міри складності* в теорії автоматів). Перспективним напрямом кібернетики є дослідження можливостей застосовувати машини для доведення теорем (див. *Автоматизований пошук доведень теорем, Доведення теорем на ЕОМ*).

Розвиток таких напрямів, як теорія завбачень, автоматизація діагностики тощо вимагає розробки відповідних логіч. систем у рамках *логік некласичних*. Важливі роботи проводять в області логіч. дослідження природних та штучних мов (див. *Лінгвістика математична, Мови програмування*).

Літ.: «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]; Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. М., 1971 [бібліогр. с. 296—309]; Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952.

В. М. Глушков, М. І. Кратко

ЛО́ГІКА МІНІМА́ЛЬНА — те саме, що й *числення висловлювань мінімальне*.

ЛО́ГІКА ПОРО́ГОВА — розділ *структурної теорії автоматів*, у якому розглядаються питання аналізу й синтезу логічних схем з порогових елементів. Пороговий елемент можна визначити: ф-цією перетворення входів $f(X)$, областю визначення якої є булевий n-вимірний простір, а областю значень — множина дійсних чисел N; упорядкованою послідовністю дійсних чисел $T_1 > T_2 > \ldots > T_k$, що їх називають порогами; початковою константою $s \in \{0, 1\}$. Закон функціонування порогового елемента можна описати *булевою функцією* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення s для всіх наборів α, при яких $T_i < f(\alpha) \leqslant T_{i+1}$, де $i \equiv 0 \mod 2$ або $i + 1 \equiv 1 \mod 2$, і набуває значення $\bar{s}$ для решти наборів. Розрізняють одно-, дво- і k-порогові елементи. Вид функціоналу перетворення входів і вид решти параметрів привів до різних моделей порогових елементів, з яких найхарактернішими є лінійні однопорогові елементи (ЛПЕ) з функціоналом перетворення видів $f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ і з початковою константою $s = 0$. У цьому функціоналі кон-

станти w_i належать множині дійсних чисел; ці константи наз. **вагами порогового елемента**. ЛПЕ можна охарактеризувати вектором $(w_1, w_2, \ldots, w_n, T)$, який наз. структурою ЛПЕ. Булеву ф-цію $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що для неї є структура ЛПЕ, який реалізує $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, наз. **пороговою**. Факт реалізації порогової функції $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ЛПЕ $(w_1, w_2, \ldots, w_n, T)$ фіксують так: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (w_1, w_2, \ldots, w_n, T)$. Не всі булеві ф-ції є пороговими. Порогові ф-ції однорідні й повністю монотонні. Монотонну порогову ф-цію $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яку реалізують на ЛПЕ $(w_1, w_2, \ldots, w_n, T)$ з цілими додатними вагами й порогом, можна одержати з монотонної симетричної ф-ції $C_T(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_1 w_1, \ldots, x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_n, w_n)$, об'єднавши змінні з однаковим 1-м індексом.

Найважливішими задачами Л. п. є задачі аналізу й синтезу логічних схем з порогових елементів. Задача аналізу логічних схем з порогових елементів зводиться до визначення булевої функції за структурою ЛПЕ або за структурою сітки, що її реалізує. Задачу знаходження порогової ф-ції за структурою ЛПЕ наз. задачею аналізу порогового елемента.

Задача синтезу логічних схем з порогових елементів має такі осн. постановки: 1) визначення відповідно до обраного критерію оптим. структури ЛПЕ для реалізації заданої порогової ф-ції; 2) побудова з порогових елементів *сітки логічної*, яка реалізує довільну булеву ф-цію, коли немає обмежень, накладуваних на параметри порогових елементів сітки; 3) побудова з порогових елементів логічної сітки, яка реалізує довільну булеву ф-цію, коли є обмеження, накладувані на параметри порогових елементів сітки. Найбільше розроблено задачу в 1-й постановці. Її зводять до розв'язування такої системи нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_{ij} > T \text{ при } \varphi(\tilde{\alpha}_j) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_{ij} \leqslant T \text{ при } \varphi(\tilde{\alpha}_j) = 0,$$

де α_{ij} — значення аргументу x_i на наборі з номером j; $\varphi(\tilde{\alpha}_j)$ — значення булевої ф-ції $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборі аргументів $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$. Найбільший практичний інтерес становить задача відшукання такого розв'язку системи нерівностей, коли лінійна форма $R = T + \sum_{i=1}^{n} w_i$ досягає мінімуму. Особливістю другої постановки є наявність широкого нерегулярного базису. Як правило, розв'язок цієї задачі одержують стосовно до фіксованої структури сітки, напр., для однорядної, порогово-диз'юнктивної, порогово-кон'юнктивної тощо. При 3-й постановці задачі синтезу враховують характеристики фіз. пристроїв, описуваних моделлю порогового елемента. Накладання деяких обмежень на параметри порогових елементів може привести до класичних постановок задачі синтезу, наприклад, до синтезу в базисі «І», «АБО», «НЕ» чи синтезу в мажоритарному базисі.

Оскільки система порогових елементів є функціонально повною, за допомогою логічної сітки з порогових елементів можна реалізувати будь-яку булеву ф-цію. Задача синтезу сітки з порогових елементів має неоднозначний розв'язок; тому при синтезі сітки вводять певні критерії якості: складність сітки, її швидкодію, надійність тощо.

Літ.: Вавилов Е. Н. [та ін.]. Синтез схем на пороговых элементах. М., 1970 [бібліогр. с. 363—364]; Бутаков Е. А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М., 1970 [бібліогр. с. 315—326]; Дертоузос М. Пороговая логика. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 337—341].

В. В. Литвинов.

ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ ВИЩИХ СТУПЕНІВ — комплекс напрямів у *логіці математичній* і основах математики, який досліджує мови вищих ступенів і логічні числення вищих ступенів. В основному, в такі мови, крім індивідних змінних, входять предикатні змінні (одного або кількох «ступенів» або «типів»). Їх дозволено зв'язувати *кванторами*, а також підставляти на місця аргументів інших предикатних змінних, якщо здійснюються певні умови, накладувані на типи змінних. Такі мови й пов'язані з ними *числення* виникли у зв'язку з теоретико-типовим підходом до основ математики, до якого вдалися англ. вчені Б. Рассел (1872—1971) й А. Уайтхед (1861—1947), щоб побудувати основи математики, вільні від відомих теоретико-множинних і логічних парадоксів.

З появою праць польс. (нині амер.) логіка А. Тарського (нар. 1902), якими закладено основи сучасної логіч. *семантики*, почався розвиток семантичного, або теоретико-модельного, напряму в Л. п. в. с. Тепер цей напрям домінує настільки, що найчастіше саме його називають Л. п. в. с. Його важливість і необхідність, зокрема, пояснюється тим, що мови 1-го ступеня недостатні для того, щоб виражати найважливіші матем. концепції. До того ж уведення в розгляд нестандартних інтерпретацій для теорій вищих ступенів дає змогу застосовувати для вивчення їх розвинений апарат *моделей теорії*, а також знаходити для цих теорій нові інтересні витлумачення.

Відправні поняття Л. п. в. с. визначають так. Нехай $\mathscr{T}$ — найменша з множин слів в алфавіті $\{0, (,)\}$, які містять 0, і разом з будь-якими словами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ слово $(\tau_1 \ldots \tau_n)$. Елементи $\mathscr{T}$ наз. **типами**. Приклади типів: 0, (0), (00), ((0)), ((00(0))). Поняття ступеня типу τ (позначення — St τ) визначають так: St 0 = 0, St $(\tau_1 \ldots \tau_n) = 1 + \max\{\text{St}\tau_1, \ldots, \text{St}\tau_n\}$. Напр., St (0) = 1 + max St 0 = 1, St (00) = 1, St ((00) 0) = 1 + max {St (00), St 0} = 2. Нехай A — якась множина, а $(A^\tau)_{\tau \in \mathscr{T}}$ — сімейство множин, таке, що $A^0 = A$,

$A^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$ — множина всіх підмножин декартового добутку $A^{\tau_1} \times \ldots \times A^{\tau_n}$. Елементи множини A^{τ} ($\tau \in \mathcal{T}$) наз. *відношеннями* типу τ на A. Будь-яке, напр., двомісне відношення R між елементами множини A взаємовизначене з множиною $a_R^{(00)} \in A^{(00)}$, такою, що $\langle a_1 a_2 \rangle \in a_R^{(00)}$ рівносильне $a_1 R a_2$. Відповідність $R \to a_R^{(00)}$ взаємно однозначна. Таке визначення поняття «відношення» — уточнює зміст уживаного матем. терміна «відношення» (див. *Предикат*). Відношення типу 0 на A — це елементи A; відношення типу (00) — двомісні відношення на A: відношення типу ((0)) — набори підмножин A тощо. Формальна мова L^{ω} містить символи логіч. операторів (логіч. зв'язки й квантори), рівність і для кожного типу τ — послідовність $x_0^{\tau}, x_1^{\tau}, \ldots$ змінних типу τ. Вирази виду $x_i^{\tau} = x_j^{\tau}$ й $x_i^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n}$ наз. атомарними формулами. Виходячи з поняття атомарної ф-ли, визначають (звичайно) поняття ф-ли й пропозиції. Ступенем ф-ли наз. найвищий із ступенів змінних, які входять до неї, збільшений на одиницю. Через L^n позначають фрагмент мови L^{ω}, який має лише змінні таких типів τ, що $\mathrm{St}\,\tau < n$. Цей фрагмент наз. мовою n-го ступеня. Нехай $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$ — таке сімейство множин, що $A_{\tau} \subset \subset A^{\tau}$ для будь-якого типу τ і $A_0 = A$. Поняття здійсненності формули на $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$ визначають за Тарським, змінні типу τ інтерпретують як елементи A_{τ}. Формулу наз. істинною на $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$, якщо вона справджується на $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$ при всіх значеннях вільних змінних (які належать відповідним множинам A_{τ}).

За *аналогією* з численнями предикатів 1-го ступеня будують числення предикатів вищих ступенів. Сімейство $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$ наз. правильним для даного числення, якщо на ньому істинні всі аксіоми цього числення, а кожне правило виведення зберігає на ньому істинність. Амер. логік Л. Генкін довів, що всяка ф-ла числення предикатів вищих ступенів, істинна на всіх правильних (для цього числення) сімействах, довідна в цьому численні. Серед різних видів інтерпретацій мов вищих ступенів особливий інтерес становлять інтерпретації, стандартні в такому розумінні. Кажуть, що дана ф-ла стандартно справджується на множині A, якщо вона справджується на сімействі $(A^{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$, де $A^0 = A$. Ф-ла стандартно істинна на A, якщо вона істинна на $(A^{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$. Формула наз. стандартно здійсненною (загальнозначущою), якщо вона стандартно здійсненна (істинна) на деякій (всякій) непустій множині (див. *Тотожно істинна формула*). Вивчення питань, пов'язаних із стандартними інтерпретаціями, припускає досить змістовну теоретико-множинну базу. Чи є якась ф-ла стандартно загальнозначущою — це залежить від покладеної в основу *множин теорії*. Напр., властивість множини бути цілком упорядковуваною можна виразити ф-лою 2-го ступеня. Чи ця ф-ла стандартно загальнозначуща — це залежить від того, чи є в цій теорії множин аксіома вибору. Ф-ли α й β наз. стандартно еквівалентними, якщо $\alpha \leftrightarrow \beta$ є стандартно загальнозначущою формулою. Кажуть, що ф-ла β логічно, або стандартно, випливає з $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, якщо ф-ла $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ — стандартно загальнозначуща. Для числення предикатів 1-го ступеня поняття логіч. і дедуктивного слідування збігаються завдяки повноті цього числення. З *Геделя теореми про неповноту* випливає, що для будь-якого числення вищих ступенів поняття дедуктивного слідування сильніше: множина геделівських номерів усіляких кортежів $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \rangle$ ф-л цього числення, таких, що β логічно випливає з $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не тільки не є рекурсивно перелічним, а й не з'являється ні в якому розумному розширенні ієрархії Кліні — Мостовського (так що, зокрема, числення предикатів вищих ступенів не повні відносно загальнозначущості при стандартних інтерпретаціях, тобто для стандартних інтерпретацій згадана вище теорема Генкіна не має місця). Тому в дослідженнях, належних до стандартних інтерпретацій, доводиться використовувати переважно теоретико-множинні засоби. Подані нижче результати належать до стандартних інтерпретацій і довідні в рамках теорії множин Цермело — Френкеля. Для будь-якої ф-ли можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну їй регулярну ф-лу того самого ступеня, тобто таку ф-лу в випередженій формі, в якій немає квантора по змінній більшого ступеня, який іде за квантором по змінній меншого ступеня. Клас регулярних ф-л позначатиметься через L. Ф-лу з L наз. монадичною, якщо типи зв'язаних змінних у ній належать множині $\{0, (0), ((0)), \ldots\}$. Для монадичних тверджень 2-го ступеня проблеми справджуваності, загальнозначущості й проблема спектра (яка полягає у відшуканні характеризації класів потужностей цих множин, на яких твердження істинні) розв'язуються ефективно. Становище змінюється для ф-л вищих ступенів: для будь-якої ф-ли n-го ступеня σ можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну їй монадичну формулу $(n+1)$-го ступеня; якщо $n \geqslant 3$, то можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну σ на нескінченних множинах монадичну ф-лу n-го ступеня. Отже, стосовно нескінченних множин виражальні можливості мови n-го ступеня ($n \geqslant 3$) ті самі, що й для її монадичного фрагмента. Особливе місце класу L^2 ф-л 2-го ступеня з'ясовують такою теоремою: L^2 є класом відомостей щодо справджуваності для L^{ω}, тобто існує ефективна процедура, яка переводить будь-яку ф-лу в ф-лу з L^2, одночасно з нею здійсненну або нездійсненну. Нехай $\varkappa_n$ — найменший з таких кардиналів $\varkappa$, що будь-яка справджувана ф-ла з L^n справ-

джується на множині потужності, не більшої за $\varkappa$. Внаслідок теореми Левенгейма — Сколема $\varkappa_1 = \aleph_0$. Для $n > 1$ кардинали $\varkappa_n$ дорівнюють $\varkappa_2$ і «неозоро» великі: вони більші за багато які недосяжні й навіть вимірні кардинали (якщо такі є). Це показує, що вже проблеми семантики мови 2-го ступеня спричинюють необхідність розглядати дуже великі кардинали.

Моделлю формули σ наз. усяку пару $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$, де A — непуста множина, а F — ф-ція, визначена на змінних x_n^τ, які вільно входять у σ, і така, що 1) $F(x_n^\tau) \in A^\tau$, 2) σ справджується при інтерпретації кожної вільної змінної x_n^τ як $F(x_n^\tau)$, а при інтерпретації зв'язаних змінних x_n^τ — як усіляких елементів A^τ. З наведених наслідків випливає, що вивчати загальні властивості класів моделей для ф-л 2-го ступеня (і навіть, як можна показати, для ф-л вигляду $\forall x^{(0)}(\alpha)$, де α не містить зв'язаних предикатних, тобто неіндивідних, змінних) так само важко, як і вивчати властивості класів моделей для ф-л як завгодно високих ступенів. Звідси очевидна безнадійність пошуків на традиційних шляхах сильних і загальних теорем, належних мові L^2 і подібних до відомих теоретико-модельних теорем. У зв'язку з цим набуває інтересу вивчення семантики мов, проміжних між мовами 1-го й 2-го ступенів, і деяких їхніх модифікацій, зокрема, мов 2-го ступеня з одномісними предикатними змінними, інтерпретованими як скінченні підмножини індивідів, мов, які містять змінні, інтерпретовані як скінченні послідовності індивідів, і мов, які містять лише індивідні змінні, але допускають лічбові *кон'юнкції* й *диз'юнкції*. Одну з таких проміжних мов застосовують в *автоматів теорії* (див. *Мова логічна для задавання автоматів*). Стандартно здійсненну ф-лу α з L^n наз. L^n-повною, якщо для будь-якої ф-ли β з L^n є загальнозначущим $\alpha \to \beta$ або $\alpha \to \neg\beta$. α наз. L^n-поповненням ф-ли β з L^n, якщо з α логічно випливає β, а α — L^n-повна. Стандартно здійсненну ф-лу наз. категоричною, якщо всі її моделі (інтерпретації) ізоморфні. В припущенні геделівської аксіоми конструктивності для будь-якої стандартно здійсненної ф-ли з L^n ($n > 1$) існує її L^n-поповнення, яке є категоричною ф-лою (і, отже, для будь-якої ф-ли з L^n її L^n-повнота рівносильна категоричності). Ця теорема в деякому розумінні двоїста до геделівської теореми неповноти, яка встановлює, зокрема, що є здійсненна ф-ла 1-го ступеня, яка не має L^1-поповнення. Разом з тим природа цих теорем одна й та сама: досить багаті виражальні можливості мов L^n (ще більше підсилювані аксіомою конструктивності), які зумовлюють внаслідок теореми Тарського невизначність поняття істини для цих мов засобами самих цих мов. Розкриваючи обмеженість (у цьому «метасмислі») виражальних можливостей таких мов, теорема Тарського розкриває й обмеженість дедуктивних можливостей пов'язаних з ними числень, виявлювану як існування дедуктивно непоповнюваних формул.

Літ.: Бочвар Д. А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления. «Математический сборник. Новая серия», 1938, т. 4, в. 2; Бочвар Д. А. К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. «Математический сборник. Новая серия», 1944, т. 15, в. 3; Зыков А. А. Проблемы спектра в расширенном исчислении предикатов. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1953, т. 17, № 1; Когаловский С. Р. К семантике теории типов. «Известия высших учебных заведений. Математика», 1966, № 1; Tarski A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen «Studia Philosophica», 1936, v. 1; Robinson A. Non-standard analysis. «Proceedings of the Royal Academy of Sciences», 1936, ser. A, v. 64; Аддисон Дж. Теория иерархий. В кн. Математическая логика и ее применения. Пер. с англ. М., 1965; Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. Foundations of set theory. Amsterdam, 1958.

С. Р. Когаловський.

ЛО́ГІКИ НЕКЛАСИ́ЧНІ — логічні системи, в основі яких лежить інше, ніж у класичній логіці тлумачення традиційних логічних операцій *заперечення*, *кон'юнкції*, *диз'юнкції*, імплікації та кванторів. У деяких Л. н. до первісних традиційних логічних зв'язок додають такі, як «необхідно», «можливо», «дозволено», «буде» та ін.

Л. н., один з напрямів сучас. *логіки математичної*, почали розвиватися на поч. 20 ст. Поява однієї з перших систем Л. н.— інтуїціоністської — пов'язана з критикою одного з осн. законів класичної логіки — *виключеного третього закону*: з будь-яких двох суперечних одне одному суджень одне є істинне. В матем. логіці цей закон сформульовано так: для кожного твердження A або A, або не A. З критикою цього закону виступив 1908 голл. математик Л. Брауер. У своїй критиці він виходив з осн. принципу *інтуїціонізму:* існування в математиці — це те саме, що конструктивність (тобто можливість побудови). Відповідно до цього принципу, напр., твердження: «існує x, який має властивість P», слід розуміти як можливість вказати конкретний x із властивістю P. Тепер припустимо, що вислів A є твердження: якийсь елемент множини має властивість P. Якщо йдеться про елементи якоїсь скінченної множини, то в принципі можна перебрати всі ці елементи й для кожного перевірити — має він властивість P чи ні. А якщо ця множина нескінченна, то такий перебір у принципі неможливий. Можна тільки сподіватися, що вдасться знайти елементи з потрібною властивістю або аналітично довести, що A хибне, напр., вивести з A суперечність. Проте заг. методу, який давав би змогу для будь-якого твердження A встановити, правильне воно чи ні, немає. Тому Брауер вважав за необхідне відмовитися від принципу виключеного третього. Класичній логіці було протиставлено інтуїціоністську логіку, яку формалізував голл. математик А. Гейтінг 1930. В 1910—13 рос. логік М. О. Васильєв запропонував логіку, яку він назвав «уявлюваною». Подібно до того, як

«уявлювана» геометрія Лобачевського була наслідком відмови від 5-го постулату Евкліда, «уявлювана» логіка виходила з відмови від закону суперечності, сформульованого так: жодній речі не належить предикат, який суперечить їй. В «уявлюваній» логіці можливі три типи суджень: судження ствердне (*C* є *P*), заперечне (*C* не є *P*) й акцидентальне (*C* є *P* і є не *P*). З істинності, напр., акцидентального судження випливає хибність ствердного й заперечного, з неправильності ствердного й акцидентального суджень випливає істинність заперечного. Закон виключеного третього замінюють, отже, законом «виключеного четвертого». При цьому зберігається закон «несамосуперечності»: одне й те саме судження не може бути одночасно і істинним, і хибним. Логіка Васильєва свого часу була маловідомою й не набула глибшого розвитку.

Широко відомими є *логіки багатозначні*, що їх розробили польс. логік Я. Лукасевич (1920) й амер. математик Е. Пост (1921). Вони є узагальненням класичної логіки в такому розумінні. В *k*-значній логіці твердження можуть набувати будь-якого з *k*-істиннісних значень, подібно до того, як у класичній логіці твердження набувають двох значень «істинне» й «хибне». Напр., у тризначній логіці Лукасевича твердження можуть бути «істинними», «хибними» й «нейтральними».

В 1930 Я. Лукасевич і А. Тарський побудували ще й нескінченнозначну логіку. Значенням для висловлювання в цій логіці може бути будь-яке дійсне число в інтервалі від 0 до 1. Істиннісне значення розглядається в ній, як імовірність правильності твердження. Висловлювання, які завжди набувають значення 1, є тавтологія цієї логіки

З критикою т. з. «парадоксів матеріальної імплікації», які суперечать інтуїтивному розумінню логіч. слідування, пов'язується побудова логік *імплікації строгої*. Першу з таких логік розробив амер. логік К. Льюїс 1912—18. Дальшу формалізацію строгої імплікації запропонував 1956 нім. математик В. Аккерман. Чимало праць, які стосуються формалізації логіч. слідування, належить рад. логікові О. О. Зінов'єву. Інший різновид імплікації, т. з. конексивна імплікація, виникла тоді, коли було зроблено спробу побудувати логіку, в якій правильною є «теза Арістотеля»: жодне висловлювання не може імплікуватися своїм власним запереченням. Повну несуперечну логіку з такою імплікацією побудував сучасний логік С. Мак-Колл.

Розгляд суджень не лише істинних і хибних, а ще й можливих, необхідних і ін. привів до створення модальної логіки. В модальних логіках за початкові логічні зв'язки беруть, поряд з традиційними зв'язками, модальні оператори: необхідність, можливість тощо.

Ряд логіч. числень модальної логіки побудував К. Льюїс. Тризначна й чотиризначна логіки Лукасевича теж є модальними логіками. Крім «абсолютних» модальностей розглядають і відносні, де судження можуть бути необхідними або можливими відносно інших суджень. Близькими до модальних логік є деонтична логіка, в якій до числа початкових зв'язок входять оператори «дозволено» й «заборонено», часова логіка з початковим оператором «буде випадок, що ...» та інші Л. н.

Є два шляхи побудови Л. н. Один з них є узагальненням двозначності класичної логіки, де всі твердження інтерпретують на множині з двох значень. Він полягає в тому, що логіку задають за допомогою інтерпретації. При цьому ясно вказують, яких «істиннісних» значень можуть набувати висловлювання та які з цих значень є виділеними або позначеними (аналог значення «істинне» в класичній логіці). *Логічні операції* задають як функції на множині істиннісних значень. Такими є, напр., багатозначні логіки Лукасевича й Поста. Другий шлях побудови Л. н.— аксіоматичний метод. Подібно до того, як класичну логіку можна задавати за допомогою системи аксіом і правил виведення, Л. н. можна запровадити як числення, тобто вказати аксіоми й правила, які дають змогу з аксіом одержувати всі правильні в розглядуваній логіці формули. Таким способом будують інтуїціоністську логіку, логіки строгої імплікації та багато модальних логік.

При задаванні логіки як *числення* однією з осн. проблем є проблема інтерпретації, тобто побудова адекватної матриці для числення або принаймні класу таких матриць (по змозі, простих), щоб вивідність формули в численні була еквівалентна її загальнозначущості в цьому класі матриць. Коли логіку будують за допомогою інтерпретації, важливою проблемою є проблема аксіоматизації, тобто зображення логіки як числення, в якому вивідними є всі правильні в логіці формули й лише вони. Цю проблему розв'язано для великого класу багатозначних логік.

Чимало досліджень у галузі багатозначних логік стосується проблеми функціональної повноти. Ця проблема полягає в тому, щоб відшукати умови, за яких через зв'язки заданого довільного списку можна виразити всі ймовірні логічні зв'язки досліджуваної логіки. Як правило, Л. н., які містять лише традиційні логіч. зв'язки, є частиною класичної логіки в такому розумінні. В Л. н. відкидають деякі постулати класичної логіки, проте всі формули, правильні в будь-якій з Л. н., є тавтологіями класичної логіки (винятком є логіка конексивної імплікації, в якій правильними є деякі тотожно хибні формули).

З класичною логікою узгоджуються й модальні логіки. Всі формули, які є правильними в модальній логіці й містять лише зв'язки класичної логіки, є тотожно істинними. Більше того, переважну більшість модальних, деонтичних та ін. логік основано на класичній логіці, тобто правильним є й обернене: будь-яка тавтологія класичної логіки є правильною й у цих Л. н.

Деякі Л. н. можна інтерпретувати за допомогою класичної логіки. Йдеться про семантику, що її запропонував сучасний амер. математик С. Кріпке для інтуїціоністських

і деяких модальних логік. Семантичні побудови Кріпке варті уваги й тому, що вони дають змогу пояснити істинність у тій чи іншій Л. н. через класичну істинність у якійсь системі пов'язаних між собою «уявлюваних» світів.

Вивчаючи Л. н., значну увагу приділяють з'ясуванню зв'язків між різними логіками. Крім звичайного відношення включення (всі правильні формули однієї логіки є тавтологіями в іншій), великий інтерес становить перевідність однієї логіки в іншу. Напр., за будь-якою формулою інтуїціоністської логіки можна побудувати формулу модальної логіки $S4$, тавтологічність якої в модальній логіці еквівалентна правильності первісної формули в інтуїціоністській логіці. Це дає змогу звести багато проблем інтуїціоністської логіки до проблем модальної логіки. Модальні логіки є в певному розумінні універсальними, бо багато з цих логік можна перевести в підходящі модальні.

З Л. н. найпоширенішими є інтуїціоністська та близька до неї *логіка конструктивна*. Критику методів класичної математики, яка стверджує необхідність обмеження цих методів, викликано виявленням парадоксів у наївній теорії множин. Усунути парадокси теорії множин можна на основі інших Л. н. Такою логікою є, напр., тризначна логіка Д. А. Бочвара. В ній розрізняють висловлювання, які мають смисл, і беззмістовні висловлювання. Твердження, які виражають парадокси теорії множин, виявляються тут безглуздими. З інших застосувань багатозначних логік слід відзначити побудову спец. логіч. систем для подолання труднощів у вивченні квантової механіки (логіки квантової механіки). Різні Л. н. будують при доведенні незалежності систем аксіом, зокрема, для класичної логіки. Щоб довести, що якусь аксіому не можна вивести з інших, досить знайти багатозначну логіку, в якій правильними є всі аксіоми, крім досліджуваної.

Будуючи й досліджуючи різного роду кіберн. моделі, часто натрапляють на логіку, відмінну від класичної. Так, напр., при прогнозуванні й діагностиці натрапляють на деякі різновиди модальної логіки, при дослідженні роботи керуючих пристроїв — на різні форми часових логік, логіку запитань і відповідей тощо. Апарат багатозначної логіки зручний для розв'язування питань аналізу й синтезу керуючих систем, для розробки методів контролю за їхньою роботою. Отже, кібернетика й обчисл. техніка, з одного боку, є споживачами Л. н., а з другого — джерелом виникнення й розвитку таких логік.

Літ.. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Применение логики в науке и технике. М., 1960; Слимин Я. А. Теория модальностей в современной логике. В кн.: Логическая семантика и модальная логика. М., 1967; Зиновьев А. А. Очерк многозначной логики. В кн.: Проблемы логики и теории познания. М., 1968; Неклассическая логика. М., 1970; Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 152—160, 194—195].

Л. Л. Максимова.

ЛОГІКО-МАТЕМАТИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ — формалізація математичної (або логічної) аксіоматичної теорії. Л.-м. ч. задають мовою логіко-математичною, списком постулатів (аксіом і правил виведення) і здебільшого забезпечують *семантикою*. Істотними рисами, якими Л.-м. ч. відрізняються від аксіоматичних теорій традиційної математики, є перехід від розмовної мови до точної формалізованої мови і виявлення використовуваних теорією логічних засобів за допомогою повного переліку всіх аксіом і всіх правил, що дають можливість виводити одно твердження з другого. Мова Л.-м. ч. і перелік його постулатів становлять синтаксис. Осн. одиниця мови Л.-м. ч.— формула, що її інтерпретують як висловлювання або як висловлювальну ф-цію (якщо формула містить вільні змінні). Осн. поняття теорії Л.-м. ч.— поняття виведення (з гіпотез). Формула A (або *секвенція* — для секвенціальних числень,— див. *Генцена формальні системи*), що не є аксіомою,— це виведення ф-ли A із списку гіпотез A. Аксіома є своє власне виведення з пустого списку гіпотез. Якщо $D_1, \ldots, D_n$ — виведення ф-л $A_1, \ldots, A_n$, з списків $C_1, \ldots, C_n$ і B одержується з $A_1, \ldots, A_n$ за одним з правил розглядуваного Л.-м. ч., то $\{D_1, \ldots, D_n, B\}$ є виведення A з списку $C_1 \cup \ldots \cup C_n$. Ф-ла є вивідною, якщо є її виведення з пустого списку припущень. За мовою Л.-м. ч. класифікують на числення першого й вищих порядків: числення 1-го порядку в свою чергу поділяють на кванторні й безкванторні. Найбільшим поділом Л.-м. ч. за семантичною ознакою є поділ на класичні й некласичні *числення*. Класичні числення містять (у тій чи іншій формі) постулат, який виражає в інтерпретації, що будь-яке висловлювання або істинне, або хибне. Здебільшого таким постулатом є *виключеного третього закон* $A \vee \neg A$ або правило розгляду випадків: з $A \to B$, $\neg A \to B$ вивести B. Часто некласичними вважають і ті логіки, в яких є нетрадиційні логічні зв'язки [напр., модальні числення зі зв'язками $\Box$ (необхідно) і $\Diamond$ (можливо)], навіть якщо в них постульовано закон виключеного третього.

Два Л.-м. ч. наз. рівнооб'ємними (еквівалентними), якщо збігаються множини об'єктів, що в них вивідні. Іноді рівнооб'ємність розуміють ширше: досить, щоб збігалися множини вивідних об'єктів спец. виду. Так, порівнюючи числення предикатів, іноді обмежуються розглядом чистих ф-л (до яких ніяка змінна не входить ні вільно, ні зв'язано), а порівнюючи генценівські числення — розглядом секвенцій тільки виду $\to A$ (тобто, по суті, формул). Часто розглядають множину не тільки вивідних ф-л, а й вивідних (похідних) правил: правило [множина ($n + 1$)-членних систем формул $A_1, \ldots, A_n / B$, які наз. застосуваннями цього правила; $A_1, \ldots, A_n$— засновки; B — висновок] є похідним у Л.-м. ч., якщо висновок кожного його

застосування є вивідним з його засновків. Від похідних слід відрізняти допустимі правила, приєднання яких не змінює обсягу вивідних ф-л: правило підстановки замість пропозиційної змінної допустиме в класичному *численні висловлювань* (сформульованому з використанням схем аксіом), але не похідне в ньому. Л.-м. ч. поділяють на логічні й власне логіко-математичні (прикладні).

Логічні числення грунтуються на логіч. мовах; поняття ф-ли, вивідної в логіч. численні, є уточненням і формалізацією поняття твердження, істинного через свою логічну форму, незалежно від тлумачення символів понять та відношень, що входять у нього. Приклади: класичне числення висловлювань, числення предикатів та ін.

Числення висловлювань — це логіч. числення, в яких задано правила оперування з пропозиційними логіч. зв'язками (див. *Логічні операції*), але не передбачено правил оперування з кванторами ($\forall$, $\exists$) і предметними змінними, хоч такі символи й можуть бути в мові числення. Постулати найчастіше поділяють на групи, які відповідають оперуванню зі зв'язкою : її введенню (доведенню ф-л, які містять зв'язку) і виключенню (використанню вже доведених ф-л, які містять зв'язку). Приклади: правило &-введення $\Gamma \to A$; $\Gamma \to B \vdash \Gamma \to A \,\&\, B$; аксіома &-введення $(\gamma \supset a) \supset ((\gamma \supset b) \supset (\gamma \supset a \,\&\, b))$; правила &-виключення $\Gamma \to A \,\&\, B \vdash \Gamma \to A$; $\Gamma \to A \,\&\, B \vdash \Gamma \to B$. Аксіоми &-виключення одержують з правил, замінивши $\vdash$ на $\supset$

З некласичних числень найчастіше згадуються багатозначні логіки й конструктивне (інтуїціоністське) числення висловлювань (див. *Логіка конструктивна*), аксіоматику якого одержують виключенням схеми $A \vee \neg A$ (або $\neg\neg A \to A$) з аксіоматики класичного числення висловлювань.

Важливим методом дослідження структури числення висловлювань є використання матриць — скінченних таблиць для зв'язок числення, які аналогічні звичайним таблицям для *булевих функцій*, але мають, можливо, кілька виділених значень (що відповідають значенню «істина»). Формула загальнозначуща на матриці, якщо за будь-яких комбінацій значень пропозиційних змінних вона набуває одного з виділених значень; формула спростовна, якщо вона не загальнозначуща. Матриця M коректна для числення, якщо всі вивідні формули загальнозначущі на M. Числення наз. фінітно апроксимовним, якщо є послідовність M_n матриць, які є коректними для цього числення і такими, що будь-яка невивідна ф-ла спростовується на одній з матриць цієї послідовності. Для фінітно апроксимовного числення розв'язною є проблема розпізнавання вивідних ф-л: щоб дізнатися, чи вивідною є формула A, слід розгорнути процес породження формул з аксіом за правилами виведення і процес пошуку спростування A на матрицях з послідовності M_n. Один з цих процесів перерветься через скінченне число кроків і дасть шукану відповідь. Матриця M адекватна для певного числення, коли для будь-якої ф-ли загальнозначущість на M є еквівалентною її вивідності. Звичайна булева матриця адекватна для класичного числення висловлювань; аналогічно цьому багатозначні матриці адекватні для багатозначних числень висловлювань. Для решти числень висловлювань адекватні матриці звичайно неможливі.

Числення предикатів (вузьке) одержують звичайно з відповідного числення висловлювань, розширюючи мову й додаючи аксіоми $\forall xA(x) \supset A(t)$ ($\forall$-виключення); $A(t) \supset \exists xA(x)$ ($\exists$-введення), де t — терм, вільний для x в $A(x)$; і з правил $C \supset A(x) \vdash C \supset \forall xA(x)$ ($\forall$-введення); $A(x) \supset C \vdash \exists xA(x) \supset C$ ($\exists$-виключення), де x не входить вільно в C (або відповідних правил для генценівського варіанта). У некласичних численнях іноді додаються окремі аксіоми, що зв'язують пропозиційні зв'язки і *квантори*. Для числень з кількома сортами змінних в аксіомах $\forall$-виключення і $\exists$-введення треба, щоб t був термом того самого сорту, що й змінна x.

Числення предикатів з рівністю — результат додавання до відповідного числення предикатів символа з аксіомами: $\forall x(x = x)$, $\forall x \forall y \forall z(x = y \supset (x = z \supset y = z))$ і $\forall x \forall y(x = y \supset (A(x) \supset A(y)))$ для будь-якої формули A.

Прикладні числення звичайно являють собою формалізацію теорії деяких функцій і предикатів. Специфічні (тобто нелогічні) аксіоми виражають властивості цих ф-цій і предикатів, а логіч. апарат (за винятком безкванторного випадку) — відповідне числення предикатів (з рівністю, якщо вона входить у мову розглядуваної системи). Безкванторні прикладні числення або забезпечують логіч. апаратом числення висловлювань (найчастіше класичного, бо осн. предикати розв'язні; див. *Алгоритмів теорія*), або оформлюють як числення рівностей (якщо єдиним предикатом є рівність). За аксіоми тоді вважають визначальні рівності розглядуваних ф-цій (напр., $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$), а правила виведення формалізують, по-перше, осн. властивості рівності (рефлексивність, симетричність, транзитивність, можливість заміни одного з рівних об'єктів іншим); по-друге, міркування методом матем. індукції [найчастіше за зразком: «з $f(0) = g(0)$, $f(x') = h(x, f(x))$, $g(x') = h(x, g(x))$ можна вивести $f(x) = g(x)$» — правило ототожнювання ф-цій, що визначаються тією самою примітивною рекурсією]; по-третє, міркування, що відповідають $\forall$-виключенню: «з $A(x)$ можна вивести $A(t)$» (правило підстановки замість вільної предметної змінної).

Прикладними численнями є, напр., примітивно рекурсивна арифметика (безкванторне прикладне числення), *арифметика формаль-*

на, аксіоматичні *множин теорії*, елементарна *груп теорія*, аксіоматична проективна геометрія та арифметика 2-го порядку з одномісними предикатами й кількома функціями слідування (прикладне числення 2-го порядку).

Семантика Л.-м. ч. задає інтерпретацію змінних матем. символів (символів предикатів та ф-цій) і логічних операцій. Тим самим визначають і моделі Л.-м. ч. Важлива властивість, яка є не в усіх Л.-м. ч.,— це семантична повнота: формула, істинна на всіх моделях, є вивідною. Семантично повними виявляються класичне числення висловлювань, класичне *числення предикатів вузьке* тощо. Дедуктивна повнота означає, що кожна формула A без вільних змінних вивідна або спростовна (тобто вивідна $\neg A$). З дедуктивної повноти Л.-м. ч. випливає розв'язність проблеми вивідності — існування алгоритму, який дає змогу з кожної формули дізнатися, вивідна вона чи ні. Найважливішим дедуктивно повним Л.-м. ч. є теорія дійсно замкнутих полів (система Тарського). За *Геделя теоремою про неповноту* дедуктивно повні теорії трапляються рідко; будь-яке Л.-м. ч., що містить якийсь досить вузький фрагмент арифметики, дедуктивно (й семантично) неповне. Для ще ширшого класу Л.-м. ч. (що включає числення предикатів, формалізовану арифметику тощо) проблема вивідності нерозв'язна (теорема Черча).

Питання внутр. структури Л.-м. ч.— несуперечливість, незалежність окремих постулатів, існування відокремлених аксіоматик (тобто таких, що будь-яка вивідна формула A має виведення, в якому використовуються постулати тільки для символів, що входять в A і, можливо, й для імплікації), існування інтерпретацій одних Л.-м. ч. в інших і т. д.— досліджуються в *доведень теорії*.

Літ.: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959; Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Карри Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969. [бібліогр. с. 518—547]. *Г. Є. Мінц.*

ЛОГІ́ЧНА РОЗПІЗНАВА́ЛЬНА СИСТЕ́МА — *розпізнавальна система*, в якій сигнали, що описують об'єкти розпізнавання, являють собою набори логічних змінних, а кожний клас об'єктів визначається якоюсь логічною (булевою) функцією від цих змінних. Фактичне значення (1 або 0) кожної зі змінних, що входять у сигнал, означає присутність або відсутність однієї з ознак, яка характеризує розпізнаваний об'єкт. Л. р. с. відносить об'єкт до класу, для якого відповідна логічна ф-ція дорівнює 1, якщо при цьому решта функцій дорівнює 0. У противному разі відбувається *відмова від розпізнавання* або зазначається не один, а кілька класів, до яких може належати об'єкт. Л. р. с. використовують, розв'язуючи деякі застосовні задачі *розпізнавання образів*, зокрема, в багатьох *читаючих автоматах*. Придатні для цього ознаки й функції той, хто розробляє Л. р. с., звичайно вибирає вручну, на інтуїтивному рівні, рідше — на основі автоматичного чи автоматизованого відбору з-поміж багатьох ознак та функцій, що генеруються випадково на ЕОМ. За приклад використання Л. р. с. можуть бути читаючі автомати амер. фірми Ланді — Фаррінгтон, призначені для читання машинописних знаків стилізованого шрифту «Селфчек». За ознаки в них правлять відрізки прямих ліній, з яких складено знаки шрифту: ГВ, ГС, ГН, КВЛ, КВП, КНЛ, КНП, ДЛ, ДП. Тут — Г — горизонтальний, К — короткий вертикальний, Д — довгий вертикальний, В — верхній, Н — нижній, С — середній, П — правий, Л — лівий. Логічні функції, які визначають класи, мають такий вигляд:

для цифри 0:

$$\text{ГВ} \cdot \overline{\text{ГС}} \cdot \text{ГН} \cdot \text{ДЛ} \cdot \text{ДП};$$

для цифри 1:

$$\overline{\text{ГВ}} \cdot \overline{\text{ГС}} \cdot \text{ГН} \cdot \overline{\text{КВЛ}} \cdot \overline{\text{КНЛ}} \cdot \text{ДП};$$

для цифри 2:

$$\text{ГВ} \cdot \text{ГС} \cdot \text{ГН} \cdot \overline{\text{КВЛ}} \cdot \text{КВП} \cdot \text{КНЛ} \cdot \overline{\text{КНП}} \cdot \overline{\text{ДЛ}} \cdot \overline{\text{ДП}}$$

і т. д. У зазначених логічних ф-ціях точка означає логічне множення, риска вгорі — логічне заперечення. Якщо в розпізнаваному сигналі змінні ГВ, ГС, ГН, КВП та КНЛ дорівнюють 1, а змінні КВЛ, КНП, ДЛ та ДП дорівнюють 0», то відповідний знак буде розпізнано як цифру 2. *Г. Л. Гімельфарб.*

ЛОГІ́ЧНЕ ПРОЕКТУВА́ННЯ ЦОМ — один з етапів проектування ЦОМ. Див. *Автоматизація проектування ЦОМ*.

ЛОГІ́ЧНИЙ ЕЛЕМЕ́НТ АОМ — елемент, який використовують для вибору й комутації змінних у схемі електричного моделювання і для формування команд перемикання в схемі логічного керування шуканням розв'язку. Щоб реалізувати найпростіші логіч. операції, неперервного вибору макс. або мінім. із кількох змінних, використовують пасивні резистивно-діодні кола, аналогічні схемам збігу ЦОМ. Нелінійні ф-ції типу сигнатур, які використовують в АОМ для виконання логіч. операцій порівнювання й умовного переходу, реалізують за допомогою спец. схем з релейною характеристикою. Вихідна напруга такої схеми може набувати двоє певних значень і щоразу стрибкоподібно змінюється, коли змінюється знак суми вхідних сигналів, тобто схема здійснює елементарне перетворення аналогових сигналів на цифрові команди, які можуть використовуватися для керування ключами, що забезпечують зміну структури моделюючого кола. В *гібридних обчислювальних машинах* набір схем з релейною характеристикою становить блок сигнатур, який формує вхідні команди цифрового керування з неперервних сигналів аналогового операційного пристрою. За найпростіший формувач цифрових керуючих команд може правити тригер Шмідта, напруга на виході якого змінюється, коли вхідний сигнал до-

сягає встановленого значення. Поріг спрацьовування такої схеми — 0,15—0,3 *в.*

При моделюванні різних процесів та систем на звичайних АОМ, а також на АОМ з періодизацією розв'язування широко використовують аналогові компаратори, побудовані на базі типових розв'язувальних підсилювачів. Аналоговий компаратор складається з підсилювача постійного струму з великим коеф. підсилення і з обмежувачами рівня в колі зворотного зв'язку та резисторного пристрою порівнювання вхідних сигналів. Точність

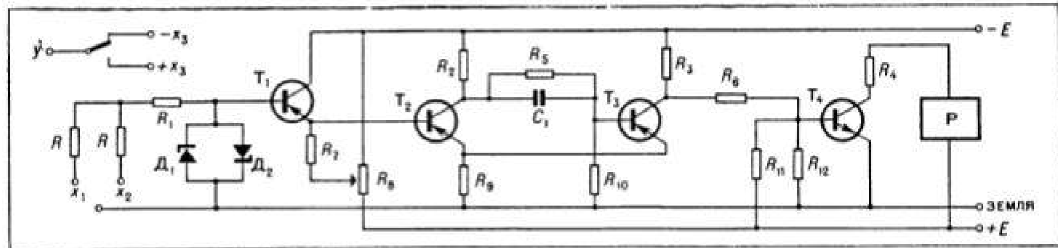


Схема блока операційного реле.

виконання такою схемою операції порівняння без особливих труднощів може бути доведена до 0,01—0,02 *в.* Л. е. АОМ наз. також спец. блоки операційних реле, які використовують для перемикання в заданих місцях моделюючого кола. До складу блока входять схема порівнювання, формувач та виконавчий елемент, який спрацьовує, коли вхідна величина досягає заданого рівня. На мал. наведено схему блока операційного реле, що його використовують у деяких вітчизняних АОМ. Входи та виходи блока виведені на *набірне поле,* де оператор відповідною комутацією реалізує залежності $y = x_3 \operatorname{sign}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1 + \operatorname{sign}(x_1 + x_2)}{2} x_3$ та інші.

Літ.: Ушаков В. Б. [та ін.]. Электронная нелинейная аналоговая вычислительная машина МН -14. М., 1965; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 1—2. М., 1967—68 [бібліогр. ч. 1, с. 453—456].

Ю. П. Космач.

ЛОГІЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ ЦОМ — технічний пристрій для реалізації елементарної логічної функції, який має зовнішні виводи для приймання й видавання сигналів, що відповідають аргументам і значенню функції. Інформаційними сигналами сучасних Л. е. ЦОМ в основному служать дискретні значення напруги, струму тощо. Такі Л. е. ЦОМ наз. **дискретними**, або **цифровими**. Для спрощення тех. реалізації більшість дискретних Л. е. ЦОМ виконано як двопозиційні, при цьому один із станів позначають «0», другий «1». Проте застосовують і багатопозиційні дискретні Л. е. ЦОМ (див. *Багатозначні схеми*). Л. е. розрізняють, в основному, за функціональним призначенням, за способом подавання інформації та способом зв'язку між ними, а також за використовуваними фіз. явищами й характерними компонентами, з яких побудовано Л. е. Відповідно до цих ознак нижче розглянуто осн. типи цифрових двійкових Л. е.

Найпростішими функціональними типами Л. е. є схеми збігу, збірні схеми та інвертори, які реалізують *перемикальні функції* найпоширенішої функціонально повної системи (відповідно *кон'юнкцію, диз'юнкцію* та інверсію). Зазначені типи Л. е. найчастіше виконують у вигляді стандартних поєднань, напр., для реалізації універсальних Л. е. з ф-ціями $\overline{X \vee Y}$, $\overline{X \cdot Y}$, $\overline{X \cdot Y \vee Z \quad U}$ й т. ін. (див. *Дискретних елементів система*).

Набули розвитку й порогові Л. е., які утворюють «1» на виході у випадку, коли алгебрична сума сигналів на їхніх входах перевершить заданий пороговий рівень (див. *Логіка порогова*). Л. е. ЦОМ, які виконують, крім логічних функцій, і функції підсилювання вихідних сигналів, наз. **активними**, а Л. е. ЦОМ без властивостей підсилювати ці сигнали — **пасивними**. Розрізняють Л. е. ЦОМ з запам'ятовуванням (див. *Логічний затримувальний елемент*) і без запам'ятовування. В елементах без запам'ятовування відключання інформації від входу переводить елемент у початковий стан, а в елементах із запам'ятовуванням таке відключення не веде до зміни стану.

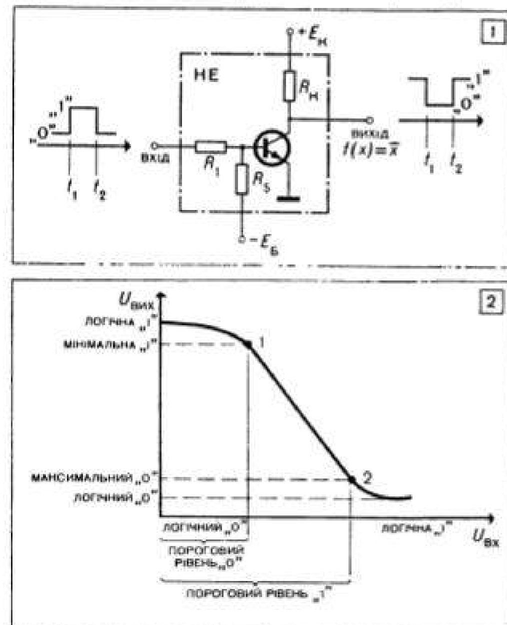
За способом представлення інформації та способом зв'язку між собою Л. е. прийнято поділяти на Л. е. потенціального типу (див. *Потенціальна елементна структура ЦОМ*), Л. е. імпульсного типу (див. *Імпульсна елементна структура*) і Л. е. потенціально-імпульсного типу (див. *Потенціально-імпульсна елементна структура*).

Залежно від використовуваних фіз. явищ і компонентів, Л. е. поділяють на напівпровідникові (діодні, транзисторні, діодно-транзисторні та ін.); магнітнонапівпровідникові (феритнодіодні, феритнотранзисторні); електромеханічні (реле і контактори); Л. е. на вакуумних або наповнених газом лампах та ін., напр., оптичні, кріотронні й хімотронні. Найпоширеніші — напівпровідникові Л. е.

Осн. характеристиками цифрового двопозиційного Л. е., який виконує задані логічні функції, є: сигнали для представлення логічного «0» й логічної «1» та завадостійкість; коеф. об'єднання за входами «І» та «АБО» й коеф. розгалуження за виходами; швидкодія; живильна напруга й розсіювана потужність; габарити і вага; вартість і надійність.

розглядувана як сукупність властивостей безвідмовності, відновлюваності та довговічності.

Коеф. об'єднання за входами Л. е. визначає його максимально можливу кількість логічних входів, а коеф. розгалуження за виходами показує, на яку кількість логічних входів можна підключати одночасно вихід цього Л. е. Для конкретного Л. е. зазначають полярність і амплітуду, а іноді й тривалість вхідних і вихідних сигналів. Типовий цифровий Л. е. (інвертор), який реалізує функцію «НЕ», подано на мал. 1. Передавальна характеристи-



1. Схема цифрового логічного елемента, який реалізує функцію «НЕ».
2. Передавальна характеристика інвертора

ка його (мал. 2) відображує залежність вихідної напруги $U_{вих}$ від вхідної напруги $U_{вх}$ і має вигляд кривої з двома прямолінійними ділянками, які відповідають рівням логічних «1» та «0», і з вузькою перехідною ділянкою. Звичайно, щоб одержати необхідну надійність і швидко досягти стійких точок логічних «0» та «1» для Л. е., задають допустимі рівні вхідних сигналів. Причому внаслідок розкиду параметрів вхідних сигналів і компонент Л. е., залежно від зміни напруги живлення й температури навколишнього середовища, функціонування Л. е. визначають сім'ї передавальних характеристик. Крайні значення вхідного сигналу, за яких вихідний сигнал Л. е. дорівнює макс. сигналові «0» або мінім. сигналові «1», наз. пороговими значеннями сигналів Л. е. (точки 1 і 2 на мал. 2). Швидкодію Л. е. характеризує середній час затримки в ньому поширення сигналу.

Конструктивно Л. е. найчастіше виконують в окремих корпусах або в одному корпусі розміщують кілька незалежних Л. е. Відомі й варіанти з розміщенням одного Л. е. в кількох типізованих корпусах.

Цифрові Л. е. набули особливого поширення у зв'язку з розвитком цифрових електронних *обчислювальних машин*. Л. е. 1-го покоління будували на електронних лампах (підключених провідниками до опорів, конденсаторів та індуктивностей), у машинах 2-го покоління — на транзисторах. А ці, коли їхні можливості підвищувати осн. характеристики Л. е. з підключеними радіодеталями вичерпалися, поступилися місцем перед мікроелектронними *інтегральними схемами* (у машинах 3-го і 4-го поколінь). Саме інтегральні схеми забезпечують найбільші можливості підвищувати швидкодію й надійність і зменшувати вартість, вагу й габарити Л. е. та споживання ними енергії. Дуже перспективним напрямом поліпшення характеристик Л. е. вважається використання можливостей квантовооптичних приладів типу лазерів (у машинах 5-го покоління). Див. також *Потенціальні логічні елементи, Мікроелектронна елементна база обчислювальної техніки.* *Е. Г. Комухаєв.*

ЛОГІЧНИЙ ЗАТРИМУВАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ — елемент, у якому здійснюється строго фіксована в часі затримка між надходженням вхідної інформації та видаванням інформації на виході. Цього домагаються, застосовуючи тактівну серію імпульсів (сигналів опитування), які синхронізують увесь процес перетворення інформації в схемах на Л. з. е. У функціональному відношенні Л. з. е. подібний до звичайного *логічного елемента ЦОМ*. Як правило, Л. з. е. виконують на феритових осердях. Див. *Елементні структури на логічних затримувальних елементах.* *Г. І. Корнієнко.*

ЛОГІЧНИХ ВИРАЗІВ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ — логічні вирази (формули) спеціального вигляду. В *алгебрі логіки* розрізняють дві нормальні форми — диз'юнктивну й кон'юнктивну. Обидві ці форми — це формули, в яких із знаків *логічних операцій* є лише знаки &, $\vee$ та $^{-}$, причому операція заперечення стосується тільки окремих змінних. Елементарною кон'юнкцією наз. кон'юнкцію певної кількості змінних або заперечень їх, таку, що кожна змінна трапляється в ній не більше одного разу. Аналогічно визначають елементарну *диз'юнкцію*, напр., $x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3$ є елементарною кон'юнкцією, а $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$ — елементарною диз'юнкцією. Диз'юнктивною нормальною формою наз. диз'юнкцію певної кількості елементарних кон'юнкцій, узятих без повторень, і аналогічно, кон'юнктивною нормальною формою наз. кон'юнкцію певної кількості елементарних диз'юнкцій. Напр., формула

$$(x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3) \vee (\overline{x}_1 \& x_2)$$

є диз'юнктивною нормальною формою, формула

$$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \& (\overline{x}_1 \vee x_2) \& (x_2 \vee x_3) \text{ —}$$

кон'юнктивною нормальною формою, а формула

$$\overline{(x_1 \& \overline{x}_2 \vee x_3)} \& \overline{x}_2 \text{ —}$$

не є ні кон'юнктивною, ні диз'юнктивною нормальною формою.

У логіці предикатів застосовують ще й пренексні нормальні форми та нормальні форми Сколема. Формулу наз. пренексною нормальною формою, якщо всі квантори, які трапляються в ній, виписано спереду, а підкванторна частина має вигляд диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми, напр., $\forall x \exists y \exists z \forall u\ [(P(x, y) \& \overline{Q(x)}) \vee \vee \overline{(P(y, z)} \& Q(u))]$. Для кожної формули алгебри логіки та логіки предикатів існує еквівалентна їй (тобто така, що набуває однакових із нею значень при однакових значеннях змінних) нормальна форма. Формулу наз. нормальною формою Сколема, якщо вона має вигляд пренексної нормальної форми і всі квантори існування, якщо вони є, передують усім кванторам загальності. В логіці предикатів не для кожної ф-ли існує еквівалентна нормальна форма Сколема, але для будь-якої ф-ли існує дедуктивно еквівалентна нормальна форма Сколема. Для числення предикатів поняття «еквівалентні формули» та «дедуктивно еквівалентні формули» не рівнозначні. Дві ф-ли $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ наз. дедуктивно еквівалентними, якщо з аксіом числення предикатів і формули $\mathfrak{A}$ за допомогою правил виведення можна вивести ф-лу $\mathfrak{B}$ і, навпаки, з аксіом та формули $\mathfrak{B}$ можна вивести ф-лу $\mathfrak{A}$. Очевидно, що еквівалентні ф-ли є дедуктивно еквівалентними, але не навпаки. Л. в. н. ф. зручно використовувати при постановці та розв'язуванні різних проблем *логіки математичної* та її застосувань.

Літ.: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959. *М. І. Кратко.*

ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ — операції, за допомогою яких з речень тієї або іншої мови утворюють нові вирази цієї мови. До Л. о. належать логічні зв'язки, квантори, оператор дескрипції, оператор абстракції та деякі інші оператори. Логічні зв'язки — це Л. о. над висловлюваннями, розглядуваними як одне ціле, не беручи до уваги їхньої суб'єктно-предикатної структури. У формалізованих мовах логічні зв'язки — це формалізація сполучників і сполучних слів «і», «або», «якщо ..., то», «тоді і тільки тоді», частки «не» тощо, які вживають у звичайних мовах. Різні підходи до формалізації змісту цих сполучних слів спричинилися до розвитку поряд з класичною логікою і *логік некласичних*. Логічні зв'язки можуть бути одномісні (сингулярні), двомісні (бінарні), тримісні (тернарні) та інші — залежно від кількості висловлювань, «зв'язаних» даною зв'язкою. У формальних численнях ці зв'язки задають або за допомогою аксіом в аксіоматичних численнях (див. *Числення висловлювань*), або за допомогою правил виведення — в натуральних численнях (див. *Генцена формальні системи*). В *алгебрі логіки* їх розглядають як алгебр. операції на множині з двох значень: «0» і «1». Константи «0» і «1» можна розглядати як нульмісні операції. Осн. одномісною логіч. зв'язкою є заперечення, яке позначають через $\neg$, $\bar{\ }$ (рисочка зверху) або $\sim$ і визначають рівностями: $\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$. Висловлювання $\neg X$ наз. запереченням висловлювання X. Осн. двомісні логічні зв'язки наведено в табл.

У 1-му стовпчику таблиці подано формули вигляду $X * Y$ з прийнятим позначенням для кожної зв'язки $*$, у 2-му — деякі інші зображення ф-ли, в 3-му — послідовність значень ф-ли $X * Y$ для значень пари аргументів (X, Y), які дорівнюють відповідно $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ і $(1, 1)$, у 4-му — назви зв'язки (і відповідної формули), які трапляються в логіці та її застосуваннях; у 5-му — формули з словами звичайної мови, які відповідають введеним зв'язкам. Вираз $\mathfrak{A}$, який щось стверджує про змінні об'єкти $x_1, \ldots, x_n$, наз. висловлювальною формою з цими вільними входженнями змінних. Ця форма задає висловлювальну ф-цію (*предикат*) від аргументів $x_1, \ldots, x_n$, тобто функцію зі значеннями «істинне» чи «хибне». Напр., «x — є просте число», «$x > y$ і $x^2 + y^2 = z$».

Застосування квантора спільності, квантора існування, оператора дескрипції, оператора абстракції, ε-оператора до виразу $\mathfrak{A}$ позначають відповідно через

$$(\forall x)\,\mathfrak{A},\quad (\exists x)\mathfrak{A},\quad (\iota x)\mathfrak{A},\quad (\lambda x)\,\mathfrak{A},\quad \varepsilon_x\mathfrak{A}. \qquad (1)$$

(де замість x може стояти й будь-яка інша змінна). Будь-яке входження змінної x у виразі (1) наз. входженням, зв'язаним відповідним оператором (якщо воно не було вже зв'язане певним оператором в $\mathfrak{A}$), а вираз $\mathfrak{A}$ наз. сферою дії даного оператора. Входження, не зв'язане жодним оператором, наз. вільним. Форма задає функцію лише від тих змінних, у яких є вільні входження в цю форму.

Квантори — це логічні оператори, які дають змогу формувати висловлювання загальності й існування і переводять одну висловлювальну форму в іншу (здебільшого з меншим числом входжень вільних змінних) чи у висловлювання. Якщо у висловлювальній формі $\mathfrak{A}(x)$ є вільні входження змінної x, то вираз $(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$ істинний у довільній області D тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{A}(x)$ є істинним для кожного елемента $x \in D$, а вираз $(\exists x)\,\mathfrak{A}$ є істинним у D тоді і тільки тоді, якщо існує таке $x \in D$, що істинним є $\mathfrak{A}(x)$. Очевидно, що зв'язування квантором змінної, усі входження якої вже зв'язані, або змінної, яка взагалі не входить до формули, не змінює змісту виразу. Обидва квантори пов'язані між собою такою еквівалентністю:

$\neg(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\mathfrak{A}(x)$. Інші позначення квантора $(\forall x: (x), (Ax), \bigcap_x, \bigwedge_x, \Pi_x$; квантора $(\exists x)$: $(\mathrm{E}x), \bigcup_x, \bigvee_x, \Sigma_x$. Окрім цих кванторів використовують і т. з. обмежені квантори $(\forall x_{\mathfrak{A}(x)})$, $(\exists x_{\mathfrak{A}(x)})$, пов'язані з звичайними кванторами такими еквівалентностями:

$$(\forall x_{\mathfrak{A}(x)})\ \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow (\forall x)(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)),$$

$$(\exists x_{\mathfrak{A}(x)}) \cdot \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow (\exists x)(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(x)).$$

Часто вживаним є квантор єдиності $(\exists !\, x)\, \mathfrak{A}(x)$ («існує єдиний x, такий, що $\mathfrak{A}(x)$»), але й його можна виразити через квантори $(\forall x)$ і $(\exists x)$ так:

$$(\exists !\, x)\, \mathfrak{A}(x) \leftrightarrow (\exists x)\, \mathfrak{A}(x) \,\&\, (\forall y)(\forall z)(\mathfrak{A}(y) \,\&\, \&\, \mathfrak{A}(z) \to y = z).$$

входженнями. Цей терм задає певну функцію від $x_1, \ldots, x_n$. Напр., «єдине ціле число x, більше за y і менше за $y + 2$» (це форма з єдиною змінною y, яка має вільні входження в цю форму), «$\sin(x + y)$» тощо. Оператор дескрипції (відповідно оператор абстракції) переводить висловлювальну (відповідно предметну і висловлювальну) форму в предметну, здебільшого з меншим числом змінних, які мають вільні входження, або ж у назву певного предмета. Якщо $\mathfrak{B}(x, y_1, \ldots, y_n)$ — предметна (відповідно висловлювальна) форма, в якій $x, y_1, \ldots, y_n$ — список усіх змінних, що мають вільні входження в $\mathfrak{B}(x, y_1, \ldots, y_n)$, то $(\lambda x)(\mathfrak{B}(x, y_1, \ldots, y_n))$ означає при заданих значеннях $y_1^0, \ldots, y_n^0$ змінних $y_1, \ldots, y_n$ ту функцію (відповідно той предикат) від аргументу x, яка (який) кожному значенню x_0 аргументу x ставить у відповідність значення виразу $\mathfrak{B}(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$. Отже, вираз

Позначення операції	Інші позначення	Таблиця істинності	Назви операцій	Як читати
$X \,\&\, Y$	$X \wedge Y$ $X \cdot Y$ XY	0001	кон'юнкція, логічний добуток, логічне «і», функція збігу	X і Y
$X \vee Y$		0111	диз'юнкція, логічна сума, логічне «або», функція поділу	X або Y або (X і Y)
$X \to Y$	$X \supset Y$	1101	матеріальна імплікація	якщо X, то Y; з X випливає Y; X імплікує Y
$X \leftrightarrow Y$	$X \equiv Y$ $X \sim Y$	1001	еквівалентність, функція рівнозначності	X тоді і лише тоді, коли Y; X еквівалентне Y
$X + Y$	$X \dot{\vee} Y$ $\neg(X \leftrightarrow Y)$ $\neg(X \equiv Y)$	0110	сума за модулем 2, розподільна диз'юнкція, заперечення еквівалентності, функція нерівнозначності	або X, або Y; X не еквівалентне Y
$X \mid Y$	$\neg(X \,\&\, Y)$ $\overline{X \wedge Y}$	1110	Шеффера штрих, заперечення кон'юнкції, антикон'юнкція	X і Y несумісні; неправильно, що X і Y
$X \downarrow Y$	$\neg(X \vee Y)$ $\overline{X \vee Y}$	1000	Пірса стрілка, заперечення диз'юнкції, антидиз'юнкція, функція Вебба	ні X, ні Y
$X \nrightarrow Y$	$X \not\supset Y$ $\neg(X \to Y)$ $\neg(X \supset Y)$	0010	заперечення матеріальної імплікації, матеріальна антиімплікація	X, але не Y; неправильно, що з X випливає Y
$X \leftarrow Y$	$X \subset Y$ $Y \to X$ $Y \supset X$	1011	зворотна імплікація	X, якщо Y; якщо Y, то X; з Y випливає X
$X \nleftarrow Y$	$X \not\subset Y$ $\neg(Y \to X)$ $\neg(Y \supset X)$	0100	заперечення зворотної імплікації, зворотна антиімплікація	не X, але Y; неправильно, що з Y випливає X

В розширеному численні предикатів кванторами можна зв'язувати й предикатні змінні, напр., $(\forall F)(\exists x)(F(x) \vee \neg(x))$. У формальних теоріях квантори визначають за допомогою аксіом і правил виведення.

Вираз $\mathfrak{A}$, який являє собою складену назву і в якому $x_1, \ldots, x_n$ — список усіх змінних, які мають вільне входження $\mathfrak{A}$, наз. предметною формою (або термом) з цими вільними

$(\lambda x)\,\mathfrak{B}\,(x, y_1, \ldots, y_n)$ являє собою предметну форму, що задає функцію від $y_1, \ldots, y_n$, яка набуває як своїх значень певних функцій (відповідно деяких предикатів), а саме: для значень $y_1^0, \ldots, y_n^0$ аргументів $y_1, \ldots, y_n$ її значенням є функція (відповідно предикат), що задається виразом $(\lambda x)\,\mathfrak{B}\,(x, y_1^0, \ldots, y_n^0)$. У формалізованих мовах, які містять оператор абстракції, здебільшого є правило перетворення виразу $((\lambda x)\,\mathfrak{B}\,(x))\,a$ на вираз $\mathfrak{B}\,(a)$, який одержують, замінивши всі вільні входження змінної x у $\mathfrak{B}\,(x)$ на a. Відзначимо, що $(\lambda x)\,(\lambda y)\,\mathfrak{B} \neq (\lambda y)\,(\lambda x)\,\mathfrak{B}$. Вираз $(\lambda x)2$ називає одномісну функцію-константу 2. Вираз $(\lambda x) \sin (y + z)$ є термом з вільними входженнями змінних y, z; при будь-яких числових значеннях змінних y і z, напр., при $y = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$ цей терм називає одномісну функцію-константу, в цьому прикладі — функцію, яка набуває значення $\sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ для кожного числа x. Амер. математик А. Черч (н. 1903) показав, що будь-яку загальнорекурсивну ф-цію (див. *Рекурсивні функції*) можна спеціальним способом визначити за допомогою певного виразу, утвореного з змінних, за допомогою двох операцій: зчленування й абстракції.

Якщо $\mathfrak{A}\,(x, y_1, \ldots, y_n)$ — висловлювальна форма, в якої $x, y_1, \ldots, y_n$ — список усіх змінних, які мають вільні входження в $\mathfrak{A}\,(x, y_1, \ldots, y_n)$, і якщо для $y_1^0, \ldots, y_n^0$ існує єдиний x, такий, що є істинним $\mathfrak{A}\,(x, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ (тобто виконується умова єдиності), то $(\iota x)\mathfrak{A}\,(x, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ означає той єдиний x, для якого є істинним $\mathfrak{A}\,(x, y_1, \ldots, y_n)$. Логіки неоднаково інтерпретують оператор дескрипції для тих випадків, коли зазначена вище умова єдиності не задовольняється. В деяких формальних системах використання оператора дескрипції допускається лише після того, як доведено умову єдиності. За такого підходу може виявитися нерозв'язною проблема, як визначити, які з виразів мови є формулами. Інші логіки обирають раз назавжди визначений об'єкт із області значень відповідних змінних, який вважають за значення результату застосування оператора дескрипції для випадку, коли не виконується умова єдиності. Таким об'єктом вважають, напр., число «0», якщо об'єктами системи є числа, або множину всіх таких x, що $\mathfrak{A}\,(x, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, або пусту множину, якщо в формальній системі немає відмінностей між об'єктами й множинами, або певну предметну сталу з виділеним для неї позначенням, напр., a^*. Якщо за такий об'єкт вважають a^*, то вираз $\mathfrak{B}\,(\iota x\,\mathfrak{A}\,(x))$ визначають як еквівалентний такому виразові:

$$(\exists y)\,[(\forall x)\quad(\mathfrak{A}(x) \leftrightarrow x = y)\ \&\ \mathfrak{B}(y)] \vee$$

$$\vee \urcorner (\exists y)\ (\forall x)\ (\mathfrak{A}\,(x) \leftrightarrow x = y)\ \&\ \mathfrak{B}\,(a^*)]$$

(«або існує такий y, що $\mathfrak{B}\,(y)$ і y — єдиний предмет, для якого $\mathfrak{A}\,(y)$; або такого предмета нема і $\mathfrak{B}\,(a^*)$»). Оператори дескрипції і абстракції можна використовувати не тільки з предметними змінними, але (у відповідних системах) і з предикатними та функціональними. У формальних системах, побудованих на численні предикатів, і ті й ті оператори можна елімінувати (виключити).

З метою обгрунтування математики, нім. математик Д. Гільберт (1862—1943) побудував числення з ε-оператором, який робить зайвим квантори. Для висловлювальної форми $\mathfrak{A}\,(x)$ вираз $\varepsilon_x\,\mathfrak{A}\,(x)$ приблизно означає, «якийсь об'єкт x, що задовольняє умову $\mathfrak{A}\,(x)$, якщо такий існує, і якийсь довільний об'єкт у противному разі». В численнях з ε-оператором є аксіомна схема $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}\,(\varepsilon_x\,\mathfrak{A}\,(x))$. Числення, в яких поєднано ε-оператор і техніку природного виведення, можуть становити певну зручність для машинного пошуку *доведень теорем на ЕОМ*.

Літ.: Карнап Р. Значение и необходимость. Пер. с англ. М., 1959; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. Foundations of set theory. Amsterdam, 1958

В. Ф. Костирко.

ЛОКАЛІЗО́ВАНІ ЗМІ́ННІ — змінні у *мовах програмування* з блоковою структурою, які описані у блоці програми і мають зміст, визначений цим описуванням, лише в цьому блокові. Змінні, описані на початку блока, наз. локалізованими в блоці (див. *Глобальні змінні*). Ці змінні набувають значення на вході у блок і втрачають його на виході. Виняток становлять власні змінні (див. *АЛГОЛ-60*). Л. з. дають змогу використовувати у мовах програмування з блоковою структурою в різних блоках ті самі *ідентифікатори*, і, отже, складати блоки незалежно один від одного, а також дають змогу реалізувати динамічний принцип *пам'яті розподілу*.

А. І. Халілов.

ЛОКА́ЛЬНОГО КОДУВА́ННЯ ПРИ́НЦИП — загальний підхід до побудови методів синтезу схем, що реалізують *булеві функції* (або вектор-функції) з спеціальних класів функцій, оснований на кодуванні функцій наборами з нулів і одиниць, яке має особливі властивості. Для побудови асимптотично оптим. методу синтезу треба, щоб кодування було асимптотично оптим.: щоб довжина коду асимптотично дорівнювала (двійковому) логарифмові числа розгляданих ф-цій (від n аргументів). Кодування повинно бути локальним у тому розумінні, що для обчислювання ф-ції f на кожному конкретному наборі $\tilde{\sigma}$ значень аргументів (для «декодування») досить знати порівняно невеликий відрізок («кусок») коду. Декодування повинне здійснюватись порівняно просто. По-перше, треба, щоб порівняно просто (в розумінні складності схемної реалізації) обчислювались «координати» куска коду; напр., номер куска коду, якщо код розбито на куски однакової довжини; номер першого розряду й довжина куска, якщо куски — різної довжини. По-друге,

треба, щоб за набором $\tilde{\sigma}$, куском коду (і, може «координатами» куска коду) порівняно просто обчислювалося значення $f(\tilde{\sigma})$.

У загальному вигляді схема, побудована для $f(\tilde{x})$ відповідно до Л. к. п., складається з кількох підсхем (мал.). Підсхема A за набором $\tilde{\sigma}$ обчислює координати куска коду. Підсхема B за координатами куска коду видає частину коду (фіксованої довжини), яка містить потрібний кусок коду. Підсхема C виділяє з частини коду потрібний кусок коду. Нарешті, підсхема D обчислює $f(\tilde{\sigma})$. Звичайно підсхема C є універсальною (незалежною ні від класу F реалізовуваних ф-цій, ні від конкретної ф-ції f); підсхеми A і D не залежать від f, але залежать від F; підсхема B залежить від f; ця підсхема містить осн. частину елементів усієї схеми. Не обов'язково, щоб кодування було взаємно однозначним. У невеликій кількості додаткова інформація може міститися в підсхемі декодування D. Л. к. п. фактично зводить задачу синтезу схем до задачі кодування ф-цій, і осн. важкість задачі синтезу тепер зосереджується на цій задачі. Особливо зручний Л. к. п. у тому разі, коли схеми мають досить великі можливості (схеми з функціональних елементів, логіч. сітки й *алгоритми*).

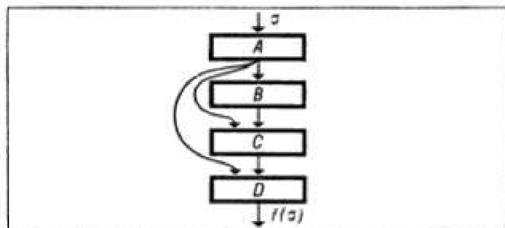


Схема обчислювання $f(x)$ за принципом локального кодування.

Приклади асимптотично оптим. локального кодування.

1. Нехай $\mathfrak{S}_n$ — клас симетричних ф-цій $f(x_1, \ldots, x_n)$. Кодом ф-ції $f(x_1, \ldots, x_n)$ є набір $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, де π_i — значення ф-ції f на (будь-якому) наборі з i одиницями.

2. Нехай $\mathfrak{R}^{n,k}$ — клас ф-цій $f(x_1, \ldots, x_n)$, які набувають значень 1 на k наборах $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_k$ значень аргументів. Якщо $\frac{\log k}{n} \to 0$, то асимптотично оптим. локальним кодом є набір $\tilde{\sigma}_1\,\tilde{\sigma}_2\,\ldots\,\tilde{\sigma}_k$ (довжини kn).

3. Нехай $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набір з нулів і одиниць, $|\tilde{\alpha}| = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 2^1 + \ldots + \alpha_n 2^{n-1}$, і $\mathfrak{M}_n$ — клас вектор-функцій $F = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, які задовольняють умову: якщо $|\tilde{\alpha}| \leqslant |\tilde{\beta}|$, то $|F(\tilde{\alpha})| \leqslant |F(\tilde{\beta})|$. Нелокальний (але асимптотично оптим.) код вектор-функції F — це набір довжини $2^{n+1} - 1$, який має 2^n нулів і $2^n - 1$ одиниць, у якому число одиниць, які стоять перед i-м нулем, дорівнює $|F(\tilde{\alpha})|$, де $|\tilde{\alpha}| = i - 1$. Нехай набір $\tilde{\pi}$ розбито на 2^k частин: $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_{2^k})$ ($\tilde{\pi}_i$ має довжину 2^{n-k+1}, крім π_{2^k}) і $\tilde{\rho}_i$ — набір довжини n такий, що $|\tilde{\rho}_i|$ є число одиниць у наборі $(\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_{i-1})$. Асимптотично оптим. локальний код для F (при $\frac{n}{2^{n-k}} \to 0$) — це набір $\tilde{\rho}_1\tilde{\pi}_1\tilde{\rho}_2\tilde{\pi}_2 \ldots \tilde{\rho}_{2^k}\tilde{\pi}_{2^k}$.

О. Б. Лупанов.

ЛОКА́ЛЬНОГО ПО́ШУКУ МЕ́ТОД — один з *оптимізації методів.*

ЛЮДИ́НА-ОПЕРА́ТОР — людина, що бере участь у керуванні об'єктами й системами і є складовим елементом *ергатичної системи.* У *системі «людина—машина»* Л.-о. може виступати як приймач і ретранслятор інформації, може аналізувати інформацію і приймати рішення, розробляти керуючі команди, здійснювати контроль справності елементів системи, програмувати роботу системи і її вузлів чи бути виконавцем тієї або іншої команди. Багатоканальністю сприйняття і передавання інформації, раціональним використанням надлишкової інформації, здатністю після певного навчання діяти в системах керування з різними функціональними й структурними схемами тощо людина вигідно відрізняється від *автомата.* Мала пропускна здатність, порівняно швидка втомлюваність, здатність відволікатися й забувати, велика залежність від зовн. впливі та інші властивості, якими людина поступається перед властивостями автоматів, визначають раціональний розподіл функцій між людиною і автоматами в керованих системах.

В. Є. Кабикін.

ЛЯПА́С — *мова програмування,* орієнтована на описування логічних задач. До таких задач належать, напр., задачі *логіки математичної, автоматів теорії, булевої алгебри, графів теорії* та *кодування теорії.* Розробили її 1966. Л.-70 являє собою розвиток мови Л., запропонованої раніше для застосування переважно в галузі логічного синтезу дискретних автомат. пристроїв. Л.-70 має три рівні. Перший з них близький до *мов машинних* і дає змогу досить повно використовувати можливості сучасних ЦОМ. Його осн. операндами є булеві вектори й матриці, над якими визначається ряд елементарних операцій. Другий рівень містить апарат для розширення мови шляхом введення нових операторів, реалізовуваних *підпрограмами,* тому Л.-70 належить до відкритих, зростаючих мов. Третій рівень містить апарат сегментування, який полегшує складання великих програм, що не вміщуються цілком в оперативній пам'яті. Мову Л.-70 покладено в основу однойменної системи програмування, осн. блоком якої є швидкодіючий *транслятор.* Усі блоки си-

стеми оформлено як підпрограми, їх можна використати при розробці нових *програм*. Систему Л.-70 реалізовано на вітчизняних обчисл. машинах «М-20», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4», «Минск-2», «М-220», «Минск-22» і «БЭСМ-6».

Літ.: Автоматизация синтеза дискретных автоматов. «Труды Сибирского физико-технического института», 1966, в. 48; Закревский А. Д. Алгоритмический язык ЛЯПАС и автоматизация синтеза дискретных автоматов. Томск, 1966 [бібліогр. с. 245—261]; Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. М., 1966; Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971 [бібліогр. с. 502—504].

А. Д. Закревський.

ЛЯПУНОВА МЕТОДИ — методи, що дають змогу якісно досліджувати деякі важливі властивості (напр., стійкість, дисипативність) розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, не відшукуючи самих розв'язків. Розробив їх 1892 рос. математик О. М. Ляпунов. Вони становлять основу теорії стійкості розв'язків звичайних дифер. рівнянь. Проблема стійкості вперше постала з практичних задач небесної механіки, але згодом виявили, що вона виникає в усіх наук. задачах, пов'язаних з вивченням руху будь-яких матеріальних систем, описуваних звичайними дифер. рівняннями. Дослідження цієї проблеми до О. М. Ляпунова стосувалися окремих випадків руху й не завжди мали достатню матем. строгість. Строгі визначення стійкості, загальну постановку задачі, а також потужні й строгі методи розв'язування її (т. з. 1-й і 2-й Л. м.) вперше запропонував О. М. Ляпунов у своїй дисертації «Загальна задача про стійкість руху».

Розглянемо систему дифер. рівнянь, яка описує рух якоїсь динамічної системи:

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

або в матричній формі

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}), \tag{1}$$

де $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ — $(n \times 1)$-матриці (вектори-стовпчики), $g_i = g_i(t, \mathbf{y})$ — деякі ф-ції незалежної змінної t (звичайно — часу) і вектора *фазових координат* системи $\mathbf{y}$, які задовольняють умови існування і єдиності розв'язків системи (1). Припустимо, що необхідно вивчити якийсь окремий, т. з. н е з б у р е н и й, рух досліджуваної динамічної системи, якому відповідає окремий розв'язок $\mathbf{y} = \mathbf{z}(t)$ системи дифер. рівнянь (1). Усі інші рухи системи, яким відповідають будь-які розв'язки $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$, наз. з б у р е н и м и рухами, а різниці $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ — з б у р е н н я м и. Підставивши в рівняння (1) $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ (припускаємо, що $\mathbf{z}$ є відомою функцією t), одержимо т. з. рівняння збуреного руху

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{2}$$

де $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{z}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{z})$.

В и з н а ч е н н я 1. Незбурений рух наз. стійким (за Ляпуновим), якщо для всякого додатного числа ε, яким би малим воно не було, знайдеться додатне число δ, таке, що для всіх збурень $\mathbf{x}(t)$ (або для всіх збурених рухів), для яких у початковий момент $t = t_0$, здійснюється нерівність

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta, \tag{3}$$

при всіх $t \geqslant t_0$ — здійснюватиметься нерівність $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, де $\|\cdot\|$ — норма вектора.

В и з н а ч е н н я 2. Якщо незбурений рух стійкий (згідно з визначенням 1) і якщо при якомусь $\Delta > 0$ для всіх збурень, які задовольняють нерівність $\|\mathbf{x}(t)\| < \Delta$, існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, то незбурений рух наз. асимптотично стійким (за Ляпуновим). Визначення 1 і 2, введені О. М. Ляпуновим, встановлюють зв'язок між поняттям стійкості й характером зміни в часі (часто кажуть — зростанням) норми $\|\mathbf{x}(t)\|$ розв'язку $\mathbf{x}(t)$ рівняння (2). Ідея 1-го Л. м. полягає в тому, що зростання $\|\mathbf{x}(t)\|$ оцінюється за шкалою зростань, заданою певним упорядкованим сімейством відомих ф-цій t. О. М. Ляпунов використав ф-ції $e^{\lambda t}$, для яких показником зростання є параметр (дійсне число) λ. Відповідно до такої шкали показник зростання розв'язків $\mathbf{x}(t)$ визначається формулою

$$\lambda = \chi(\mathbf{x}) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{x}(t)\|,$$

де символ $\overline{\lim}\, \varphi(t)$ визначає верхню границю ф-ції $\varphi(t)$. У сучас. літературі число λ наз. х а р а к т е р и с т и ч н и м п о к а з н и к о м (показником Ляпунова) розв'язку $\mathbf{x}(t)$ (сам О. М. Ляпунов користувався числом $\alpha = -\lambda$ і називав його характеристичним числом). Характеристичний показник λ є функціоналом, визначеним на множині ф-цій $\|\mathbf{x}(t)\|$, заданих на півосі (t_0, ∞). Очевидно, що, коли $\lambda > 0$, то $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty$, а якщо $\lambda < 0$, то $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Взагалі, чим більший показник λ, тим «швидше» зростає ф-ція $\|\mathbf{x}(t)\|$. О. М. Ляпунов довів ряд теорем про характеристичні показники розв'язків рівнянь (2) і про вплив на показники різних перетворень, виконуваних над цими рівняннями. 1-й Л. м. дає змогу розв'язати задачу про стійкість, якщо за виглядом правої частини рівняння (2) вдається обчислити характеристичні показники його розв'язків або, принаймні, знайти деякі оцінки їх. Найбільше досліджено цим методом лінійні системи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}, \tag{4}$$

де $\mathbf{A}(t)$ — $(n \times n)$-матриця, залежна від t. Важливі результати одержано для лінійних періодичних систем виду (4), в яких $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}(t + \omega)$, $\omega > 0$, а також для ряду інших окремих випадків. Розвиваючи 1-й Л. м.,

пізніше дослідники використали як шкалу зростань двопараметричне сімейство ф-цій, напр., $t^{\mu}e^{\lambda t}$. Ідеї 1-го Л. м. набули застосування й глибокого розвитку в працях багатьох вітчизняних та іноземних вчених.

Ідея 2-го (т. з. прямого) Л. м. сходить до відомої теореми Лагранжа про стійкість рівноваги консервативної мех. системи (1788). У цій теоремі твердилось, що стан рівноваги стійкий, якщо в ньому досягається мінімум потенціальної енергії системи. Строге доведення цієї теореми пізніше запропонував Л. Діріхле. Теорема Лагранжа — Діріхле стосується окремого випадку руху, а практично її важко використовувати через необхідність відшукувати потенціальну енергію системи, що далеко не завжди вдається зробити. Другий Л. м. є далекосяжним узагальненням ідеї Ж.-Л. Лагранжа. Для дослідження стійкості руху системи (1) О. М. Ляпунов запропонував використати спец. знаковизначені пробні ф-ції $v(t, \mathbf{x})$ (т. з. функція Ляпунова, віддалений аналог енергетичної функції Лагранжа). Факт стійкості або нестійкості було пов'язано з наявністю такої ф-ції $v(t, \mathbf{x})$, похідна якої, взята згідно з рівняннями збуреного руху, має спец. властивості. Так, напр., незбурений рух системи (1) стійкий, якщо похідна $\frac{dv(t,\mathbf{x})}{dt}$ функції Ляпунова, взята вздовж фазових траєкторій системи (2), знакопостійна й має знак, протилежний знакові $v(t, \mathbf{x})$. О. М. Ляпунов довів ряд теорем про ф-ції $v(t, \mathbf{x})$, які стали основою його 2-го методу, й за допомогою їх одержав деякі конкретні результати. Одним з найвідоміших таких результатів є строге обгрунтування методу дослідження стійкості за рівняннями 1-го наближення (метод лінеаризації). Цим методом без достатніх підстав користувалися раніше багато дослідників, проте О. М. Ляпунов показав, що в ряді випадків такий метод веде до помилкових результатів, і сформулював строгі умови, за яких до нього можна вдаватися.

Ідея 2-го Л. м. виявилася надзвичайно ефективною й плідною. Над застосуванням і подальшим розвитком цього методу працювало багато вчених. На основі 2-го Л. м. було розв'язано задачі про стійкість загалом (тобто за будь-яких збурень $\mathbf{x}(t)$) і в області, про абсолютну стійкість, про дисипативність (граничну обмеженість розв'язків), про стійкість на скінченному інтервалі часу і при постійно діючих збуреннях, про стійкість дискретних, стохастичних систем, систем із запізнюванням і з розподіленими параметрами, систем, заданих дифер. рівняннями в банаховому просторі, й багато ін. задач. Крім класичної проблеми про стійкість руху, 2-й Л. м. застосовують і в багатьох інших задачах, напр., у задачі про синтез оптим. систем автомат. керування. Л. м. є теоретичною основою розв'язування багатьох прикладних задач, у т. ч. й задач теорії автомат. керування (технічної кібернетики). Див. також *Стійкості дискретних систем теорія*, *Стійкості неперервних систем теорія*.

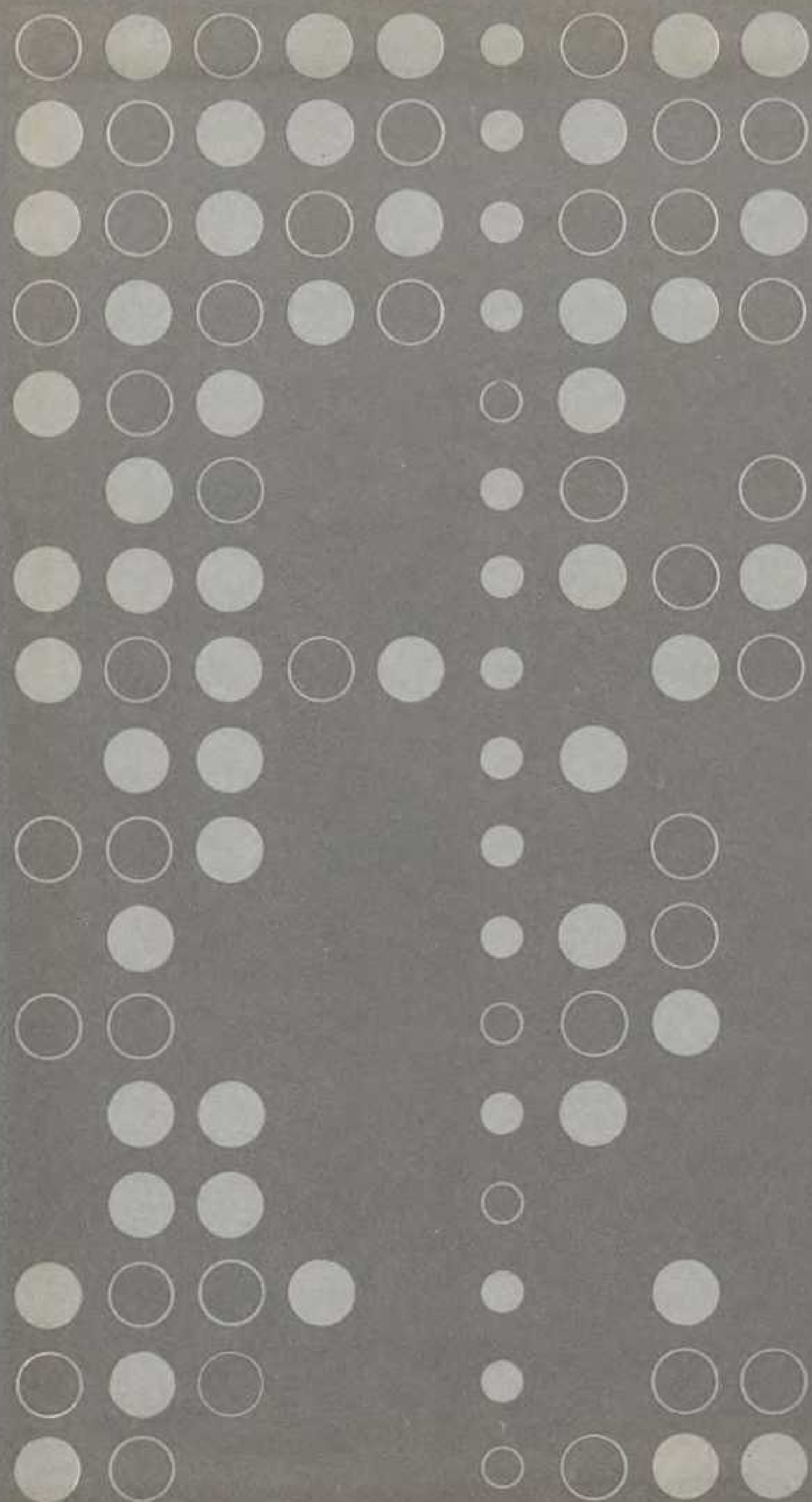
Літ.: Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., 1950; Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957 [бібліогр. с. 238—239]; Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959 [бібліогр. с. 205—211]; Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., 1965; Былов Б. Ф. [та ін.]. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966 [бібліогр. с. 558—565]; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966; Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967 [бібліогр. с. 466—469]; Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 160—161].

Ю. М. Чеховий.

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ КИБЕРНЕТИКИ. ТОМ 1 (на украинском языке)

Адреса Головної редакції Української Радянської Енциклопедії: 252650, Київ-30, ГСП, вул. Леніна, 51.

В томі вміщено: 3 вклейки офсетного друку (8 кольорових ілюстрацій), в тексті — 233 ілюстрації. Папір для тексту виготовлено на фабриці ім. Ю. Яноніса, вклейки й текстові ілюстрації — на Головному підприємстві республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР. Том здано до набору 19 січня 1973 р., підписано до друку 1 червня 1973 р.
БФ 05835. Тираж 7000. Формат 70×100 1/16. Фіз.-друк. аркушів 36,5+0,75 арк. вклейок, умовних друк. арк. 48,05; облік.-видавн. аркушів 8?,00 Ціна одного тому 4 крб 96 коп. Зам. № 145.
Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР (Київ, вул. Довженка, 3) на Київській книжковій фабриці республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР, Київ, вул. Воровського, 24.





ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

А · Л

1